

## CALCULO DE IMPEDANCIAS DINAMICAS DE CIMENTACIONES AXISIMETRICAS EM- BEBIDAS EN EL TERRENO

JOSE M. EMPERADOR ALZOLA  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE LAS PALMAS  
JOSE DOMINGUEZ ABASCAL  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE SEVILLA

Se calculan impedancias dinámicas de cimentaciones cilíndricas embebidas en el terreno haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno. Se emplean elementos axisimétricos con la solución fundamental de la carga puntual que es integrada a lo largo de la circunferencia y de los elementos rectilíneos del dominio bidimensional. Las situaciones en las que la carga no mantiene la simetría de revolución son tratadas mediante un desarrollo de Fourier en dirección circunferencial. Se calculan rigideces de cimentaciones enterradas en un medio viscoelástico homogéneo o estratificado, analizándose la influencia de la rigidez de la base rocosa sobre la impedancia, en el último de los casos. Los resultados se comparan con los de otros autores.

Abstract: Dynamic stiffnesses of embedded cylindrical foundations have been computed using the Boundary Element Method. Axisymmetric elements are used in combination with the point load fundamental solution which is integrated along the circumferential coordinate and the line elements of the 2-D domain. When the load is not axisymmetric, a Fourier expansion along the circumferential direction is used.

Stiffnesses of cylindrical foundations embedded in an uniform or layered half-space are computed. The effect of the rigidity of the bedrock is analysed. Results are compared with other authors.

### 1. INTRODUCCION

En los últimos años, se ha empleado el Método de los Elementos de Contorno para el cálculo de impedancias dinámicas de cimentaciones en diversos contextos. La primera aplicación fue presentada por DOMINGUEZ (1,78) para cimentaciones rectangular sobre suelo homogéneo. ALARCON et al. (1980) estudiaron el problema en dos dimensiones. Ambas publicaciones abordan el problema suponiendo que la excitación es armónica y presentan valores de las impedancias en función de la frecuencia. KARABALIS y BESKOS (1984) estudiaron la respuesta en el dominio del tiempo de zapatas rectangulares sobre la superficie de un semiespacio elástico, cuando son sometidas a diversas sollicitaciones. Un estudio semejante fue realizado por SPITZKOS (1984) para un modelo bidimensional.

El Método de los Elementos de Contorno resulta muy adecuado para este tipo de problemas ya que: por una parte, permite estudiar el problema con solo discretizar su superficie, con lo cual su dimensión es reducida en un orden; y por otra, los medios no acotados, como el suelo, no necesitan de ningún contorno de cierre ya que se satisfacen las condiciones de radiación y regularidad. Otros métodos numéricos, analíticos y semi-analíticos han sido empleados para este tipo de problemas y con alguno de ellos se realizarán comparaciones en esta comunicación.

Resulta claro que el estudio de problemas axisimétricos puede ser abordado ventajosamente haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno. En ellos será necesario unica-

mente discretizar una línea que marca el contorno de la sección meridiana. Su implementación para problemas estáticos fue llevada a cabo por CERMANIOIS (1975) y CRUSE (1977). Estos autores emplean una solución fundamental correspondiente a la carga anular que **SATA** expresada en términos de funciones de Legendre o integrales elípticas que hacen su integración a lo largo del contorno bastante tediosa. En el caso dinámico estacionario, la solución fundamental resulta aún más difícil de manejar ya que se expresa en función de integrales sobre una línea infinita, definiciones de Hankel. Este hecho ha conducido a que las aplicaciones dinámicas para problemas axiaimétricos sean realizadas empleando la solución fundamental tridimensional que es integrada sobre los elementos de línea en la sección meridiana y sobre toda la circunferencia (GOMEZ-LERA et al., 1985; CANO, 1985). En los trabajos previos, únicamente se empleó este método en z patas circulares sobre la superficie del suelo, lo cual permite simplificaciones. En el presente artículo, se emplea por primera vez el Método de los Elementos de Contorno en problemas dinámicos con simetría de revolución en los cuales los contornos no son exclusivamente superficies planas normales al eje z. Ello obliga a desarrollar un elemento de tipo lineal en geometría sobre la sección meridiana, que tiene cualquier inclinación. Cuando son aplicados en el cálculo de impedancias dinámicas, estos elementos permiten abordar el estudio de cimentaciones embebidas en el terreno, siempre que mantengan la simetría de revolución. La solución fundamental empleada, será de nuevo la del problema tridimensional.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA,

La ecuación básica del Método de los Elementos de Contorno, puede escribirse en su forma más conocida para un problema dinámico tridimensional en la forma,

$$s \langle P \rangle = \langle P \rangle + f_r \langle P, Q \rangle \langle Q \rangle \quad dr$$

$$s f_r \underline{u}(p, q) \langle q \rangle \quad (1)$$

donde las variables tienen el significado habitual. Si los desplazamientos y tracciones en el contorno son expresados en coordenadas cilíndricas, pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\langle q \rangle = \begin{pmatrix} \cos B \\ \sin B \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde  $\langle q \rangle$  y  $\langle p \rangle$  indican las variables en coordenadas cilíndricas y  $e = e(q)$  es el Angulo en este sistema de la posición de punto q. Igualmente para el punto de colocación p:

$$\langle p \rangle = \begin{pmatrix} \cos e \\ \sin e \end{pmatrix}$$

siendo  $e = e(p)$ .  
La ecuación general queda en coordenadas cilíndricas:

$$s \langle p \rangle = \langle p \rangle + \int_{\Gamma} (\underline{\Omega}'^T \underline{T} \underline{\Omega}) \underline{u}^c(q) d\Gamma =$$

$$i_r (\underline{\Omega}'^T \underline{u}^c(q)) \ar \quad (4)$$

$$\langle p \rangle = \langle p \rangle + i_r \underline{T}^c \underline{u}^c(q) \ar =$$

$$f \underline{u}^c \langle q \rangle \ar \quad (5)$$

siendo  $\langle p \rangle = \underline{\Omega}'^T \underline{e}(p) \underline{\Omega}'$ .

Como el punto de colocación p es fijo, puede tomarse  $e = 0$  y las expresiones de  $\underline{e}^c$  y  $\underline{T}^c$  resultan de la forma:

$U_{11} c + U_{12} s$	$-U_{11} s + U_{12} c$	$U_{13}$
$U_{21} e + U_{22} s$	$-U_{21} s + U_{22} c$	$U_{23}$
$U_{31} c + U_{32} s$	$-U_{31} s + U_{32} c$	$U_{33}$

$$= \underline{u}^e$$

donde c significa cose y s. sene

Cuando las condiciones de contorno mantienen la simetría de revolución, todas las variables de contorno serán independientes de e. Tomando una sección meridiana y discretizando el contorno a un lado del eje, en segmentos rectilíneos sobre los que se supone que  $\theta$  y t son constantes, la ecuación (5) puede escribirse como:

$$\underline{e}^c \langle p \rangle + \int_{\Gamma} \{ \underline{I}; i \text{ par } q; i \text{ imp } a \} \underline{u}^c =$$

$$= \int_{\Gamma} \{ q; l; f; q; p \text{ ar } q; i \} \underline{u}^c \langle q \rangle \quad (7)$$

donde  $rq$  es el elemento de contorno rectilíneo q-P es la primera coordenada cilíndrica y  $\langle q \rangle, \langle t \rangle$  son los valores de  $\langle u \rangle$  y  $\langle t \rangle$  sobre el elemento q, que se suponen constantes sobre él y asociados a su punto medio,

$\underline{I}; ed; ;$ egrales de la ecuación (7) realizarse numéricamente tanto sobre cada elemento rectilíneo en el plano p, z como sobre la coordenada  $\langle e \rangle$ ; en la que solo habrá de integrarse entre  $0$  y  $\pi$  por la simetría de la expresión (6) respecto del ángulo  $\pi$ . Así resulta una expresión:

$$\underline{e}^c \underline{u}^c \langle p \rangle + \int_{\Gamma} \{ \underline{I}; H; p; q \} \underline{u}^c =$$

$$= \int_{\Gamma} \{ q; l; G; p; q; t \} \underline{u}^c \quad (6)$$

que permite, una vez sustituidas las condiciones de contorno, resolver un sistema de ecuaciones que dará los valores desconocidos de  $\langle p \rangle$  y  $\langle q \rangle$  sobre el contorno'

Las matrices  $H_{pq}$  y  $G_{pq}$  que relacionan dos nodos P y Q tienen el siguiente aspecto,

$$\begin{pmatrix} 0 & + \\ * & + \\ \cdot & + \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ e \\ z \end{matrix} \quad (8)$$

donde los ceros indican elementos que son nulos debido a la antimetría de los correspondientes términos en la ecuación (6). Puede observarse, a la luz de la forma de las matrices y G, que el problema de torsión y  $\langle p \rangle$   $\langle r \rangle$   $\langle l \rangle$   $\langle a \rangle$   $\langle x \rangle$  están desacoplados pudiendo ambos estudiarse sobre el dominio bidimensional; uno con una sola coordenada por nodo y el otro con dos.

3. CONDICIONES DE CONTORNO NO AXISIMÉTRICAS.

Cuando la geometría del problema es axisimétrica pero las condiciones de contorno no lo son (por ejemplo una traslación horizontal de una cimentación cilíndrica), el problema puede también analizarse mediante un modelo plano. Para ello es descompuesto en problemas planos desacoplados haciendo uso de una representación de los valores prescritos de las tracciones o desplazamientos, mediante serie de Fourier a lo largo de la coordenada tangencial, en la forma propuesta por WILSON en 1965. Cada término de la serie da lugar a desplazamientos y tensiones en el mismo modo de los prescritos. En la práctica, si la variación de las magnitudes a lo largo de la dirección circunferencial no es muy rápida, unos pocos modos son suficientes para obtener un buen grado de precisión. El desarrollo en serie es de la forma:

$$u_p = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n^s \cos ne + u_n^a \sin ne)$$

$$u_e = \sum_{n=0}^{\infty} (-u_n^s \sin ne + u_n^a \cos ne) \quad (10)$$

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n^s \cos ne + u_n^a \sin ne)$$

donde  $\langle s \rangle$  indica los términos simétricos y  $\langle a \rangle$  los antisimétricos,

Para cada modo de la serie de Fourier puede escribirse un sistema de ecuaciones, ya discretizado sobre el contorno, del mismo tipo que (8) con la diferencia de que  $H_{pq}$  y  $G_{pq}$  son obtenidos ahora mediante la integración de  $\underline{T}^c$  y  $\underline{Q}^c$  a lo largo de la coordenada e ponderados por una función de tipo seno o coseno; esto es:

$$\int_0^{2\pi} u^c \sin n\theta d\theta ; \int_0^{2\pi} u^c \cos n\theta d\theta \quad (11)$$

ademas de la posterior integraci3n a lo largo de los elementos del contorno del dominio plano.

Debe notarse en este punto, que los t rminos del desarrollo de Fourier que multiplican a  $\sin n\theta$ , no pueden obtenerse colocando el punto p en  $0'0$  ya que en este punto precisamente  $\sin n\theta$  y la ecuaci3n b3sica del tipo de la ecuaci3n (8) se convierte en un conjunto de t rminos identicamente nulos. Este hecho se soslaya con un simple cambio de ubicaci3n del punto p para aquellas amplitudes que correspondan a los t rminos del tipo  $\sin n\theta$ ; por ejemplo  $c^c(p) = \frac{1}{2} \sin \frac{2n\theta}{r}$ , y en tal caso las citadas amplitudes aparecen sin factor de ponderaci3n alguno en la ecuaci3n general.

#### 4. IMPEDANCIA DINAHICA DE CIMENTACIONES EMBEBIDAS EN UN SUELO HOHOGENEO.

En aplicaci3n de todo lo anterior, consideree una cimentaci3n sin masa ( la masa puede incluirse en el c3lculo din3mico una vez determinada la impedancia) de forma cil3ndrica, embebida en un semiespacio viscoel3stico homogeneo (Fig. 1) de densidad p.

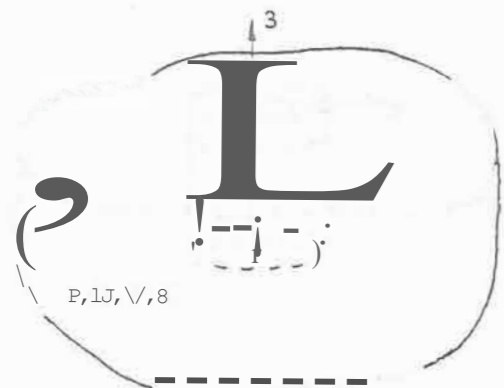


Fig. 1.- Cimentaci3n cil3ndrica enterrada en un semiespacio homogeneo.

m3dulo de elasticidad transversal  $\mu$ , m3dulo de Poisson  $\nu$  y factor de amortiguamiento viscoso  $B$ . Siendo el m3dulo complejo  $LC = \mu(1+2Bi)$ .

El estudio se realiza con una discretizaci3n del tipo indicado en la Figura 2.

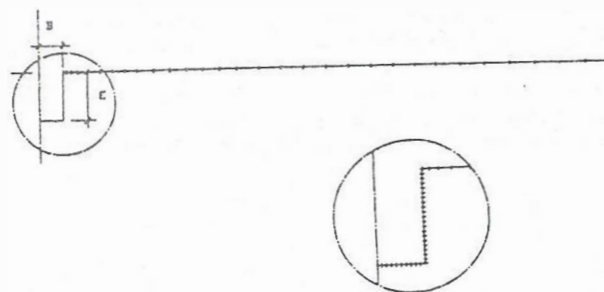


Fig. 2. Discretizaci3n del contorno.

Para el c3lculo de las rigideces vertical y de torsi3n, solo hay que prescribir un valor unitario del desplazamiento en la interfase zapatasuelo y tensiones nulas en la superficie. La impedancia se determina por integraci3n de las tracciones sobre los elementos de la interfase. En el caso de rigideces de desplazamiento horizontal o de balanceo, las condiciones de contorno no son axisimetricas aunque si contienen un 3nico t rmino del desarrollo de Fourier,

$$\begin{aligned} u_\rho &= u_1 \rho \cos \theta \\ u_\theta &= -u_1 \rho \sin \theta \\ u_z &= u_1 z \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

Las integrales sobre los elementos de contorno son realizadas, en todos los casos, num3ricamente, empleando un n3mero de puntos de Gauss a lo largo del elemento de contorno y de la direcci3n circunferencial que varia seg3n la distancia entre el elemento y el punto de colocaci3n. En el caso en que ha de integrarse sobre el elemento que contiene el punto de colocaci3n de la carga, la integral se realiza en dos fases: una primera, analitica, a lo largo del trozo de l3nea de la secci3n meridiana que es el elemento de contorno y una segunda, num3rica, sobre las dos circunferencias de los extremos del elemento. La integraci3n analitica solo se realiza sobre la parte de soluci3n fundamental din3mica que es igual a la est3tica, siendo el resto de la soluci3n din3mica integrado num3ricamente tambi3n en este caso.

La precisi3n de la integraci3n num3rica a lo largo de la direcci3n circunferencial entre  $0=0$  y  $6 \cdot \pi$ , puede mejorarse empleando una funci3n de ponderaci3n como la que proponen GOMEZ-LERA et. al. (1985), donde la densidad de puntos de integraci3n

en la zona de la circunferencia m3s proxima al punto de colocaci3n es incrementada por medio de la transformaci3n,

$$e. \frac{\pi}{4} (\eta+1)^2 ; -1 \leq \eta \leq 1 \quad (12)$$

En la Figura 3 se muestran los valores de la parte real y la parte imaginaria de una impedancia vertical que es representada en la forma habitual como:

$$K_{VV}^c = K_{VV} + i c_{VV} \quad (13)$$

El valor imaginario se presenta normalizado respecto de la frecuencia adimensional  $a_0 \cdot w R / c_s$ . Las curvas corresponden a un m3dulo de Poisson  $\nu = 0.25$ , amortiguamiento de las ondas P de un 1,5\ y uno de las ondas s de un 1\ . Los resultados se comparan con unos obtenidos por APSEL (1979) y OAL (1977) por m3todos diferentes. Como puede apreciarse, el acuerdo entre los resultados del M3todo de los Elementos de Contorno y los de otros m3todos, es muy bueno.

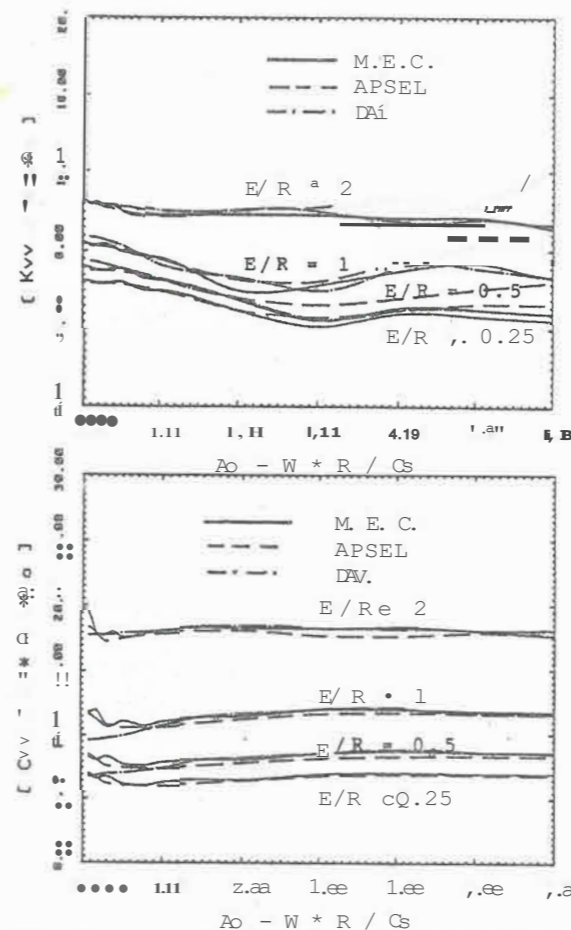


Fig.3. Impedancia vertical de cimentaciones cil3ndricas embebidas en un semiespacio viscoel3stico (G:  $\mu$ )

En la figura 4 puede verse una comparaci3n semejante realizada para la impedancia horizontal pudiendo comprobarse igualmente el buen acuerdo de los resultados con los de otros autores.

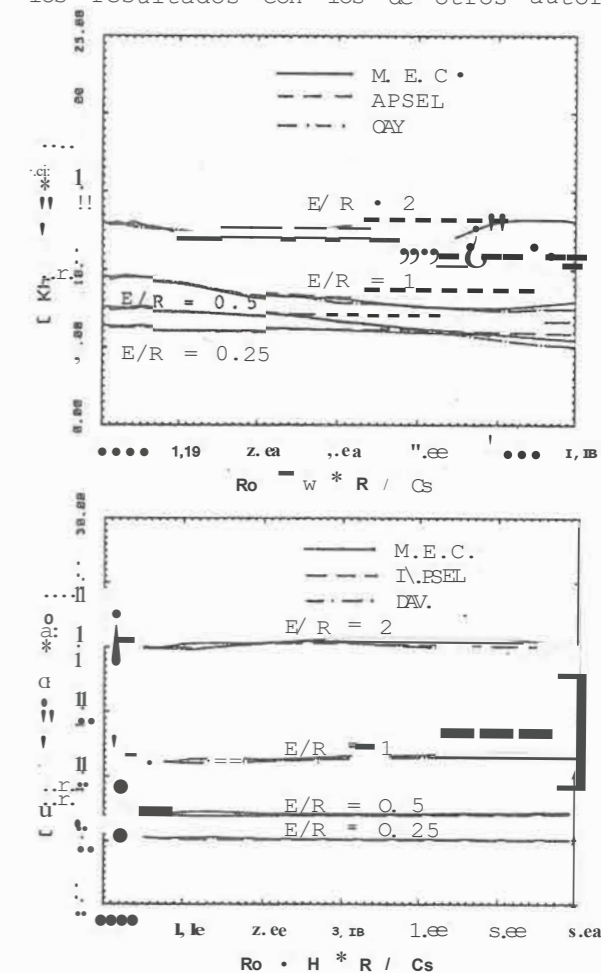


Fig. 4.- Impedancia horizontal de cimentaciones cil3ndricas embebidas en un semiespacio viscoel3stico (G= M3dulo de elasticidad transversal)

#### 5. SUELO ESTRATIFICADO

Con frecuencia el modelo de suelo como medio h3mogeneo se encuentra alejado de la realidad y un modelo de medio estratificado se ajusta mas a la misma. Por ello, es conveniente disponer de m3todos que permitan el empleo de estos modelos. A continuaci3n se presentan algunos ejemplos de como el M3todo de los Elementos de Contorno puede emplearse en el c3lculo de impedancias din3micas de cimentaciones sobre suelos estratificados. En este caso el estudio mediante Elementos de Contorno requiere la discretizaci3n de la interfase entre estratos, adem3s de la de la interfase suelo-cimiento y de la superficie libre.

El modelo de suelo analizado es el que se presenta en la Figura 5.

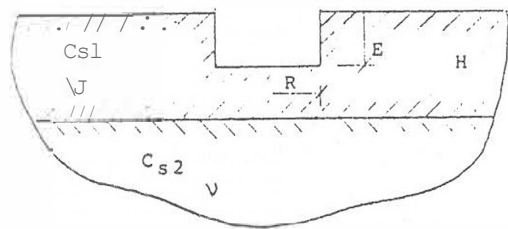


Fig. 5.- Modelo de suelo estratificado.

El estrato superior se asienta sobre un medio deformable mas rigido. Las velocidades de propagación de las ondas s son el medio superior y el inferior, e y e<sub>s</sub> respectivamente. Los parámetros que definen el problema son:

Grado de enterramiento:  $E/R = 1$   
 Profundidad del estrato:  $H/R = 2$   
 Rigidez relativa:  $RC_s = C_{s2}/C_{s1}$   
 Modulos de Poisson:  $\nu = 1/3$

Se presentan a continuación resultados para tres valores diferentes de

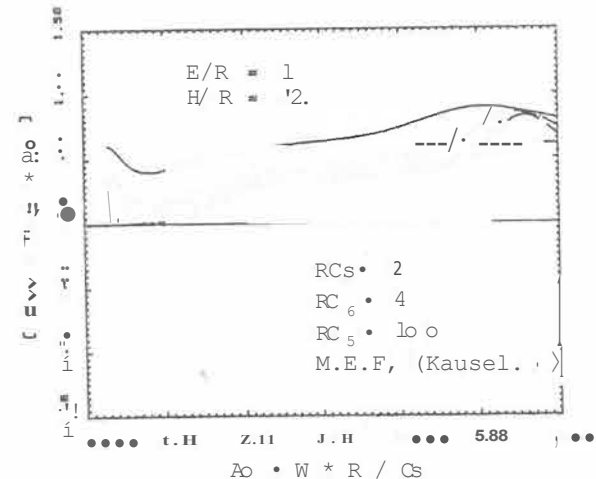
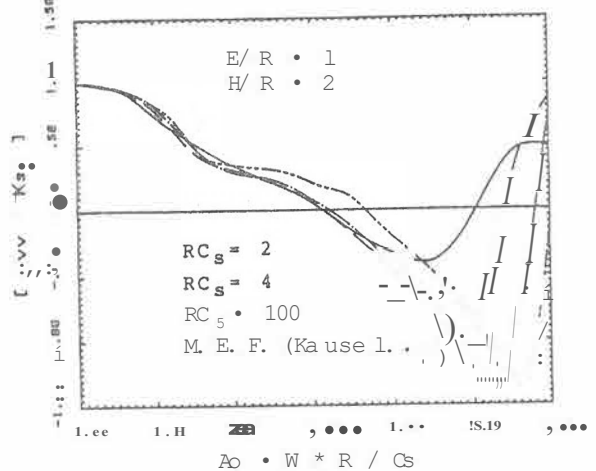


Fig. 6.- Impedancia vertical de cimentación cilíndrica en suelo estratificado.

la rigidez relativa ( $RC = 2, 4, 100$ ) para con ello estimar la importancia de este parametro. El analisis del efecto citado resulta de gran interes dado que los modelos de Elementos Finitos, muy utilizados, no permiten considerar la deformabilidad de la base. En la Figura 6 se representan los valores de las partes reales e imaginarias de la impedancia vertical de la cimentación cilíndrica embebida cuya geometria se ha definido anteriormente. Los valores estan normalizados con respecto de su correspondiente estático y la parte imaginaria tambien respecto de la frecuencia adimensional. El modelo de Elementos de Contorno empleado tiene un total de 81 elementos. Los resultados coinciden en el caso de  $RC = 100$  con los obtenidos con Elementos Finitos por KAUSEL y USHIJIMA (1979) para el caso de base rigida.

Un analisis parecido puede hacerse para todas las componentes de la impedancia. En la Figura 7 se presentan los valores obtenidos para las partes real e imaginaria de la impedancia torsional. Puede apreciarse como en este caso la influencia de la rigidez de

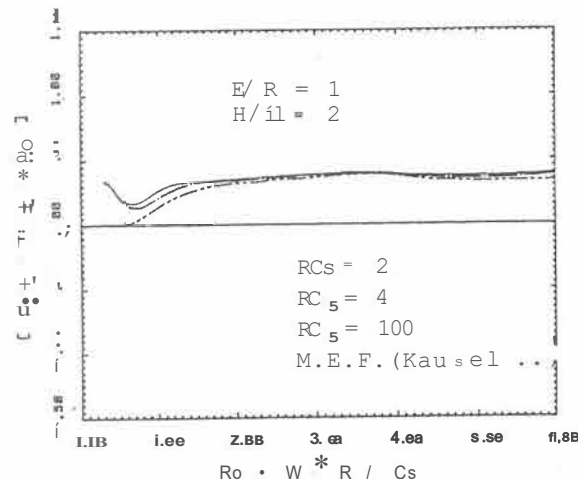
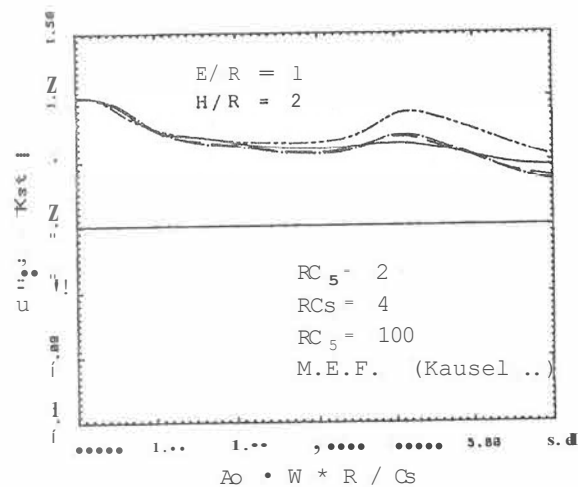


Fig. 7.- Impedancia torsional de cimentación cilíndrica en suelo estratificado.

la base es despreciable, y como los resultados de Elementos de Contorno y de Elementos Finitos son casi coincidentes.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha presentado por primera vez el estudio de problemas elastodinamicos con simetría de revolución y sección cualquiera haciendo uso del método de los Elementos de Contorno. El estudio se ha llevado a cabo en el dominio de la frecuencia. Previamente habia sido desarrollado el Método para problemas del mismo tipo pero no para una geometría cualquiera sino unicamente para casos en que todos los contornos son normales al eje azimutal.

El desarrollo realizado ha permitido estudiar las impedancias dinamicas de cimentaciones cilindricas embebidas en el suelo, el cual, se ha supuesto viscoelastico homogéneo o estratificado. Los resultados obtenidos se han comparado satisfactoriamente con los de otros autores que emplean métodos diferentes. Se ha incluido, en el caso de suelo estratificado, un analisis del efecto de la rigidez relativa de la base rocosa. Este efecto, es notable en la impedancia vertical, pero no asi en la de torsión.

## 7. REFERENCIAS

- Alarcón, E., 00111inguez, J. y del cano, F. "Dynamic Stiffness of Foundations", New Developments in Boundary Element Methods, Edit. c. Brebbia. CML publications, 1980.
- Apel, R. J., "Dynamic Green's Functions for Layered Media and Applications to Boundary Value Problems". Tesis Doctoral University of California at San Diego, 1979.
- Cano, J. J., "Cálculo de impedancias dinamicas de lapatas circulares rigidas en terrenos estratificados con amortiguamiento histerético", Tesis Doctoral, Univ. Pol. Valencia, 1985.
- Cruse, T. A., Snow, D. A. y Wilson, I. L. "Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity", computers and Structures, Vol. 7, p. 445, 1977.
- Oay, S. H., "Finite Element Analysis of Seismic Scattering Problems", Tesis Doctoral, Univ. of California at San Diego, 1977.
- Dominguez, J., "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", Research Report R78-20, Dept. Civil Engineering, M. I. T., Cambridge, Mass., 1978.
- Gomez-Lera, S., Dominguez, J. y Alarcón, E., "on the Use of 3-D Fundamental Solutions for Axisymmetric Steady-State Dynamic Problems", Proc. 7th Int. Conf. on DEM, Springer-Verlag, 1985.
- Karabalis, D., y Beskos, O. E., "Dynamic

Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain BEM', Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, No. 1, 1984.

9. Kausel, E. and Ushijima, R. "Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footing", Report R79-63, Civil Eng. Dept. M. I. T., 1979.

10. Kermanidis, T. A., "Numerical Solution of Axially Symmetrical Elasticity Problems", Journal of Solids and Structures, Vol. 11, p. 493, 1975.

11. Spyarakos, C. C. "Dynamic Response of Two-Dimensional Foundations", Tesis Doctoral, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1984.

12. Wilson, E., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids", AIAA Journal, Vol. 3, No. 12, 1965,