

Aplicación del método de los elementos de contorno al estudio de problemas dinámicos de fractura 3-D

A. SAEZ PÉREZ (J. DOMÍNGUEZ ABASCAL

Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 - Sevilla

F. CHIRINO GODOY

Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Tafira Baja, 35017 - Las Palmas de Gran Canaria

(asaez@cica.es)

Resumen

El análisis de problemas tridimensionales dinámicos de mecánica de la fractura requiere del empleo de técnicas numéricas. Entre estas técnicas el Método de los Elementos de Contorno se ha mostrado como una herramienta eficaz y precisa en base a su gran capacidad para representar adecuadamente gradientes de tensión elevados; y a que la implementación de elementos capaces de modelar los campos singulares de tensiones presentes en las inmediaciones del borde de una grieta resulta sencilla y directa. En esta comunicación se extiende la formulación del elemento de contorno tridimensional singular con nodo a un cuarto desarrollado por Ariza, Sáez y Domínguez (1997) para problemas estáticos tridimensionales al estudio de problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia. La metodología propuesta se valida mediante el estudio del problema de difracción de ondas planas por una grieta circular inmersa en un dominio infinito. Los resultados obtenidos concuerdan con los disponibles en la literatura.

Abstract

Analysis of dynamic three-dimensional fracture problems requires the use of numerical techniques. Among these techniques, the Boundary Element Method has been shown as an effective approach due to its ability to capture high stress gradients like the ones occurring at a crack front. In this paper, the singular quarter-point boundary element developed by Ariza, Sáez and Domínguez (1997) for static fracture applications is extended to the study of dynamic problems in the frequency domain. Numerical results are obtained for scattering of plane harmonic waves by a penny-shaped crack and compare favorably with those available in the literature.

1. Introducción

La mecánica de la fractura es una disciplina de creciente importancia dentro de la Ingeniería Mecánica. La caracterización de los campos de movimientos y tensiones en las inmediaciones del borde de una grieta, y en particular la evaluación de los Desplazamientos de Apertura de Grieta (DAG) y/o de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT), permiten establecer si un componente mecánico con grietas en su seno está al final de su vida útil o si por el contrario puede continuar en servicio sin peligro de fallo inminente.

El análisis de problemas tridimensionales de fractura dinámica sólo resulta abordable, para cargas y/o geometrías genéricas, mediante el empleo de técnicas numéricas. Entre estas técnicas, el Método de los Elementos de Contorno (MEC) se ha mostrado como una alternativa eficaz y precisa frente a otros métodos,

particularmente el de los Elementos Finitos. Los mejores argumentos del MEC se basan en su gran capacidad para representar adecuadamente gradientes de tensión elevados, como los presentes en el borde de una grieta; y en que la implementación de elementos de contorno singulares capaces de modelar la singularidad de tensiones existente en las proximidades del vértice de una grieta resulta sencilla y directa.

Entre las contribuciones realizadas en el marco del MEC para problemas de fractura tridimensional deben destacarse los trabajos de Luchi y Rizzuti (1987), Gangming y Youngyuan (1988) o Mi y Aliabadi (1994) entre otros. Más recientemente, Ariza, Sáez y Domínguez (1997) formularon un elemento a un cuarto singular de nueve nodos para problemas tridimensionales. Sáez, Ariza y Domínguez (1997) implementaron este elemento para el estudio de problemas de fractura en materiales transversalmente isótropos. Todos los trabajos citados se refieren a problemas de tipo estático. En esta comunicación se extiende la formulación del elemento singular a un cuarto al análisis de problemas tridimensionales dinámicos en el dominio de la frecuencia. Se revisa brevemente la formulación del elemento y se discuten las implicaciones que su implementación conlleva en el caso dinámico. La metodología propuesta se valida mediante el estudio del problema de difracción de ondas por una grieta circular inmersa en un dominio infinito. Los resultados obtenidos concuerdan con los disponibles en la literatura.

2. Formulación del Problema

La relación integral de contorno de la que parte el MEC se obtiene de aplicar el teorema de reciprocidad de Betti entre el estado elastodinámico cuya respuesta se quiere caracterizar y un estado definido por la solución fundamental armónica (i.e., la respuesta de un medio infinito a la aplicación de una fuerza puntual armónica). Así, para cualquier punto "i" de un sólido Ω con contorno Γ se obtiene

$$c_k^i u^i + \int_{\Gamma} P_k^i u_k^i dr = \int_{\Gamma} u_k^i P_k^i dr \quad (1)$$

que relaciona los desplazamientos en el punto de colocación "i", u^i , con los desplazamientos, u_k^i , y las tracciones, P_k^i , en el contorno y con los desplazamientos, u_k^i , y las tracciones, P_k^i , de la solución fundamental en el contorno Γ . Las expresiones de u_k^i y P_k^i pueden consultarse en, e.g., Domínguez (1993). Los términos libres $c_k^i = \sigma_k^i/2$ para puntos en los que el contorno es suave.

Para casos de geometría y carga generales, la ecuación (1) sólo es resoluble numéricamente. Así, el contorno Γ se discretiza en NE elementos sobre los cuales se interpolan desplazamientos y tracciones a partir de sus valores en los nodos del elemento "j" considerado

$$u = \Phi u^j \quad y \quad p = \Phi p^j \quad (2)$$

donde u^j y p^j contienen todos los valores nodales en el elemento "j" y Φ es una matriz

que contiene las funciones de forma. Tras este proceso de discretización se obtiene para cada punto 'i'

$$e^i u^i + \sum_{j=1}^n f(p, a, r) u^j = \{f u^* \langle Dd, r \rangle p_j \} \quad (3)$$

Planteando (3) para todos los nodos del contorno se obtiene el sistema de ecuaciones

$$H u = G p \quad (4)$$

que junto con las condiciones de contorno permite obtener la solución del problema.

En esta comunicación se consideran elementos cuadráticos isoparamétricos, i.e., la geometría se aproxima de igual forma que el resto de las variables ($x = \langle D x \rangle^1$). El desarrollo completo de la formulación hasta aquí esbozada puede encontrarse en Domínguez (1993).

3. Elementos Singulares para Problemas de Mecánica de la Fractura

Los campos elásticos de desplazamientos y tensiones en las proximidades del vértice de una grieta vienen caracterizados por un FIT, K , que recoge aspectos tales como la longitud, forma y posición de la grieta y la geometría y condiciones de carga del problema en estudio. Así, en general, se puede escribir

$$u_i(s, B, r; \omega) = K(s; \omega) J_i(B) \dots J_r \quad (5)$$

$$a_{ij}(s, B, r; \omega) = K(s; \omega) g_{ij}(B) / \dots J_r \quad (6)$$

donde ω es la frecuencia angular de excitación, s describe la posición sobre la grieta, \bar{r} y $\bar{\theta}$ son coordenadas polares centradas en el vértice de la grieta (figura 1) y f y g_{ij} son funciones universales del ángulo $\bar{\theta}$.

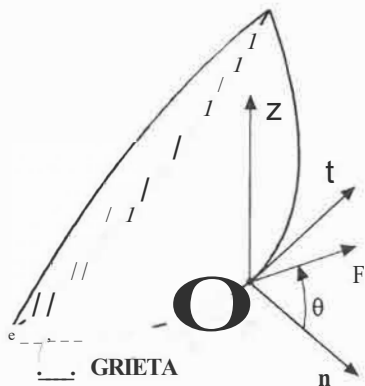


Fig. 1. Grieta 3-D y sistema de coordenadas de referencia

Se trata pues de desarrollar un elemento que permita modelar adecuadamente el comportamiento que desplazamientos y tensiones muestran en las ecuaciones (5) y (6). Dado que la dependencia en (r, θ) que se observa en dichas ecuaciones es exactamente la misma que existe en el caso estático, y dado que la solución fundamental dinámica, p^* , puede expresarse como la superposición de una parte singular, p^{*S} , y otra parte regular, p^{*R}

$$P_k(x, \theta) = P_k^{*S}(x) + P_k^{*R}(x, \theta) \quad (7)$$

de manera que P_k coincide con la solución

fundamental estática, la formulación del elemento cuadrático con nodos a un cuarto presentada por Ariza, Sáez y Domínguez (1997) para problemas de fractura estática resulta directamente extensible al caso dinámico.

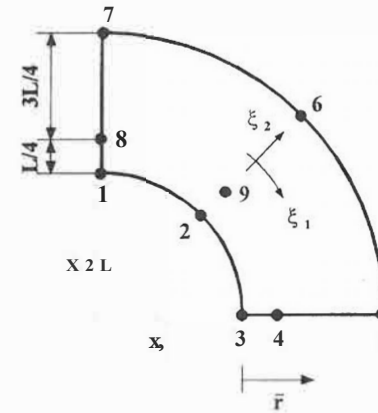


Fig. 2. Elemento cuadrático con nodos a un cuarto

De esta manera, el proceso de discretización se realiza de forma análoga al caso estático, empleando elementos de tipo cuadrático normal salvo para los situados en contacto con el borde de la grieta. De estos elementos, los que se encuentran sobre el labio de la grieta (tracción prescrita) son elementos cuadráticos a un cuarto (figura 2), de tipo cuadrilátero y con sus nueve nodos en un plano. Los nodos intermedios (4, 8 y 9) se sitúan a un cuarto de la longitud L del elemento, obteniéndose una representación de los desplazamientos sobre el elemento de la forma

$$u_k = a_k^1 + a_k^2 \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} + a_k^3 \frac{\bar{r}}{L} \quad (8)$$

donde a_k son combinaciones de los valores nodales de u_k y la coordenada natural s_1 .

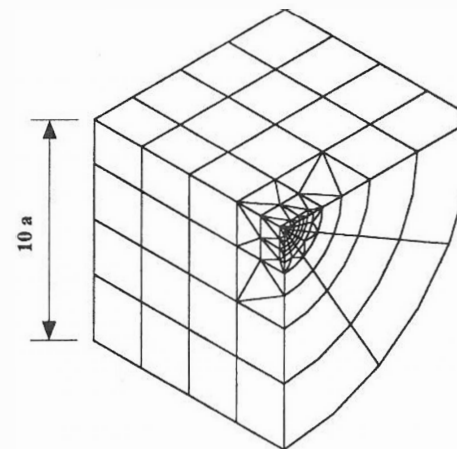


Fig. 3. Malla de un octavo de cilindro con grieta circular central (155 elementos)

Los elementos que se sitúan en contacto con el vértice de la grieta y se extienden hacia el interior del material (debe mencionarse que siempre se va a considerar un contorno interno seccionando el dominio según el plano de la grieta) son elementos a un cuarto singulares, que incluyen una representación singular de las tracciones, obtenida al dividir las funciones de forma por $\sqrt{r/L}$

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{r/L}} p_k^j \quad P_k = \frac{1}{\sqrt{r/L}} \left\{ k_f \frac{L}{i} + a_k^{-2} + a_k^{-3} \right\} \frac{F}{i} \quad (9)$$

donde a_j son combinaciones de los valores nodales de p_k y la coordenada natural s_1 .

La integración de la solución fundamental sobre los elementos se realiza numéricamente. El procedimiento empleado coincide con el propuesto por Ariza, Sáez y Domínguez (1997) para problemas estáticos.

4. Aplicaciones Numéricas

Para validar la formulación presentada se estudia el problema de difracción de ondas planas longitudinales y torsionales por una grieta circular inmersa en un sólido isótropo infinito con módulo de Poisson $\nu=0,25$. El movimiento incidente se propaga en dirección normal al plano de la grieta. El medio infinito se modela mediante un cilindro de radio $10a$, siendo a el radio de la grieta circular, y altura igual al diámetro, con la grieta situada en su plano medio. Se emplea una malla de 155 elementos que modela un octavo del problema (figura 3) tras la aplicación, en cada caso, de las condiciones de simetría existentes. El contorno de cierre ficticio del medio infinito tan sólo se emplea para el cálculo de los términos diagonales de la matriz H (ecuación (4)) de la formulación de elementos de contorno, mediante la condición de tracción nula asociada a un movimiento de sólido rígido. Una vez calculados estos términos, dichos contornos no se incluyen en la resolución del sistema de ecuaciones, ya que introducirían en la solución ruido asociado a la reflexión de ondas provocada por unos contornos inexistentes en el problema real.

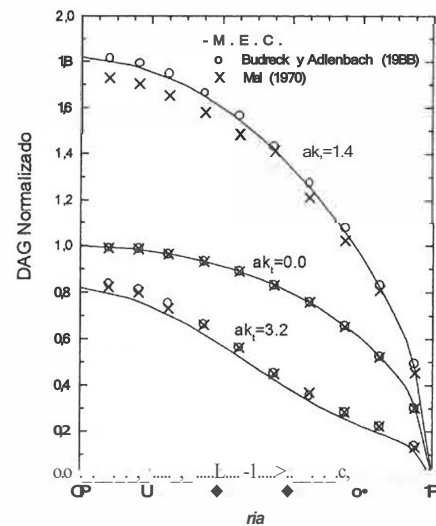


Fig. 4. D.A.G. normalizado. Onda incidente longitudinal

En la figura 4 se muestra la amplitud de los DAG frente a la distancia r al centro de la grieta para las ondas longitudinales. Las distintas curvas corresponden a diferentes valores de $ak_t = \alpha m |e_t|$, siendo α la velocidad de propagación de las ondas transversales. Los resultados que se presentan muestran un buen nivel de acuerdo con los previamente obtenidos por Mal (1970) y Budreck y Achenbach (1988), si bien se aproximan más a estos últimos. Los DAG han sido normalizados en la forma propuesta por Mal (1970).

La figura 5 recoge estos mismos resultados para el caso de las ondas torsionales. De nuevo el acuerdo con la solución semi-analítica de Mal (1970) es bastante bueno.

5. Conclusiones

La formulación del elemento de contorno singular desarrollado por Ariza, Sáez y Domínguez (1997) para aplicaciones tridimensionales de mecánica de la fractura estática se ha extendido al estudio de problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia. Tanto la singularidad presente en la solución fundamental como la presente en los campos de tensiones en las inmediaciones del borde de una grieta son del mismo tipo que las existentes en el caso estático. Por lo tanto, el procedimiento de integración numérica desarrollado para el elemento singular en el caso estático se emplea aquí para problemas dinámicos, ya que es capaz de tener en cuenta estas singularidades.

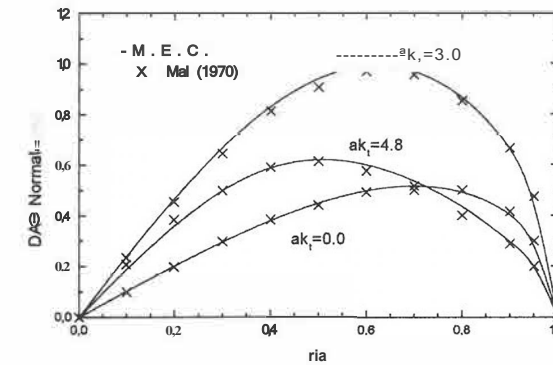


Fig. 5. D.A.G. normalizado. Onda incidente torsional

se presentará en una futura comunicación.

6. Referencias

- ARIZA, M.P., SÁEZ, A. Y DOMÍNGUEZ, J. (1997) "A Singular Element for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis", *Eng. Anal. Boun. El.*, vol. 20 pp 275-285.
- BUDRECK, O.E. y ACHENBACH, J.D. (1988) "Scattering from Three-Dimensional Planar Cracks by the Boundary Integral Equation Method", *J. Appl. Mech.*, vol. 55 pp 405-412.
- DOMÍNGUEZ, J. (1993) *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, London.
- GANGMING, L. y YOUNGYUAN, Z. (1988) "Application of Boundary Element Method with Singular and Isoparametric Elements in Three-Dimensional Crack Problems", *Eng. Fract. Mech.*, vol. 29 pp 97-106.
- LUCHI, M.L. y RIZZUTI, S. (1987) "Boundary Elements for Three-Dimensional Elastic Crack Analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 24 pp 2253-2271.
- MAL, A.K. (1970) "Interaction of Elastic Waves with a Penny-Shaped Crack", *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 8 pp 381-388.
- MI, Y. y ALIABADI, M.H. (1994) "Discontinuous Crack-Tip Elements: Application to 3-D Boundary Element Method", *Int. J. Fract.*, vol. 67 pp 1267-1271.
- SAEZ, A., ARIZA, M.P. y DOMÍNGUEZ, J. (1997) "Three-Dimensional Fracture Analysis in Transversely Isotropic Solids", *Eng. Anal. Boun. El.*, vol. 20 pp 287-298.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a la Dirección General de Enseñanza Superior del Ministerio de Educación y Cultura por el apoyo económico recibido a través de los proyectos PB96-1380 y PB96-1322-C03-01.