



OPTIMIZACION DE LA RESPUESTA DINAMICA DE UNA ESTRUCTURA DE BARRAS

Corz Rodríguez, Alfonso; Domínguez Abascal, José.

Departamento de Ingeniería Industrial. E.U.I.T.I. Algeciras.- Avda. Ramón Puyol, s/n
11202 - ALGECIRAS (Cádiz)
Dpto. Medios Continuos y T.I. de Estructuras. E.T.S. Ing. Industr. Sevilla.
Avda. Reina Mercedes. s/n. SEVILLA

Resumen.- Existe actualmente un interés notorio sobre el campo de la optimización en general, si bien son escasos los trabajos en el ámbito correspondiente al comportamiento dinámico.

El problema se plantea de una forma genérica, pudiendo aplicarse a continuas o a estructuras discretas, teniendo en este último caso, ciertas simplificaciones.

Se trata en todo caso de utilizar el "software" que ya existe en el mercado para aquellos sectores donde esto es posible.

Se presenta un ejemplo sobre una estructura de barras.

Abstract.- Nowadays there is an increasing interest about the optimization field in general, but works about dynamic behaviour are a few.

The problem is studied in a general way, and it can be applied to continuous and discrete structures, having in the latter some simplifications.

The aim is to use the "normal software" we have in the market for those sections where it is possible.

An example about a beam structure is showed.

1. INTRODUCCION.

La definición de un problema de diseño en términos de optimización sigue siempre unos pasos como son: la síntesis funcional a optimizar, el planteamiento de restricciones funcionales, dimensionales y tensionales.

Se plantean distintas estrategias cuando hablamos de optimización en el campo dinámico, normalmente se define una función objetivo de tipo volumétrico (peso o masa), este es el caso clásico y más normal. En otros casos se define como función objetivo del problema una amplitud de uno de los grados de libertad del sistema. La amplitud se calcula utilizando superposición modal, teniendo la posibilidad de simplificar el problema en función del rango de frecuencia del trabajo de manera que la utilización de un mayor número de modos hará más exacto el valor de la respuesta pero a costa de una mayor complicación.

Un segundo problema es que tendríamos que limitar la amplitud en el resto de los grados de libertad, así como los pesos de las barras, ya que de otro modo llegaríamos a un diseño sumamente pesado.

Teniendo en cuenta que normalmente se utiliza como función objetivo el peso, con restricciones de flexión máxima, y tensión máxima utilizaremos los mismos conceptos, pero en el campo dinámico, de forma que el seguimiento del razonamiento sea lo más simple posible.

2. DESARROLLO DEL ALGORITMO.

Comenzaremos por el desarrollo de la función objetivo y a continuación desarrollaremos las restricciones dimensionales, para finalizar atacando las de tipo funcional.

2.1. función objetivo.

Ya habíamos decidido inicialmente, que la función objetivo sería de tipo volumétrico, y supondremos que los sólidos manejados son homogéneos, isótropos y continuos. Con estas premisas, si consideramos un sólido que se extiende en un dominio D, su peso será función de las coordenadas de los puntos nodales con las que hemos discretizado su frontera, de este modo:

$$W = W(P_i)_{i=1}^n \quad 12.1.11$$

donde que $\rho = c \cdot e$;

$$W = \rho \cdot v(p) \quad 12.1.21$$

por lo tanto la función a minimizar será:

$$V = V(?) \quad 12.1.31$$

Para el caso en el cual existiese discontinuidades tales que:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \dots \quad 12.1.41$$

... es el caso de muchas estructuras continuas. Se suele asociar a cada subdominio una variable de control. En el caso de placas sería el espesor o en el caso de barras, las secciones. Por lo tanto en el caso de múltiples subdominios, la expresión de la función objetivo, será:

$$W = \sum_{i=1}^n W(x_i) \quad 12.1.51$$

$$W = \rho \cdot V(x) \quad 12.1.61$$

$$V = \sum_{i=1}^m a_i x_i \quad 12.1.71$$

m.- número de elementos.

x_i - variable asociada al elemento i.

a_i - Parámetro asociado al elemento i.

El cálculo del gradiente de estas funciones no suele presentar problemas, de modo que tendríamos:

$$\nabla W = \rho \cdot \nabla V = \rho \cdot (16V / \rho x_1, 6V / \rho x_2, \dots) \quad 12.1.e1$$

A continuación estudiaremos las restricciones dimensionales.

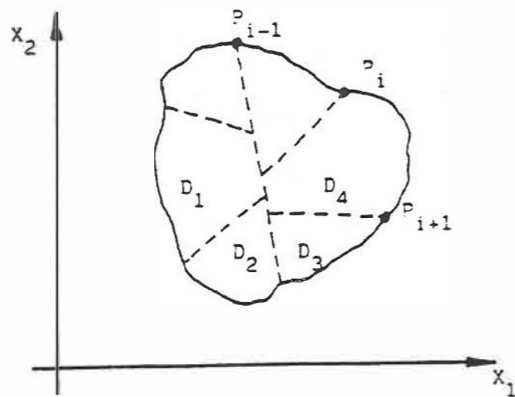


fig. 1

2.2.- Restricciones dimensionales.

Las restricciones dimensionales pueden utilizarse por dos motivos, en primer lugar para garantizar un tamaño mínimo de los elementos, y en segundo lugar para cierto tipo de análisis para el establecimiento de los límites para la desaparición de elementos y la consiguiente modificación de la topología del sistema.

El número de restricciones suele ser el mismo que el de variables o en algunos casos mayor dado que pueden limitarse de alguna forma las relaciones entre variables. Por lo tanto tendremos dos tipos, a saber:

tipo (a) $x_i \geq x_i^*$ 12.2.11

tipo (b) $x_k < f(x_1, x_2, \dots)$ 12.2.21

Estas relaciones se suelen expresar en forma de funcional como:

tipo (a) $g_j = -x_i + x_i^* < 0$ 12.2.31

tipo (b) $g_j = \frac{f_2(x_1, x_2, \dots)}{f_1(x_1, x_2, \dots)} - 1 < 0$

Los gradientes de las restricciones dimensionales del tipo (a), son simples, de modo que:

tipo (a) $\nabla g_j = (0, 0, -1, 0, \dots, 1)^T$ 12.2.51

En el segundo caso, serán mas o menos complicados en función de la estructura de las funciones f_1 y f_2 .

tipo (b) $\nabla g_j = \frac{1}{f_1^2} \left(f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right), (\dots), \dots$ 12.2.51

2.3.- Restricciones funcionales.

Las restricciones funcionales son en el caso dinámico las expresiones más complejas y donde normalmente los gradientes son más laboriosos de obtener.

Las restricciones de este tipo suelen expresarse en forma de limitaciones de amplitud o en otros casos de velocidad o aceleración, en los tres casos pueden ser valores picos o R.M.S.

Un segundo tipo de restricciones funcionales son las de tensiones y para su acotación será necesario tener en cuenta las limitaciones por fatiga con la consiguiente reducción de σ_{mx} .

Pasamos a continuación a deducir las restricciones de amplitud.

$$|\Delta q| \leq \Delta q^* \quad q=1, 2, \dots, m$$

m.- número de puntos de control.

$$12.2.71$$

Normalmente se obtienen mejores resultados, al modificar la anterior condición en la forma:

tipo (a) $G^k = \left| \frac{\Delta q}{\Delta q^*} \right|^2 - 1 \leq 0$ 12.2.e1

Otro tipo de funcional de amplitud, es el de diferencias de amplitudes:

tipo (b) $G^k = \left| \frac{\Delta q - \Delta q^*}{\Delta q^*} \right|^2 - 1 \leq 0$ 12.2.91

Los gradientes respectivos para los dos casos serán,

tipo (a) $\nabla G^k = \frac{2\Delta q}{\Delta q^*} \left(\frac{\partial \Delta q}{\partial x_1}, \frac{\partial \Delta q}{\partial x_2}, \dots \right)^T$ 12.2.101

tipo (b) $\nabla G^k = \frac{2(\Delta q - \Delta q^*)}{\Delta q^*} \left(\frac{\partial \Delta q}{\partial x_1}, \frac{\partial \Delta q}{\partial x_2}, \dots \right)^T$ 12.2.111

La obtención de estos gradientes, dada su extensión se realizan en el anexo I.

Las últimas relaciones funcionales que consideramos en el problema dinámico, son las de limitación de tensiones.

Las tensiones están relacionadas con las deformaciones a través de la matriz de comportamiento elástico D, de tal forma que:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} \quad 12.2.121$$

Asimismo, existe una relación entre deformaciones y movimientos, tal que:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{\delta} \quad 12.2.131$$

con lo cual, sustituyendo en la ecuación 12.2.121, se obtiene:

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{\delta} \quad 12.2.141$$

donde $\underline{S} = \underline{D}^T \underline{B}$.

Las restricciones en tensión son, quizás las más complicadas de manejar, a causa de que es necesario establecer puntos de control en el sólido o sólidos manejados. Además es necesario especificar el tipo de criterio utilizado para determinar la tensión equivalente (Tressca, Mohr, ...). Otro aspecto a considerar, si estamos estudiando un material sensible a los efectos fatiga, será el coeficiente de reducción de tensión admisible en función del número de ciclos.

Suponiendo que se ha tomado una decisión sobre los puntos anteriormente enunciados, y suponiendo N puntos de control, obtendremos las siguientes restricciones:

$$\sigma_r < \sigma_r^* \quad r=1, 2, \dots, N \quad 12.2.151$$

Obteniendo la expresión del funcional en la forma acostumbrada obtendremos:

$$G^k = \left| \frac{\sigma_r - \sigma_r^*}{\sigma_r^*} \right|^2 - 1 < 0 \quad 12.2.151/$$

El gradiente de este funcional será:

$$\nabla G^k = 2 \frac{\sigma_r - \sigma_r^*}{\sigma_r^*} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_1}, \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_2}, \dots \right)^T \quad 12.2.171$$

Una vez determinados todos los funcionales, así como sus gradientes, pasariamos a considerar el método de optimización más idóneo

2.4.- Vector de movimientos

El cálculo de los movimientos puede realizarse por dos caminos, bien directamente mediante integración en el tiempo, o bien por aplicación de los conceptos de superposición modal, y sintetizar de esta forma el vector de movimientos. Este último método, tiene ventajas, siempre que el problema sea lineal, y es el que seguiremos en nuestro desarrollo.

El método de síntesis de la respuesta mediante superposición modal es ampliamente conocido y puede encontrarse en cualquier tratado de dinámica. 121.

El primer concepto que manejaremos será el de la función de respuesta en frecuencia.

La F.R.F. $H_{ij}(\omega)$, no da la respuesta de la estructura en coordenada q , debida a una excitación armónica de valor unitario en la coordenada p y se expresa como:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\sum_{r=1}^n \frac{P_r^T P_r}{(1-r_r^2)^2 + 1(2r_r r_r)} \cdot 1}{12.2.181}$$

donde:

- $r_r = \omega / \omega_r$
- $K_r = \omega_r^2 \cdot M_r$
- $\xi_r = e_r / 2 \cdot \gamma_r \cdot \eta_r$
- $e_r = \frac{P_r^T}{K_r} e_s$
- $M_r = \phi^T M \phi$
- n .- número de modos considerados.
- ω .- frecuencia de excitación.
- ω_r .- frecuencia natural.
- ϕ .- vector modal.
- K_r .- rigidez modal.
- M_r .- masa modal.
- r_r .- coef. de amortiguamiento modal.

El vector de respuesta para los puntos del sólido o estructura estudiados se puede expresar de una forma general como:

$$\ddot{u}(t) = \sum_{r=1}^n \frac{P_r^T s_r}{1(1-r_r^2)^2 + (2r_r \xi_r)^2} \cos(\omega t - \alpha) \quad 12.2.191$$

El sistema es potente y flexible al mismo tiempo. ya que permite tomar en consideración únicamente, aquellos modos que sean de interés en función de los límites de frecuencia manejados. En segundo lugar se puede utilizar con cualquier fuerza de excitación ya que si ésta no es armónica, siempre podremos descomponerla en serie de Fourier.

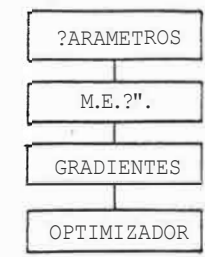
Otra de las posibles ventajas es que la función puede obtenerse experimentalmente, y mediante técnicas apropiadas, obtener los parámetros modales reales, con lo cual se puede iniciar el proceso de optimización con parámetros muy fiables.

Como contrapartida a las ventajas enunciadas, el cálculo del gradiente se hace laborioso, como se puede comprobar en el anexo.

2.5.- Programación del algoritmo.

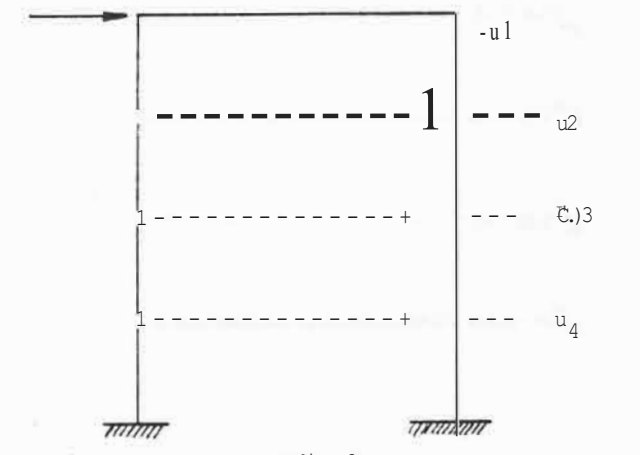
El núcleo principal del programa, está constituido por tres sectores, el primero es un programa de elementos finitos convencional, el segundo por el programa desarrollado en este trabajo en el cual se realiza el cálculo de los gradientes de las distintas funciones, por

último, en el tercer lugar, el programa de optimización propiamente dicho. El optimizador utilizado es del tipo de dirección posible. 111. 141.



3. APLICACION A UNA ESTRUCTURA.

Se ha realizado una aplicación a una estructura típica de edificación, con un comportamiento resistente a cortadura, figura 2.



La función objetivo en este caso será el peso total de la estructura resistente, compuesta por las columnas, que es lo que queremos optimizar.

$$W = \sum_{i=1}^n E \cdot 2 \cdot P_i \cdot X_i \quad 13.1$$

Las restricciones impuestas son los desplazamientos de los grados de libertad 1 y 2.

La deducción de la matriz de rigidez, presenta una pequeña complicación, ya que dicha matriz es función de los momentos de inercia de los pilares que se desean optimizar, y no directamente de las secciones:

$$K_{ij} = \frac{12EI}{l_{ij}^3} \quad 13.21$$

La solución a este problema ha efectuado, averiguando que tipo de función relaciona X_i con I_i .

Se ha utilizado una técnica por mínimos cuadrados para los valores tomados de un prontuario de los valores de secciones y momen-

tos de inercia de perfiles tipo HEB, obteniéndose la siguiente función:

$$I/1E5 = 81 + B2 \cdot (X/1E5) + B3 \cdot (X/1E5)^2 \quad 13.31$$

La representación gráfica de la función se puede apreciar en la figura 3.

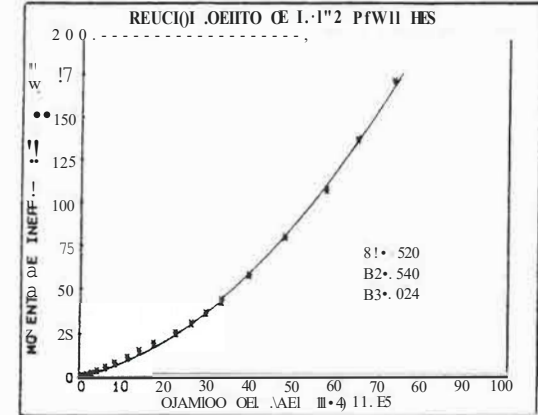


Figura 3

Los valores de los coeficientes son:

- $B1 = 0.520$
- $B2 = 0.540$
- $B3 = 0.024$

De esta forma podemos expresar los términos de la matriz de rigidez en función de las variables a optimizar X_i , en vez de I_i .

Las derivadas de los términos de la matriz de rigidez son de esta forma deducidos fácilmente.

Los valores iniciales de las variables fueron los siguientes:

- $X1 = 50E-4 \quad m^2$
- $X2 = 80E-4 \quad m^2$
- $X3 = 155E-4 \quad m^2$
- $X4 = 320E-4 \quad m^2$

Se acotaron estas variables entre los siguientes valores:

$$1E-4 < X_i < 2700E-4$$

Las magnitudes del problema tomadas como constantes fueron:

- $l_i = 3.00 \quad m$
- $E_i = 2.06 \cdot E_{11} \quad N/m^2$
- $u1 = .005 \quad m$
- $u2 = .003 \quad m$
- $\gamma = 5000 \quad N$

Las frecuencias naturales del sistema inicial son:

- $\omega1 = 40.1 \quad rad/seg$
- $\omega2 = 109.5 \quad rad/seg$
- $\omega3 = 165.4 \quad rad/seg$
- $\omega4 = 388.5 \quad rad/seg$

La respuesta de la estructura para una carga colocada sucesivamente en cada una de las frecuencias se puede apreciar en la figura 4.

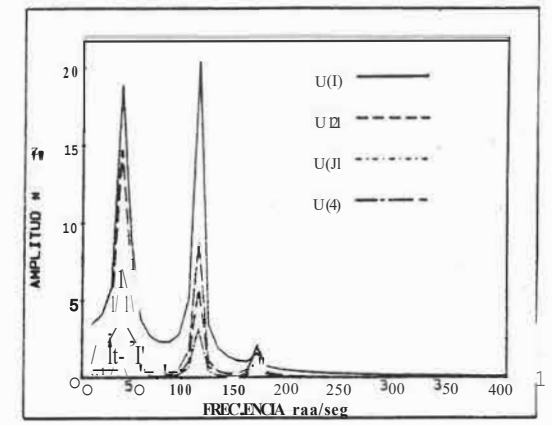


Fig. 4

Se realizó una optimización con una frecuencia de excitación dentro del espectro entre $\omega1$ y $\omega4$ obteniéndose los siguientes resultados de respuesta, mejora de la función objetivo y modificación de secciones, figuras 5, 6 y 7.

$$\omega_e = 65 \quad rad/seg$$

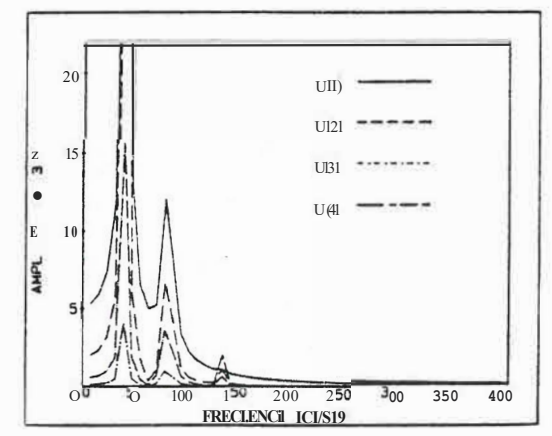


Fig. 5

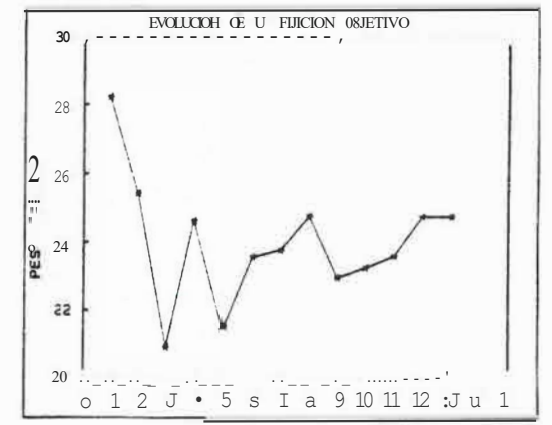


Fig. 6

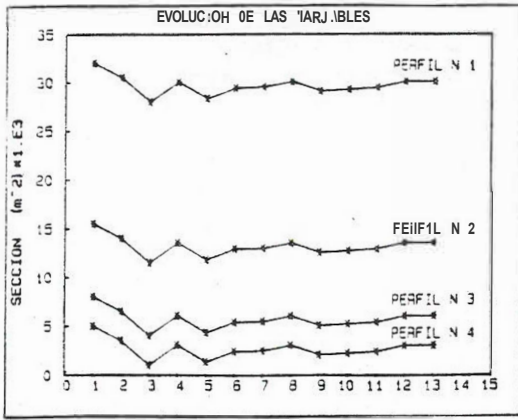


Fig. 7

La reducción en peso es, como puede observarse de un 13%.

El tiempo de C.P.U. fue reducido, 30 seg., aunque si tenemos en cuenta el tamaño del problema, fácilmente puede atisbarse que el mayor obstáculo en este tipo de problemas será el tiempo de cálculo.

CONCLUSIONES

El método funciona de forma satisfactoria y puede ser muy adecuado para su aplicación a la resolución de algunos problemas estructurales que se producen en estructuras industriales sobre las que existen máquinas y equipos que generan vibraciones.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Vanderplaats, G.N.- "Numerical Optimization techniques for engineering design".- McGraw Hill, 1984.
- 2.- Roy R. Craig, Jr. -"Structural dynamics".- John Wiley & Sons, 1981.
- 3.- Atrek, E., Gallager, R.H., Ragsdell, K.M., Zienkiewicz. (Editor's).- "New direction in optimum structural design."- John Wiley & Sons Ltd.
- 4.- Vanderplaats, G.N. "COSS/AD3" (User's manual) engineering testing optimization, 1936

ANEXO!

Gradiente de la restricción funcional de amplitud.

$$\nabla G^k = 2 \frac{\Delta q}{\Delta^* q} \left[\frac{\partial \Delta q}{\partial x_1}, \frac{\partial \Delta q}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Delta q}{\partial x_n} \right]^T$$

El problema será, por lo tanto, obtener los $\frac{\partial \Delta q}{\partial x_i}$, por lo que recordaremos la formulación dada para C_q .

$$A_r = 0_r^T \cdot 0_r \cdot p$$

$$j_{2r} = 1(1 - r^2) + (2) r \cdot r \cdot r^2 \cdot Y_r$$

$$A_{3r} = \cos(\theta - \alpha_r)$$

$$\frac{d \Delta q}{d x_i} = \frac{\partial \Delta q}{\partial x_i} \cdot 0_r \cdot p + 0_r^T \cdot \frac{\partial \Delta q}{\partial x_i} \cdot p =$$

$$= 2 \cdot 0_r^T \cdot \frac{\partial 0_r}{\partial x_i} \cdot p$$

$$j_{2r} =$$

$$= \frac{-2(1-r^2) \cdot 2r \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} + 2(2r \cdot r \cdot r) \cdot (2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot r + 2r \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i})}{2[(1-r^2)^2 + (2r \cdot r \cdot r)^2]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = - \frac{\Omega}{\omega^2 r} \cdot a x_i$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_r}{\omega r} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial x_i} \cdot \omega r - u_r \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \omega r^{-2}$$

$$a x_i^T = 0_r^T \cdot e \cdot a 0_r + Y \cdot 0_r^T \cdot \frac{a c}{3 X_1} \cdot \frac{u_r}{r}$$

$$a x_i^T = Y \cdot a x_i^T \cdot \frac{1}{r} \cdot Y$$

$$a x_i^T = 0_r^T \cdot 1 a x_i^T - \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{3 X_1} \cdot 0_r$$

$$\frac{\partial A_{3r}}{\partial x_i} = \text{Sen}(\theta - \alpha_r) \cdot \frac{\partial \alpha_r}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial x_i} = \frac{1 - r^2}{(2 j_{2r} r + 1 - r^2)}$$

$$= \frac{(j_{2r} r + j_{2r} \frac{a r}{a x_i}) (1 - r^2) + 2 r \cdot \frac{a r}{3 X_1} \cdot j_{2r} r}{(1 - r^2)^2}$$

Como:

$$= \sum_{r=1}^N \frac{A_{1r}}{K_r \cdot A_{2r}} \cdot A_{3r}$$

$$\frac{\partial \Delta q}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^N \frac{\left(\frac{\partial A_{1r}}{\partial x_i} \cdot A_{3r} + A_{1r} \cdot \frac{\partial A_{3r}}{\partial x_i} \right) \cdot k \cdot j_{2r}}{\left(\frac{\partial K_r}{\partial x_i} \cdot A_{2r} + K_r \cdot \frac{\partial A_{2r}}{\partial x_i} \right) \cdot A_{1r} \cdot A_{3r}}$$

$$= \frac{1 \cdot K_r \cdot A_{2r}^2}{1 \cdot K_r \cdot A_{2r}^2}$$

El gradiente de los autovectores se encuentra desarrollado en la ref 131.