ACCA
015

ANÁLISIS Y COMUNICACIÓN CONTEMPORÁNEA DE LA ARQUITECTURA
analysis and contemporary communication of architecture

RU Books+dEGA departamento de EXPRESIÓN GRÁFICA ARQUITECTÓNICA · Universidad de Sevilla

Editores
Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica de la Universidad de Sevilla
http://departamento.us.es/dega/
Avd. Reina Mercedes 2, 41012 - Sevilla

RU BOOKS (Recolectores Urbanos)
http://www.recolectoresurbanos.com/
Plaza Ruiz Valle, 29018 - Málaga

Director dEGA - Director ACCA
José Joaquín Parra Bañón

Redacción ACCA
Antonio Ampliato Briones
José María Gentil Baldrich
Francisco Granero Martín
Francisco Pinto Puerto

Impresión
Ulzama

ISBN
978-84-944786-0-4
Depósito Legal
MA 138-2016

Los trabajos de investigación originales que componen este número de ACCA han sido seleccionados tras convocatoria pública y sometidos posteriormente a un proceso de revisión y evaluación por dos expertos antes de su publicación. De los criterios y los contenidos expuestos son responsables sus autores.

ÍNDICE

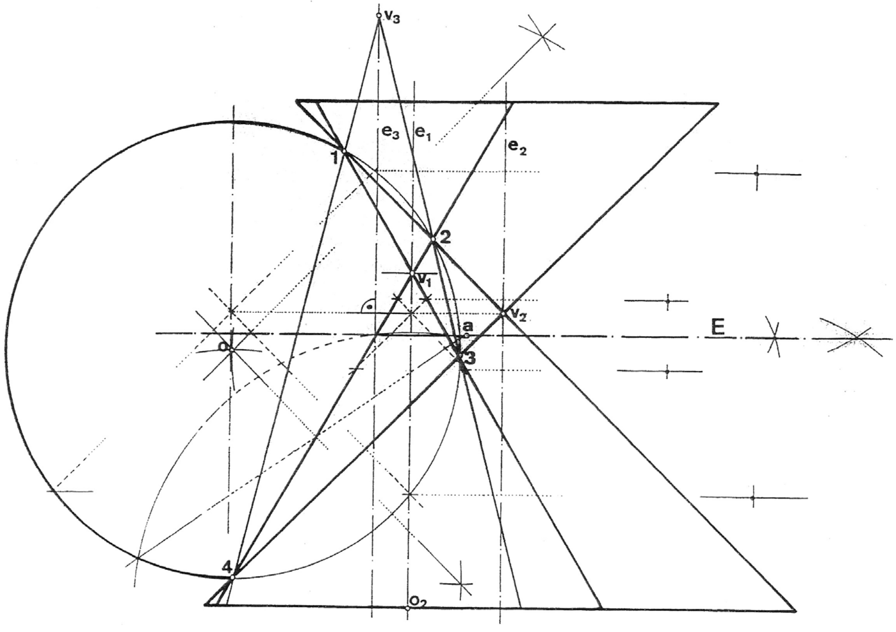
Gaspard Monge, dibujo de Elise Bruyere (1776-1842) y litografía de Charles-Philibert De Lasteyrie (1759-1849) anteportada del *Traité De La Géométrie Déscriptive* de Louis-Leger Vallée. Paris: Veuve de Courcier, 1819

TEOREMA DE LA ESFERA INTRUSA

José María Gentil Baldrich

RESUMEN

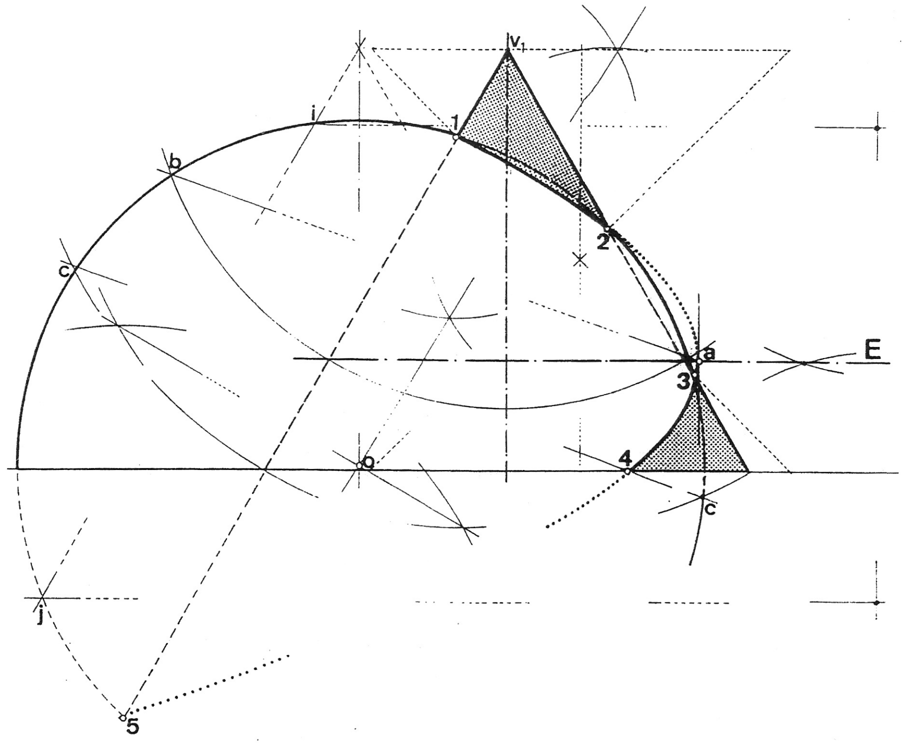
Las operaciones de cambio o suplantación son habituales en los más diversos ámbitos. No es difícil interpretar que las intenciones que los mueven están dirigidas a la obtención de la mejora de una situación, de un estado previo o, incluso, cuando se trata de cambios personales, del avieso propósito de pasar a veces por lo que no se es. En la obra Anfitrión de Plauto, uno de los protagonistas, Mercurio, se hace pasar por Sosias, criado del rey-soldado *Anfitrión*, para ayudar a Júpiter en seducir a Alcmena, que era la mujer de quien los obsequiaba. Así, tanto anfitrión –el que invita- como sosias –el doble, el impostor- se han añadido al lenguaje común, y practicado en la vida académica. Sin, por así decir, tan taimadas intenciones, esta impostura también se puede practicar en el campo geométrico. Por no estar suficientemente difundida vamos a demostrar la curiosa circunstancia geométrica de que por las intersecciones de dos conos de revolución de ejes paralelos siempre se puede hacer pasar una esfera, que esta esfera es fácilmente determinable y que esa propiedad se puede ampliar a otras superficies.



[1]

ANTECEDENTES

La traslación de ideas filosóficas sobre el mundo, la sociedad o el mero devenir vital, a aplicaciones matemáticas concretas, no es nada nueva. Ni tampoco es novedad que se produzcan de una forma aparentemente inopinada, como si no tuvieran nada que ver y que, si indagamos, veamos un paralelismo más que evidente. Por ejemplo, cuando surge la Geometría Descriptiva como disciplina autónoma, lo hizo en unas circunstancias políticas –la revolución liberal– que transformó la vigente concepción del mundo, pasando de su ancestral consideración como unicidad –un dios, una patria, un rey, de tan amplio uso hasta casi nuestros días– a una dualidad –un poder ejecutivo y otro legislativo, libres e iguales– o la consideración de dos polos distintos y equivalentes en el pensamiento. La aparición de una teoría matemática de la dualidad en la geometría, donde se traducía conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otras estructuras distintas pero equivalentes fue simultánea y aún perdura. Cuando se lee en los textos matemáticos la formulación de una exposición dividida en dos columnas análogas es, precisamente, un resultado de esa teoría. Y no se crea que esta idea – que merece un estudio particular que se sale de lo que aquí se pretende– resulta de una interpretación cogida por los pelos, sino que así fue expresado por los propios protagonistas del desarrollo geométrico: «un dualismo universal es la gran ley de la naturaleza, y reina en todas las partes del espíritu humano» (Chasles, 1837, p.409).



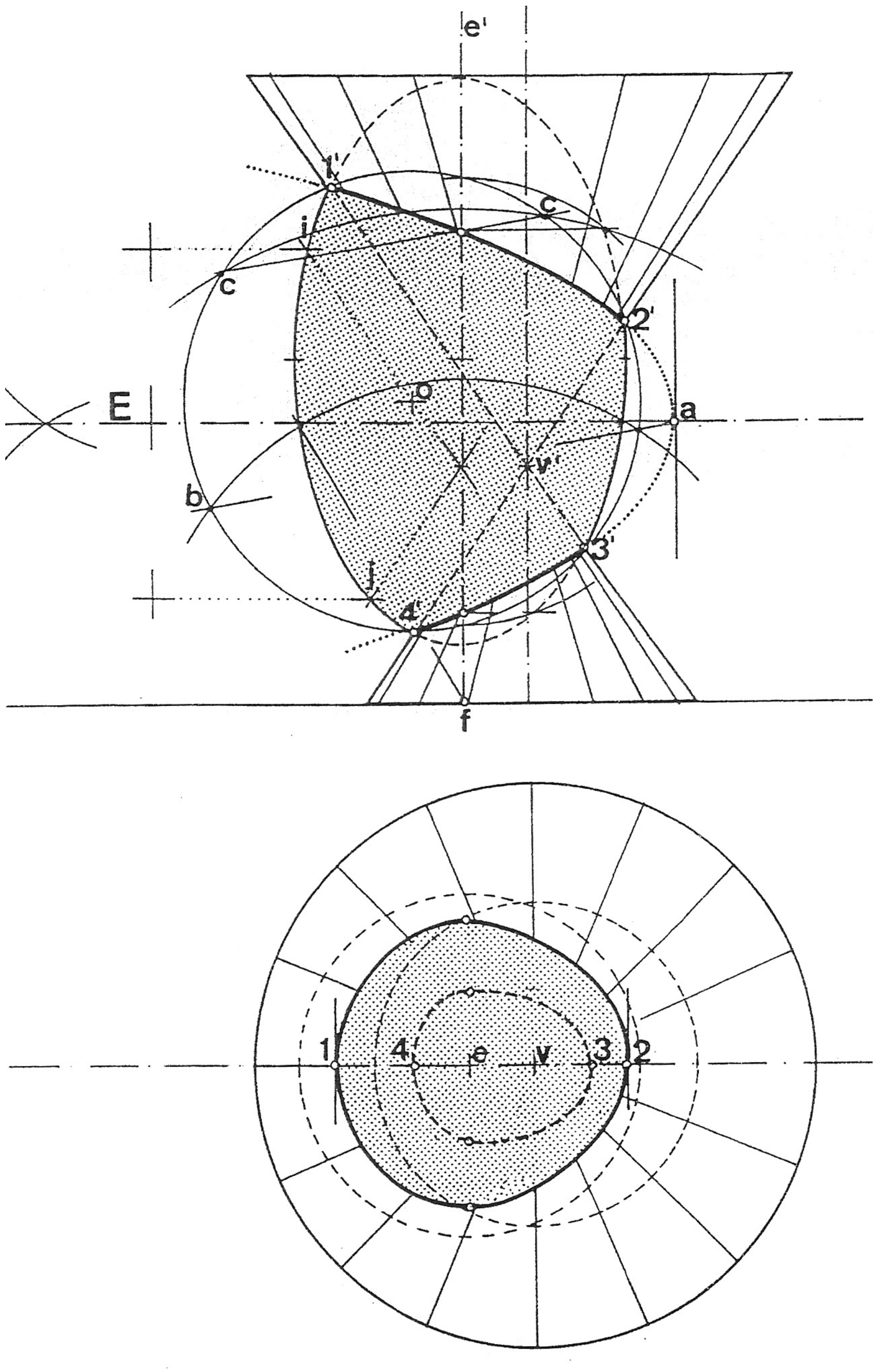
[2]

No vamos a ser aquí tan trascendente como Chasles y nos limitaremos a las operaciones de sustitución, mudanza o suplantación, que son habituales en los más diversos ámbitos. No es difícil interpretar que, en ellas, las intenciones que las mueven están dirigidas a la obtención de la mejora de una situación, de cambiar un estado previo ó, incluso, cuando se trata de permutas personales, del avieso propósito de pasar a veces por lo que no se es. Su empleo tiene un origen antiguo: en la obra Anfitrión de Plauto, encontramos como uno de los protagonistas, Mercurio, se hace pasar por Sosias, criado del rey-soldado *Anfitrión*, para ayudar a Júpiter en seducir a Alcmena, que para colmo era la mujer de quien los obsequiaba. Situaciones similares se han repetido en la literatura, sobre todo en el teatro, arte propicio al engaño y, así, tanto anfitrión –el que invita– como sosias –el doble, el impostor– se han añadido al lenguaje común, y practicado en la vida académica.

Sin, por así decir, tan taimadas intenciones, esta impostura también se puede practicar en el campo geométrico. En Geometría Descriptiva es conocida la aplicación del cono auxiliar para la obtención de las tangentes en los casos de puntos dobles de una curva intersección o la del cilindro de revolución de la traza de la proyección circunferencia en los casos de cuádricas de centros perpendicularmente enfrentados. En determinadas circunstancias podemos sustituir una superficie por otra y el resultado obtenido de la intersección de ambas seguirá siendo el mismo. Así, es fácil de comprender que cuando obtenemos una proyección de segundo grado de una cuártica intersección de dos superficies, cualquiera de las superficies es sustituible por un cilindro recto que tenga como directriz la cónica proyección resultante. Pero en este caso solo puede hacerse cuando ya se ha resuelto el problema y, por lo tanto, la cosa no tiene gracia.

Los estudios teóricos de las superficies en Geometría Descriptiva alcanzaron su cénit en la escuela italiana de principios del siglo XX. Autores como Federigo Enriques (1871-1946) o Gino Fano (1871-1952) elevaron el rigor de la disciplina a niveles insuperados, tratando los fundamentos matemáticos que justifican lo que queremos exponer aquí. Pero semejante desarrollo tenía un grave defecto congénito que, paradójicamente, era producto de su misma excelencia científica: la formulación casi exclusivamente matemática se apartaba tanto de la visión intuitiva que el dibujo proporciona a la representación del espacio que lo hacía, en la práctica, poco aplicable a la expresión gráfica que nos interesa. Como un canto del cisne, dicha circunstancia contribuyó al agostamiento de la disciplina que, para colmo, fue acelerado por la aplicación de las leyes antisemitas de Mussolini en 1938[1].

Por no estar suficientemente difundida vamos a demostrar aquí la curiosa circunstancia geométrica de que por las intersecciones de dos conos de revolución de ejes paralelos siempre se puede hacer pasar una esfera, que esta esfera es fácilmente determinable y que esa propiedad se puede ampliar a otras superficies[2].



[3]

TEOREMA

Toda cuártica intersección de dos cuádricas irreducibles está contenida en infinitas cuádricas. Siendo por tanto la curva el producto de la intersección de dos superficies cualquiera de esta infinitud, la cuártica define todo un haz de cuádricas. A su vez, la cuártica intersección de dos cuádricas pertenece en general a cuatro conos cuádricos[3]. En la figura [1] se representan dos conos de revolución, de ejes paralelos e1 y e2 y vértices v1 y v2. En esa proyección su intersección tiene que ser la habitual parábola, que queda definida por los puntos de corte de sus contornos aparente: 1, 2, 3 y 4 y la posición del eje E de la cónica. Siempre nos es posible definir un nuevo cono que, intersecciónándose con cualquiera de los anteriores, nos produzca idéntica intersección. El cono de vértice v3 y eje e3, obtenido por la prolongación de los segmentos 1-4 y 2-3, cumple con esta condición. Este cono es recto y de revolución, por lo expuesto en ocasiones anteriores.

Si consideramos el cuadrilátero que invariablemente se forma en un caso de este tipo, 1-2-3-4, nos bastará demostrar que dichos puntos son concíclicos. En efecto; la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea concíclico –inscriptible en una circunferencia– es que el ángulo formado por "las bisectrices de las prolongaciones de los lados opuestos sea recto". Esto se cumple siempre en nuestro caso, puesto que una de ellas será invariablemente horizontal ó vertical como bisectriz del contorno aparente de uno de los conos del problema, y la otra tendrá que ser vertical u horizontal como bisectriz del contorno del cono tercero auxiliar. En nuestra figura la primera bisectriz lo es de las prolongaciones de los segmentos 1-2 y 3-4, contornos del cono v2, y la segunda de los lados 1-4 y 2-3, contornos del cono v3. Dichas bisectrices tienen que ser obligatoriamente perpendiculares por la propia definición del problema. Surge como consecuencia la posibilidad de introducir una esfera suplente en cualquier intersección de dos conos de ejes paralelos y podemos enunciar que "por la intersección de dos conos de revolución de ejes paralelos siempre pasa una esfera"[4].

APLICACIÓN DE *LA ESFERA INTRUSA*

Una aplicación directa de la esfera del teorema anterior la vemos en la propia figura [1], donde obtenemos el vértice a y el eje E con su concurso, e igualmente podríamos haber resuelto alguno de los problemas planteados hasta ahora introduciendo una esfera oportuna. Vamos a desarrollar aquí la solución del problema de la intersección de dos conos mediante una esfera intrusa. En la figura [2] se ha suprimido el cono de vértice v2 y hemos determinado la esfera correspondiente al cuadrilátero 1-2-3-5, trazando las mediatrices de 1-2 y 3-5 y obteniendo el centro de la esfera o. La obtención del eje de la parábola E se efectúa desplazando el cono hasta el eje de la esfera y, determinando los paralelos de corte en i y j, situando E en su punto medio. El vértice a de la parábola lo hallamos mediante la esfera auxiliar que tiene centro en v1 y corta en b. Con estos datos el dibujo de la parábola no ofrece dificultad.

No es preciso indicar que, con auxilio de la esfera de centro v1, podríamos obtener cuantos puntos quisiéramos. Por ejemplo: habiendo hecho caso omiso de la proyección horizontal en esta aplicación, no podemos obtener de manera directa aquí el punto 4 presente en el problema original como corte de las trazas horizontales de los conos. Para obtenerlo trazamos la esfera de centro v1 que contiene la traza horizontal del cono; al cortar a la esfera en c, nos basta obtener el punto de corte de dichas rectas proyección para situar el punto 4 buscado.

En la figura [3] representamos la intersección de un elipsoide de eje e, y un cono de vértice v, ambos de revolución. Aunque aquí una de las superficies no sea un cono, también le será de aplicación el teorema, al poder definirse otro con facilidad con la mera prolongación de los lados 1-2 y 3-4 del cuadrilátero[5]. Obtenemos el centro o de la esfera intrusa por las correspondientes mediatrices; definimos la posición del eje E trasladando el cono al eje del elipsoide a partir de los puntos de corte i y j; y situamos el vértice a con la esfera auxiliar de centro f en el eje del elipsoide, como en la figura anterior, a partir de b. La parábola queda así definida, pudiendo hallarse otros puntos de ella como en el caso anterior, utilizando la sección de la esfera auxiliar como aquí se ha hecho a partir de c.

La proyección horizontal no precisa de mayor aclaración, procediéndose para la obtención de la intersección como ya antes se ha hecho. Los puntos 1, 2, 3 y 4 poseen tangentes de punta por ser del contorno aparente vertical y la curva obtenida es un *óvalo de Descartes* del tipo ya referido. Terminamos con esto la aplicación del teorema de la esfera intrusa que, aportando la facilidad y rigor deseados en la resolución de nuestros problemas de intersecciones, no siempre será posible utilizarla. Por muy evidente que parezca no está de más señalar que, cuando una de las superficies que se interseccionan es ya una esfera, no existe intrusión esférica que valga.

REFERENCIAS

CHASLES, Michel. *Aperçu historique sur l'origine et développement des méthodes en Géométrie, suivi d'une Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*. Bruselas: Hayez, 1837.

ENRIQUES, Federigo. *Lecciones de Geometría Descriptiva*. Madrid: Sucesores de Rivadeneyra, 1943.

GENTIL BALDRICH, José Mª. *Sobre la intersección de las cuadricas de revolución de ejes paralelos*. Sevilla: ETSA, 1997.

PÉREZ-BEATO OLIVIER, Manuel & SÁNCHEZ-MÁRMOL DE LA CALZADA, Lino. *Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación*. Madrid: Saeta, 1961 (3ª ed).

NOTAS

1 Federigo Enriques era catedrático en la Universidad de Roma y Gino Fano en el Politécnico de Turín. También fue desposeído de su cátedra otro importante autor de Geometría Descriptiva, Gino Loria (1862-1954) que lo era de Génova. No hay motivos para pensar que –como otros– el régimen fascista odiara la Geometría Descriptiva, pero sí para observar que todos los catedráticos importantes eran judíos. Gino Fano –quizás aprovechándose de que por las circunstancias políticas no podía protestar– fue objeto en España de un robo de derechos de autor descarado: su libro *Geometría Descriptiva*, I (1940) y II (1941), que publicaba en el Politécnico de Turín desde 1910, lo editó la Delegación Nacional de Prensa, Propaganda y Publicaciones del S.E.U. sin nombre de autor. En la Biblioteca Nacional aparece como anónimo.

2 Véase un estudio general en Gentil, 1997.

3 Podemos decir que, si por 8 puntos del espacio pasa un haz de cuádricas, por sus 4 puntos proyección pasa un haz de cónicas (Enriques, 1943, p. 284. Traducción de Tomás Rodríguez Bachiller (1899-1980), catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Madrid que tiene como originalidad poco habitual el haber nacido en Hong-Kong).

4 Otras consecuencias son:
1ª: "En todo cuadrilátero inscriptible las bisectrices de los ángulos formados por las prolongaciones de los lados opuestos son paralelas a las bisectrices de las diagonales". Por esto, "las bisectrices de las diagonales del cuadrilátero formado por los puntos de corte de los contornos aparentes son perpendiculares", como sucede siempre en nuestro caso.
2ª: "Los ejes de las cónicas que se cortan en cuatro puntos concíclicos son paralelos". Esto sucede siempre en las intersecciones de cuádricas de ejes paralelos pero no cuando sus ejes se cortan. Es fácil de ver en nuestra figura donde concurren 5 cónicas: tres degeneradas de la hipérbola (los tres contornos aparentes de los conos), una parábola y una circunferencia.
3ª: "Las rectas de los contornos aparentes de los conos son antiparalelas". Dos rectas A y B se llaman antiparalelas respecto a una tercera C, si una de ellas, B, es paralela a la simétrica de A respecto a C.
Sobre la teoría de las rectas «antiparalelas»: Pérez-Beato y Sánchez-Mármol ,1961, pp.222-224.

5 Aunque en general no sea posible, cuando una de las superficies que se intersectan es ya un cono, siempre se puede encontrar otro cono por aplicación del teorema de Enriques antes referido.

ACCA

015

ANÁLISIS Y COMUNICACIÓN CONTEMPORÁNEA DE LA ARQUITECTURA
analysis and contemporary communication of architecture