

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Análisis Dinámico de la Eficiencia: una aplicación a  
la Superliga Europea

Autor: Antonio Jesús Aranda Alba

Tutor: Antonio Plácido Moreno Beltrán

Dpto. Organización Industrial y Gestión de  
Empresas I  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2019





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

# **Análisis Dinámico de la Eficiencia: una aplicación a la Superliga Europea**

Autor:

Antonio Jesús Aranda Alba

Tutor:

Antonio Plácido Moreno Beltrán

Profesor contratado doctor

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado: Análisis Dinámico de la Eficiencia: una aplicación a la Superliga Europea

Autor: Antonio Jesús Aranda Alba

Tutor: Antonio Plácido Moreno Beltrán

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal



*A todos aquellos que confiaron  
en mí más que yo mismo*





# Agradecimientos

---

Cuando uno se embarca a estudiar una carrera relacionada con la Ingeniería comienza pensando que todas esas historias de suspensos, de repetir curso, etc. son solo exageraciones y que siendo una persona suficientemente trabajadora puedes sacar la carrera adelante sin excesivos sobresaltos. Conforme pasa el tiempo te das cuenta de que todo lo que te contaron se queda corto, que suspendes, que tropiezas una y otra vez con ciertas asignaturas. Durante este periodo resulta prácticamente inviable la idea de terminar los estudios; la finalización de ellos se siente lejana e irreal como si de un fuego fatuo se tratara. Tras esto, los años van pasando, vas consiguiendo superar asignaturas y vas dándote cuenta de cómo ha cambiado tu mentalidad y capacidad respecto al estudio en unos pocos años, pero aun así sigue viéndose lejos el final. Sin embargo, de repente te das cuenta de que te encuentras enfrascado en la finalización de tu Trabajo Fin de Grado y descubres que ese irreal final se materializa ante tus ojos.

En ese instante en el que estas a punto de coronar esta cima llamada Ingeniería te sientes henchido de orgullo y recompensado por todo el esfuerzo, por todas las horas delante de apuntes y por todos los momentos de desesperación donde viste factible abandonar todo y cambiar el rumbo de tu vida. Y sin duda, el final podría haber sido ese de no contar con el apoyo de todos aquellos que paso a nombrar y alguno más que me dejaré en el tintero.

En primer lugar, quiero dedicar este trabajo a toda mi familia, pero en particular a mis padres Antonio y Desirée, por hacerme amar la cultura, la investigación e inculcarme la cultura del esfuerzo. Porque con mucho esfuerzo mental y económico han conseguido que llegue donde hoy me encuentro.

No quiero pasar por alto a mis compañeros y amigos Iciar Iribarren, José Antonio Díaz, Manuel Barrera y Adrián Bravo. Gracias a ellos estos años de estudio han sido mucho más llevaderos con su compañía y amistad. También quiero acordarme de mis compañeros de entrenamiento, Manuel Jesús Bellido, Ricardo Manuel Olivares y Eliot Pineda, gracias por ayudarme a despejar la mente siendo amigos dentro y fuera de los hierros. Por último, también quiero agradecer su apoyo y amistad a Nicolás Calvo, Darío Pavón y Benjamín Massaneck. Sin todos ellos es más probable que esas ideas de abandono hubieran tenido más peso en mi mente. Por último, no me quiero olvidar de M<sup>a</sup> Ángeles García por su ayuda con la corrección de los textos en inglés.

También quiero agradecer a Gabriel Villa Caro por hacerme amar la metodología DEA y por ser un gran docente. A mi tutor, Antonio Plácido Moreno Beltrán, por su intachable labor como director de este trabajo, sin su inestimable ayuda, consejos y disponibilidad habría resultado imposible realizar este trabajo. No me quiero olvidar de todos aquellos profesores tanto de la Universidad de Sevilla como de fuera de ella, como Pablo Cortés, Juan Manuel Ramírez y Manuel Toscano entre otros, cuya gran labor docente me han ayudado enormemente a amar el conocimiento y a alcanzar el momento en el que me hayo.

Por último, quiero dedicar este trabajo a una de las personas más importantes de mi vida, María Quesada, sin duda ha sido uno de los pilares más importantes para conseguir que ahora mismo me encuentre escribiendo estas palabras. Gracias de corazón por todo el apoyo y por todo el cariño que me has transmitido día a día desde que te conozco.



# Resumen

---

El objetivo principal de esta investigación es el de plantear propuestas de cambio a los distintos clubes que tienen intención de ser parte de la futura Superliga Europea de Fútbol en aras de mejorar su eficiencia. La Superliga Europea de Fútbol es una posible competición futura independiente de la UEFA que pretende integrar a 16 de los mejores equipos a nivel europeo, y prácticamente a nivel mundial.

Cada club tendrá a su disposición una serie de recursos que tendrá que utilizar para obtener los mejores resultados económicos y deportivos que fueran posibles. En caso de que un club no esté generando unos resultados suficientes para los recursos que emplea en comparación con el resto de clubes, se considerará ineficiente y se hará necesaria la búsqueda de soluciones y culpables.

En el mundo del Fútbol, donde hasta la más mínima diferencia es importante, una ineficiencia alta de manera continuada podría hacer a los equipos perder gran capacidad competitiva, con el consiguiente daño sobre las arcas de los equipos. Esto, de manera sucesiva podría llevar incluso a la desaparición de un equipo.

Para realizar este análisis de la eficiencia se hará uso de la metodología DEA (Data Envelopment Analysis). En concreto, se aplicará el modelo Dynamic DEA, que no solo analizará la eficiencia de los distintos equipos implicados en el análisis, sino que además hará comparaciones a lo largo de una serie de intervalos de tiempo.



# Abstract

---

The main purpose of this research is to bring up change proposals for change to different clubs that intend to be part of the European Football Superleague in order to improve its efficiency. The European Football Superleague is a possible future competition independent of the UEFA which aims to integrate 16 of the best teams at European level, and practically at global level.

Each team will have at its disposal a number of resources that it will have to use to obtain the best economic and sport results as long as possible. If a club is not generating sufficient results for the resource it uses compared to other clubs, it will be considered inefficient and it will be necessary to search for solutions and guilty parties.

In the Football world, where even the smallest difference is important, continued high inefficiency levels could cause teams to lose great competitive ability, with consequent damage to the teams' economy. This, successively, could lead to the disappearance of the team.

To make this efficiency analysis, the DEA (Data Envelopment Analysis) methodology will be used. Specifically, Dynamic DEA model will be applied, this method will not only analyse the different teams efficiency involved in the analysis, but will also make comparisons along a series of time slots.



# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>9</b>
<b>Resumen</b>	<b>11</b>
<b>Abstract</b>	<b>13</b>
<b>Índice</b>	<b>15</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>17</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>19x</b>
<b>1 Objetivos y alcance de la investigación</b>	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.1. <i>Objetivo y alcance de la investigación</i>	1
1.2. <i>Estructura final del documento</i>	2
<b>2 Contexto de la Superliga Europea de Fútbol</b>	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.1. <i>Introducción</i>	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.2. <i>Influencia del fútbol en la sociedad</i>	3
2.3. <i>La Superliga Europea</i>	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.3.1. <i>Antecedentes históricos de la Superliga Europea</i>	5
2.3.2. <i>Clubos miembros</i>	6
2.3.3. <i>Situación económica del fútbol actual</i>	7
<b>3 Metodología DEA</b>	<b>11</b>
3.1. <i>Introducción</i>	11
3.2. <i>Orígenes de la metodología</i>	11
3.3. <i>Conceptos básicos</i>	<b>1¡Error! Marcador no definido.</b>
3.4. <i>Virtudes y carencias del método</i>	15
3.5. <i>Modelos DEA básicos</i>	16
3.5.1. <i>Orientación de entrada y orientación de salida</i>	16
3.5.2. <i>Retorno de escala constante y variable</i>	16
3.5.3. <i>Modelos con retorno de escala constante</i>	18
3.5.4. <i>Modelos con retorno de escala variable</i>	22
3.5.5. <i>Otros modelos</i>	24
3.5.6. <i>Conclusión</i>	28
3.6. <i>Revisión de metodología DEA aplicado a Deportes</i>	28
3.7. <i>Dynamic DEA</i>	29
3.7.1. <i>Estructura del modelo</i>	31
3.7.2. <i>Función objetivo y cálculo de eficiencias</i>	32
3.7.3. <i>Inclusión de una condición inicial en las variables carry-over</i>	36
3.7.4. <i>Índice de factor de eficiencia</i>	37
3.8. <i>Tratamiento de variables no positivas</i>	38
3.9. <i>Conclusiones</i>	39
<b>4 Implementación del modelo</b>	<b>40</b>
4.1. <i>Introducción</i>	40
4.2. <i>Objetivo del análisis DEA</i>	40
4.3. <i>Objeto del análisis DEA</i>	<b>41¡Error! Marcador no definido.</b>

4.4. Descripción del modelo a implementar	41	<b>Error! Marcador no definido.</b>
4.4.1. Variables del modelo	41	
4.4.2. Esquema del modelo	42	
4.4.3. Características del modelo implementado	43	
4.5. Justificación del modelo	44	
4.5.1. Elección de variables	44	
4.5.2. Fuentes de datos utilizados	44	<b>Error! Marcador no definido.</b>
4.6. Modelado matemático del modelo	45	
4.7. Retorno de escala variable	47	
4.8. Procedimiento de implementación del modelo	48	<b>Error! Marcador no definido.</b>
<b>5</b> Análisis de resultados	<b>49</b>	
5.1. Introducción	49	
5.2. Medida de la eficiencia	49	
5.3. Slacks	53	<b>Error! Marcador no definido.</b>
5.4. Benchmarking	57	<b>Error! Marcador no definido.</b>
<b>6</b> Conclusiones		<b>Error! Marcador no definido.</b>
<b>Referencias</b>		<b>Error! Marcador no definido.3</b>
<b>Anexos</b>	<b>66</b>	
Anexo 1. Documento filtrado por Football Leaks	66	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 2. Valor de mercado de la plantilla	67	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 3. Puntuación total ponderada	67	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 4. Goles a favor por partido	71	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 5. Goles en contra por partido		<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 6. Sueldo de los jugadores	72	
Anexo 7. Inversión en fichajes	72	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 8. Modelo en LINGO®		<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 9. Eficiencia global	76	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 10. Slacks	76	<b>Error! Marcador no definido.</b>
Anexo 11. Lambdas	83	<b>Error! Marcador no definido.</b>
<b>Error! Marcador no definido.</b>		
<b>Error! Marcador no definido.</b>		



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 3-1. Investigaciones DEA en Baloncesto	28
Tabla 3-2. Investigaciones DEA en Béisbol	28
Tabla 3-3. Investigaciones DEA en Fútbol	29
Tabla 4-1. Listado de clubes bajo análisis	41
Tabla 4-2. Relación de datos del modelo y su significado	45
Tabla 5-1. Resultados de eficiencia CRS y VRS	49
Tabla 5-2. Equipos que se proyectan sobre cada equipo	57
Tabla A-1. Valor de mercado de la plantilla (en millones de euros)	67
Tabla A-2. Puntuación liguera y campeón de Liga	67
Tabla A-3. Puntuación de Liga ponderada	68
Tabla A-4. Puntuación ponderada Supercopa Nacional	68
Tabla A-5. Resultados coperos en Inglaterra y Francia	69
Tabla A-6. Puntuación ponderada Copa Nacional	69
Tabla A-7. Puntuación a otorgar en función de los resultados europeos	69
Tabla A-8. Puntuación ponderada de competiciones europeas	70
Tabla A-9. Puntuación total ponderada	70
Tabla A-10. Goles a favor por partido	71
Tabla A-11. Goles en contra por partido	71
Tabla A-12. Sueldo total de los jugadores (en euros)	72
Tabla A-13. Inversión en fichajes (en millones de euros)	72
Tabla A-14. Inversión en fichajes (en millones de euros)	73
Tabla A-15. Eficiencia global CRS y VRS	74
Tabla A-16. Slacks de puntuaciones, CRS	75
Tabla A-17. Slacks de goles a favor por partido, CRS	75
Tabla A-18. Slacks de goles en contra por partido, CRS	76
Tabla A-19. Slacks de salarios (en €), CRS	76
Tabla A-20. Slacks de inversión (en millones de €), CRS	77
Tabla A-21. Slacks de valor de la plantilla (en millones de €), CRS	77
Tabla A-22. Slacks de puntuaciones, VRS	78
Tabla A-23. Slacks de goles a favor por partido, VRS	78
Tabla A-24. Slacks de goles en contra por partido, VRS	79
Tabla A-25. Slacks de salarios (en €), VRS	79
Tabla A-26. Slacks de inversión (en millones de €), VRS	80
Tabla A-27. Slacks de valor de la plantilla (en millones de €), VRS	80
Tabla A-28. Lambdas obtenidas en el análisis VRS temporada 2014-2015	81
Tabla A-29. Lambdas obtenidas en el análisis VRS temporada 2015-2016	82
Tabla A-30. Lambdas obtenidas en el análisis VRS temporada 2016-2017	83
Tabla A-31. Lambdas obtenidas en el análisis VRS temporada 2017-2018	84
Tabla A-32. Lambdas obtenidas en el análisis CRS temporada 2014-2015	85
Tabla A-33. Lambdas obtenidas en el análisis CRS temporada 2015-2016	86
Tabla A-34. Lambdas obtenidas en el análisis CRS temporada 2016-2017	87
Tabla A-35. Lambdas obtenidas en el análisis CRS temporada 2017-2018	88



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1. Conjunto de datos sociales y económicos de la Liga Española Profesional en 2017, considerando 1ª y 2ª División (Laliga, 2017)	5
Figura 2. Ingresos obtenidos (en millones de €) por los clubes profesionales de España desde la temporada 2011-12 a la 2016-17 (La Liga, 2017)	7
Figura 3. Gastos (en millones de €) del conjunto de clubes profesionales de España en la temporada 2016-17 (La Liga, 2017)	8
Figura 4. Evolución total de activos de los clubes de fútbol europeo desde 2010 hasta 2015	8
Figura 5. Activos de los clubes de fútbol de cada Liga de Europa en la temporada 2015-2016 (UEFA, 2016)	9
Figura 6. Variación del número de traspasos de jugadores por encima de 15 millones de € realizados a nivel europeo	10
Figura 7. Esquema básico de productividad de Farrel	12
Figura 8. Representación de la tecnología CRS para un modelo con una entrada y una salida	17
Figura 9. Representación de la tecnología VRS para un modelo con una entrada y una salida	17
Figura 10. Solución de un modelo CCR-INPUT con una entrada y una salida	20
Figura 11. Solución de un modelo CCR-OUTPUT con una entrada y una salida	21
Figura 12. Solución de un modelo BCC-INPUT con una entrada y una salida	23
Figura 13. Solución de un modelo BCC-OUTPUT con una entrada y una salida	24
Figura 14. Solución dada para DMU3 por el modelo basado en la Super eficiencia para un modelo BCC-INPUT con una entrada y una salida	26
Figura 15. Estructura básica de Dynamic DEA	30
Figura 16. Estructura de Dynamic DEA con condición inicial	36
Figura 17. Estructura del modelo a implementar	43
Figura 18. Fragmento de código LINGO® utilizado	48
Figura 19. Fragmento de hoja Excel debidamente preparada	48
Figura 20. Resultados de eficiencia CRS	50
Figura 21. Resultados de eficiencia VRS	51
Figura 22. Eficiencia global CRS y VRS	52
Figura 23. Evolución de la eficiencia promedio CRS	53
Figura 24. Evolución de la eficiencia promedio VRS	53
Figura 25. Variación porcentual slacks en CRS para Manchester United	54
Figura 26. Variación porcentual slacks en VRS para Manchester United	54
Figura 27. Variación de los distintos slacks en CRS de todos los equipos	55
Figura 28. Variación de los distintos slacks en VRS de todos los equipos	56
Figura 29. Número de equipos que se proyectan sobre cada club	59
Figura 30. Documento filtrado por Football Leaks sobre los integrantes de la Superliga Europea	66



# 1 OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

---

*No se puede desatar un nudo sin saber cómo está hecho.*

*- Aristóteles -*

El Fútbol, a día de hoy, es una industria tremendamente importante en la economía global. Se estima que el 0.71% del PIB global lo genera este deporte, es decir, el PIB global del Fútbol se encontraría entre el PIB de Bélgica y el PIB de Noruega. Estos datos representan muy bien la magnitud económica que ha alcanzado el Fútbol moderno, lo cual nos lleva a suponer que las cantidades que se manejan a la hora de hacer negocios entre clubes, las cantidades que se obtienen como premio de las competiciones, los sueldos de los deportistas, pagos por derechos televisivos e inversiones en infraestructuras son cifras tremendamente altas. Además, este deporte no solo es un negocio sin más, sino que es un fenómeno social, capaz de movilizar a miles de personas aficionadas, las cuales, debido a esto, consumirán en otros sectores favoreciendo la economía. Por tanto, el Fútbol además de ser una industria tremendamente importante a nivel global, tiene una repercusión en otros sectores como pudiera ser el transporte, la televisión o la restauración entre muchos otros.

Lo que resulta aún más sorprendente es que todo apunta a que esta industria no va a hacer otra cosa salvo seguir creciendo. Y es en este contexto de crecimiento donde surge la idea de la creación de una Superliga Europea de Fútbol, donde los equipos que se encuentran a día de hoy en la cúspide del fútbol europeo (y prácticamente del Fútbol mundial) quieren crear una competición donde solo accedan los reyes de este deporte y donde estos mismos equipos puedan autogestionar dicho torneo motivados por el deseo de obtener aún más ingresos de los que ya obtienen.

Debido a que en el Fútbol cada pequeña diferencia acostumbra a ser crucial a la hora de obtener resultados, resulta interesante realizar un análisis de cómo cada equipo, de la anterior mencionada élite europea, gestiona los recursos con los que cuenta en aras de obtener un buen resultado tanto económico como deportivo.

## 1.1. Objetivo y alcance de la investigación

Por todo ello, el objetivo de esta investigación será determinar qué equipos de los que formarán la Superliga Europea, a lo largo de los últimos cuatro años, han gestionado de manera eficiente sus recursos y cuáles de ellos no, estos últimos deberán ser conscientes de la situación en la que se encuentran y deberán tomar decisiones para solventarla ya que una ineficiencia alta podría hacer que algunos equipos, al entrar a competir en la Superliga, llegaran a tener problemas económicos o, al menos, empeoraran su situación respecto a la actual.

Para ello se llevará a cabo un análisis de la eficiencia mediante la metodología DEA (Data Envelopment Analysis), en concreto se aplicará el método Dynamic DEA ya que nuestra intención no es solo evaluar la eficiencia actual de los clubes, sino la eficiencia que hayan tenido en las últimas cuatro temporadas.

Se espera que tras el análisis se tengan claras cuáles son las carencias que presentan, o presentaron en algún momento, estos clubes. Además de determinar qué equipos eficientes debe usar cada equipo ineficiente como referencia para realizar cambios en su gestión de recursos.

## 1.2. Estructura final del documento

Este trabajo constará de seis capítulos y diez anexos, los cuales se desarrollarán de la siguiente forma:

- El primero de ellos, el presente, describe de manera somera los objetivos que tiene esta investigación, así como la estructura del documento.
- En el segundo capítulo se describe el contexto social y económico del Fútbol en la actualidad, también incluye una descripción de porqué surge la Superliga Europea de Fútbol y quiénes la integrarán.
- En el tercer capítulo se desarrolla la teoría de la Metodología DEA. Comenzando por antecedentes históricos, conceptos básicos y modelos sencillos ampliamente utilizados, pasando a una recopilación de investigaciones en el ámbito deportivo usando DEA. Por último, se desarrolla la teoría relacionada con Dynamic DEA, dicho método será el utilizado en esta investigación.
- En el cuarto capítulo se describen las distintas características con las que contará el modelo matemático a utilizar para medir la eficiencia así como el modelo en sí mismo. Por último, se hace mención a cómo se ha llevado a cabo la implementación a nivel informático de este modelo.
- En el quinto se analizarán los datos obtenidos de medir la eficiencia, haciendo especial hincapié sobre la eficiencia de cada club en cada temporada, las mejoras a realizar y los equipos que deben ser tomados como referencia.
- En el sexto se plasmarán las conclusiones que se pueden obtener de este trabajo así como posibles líneas de futuras investigaciones.
- En los anexos se recopilan diversos datos, tanto los que han sido recopilados para realizar la investigación, como los que han sido obtenidos tras realizar la medida de la eficiencia, objetivo clave de esta investigación.

# 2 CONTEXTO DE LA SUPERLIGA EUROPEA DE FÚTBOL

---

*Todo cuanto sé con mayor certeza sobre la moral y las obligaciones de los hombres, al Fútbol se lo debo.*

*- Albert Camus-*

## 2.1 Introducción

A lo largo de este capítulo se expone el contexto socioeconómico en el que surge la Superliga Europea de Fútbol. En primer lugar, se hace un análisis de la influencia que tiene en la sociedad el deporte en general y el fútbol en particular. A continuación, se expone un breve contexto histórico del fútbol europeo y de los distintos atisbos que han habido de la creación de una Superliga Europea, para continuar con un análisis sobre la filtración de un documento donde se detallaban los posibles miembros de esta competición. Por último, se expone un análisis sobre el sistema económico que existe en el fútbol moderno, sobre el crecimiento económico reciente y sus consecuencias, además de las consecuencias económicas de la creación de una Superliga Europea.

## 2.2 Influencia del fútbol en la sociedad

Desde los comienzos de la historia, el ser humano, al igual que muchos otros animales, siempre ha estado realizando ejercicio físico. Bien por cubrir una serie de necesidades fisiológicas (cazar, huir de un peligro, preparar para recolectar frutos, etc.) o bien por la siempre presente rivalidad entre distintos grupos étnicos, tribus y demás por la obtención de recursos o por la instintiva necesidad del hombre de ser hostil hacia los que no pertenecen a su grupo.

Esta rivalidad se ha visto materializada a lo largo de la historia en forma de conflictos armados, trifulcas, ataques, saqueos, etc. Pero también, como canalización de ésta, a través de distintas competencias deportivas como fueron las olimpiadas en la Grecia Clásica.

La competencia deportiva ha existido en la práctica totalidad de culturas a lo largo de la historia. En algunas culturas el deporte se usaba a veces para resolver ciertos conflictos sin derramamiento de sangre (como fue en ocasiones el levantamiento de piedras vasco, entre otros), en otras culturas el deporte contaba con un fuerte carácter ritual (como fue el Juego de pelota mesoamericano, también conocido como Pelota Maya), mientras que en otras culturas se usaba para prepararse o entrenar para la guerra (como el deporte del Te, antecesor del Karate, creado con la intención de defenderse de ataques de samuráis. O como el Sambo ruso, que aún es usado

a día de hoy como técnica de autodefensa además de ser un deporte). A todas estas competencias deportivas habría que añadir que el ejercicio físico estaba presente en la vida diaria de la mayoría de individuos, y existían escasas tareas que no requerían de un esfuerzo físico.

Con el paso del tiempo y con el progreso tecnológico, la actividad física en el día a día se ha ido viendo reducida y el deporte ha pasado a ser una actividad de ocio principalmente. Aun así, el deporte es una actividad ampliamente realizada en todo el mundo ya que los beneficios a nivel mental y físico que aporta a sus seguidores son ampliamente conocidos. Según la declaración del Consejo Europeo de Niza sobre el deporte (2000), “el deporte es una actividad humana basada en unos valores sociales, educativos y culturales esenciales. Es un factor de inserción, de participación en la vida social, de tolerancia, de aceptación de las diferencias y de respeto de las normas” (p. 1).

Como se desprende de esta afirmación, el deporte cubre una necesidad esencial en los seres humanos, al igual que es comer o respirar aunque no tan evidente, que es la necesidad de sentirse parte de un grupo<sup>1</sup>, de sentirse integrado y respetado. Esta necesidad de sentirse parte de un grupo es la que hace que los deportes de mayor éxito sean deportes de equipo, ya que los espectadores se sienten parte de un grupo social, cubriéndose así en primer lugar la necesidad de formar parte de un grupo y, además, cubriendo la necesidad de competir entre grupos y entre individuos que aún queda latente de nuestros ancestros.

En este contexto el fútbol, que es a día de hoy uno de los deportes con más seguidores del mundo, es capaz de aunar todas estas necesidades humanas. Por un lado, los seguidores de un equipo son un grupo social, de manera que cada uno de sus miembros se sienten partes de él y se sienten especiales por ello además de sentirse valorados y reconocidos por parte de los miembros de su mismo grupo. Por otro lado, la rivalidad y competitividad existente en este deporte es quizá el punto más determinante de su éxito social, ya que el fútbol resulta más impredecible que otros deportes<sup>2</sup>, de manera que equipos débiles a priori sean capaces de derrotar a otros más fuertes a través del sacrificio, el esfuerzo y algo de suerte reforzándose aún más la cohesión del grupo y el interés por parte de más adeptos. Además, dicha característica hace que el interés de personas que no pertenezcan necesariamente a ningún equipo también crezca ya que el espectáculo en sí mismo resulta interesante y entretenido.

Es innegable que el fútbol está presente en el día a día de muchas personas. Basta con encender la televisión o la radio para encontrar noticias, debates, reportajes, etc. sobre algún tema relacionado con el fútbol. A día de hoy los partidos de fútbol son más que una simple competencia deportiva, resultan ser un evento social, donde grandes masas de personas no solo se limitan a ser espectadores de una serie de partidos, sino que tienen al fútbol como un estilo de vida o, al menos, es una parte importante de su vida, de sus conversaciones y en definitiva de su tiempo de ocio.

Aparte de todo este factor psicosocial, no hay que olvidar que el fútbol es un negocio y que a día de hoy mueve ingentes cantidades de dinero. Es un factor clave el hecho de que en la actualidad el fútbol tenga un carácter mercantil más allá de la mera competitividad deportiva. Los clubes, en aras de aumentar sus ingresos, invierten para mejorar su calidad para así obtener victorias que hagan aumentar sus cifras de aficionados, ingresos por derechos televisivos, premios de torneos y demás. Dichas inversiones, millonarias en muchas ocasiones, hacen que el espectáculo mejore y, por tanto, el interés del público en general y el calado en la sociedad sea cada vez mayor.

---

1 Existen diversos estudios psicológicos y sociológicos que han investigado el efecto de los grupos sobre los individuos y como la pertenencia a ellos cambian sus patrones de actuación. Por citar unos pocos se podría mencionar al *Experimento de la Tercera Ola*, al *Experimento de Robber's Cave* o al *Experimento de Sherif* entre muchos otros.

2 Existen otros deportes donde es más sencillo determinar quién ganará a priori un partido o un campeonato.





Figura 1. Conjunto de datos sociales y económicos de la Liga Española Profesional en 2017, considerando 1ª y 2ª División (Laliga, 2017).

A modo de resumen, el fútbol goza de gran relevancia en la sociedad por dos motivos. El primero porque cubre una serie de necesidades humanas de integración y participación en grupos así como de canalizar ciertos niveles de rivalidad innata en los humanos. En segundo lugar, el fútbol es un negocio y por tanto hay intereses económicos, dichos intereses hacen que se produzcan inversiones de dinero e infraestructuras de manera que el espectáculo ofrecido sea cada vez mejor y por tanto aumenta el número de personas interesadas en este deporte.

## 2.3 La Superliga Europea

### 2.3.1. Antecedentes históricos de la Superliga Europea

En 1955, impulsado por el diario deportivo francés L'Equipe, y con el apoyo de Santiago Bernabéu (Presidente del Real Madrid Club de Fútbol) y de Gusztáv Sebes (subsecretario de deportes de Hungría y vicepresidente de la UEFA) se inauguró, bajo la denominación de "Copa de Clubes Campeones Europeos" (en francés, *Coupe des Clubs Champions Européens*) una competición futbolística a nivel europeo que enfrentaba a los campeones de las distintas competiciones ligueras de Europa, dicha competición es la que posteriormente sería conocida como la "UEFA Champions League" y es a día de hoy uno de los torneos futbolísticos más prestigiosos a nivel mundial. En 1992 se incluyó la fase de grupos previa a las eliminatorias. Pero no sería hasta 1997 cuando dejaron de participar solo los equipos campeones de Liga. A partir de ese año pasaron a formar parte del torneo aquellos equipos que hubiesen quedado en segundo lugar en las ligas más importantes de Europa, y tan solo dos años

después, en 1999, se adoptó el sistema actual en el que dependiendo del coeficiente UEFA<sup>3</sup> que tuviera cada federación participarían hasta cuatro equipos de un mismo país.

La industria del fútbol durante estos años tuvo un continuo crecimiento que parecía no tener límite, dicho fenómeno empezó a hacerse notable a partir de la década de 1990, dejando en evidencia que se hacía necesaria la creación de un nuevo sistema de competición a nivel europeo para aquellos clubes cuyo nivel y prestigio se hallara un peldaño por encima del resto, dicha “élite” futbolística ansiaban la obtención de mayores ingresos y de tener el control de la competición, de manera que fueran los clubes quienes decidiesen cómo se repartirían los ingresos por televisión y marketing, entre otros. Por aquel entonces, dicho anhelo consiguió que, a lo largo de los años, la UEFA, en un intento de evitar que se creara dicho campeonato, fuera dotando de mayor poder y de mayores compensaciones económicas a los clubes punteros. Pero debido a que con los años el crecimiento antes mencionado no ha hecho más que hacerse más notorio, se ha desembocado en que en estos últimos años dichos clubes, con el ánimo de generar aún más ingresos y de tener mayor poder, hayan movido ficha en la materialización de un deseo que contaba ya con 25 años de antigüedad, la creación de una Superliga Europea.

### 2.3.2. Clubes miembros

Como se ha mencionado con anterioridad, el objetivo de esta Superliga era que aquellos clubes considerados como los mejores a nivel europeo compitieran en un torneo distinto a la Champions League, de manera que éstos se gestionaran los ingresos de manera independiente, sin depender de la UEFA. Según un documento que fue filtrado por *Football Leaks*<sup>4</sup> (ver Anexo 1) en noviembre de 2018 se mantuvo en Madrid una reunión que contó con la representación de los distintos equipos que serían miembros de esta competición.

Los equipos que figuran como fundadores serían:

- Real Madrid Club de Fútbol (Real Madrid)
- Fútbol Club Barcelona (Barcelona)
- Manchester United Football Club (M. United)
- Bayern Munich e.V. (Bayern)
- Juventus Football Club S.p.A. (Juventus)
- Chelsea Football Club (Chelsea)
- Arsenal Football Club (Arsenal)
- París Saint-Germain Football Club (PSG)
- Manchester City Football Club (M. City)
- Liverpool Football Club (Liverpool)
- Associazione Calcio Milan (AC Milan)

Además de estos 11 clubes fundadores se detallan en el documento 5 clubes más que figuran como invitados, los cuales serían:

- Club Atlético de Madrid (Atlético)
- Ballspielverein Borussia e.V. Dortmund (Borussia)
- Olympique de Marseille (Marseille)
- Football Club Internazionale Milano S.p.A. (Inter)

<sup>3</sup> El coeficiente UEFA de federaciones es una puntuación que elabora la UEFA en base al rendimiento deportivo de los últimos cinco años de todos los clubes representantes de cada federación. A mayor puntuación mayor número de clubes tendrían oportunidad de poder participar en la Copa de Campeones.

<sup>4</sup> Football Leaks es un sitio web dedicado a sacar a la luz documentación relativa al deporte. Según su propia web son una *Organización creada en busca de la verdad y que solo a través de la presión pública se puede lograr la diferencia y destapar la parte oculta del fútbol.*

- Associazione Sportiva Roma (Roma)

Estos 16 equipos serían los que, a priori, integrarían la ya mencionada Superliga. Todos ellos ampliamente conocidos a nivel mundial y con un gran desempeño deportivo, siendo además claros candidatos a terminar campeones de sus respectivas ligas nacionales, además de ser aquellos clubes con mayores posibilidades de salir victoriosos en la Champions League. Estos 16 clubes provienen de los cinco países con las ligas nacionales más prestigiosas a nivel mundial, como son España (Real Madrid, Barcelona y Atlético), Italia (AC Milan, Roma, Inter y Juventus), Francia (PSG y Marseille), Alemania (Bayern y Borussia) e Inglaterra (M. City, Liverpool, M. United, Arsenal y Chelsea).

El hecho de que estos clubes comenzaran una nueva andanza en una competición europea propia llevaría a un completo ocaso a la UEFA Champions League, ya que dicha competición perdería la posibilidad de tener compitiendo a los mejores clubes de Europa (y prácticamente del mundo). Sin estos clubes compitiendo, la mayoría de estrellas del fútbol no estarían participando y el nivel del espectáculo ofrecido en general sería más bajo; el interés del público se vería reducido considerablemente, y por tanto los ingresos por publicidad, televisión, entradas, etc. Todo ello haría que la Champions League pasara a un segundo plano en el escenario de las competiciones europeas o, incluso, podría llegar a desaparecer con el paso de los años<sup>5</sup>.

### 2.3.3. Situación económica del fútbol actual

En la industria del fútbol los ingresos de un club provienen de cuatro fuentes fundamentales: derechos televisivos, patrocinios, taquilla y de la venta de futbolistas a otros clubes. Los gastos principales son los salarios (tanto de jugadores, entrenador, cuerpo técnico y demás), gastos operativos (también conocidos como OPEX, donde se podría incluir seguridad durante los partidos, mantenimiento de instalaciones, viajes y un largo etcétera) y el desembolso realizado a la hora de fichar a un futbolista. Además, ganar competiciones, conseguir ascensos, clasificaciones para competición europea, etc. aumenta los ingresos de los clubes de una manera significativa, por otro lado, no conseguir buenos resultados, como descensos, caer en fases tempranas de torneos, no clasificarse para competición europea, etc. supone un descenso importante de los ingresos llegando incluso al riesgo de acabar con un colapso financiero. De manera muy resumida se puede pensar que la regla por la que se rige cualquier equipo será: gastar más, fichar mejores jugadores, ganar más partidos, obtener más ingresos que el desembolso inicial realizado; repitiéndose temporada a temporada.

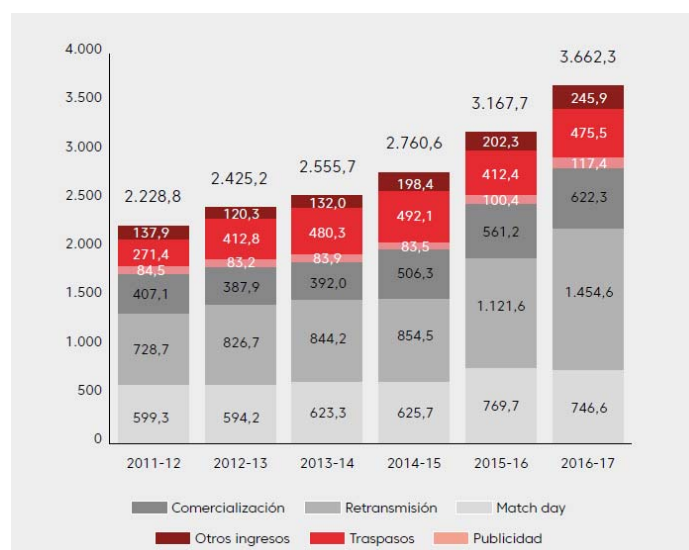


Figura 2. Ingresos obtenidos (en millones de €) por los clubes profesionales de España desde la temporada 2011-12 a la 2016-17 (La Liga, 2017).<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Como ya pasó, por ejemplo, con la Recopa de Europa, desaparecida en 1999 por el auge de la Champions League.

<sup>6</sup> En comercialización se incluyen también los ingresos de patrocinadores y todos aquellos ingresos relacionados con el valor de marca que tienen los clubes. En match day se incluyen ingresos por abonos, entradas, campeonatos y demás.

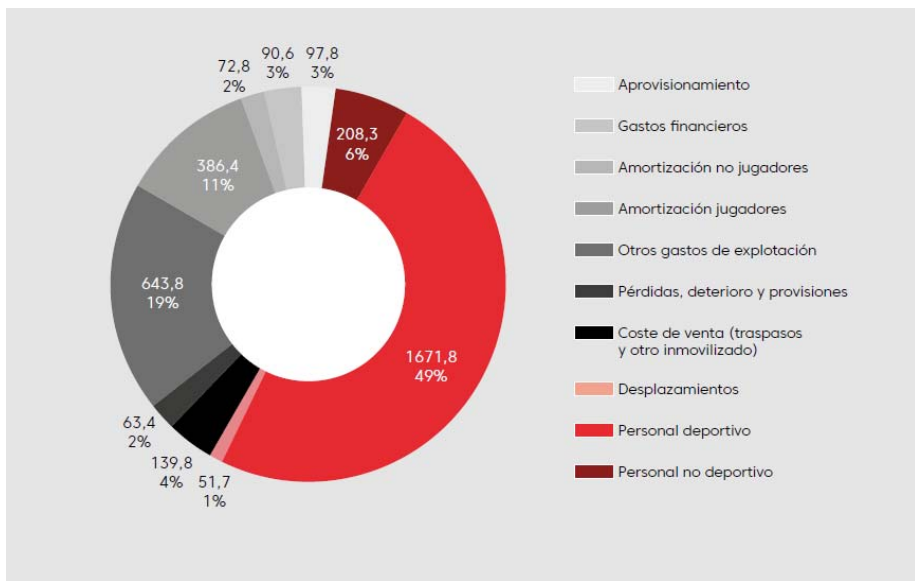


Figura 3. Gastos (en millones de €) del conjunto de clubes profesionales de España en la temporada 2016-17 (La Liga, 2017).

De estas dos figuras podemos apreciar como los ingresos totales de los equipos profesionales españoles (3662.3 mill. €) superan a los gastos totales (3426,4 mill. €). De este modo, los ingresos totales de los clubes profesionales españoles obtuvieron un beneficio de 235,9 millones de € en su conjunto. Resulta interesante como el modelo de negocio anteriormente expuesto funciona, generando, en líneas generales, ingresos a los clubes año a año.

De la figura 2 y 3 se puede desprender que el fútbol a día de hoy es un negocio que mueve cantidades ingentes de dinero y mediante dicha regla, simple pero útil, todos los equipos rigen su comportamiento, de manera que la mayoría de clubes, sobre todo aquellos que se sitúan en la cima en cuanto a rendimiento deportivo, no hacen más que crecer económicamente, generándose un aumento muy significativo de la cantidad de dinero que año a año han ido invirtiendo los clubes principalmente en fichar jugadores. Como ejemplo de ello se puede hacer mención a un estudio publicado por la UEFA (Fig. 4 y 5) donde se puede observar cómo el crecimiento de los bienes de todos los clubes europeos (globalmente) desde 2010 hasta 2016 ha sido bastante notorio. Además, cabe señalar que prácticamente la totalidad de las ligas europeas (todas salvo cuatro) han crecido en activos durante la temporada 2015-2016.

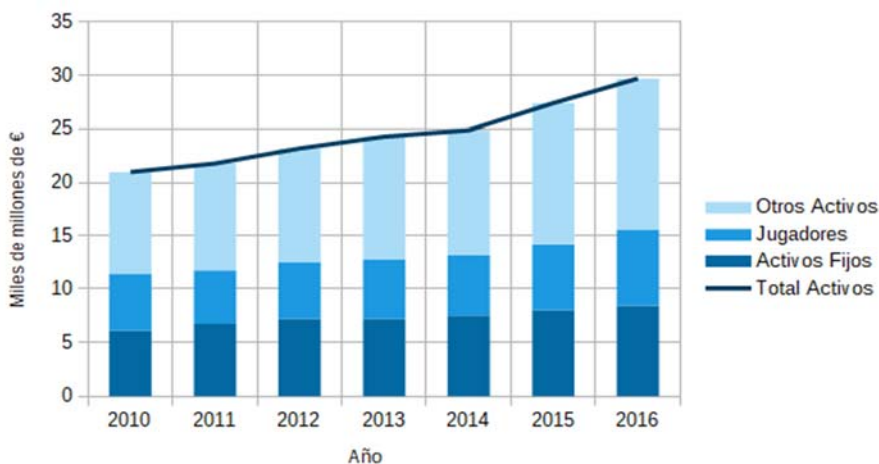


Figura 4. Evolución del total de activos de los clubes de fútbol europeos desde 2010 hasta 2016.

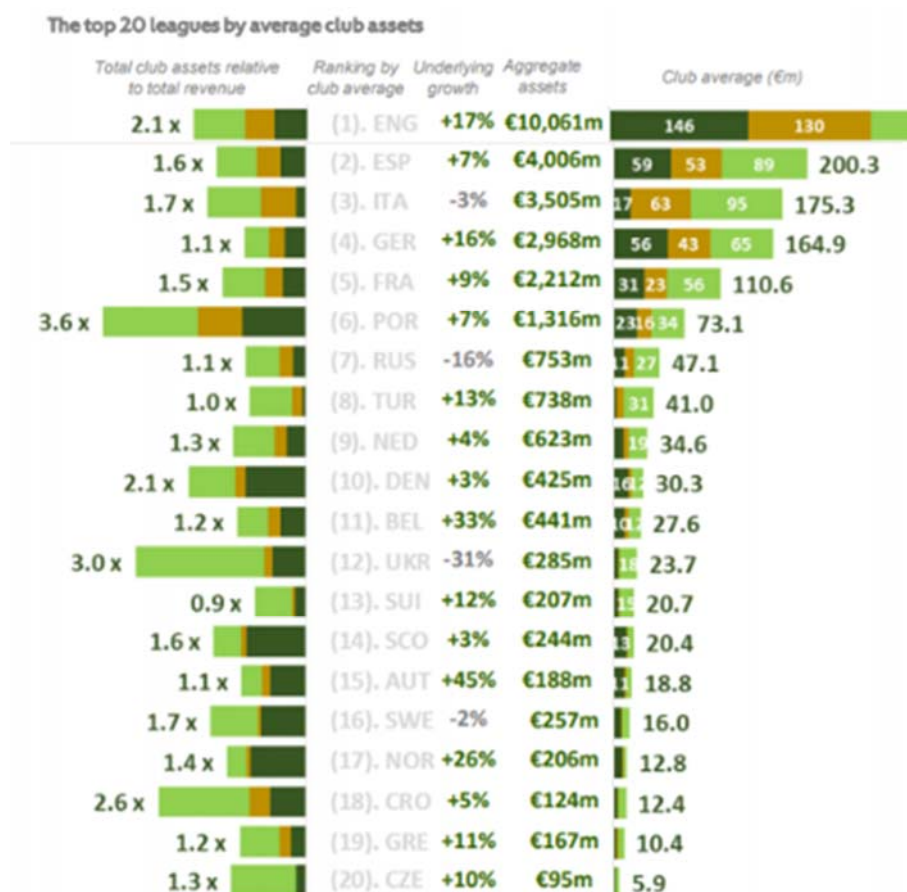


Figura 5. Activos de los clubes de fútbol de cada Liga de Europa en la temporada 2015-2016 (UEFA, 2016).

Para hacernos una idea de la magnitud del crecimiento de esta industria en estos últimos años consideremos el siguiente caso. En 1997, el Real Betis Balompié realizaba el fichaje más caro de la historia del fútbol hasta ese momento, desembolsando por el jugador Denilson de Oliveira 30,5 millones de \$<sup>7</sup>. 20 años después, en el año 2017 se realizaba el fichaje más caro de la historia futbolística hasta el momento, el París Saint Germain fichó a Neymar pagando al FC Barcelona la cantidad de 222 millones de € (251,45 millones de \$). En tan solo 20 años el valor de el fichaje más caro se ha incrementado un 427,4%, de hecho, el fichaje de Denilson a día de hoy se encontraría en la posición 75 de los traspasos más caros de la historia (teniendo en cuenta el ajuste de la inflación). También podríamos fijarnos en la siguiente figura (Fig. 6), donde se muestra un gráfico con el crecimiento del valor de los fichajes y el número de estos en tan solo diez años.

<sup>7</sup> Ajustando la inflación, a día de hoy, el fichaje de Denilson habría supuesto un desembolso de, aproximadamente, 47,68 millones de \$.

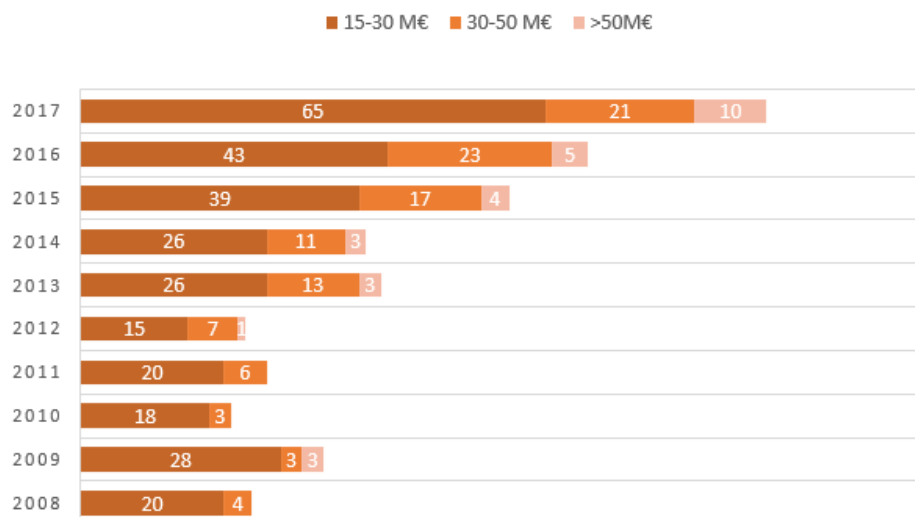


Figura 6. Variación del número de traspasos de jugadores por encima de 15 millones de € realizados a nivel europeo.

Con este ejemplo se hace más que evidente que la cantidad de dinero que se mueve en la industria del fútbol ha ido creciendo a pasos agigantados, y que todo apunta a que no va a parar de seguir creciendo, al menos a corto plazo. Además, las diferencias entre clubes también han aumentado, aquellos clubes que se encuentran en la élite son cada vez más poderosos a nivel deportivo y financiero, mientras que aquellos clubes más alejados de la élite no son capaces de seguir el ritmo de crecimiento tan notorio de aquellos clubes que se encuentran en la cima. Cada vez son más los clubes de divisiones inferiores que se ven forzados a desaparecer debido a la presión financiera que se ven obligados a soportar. Además, tienen que lidiar con la problemática del desinterés del público que, cada vez más, muestra poco interés por el fútbol humilde y prefiere pasar su tiempo de ocio disfrutando solo del fútbol al más alto nivel.

La creación de la Superliga Europea, podría desencadenar que los ingresos obtenidos por los equipos mencionados anteriormente fueran aún mayores que los que obtienen en la actualidad. Probablemente, en consecuencia, la ya en aumento diferencia de poder entre clubes no haría otra cosa que agigantarse aún más, de manera que el balance competitivo de las ligas nacionales se rompería con la consiguiente falta de competitividad entre los distintos clubes de un país, aquellos equipos *pequeños* serían cada vez más incapaces de rivalizar contra los equipos *grandes*, de la élite.

# 3 METODOLOGÍA DEA

---

*Si no sabes hacia qué puerto zarpa tu barco, ningún viento te será favorable*  
- Lucio Anneo Séneca-

## 3.1 Introducción

A través de este capítulo se pretende desarrollar todos aquellos conceptos relacionados con el análisis DEA (Análisis por Envoltura de Datos, *Data Envelopment Analysis*, en inglés) empezando por los conceptos básicos fundamentales para entender esta metodología, además de los modelos DEA más empleados, también se hará mención a diversas aplicaciones de la metodología DEA en el ámbito del deporte, se planteará la teoría referente a Dynamic DEA (o DEA Dinámico), metodología que se empleará en el desarrollo de este trabajo además de una modificación a realizar en los datos cuando se trata con variables no negativas.

## 3.2 Orígenes de la Metodología DEA

El análisis DEA fue propuesta por primera vez por Charnes, Rhodes y Cooper en 1978 como respuesta a la pregunta de cómo estudiar la eficiencia relativa de distintas Unidades de Toma de Decisiones (DMUs: Decision Making Units) manejándose una multitud de parámetros de entrada y salida y haciendo uso de modelos de programación lineal, algo totalmente innovador para la época. A través de una conferencia, se aplicó por primera vez la metodología DEA, mostrando un estudio que comparaba la eficiencia de diversos centros escolares de Estados Unidos. También, a raíz de este estudio surgió el primer modelo DEA, el modelo DEA-CCR, en honor a sus autores.

Durante los años posteriores, estos tres investigadores y otros empezaron a desarrollar diversas aplicaciones y modelos DEA como podrían ser DEA-Multiplicativo (Charnes et al., 1982), DEA-BCC (Banker, Charnes y Cooper, 1984)<sup>8</sup>, DEA-Aditivo (Charnes et al. 1985) o el modelo de la Supereficiencia (Andersen y Petersen, 1993). Con el paso del tiempo, se fueron desarrollando modelos más complejos que seguían la metodología DEA, de forma que los campos de aplicación del método crecieron enormemente, hoy en día existen estudios en una gran cantidad de ámbitos distintos, como pueden ser sanidad, industria, sector público, deportes y un largo etcétera. Por citar algunos métodos de desarrollo reciente se puede mencionar, entre muchos otros, Dynamic DEA, Índice de Malmquist y usos de búsqueda tabú, algoritmos genéticos o búsqueda dirigida en algunos problemas DEA.

---

<sup>8</sup> Este modelo junto con el modelo DEA-CCR fueron capaces de cubrir una gran cantidad de necesidades, de hecho, incluso a día de hoy, se realizan un número considerable de investigaciones que aplican metodología DEA usando uno de estos dos modelos.

### 3.3 Conceptos básicos

La productividad fue definida por primera vez de manera formal por Farrell en 1957, dicha productividad se define como la relación que existe entre los resultados (pueden ser económicos, productivos, de calidad de servicio, etc.) obtenidos y los recursos invertidos para la generación de dichos resultados. A modo de expresión matemática se puede hacer mención a la introducida por Farrell en 1957:

$$Productividad = \frac{Producción\ creada}{Producto\ consumido} = \frac{Salida\ (Output)}{Entrada\ (Input)} \quad (3-1)$$

En la metodología DEA el objetivo es estudiar la eficiencia relativa de distintas DMUs, la definición de DMU está referida a “la entidad que nos proponemos comparar en su desempeño con otras entidades de su tipo. Entidades tales como escuelas, sucursales bancarias o funciones autocontenidas tales como la función de distribución de agua de las compañías distribuidoras de agua” Thanassoulis, 2001, p. 4). Es fundamental para que la medida de la eficiencia sea útil que estas DMUs tengan capacidad para poder modificar la cantidad de producción creada, o bien, la cantidad de producto consumido.

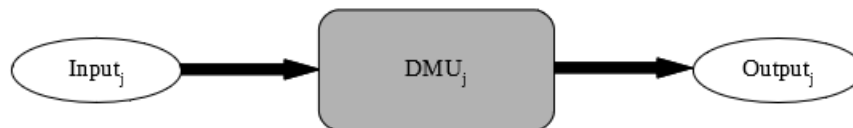


Figura 7. Esquema del modelo básico de productividad de Farrell.

Si consideramos un caso como el de la figura (Fig. 7), donde las DMUs a comparar solo constan de una entrada o producto consumido (Input) y una salida o producción creada (Output) la expresión 3.1 sería suficiente para analizar la eficiencia relativa de diversas DMUs. Sin embargo, los casos en los que solo existe una entrada y una salida son muy escasos y la expresión de Farrell resulta insuficiente para análisis de eficiencia. De hecho, lo más habitual es que una DMU cuente con una serie de entradas (recursos consumidos con independencia unos de otros) y una serie de salidas (distintos resultados o producciones a obtener). Para estos casos donde hay más de una entrada y una salida el análisis resulta más complicado y es, para ello, por lo que surge la metodología DEA. De manera que, ahora sí, se pueda medir la eficiencia relativa para DMUs que cuenten con diversas entradas y salidas.

Para realizar un análisis de la eficiencia mediante DEA el primer paso es el más importante, éste consiste en definir correctamente las entradas y las salidas. Para ello hay que realizar un análisis exhaustivo que permita determinar qué factores (tanto entradas como salidas) afectan a la eficiencia de las DMUs. Hay que recopilar todos aquellos recursos (entradas) con los que cuenta una DMU y, además, recopilar todos aquellos resultados (salidas) que puede generar una DMU. También es importante mencionar que dichas entradas y salidas han de ser cuantificables numéricamente, medibles, para aquellos criterios que fueran cualitativos habría que desarrollar un sistema de medición de los mismos. La realización satisfactoria de este primer paso dependerá enormemente de la capacidad que tenga el analista para observar las distintas DMUs a fin de determinar correctamente las entradas y salidas del modelo DEA, ya que de otro modo las medidas posteriores de eficiencia relativa serán inexactas o directamente falsas.

También es importante considerar que todas las DMUs han de ser iguales en el sentido de que todas han de contar con las mismas entradas y salidas. Es inadmisibles en la metodología DEA que, por ejemplo, unas DMUs cuenten con una entrada y otras DMUs no.

Una vez que se hayan definido y medido correctamente las entradas y salidas del modelo es hora de pasar a medir la productividad de cada DMU. La productividad solo tendrá un valor numérico, será un escalar, por lo



tanto, se hace necesaria que, mediante una sola expresión matemática se agrupen todas las entradas y salidas de la DMU.

$$Productividad = \frac{Suma\ poderada\ de\ salidas}{Suma\ poderada\ de\ entradas} \quad (3-2)$$

Mediante la expresión 3.2 se podría pasar a calcular la productividad, pero surge un problema debido a que tanto entradas como salidas no tienen las mismas unidades de medida. Este problema hace que surjan los conceptos de entradas y salidas virtuales, de manera que estos recursos y resultados pasan a ser adimensionales. Estas entradas y salidas virtuales consisten en añadir un peso a cada entrada o salida de manera que, como se ha mencionado anteriormente, el resultado obtenido sea adimensional. Las expresiones de dichas entradas y salidas quedarían:

$$\begin{aligned} Entrada\ virtual_j &= \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \\ Salida\ virtual_j &= \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} \end{aligned} \quad (3-3)$$

Donde  $x_{ij}$  es la cantidad de entrada  $i$  utilizado por la unidad  $j$ ,  $y_{kj}$  es la cantidad de salida  $k$  utilizado por la unidad  $j$ ,  $u_{ij}$  y  $v_{kj}$  son los pesos de cada entrada y salida respectivamente,  $m$  es el número total de entradas y  $p$  el número total de salidas.

De esta forma la expresión de la productividad quedaría como:

$$Productividad_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \quad (3-4)$$

A través de la expresión ya se puede calcular la productividad de cada unidad productiva bajo análisis considerando diversas entradas y salidas. A pesar de ello, productividad no es sinónimo de eficiencia, ya que solo con el cálculo de la productividad no tenemos una idea de cómo una determinada DMU utiliza sus recursos para producir resultados, es necesario comparar dicha productividad con otras DMUs parecidas para poder medir la eficiencia de cada unidad productiva. De esta necesidad surge el concepto de eficiencia relativa (de hecho, de aquí en adelante en este trabajo se va a hablar en términos de eficiencia relativa) cuya expresión se define como:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_0} = \frac{\frac{Salida\ virtual_j}{Entrada\ virtual_j}}{\frac{Salida\ virtual_0}{Entrada\ virtual_0}} \quad (3-5)$$

Donde la unidad  $j$  es aquella bajo estudio y la unidad  $0$  es aquella DMU utilizada como referencia.

Existen tres tipos de eficiencia relativa que se pueden calcular. La primera de ellas es la eficiencia global, para el cálculo de dicha eficiencia se toma como unidad de referencia aquella con mayor productividad de todas las DMUs bajo análisis. La segunda de ellas sería la eficiencia técnica, en la que como unidad de referencia se escoge aquella que tenga la mayor productividad entre las unidades de su tamaño (entradas y salidas del mismo orden de magnitud). El último tipo de eficiencia relativa que se puede analizar es la eficiencia de escala, que resulta ser el cociente entre la eficiencia global y la eficiencia técnica de una unidad productiva.

$$Eficiencia\ de\ escala_j = \frac{Eficiencia\ global_j}{Eficiencia\ global_0} \quad (3-6)$$

Se puede deducir de las distintas definiciones de eficiencia que la eficiencia global siempre va a ser menor o igual a la eficiencia técnica. De hecho, en el caso de que la eficiencia global sea igual a la eficiencia técnica (y por tanto la eficiencia de escala sea igual a 1) significará que la DMU bajo análisis tiene el mismo tamaño que la unidad más eficiente del conjunto de DMUs. En caso de que esto suceda se dice que la DMU tiene el Tamaño de Escala Más Productivo (*MPSS, Most Productive Scale Size*, en inglés).

Para cualquiera de estos tipos de eficiencias relativas calculadas para cualquier DMU se tendrá que su valor será siempre inferior o igual a uno. Aquellas DMUs cuyas eficiencias tengan valor uno serán eficientes<sup>9</sup>, bien globalmente, bien para su tamaño o bien se encuentra en la región MPSS. Evidentemente, todas aquellas DMUs con valores de eficiencia inferiores a uno se consideran unidades productivas ineficientes.

Por lo tanto, aplicando la definición de Farrel, la expresión de la eficiencia nos quedaría como:

$$Eficiencia_j = \frac{\frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}}{\frac{\sum_{k=1}^p v_{kj0} y_{kj0}}{\sum_{i=1}^m u_{ij0} x_{ij0}}} \quad (3-7)$$

Dado que, como se ha comentado antes, la unidad productiva de referencia será aquella cuya eficiencia sea igual a uno (denominada “eficiente” por tanto) la expresión expuesta anteriormente se puede reducir a la siguiente expresión:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \quad (3-8)$$

La expresión 3.8 es la que se utilizará a partir de ahora para desarrollar los modelos que se exponen a continuación.

Como conclusión de este apartado, y a modo de resumen, queda remarcar que la utilidad de la metodología DEA reside en determinar si una unidad productiva (DMU) bajo estudio es eficiente en comparación con otras unidades productivas similares, bien de manera global, bien dentro de aquellas DMUs con su tamaño de escala, o bien determinar si la unidad productiva tiene el Tamaño de Escala Más Productivo (MPSS). La metodología DEA solo llega hasta aquí, es decir, no es capaz de proponer mejoras para las DMUs que no resultan eficientes,

<sup>9</sup> En el sentido del cociente de Farrel anteriormente expresado, expresión (3.1)

solo se limita a determinar lo *lejos* que se encuentra una unidad productiva de ser considerada eficiente, de llegar a la frontera eficiente<sup>10</sup>. Igualmente es de gran valor para las unidades productivas obtener estos datos para así saber cuánto hay que mejorar y hacia dónde<sup>11</sup> y saber con respecto a qué DMU compararse. A partir de ahí el método ya no nos dice nada más y es labor del analista investigar cómo están funcionando las unidades productivas eficientes para encontrar las ineficiencias que está padeciendo una determinada DMU ineficiente para así ponerle solución, lo que se denomina *benchmarking*.

### 3.4 Virtudes y carencias del método

La metodología DEA mejoró de manera significativa los métodos de evaluación de la eficiencia que existían hasta el momento, como era la metodología DFA (Enfoque de Distribución Libre, *Distribution Free Approach*, en inglés).

Las ventajas de DEA con respecto a las técnicas ya existentes fueron diversas, entre ellas se puede destacar que DEA tiene un carácter no paramétrico y determinista, a diferencia del carácter estadístico de otras metodologías. Otro valor importante de este método es la flexibilidad, las condiciones para determinar las unidades productivas son muy poco restrictivas. Además, la metodología puede ser aplicada a contextos muy diversos (existen aplicaciones en medicina, educación, deportes, industria, solo por mencionar unos pocos). Otra ventaja de la metodología DEA es que es capaz de determinar no solo qué unidades productivas son eficientes y cuáles no, sino que además identifica qué recursos no están siendo utilizados de manera eficiente o qué salidas no están generando un resultado adecuado para que la unidad productiva resulte eficiente.

La principal ventaja del método es, a su vez, su mayor inconveniente, el hecho de que esta técnica tenga un carácter determinístico y no paramétrico hace que una mala elección del modelo genere unos resultados alejados de la realidad del sistema bajo estudio. Además, dado que DEA necesita definir todas las entradas y salidas correctamente para poder funcionar, se hace a veces necesario realizar estimaciones de ciertos datos, por lo que un gran número de estimaciones puede hacer que los resultados resulten poco realistas.

Otra gran problemática de la metodología es determinar correctamente las entradas y las salidas, es decir, hay momentos en los que resulta confuso interpretar si una determinada variable es un recurso o un producto. Aparte, y aún más importante, hay en muchos casos entradas y salidas que son completamente subjetivas, y aunque se tengan datos la fiabilidad de éstos será menor, de manera que nuevamente los datos se podrían ver alterados.

Todos estos inconvenientes recaen sobre el analista, y será responsabilidad de dicho investigador evitar, en la medida de lo posible, que estas problemáticas afecten a los resultados obtenidos al aplicar la metodología DEA.

Como ejemplo de estos inconvenientes se podría pensar, por ejemplo, en calcular la eficiencia relativa de los distintos países a la hora de cosechar medallas en los Juegos Olímpicos. Tal y como expresa Gabriel Villa Caro (2003):

El primer obstáculo [...] es determinar cuáles son los recursos que verdaderamente se están utilizando para conseguir los resultados esperados. En el caso que se plantea en este trabajo, la organización cuya eficiencia relativa se quiere medir no es más que el país participante, y los resultados que se desean obtener son las medallas [...]. Pero, ¿cuáles son los recursos que se han utilizado en un país para conseguir sus medallas? Sería muy discutible escoger unos y no otros como los verdaderamente relevantes. Además, y una vez aclarada esta primera disyuntiva, existe el problema de cuantificar cuáles han sido los niveles reales utilizados de cada recurso elegido. (p.360)

---

10 La frontera eficiente es una región matemática determinada por aquellas DMUs que son eficientes, dicha frontera es usada por las unidades ineficientes en metodología DEA para determinar la dirección de mejora y la magnitud de dicha mejora.

11 Reducir una determinada entrada, aumentar una determinada salida, etc.

### 3.5 Modelos DEA básicos

Una vez que Charnes, Rhodes y Cooper expusieron la metodología DEA, multitud de investigadores fueron mostrando interés por este método, de manera que las aplicaciones de éste y los modelos basados en él han ido creciendo continuamente hasta nuestros días. A lo largo de este apartado se muestran aquellos modelos más básicos pero a la vez más representativos<sup>12</sup>.

Una de las cuestiones más importantes en una investigación DEA, después de haber recopilado correctamente datos sobre las DMUs y sus entradas y salidas, consiste en determinar si el modelo que se va a aplicar tendrá orientación de entrada u orientación de salida y si tendrá retorno de escala es constante o variable.

#### 3.5.1 Orientación de entrada y orientación de salida

Cuando un modelo DEA se dice que tiene orientación de entrada (“input orientation”) se refiere a que cada DMU tiene como objetivo reducir la cantidad de recursos que consume manteniendo sus salidas constantes. Como ejemplo de esto se podría pensar en un proceso productivo que desea mantener una tasa de producción constante (salida) y lo que desea es mejorar su eficiencia mediante el consumo de recursos que hace para generar dicha tasa de producción. Resulta inadmisibles pensar en aumentar la tasa de producción manteniendo el consumo de recursos<sup>13</sup>.

Por otro lado, cuando se dice que un modelo tiene orientación de salida (“output orientation”) el objetivo de las DMUs es el de aumentar sus salidas manteniendo sus recursos constantes. Como ejemplo simple de orientación de salida se podría pensar en una empresa cuyo objetivo es obtener más ingresos manteniendo el número de empleados y sus instalaciones constantes. Sería totalmente antinatural que el objetivo de dicha empresa fuera reducir empleados e instalaciones manteniendo los ingresos actuales.

#### 3.5.2 Retorno de escala constante y variable

Al considerar un modelo con retorno de escala constante (CRS, *Constant Return to Scale*, en inglés) se considera que cualquier DMU bajo análisis podría ser eficiente independientemente de su tamaño. Por lo tanto se evalúa únicamente la eficiencia global, el cálculo de la eficiencia no aporta ninguna información a este caso, ya que todas las DMUs se comparan con aquella que resulte tener una mayor productividad. Para CRS se considerará que todas las DMUs pertenecerán al conjunto:

$$T_{CRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0, \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \vec{\lambda}Y \leq \vec{y}\} \quad (3-9)$$

siendo  $\vec{\lambda}$  un vector con tantas componentes como DMUs estén bajo estudio y X e Y sean las matrices que contengan los datos de las entradas y las salidas de dichas unidades productivas.

Considerando un modelo con una sola entrada y una sola salida, la representación de las distintas DMUs bajo análisis podría resultar algo parecido a la siguiente figura:

12 En diversidad de investigaciones estos modelos siguen estando vigentes.

13 A priori, en un proceso productivo la tasa de producción viene impuesta por el medio, es determinada, entre otros factores por la demanda o el nivel de stock.

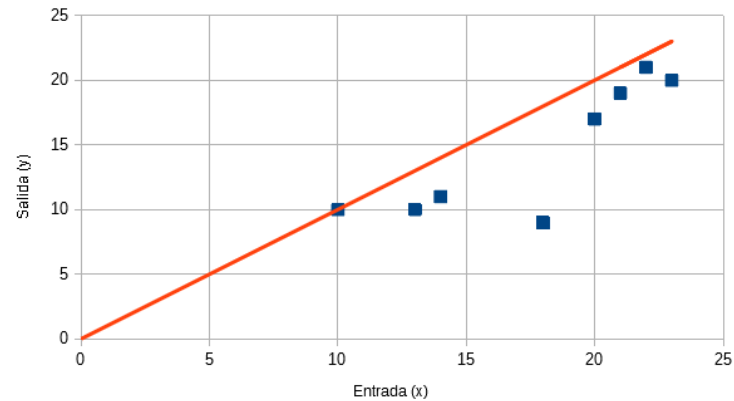


Figura 8. Representación de la tecnología CRS para un modelo con una entrada y una salida.

En la figura mostrada los puntos azules corresponden con las unidades productivas bajo análisis, mientras la recta naranja muestra la frontera eficiente CRS. Todos aquellos puntos del plano que quedan por debajo de la recta (suponiendo que la recta continúa hasta el infinito) conforman la denominada región de tecnologías admisibles.

Por otro lado, existirán retornos de escalas variables (VRS) cuando, debido a su tamaño, algunas DMUs bajo estudio no puedan llegar a ser eficientes. En este caso la eficiencia relativa relevante resulta ser la técnica, de manera que en los modelos con VRS se compara la productividad de las DMUs entre las del mismo tamaño. El conjunto de puntos admisibles para este caso resulta ser:

$$T_{VRS} = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0, \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \vec{\lambda}Y \leq \vec{y}; \vec{\lambda}e^T = 1 \right\} \quad (3-10)$$

Los términos de esta ecuación son los mismos que en el modelo CRS, la única diferencia es que en este conjunto se impone que la suma de las componentes ha de ser uno.

Considerando ahora nuevamente un modelo con una sola entrada y una sola salida similar al anterior obtendríamos la siguiente figura:

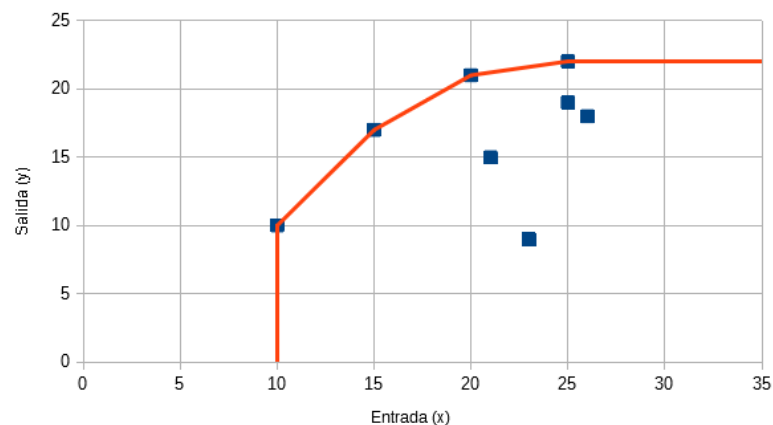


Figura 9. Representación de la tecnología VRS para un modelo con una entrada y una salida.

Donde los puntos azules se corresponden con las DMUs analizadas y la línea naranja muestra la frontera eficiente VRS. Todos aquellos puntos que queden por debajo de la frontera eficiente VRS formarán parte del conjunto denominado como región de tecnologías admisibles.

### 3.5.3 Modelos con retorno de escala constante

Como se ha expuesto antes los modelos CRS usan como referencia, para compararse y así calcular la eficiencia, aquella unidad con mayor productividad de entre todas. Los tres modelos básicos de mayor importancia en este contexto son el modelo RATIO, el modelo CCR-INPUT y el modelo CCR-OUTPUT<sup>14</sup>.

#### 3.5.3.1 Modelo RATIO

Este modelo dota de libertad a cada DMU para determinar los pesos que convierten a la entrada y a la salida en valores adimensionales de manera que escogen aquellos que optimizan su eficiencia. Es importante remarcar que, una vez elegidos los pesos, serán utilizados por el resto de DMUs bajo examen. En cada comparación se utilizarán los pesos que hagan que la eficiencia de la DMU sea la mejor.

De forma matemática el modelo se puede expresar como:

$$\text{Max } e_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \quad (3-11)$$

s.a.

$$\frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \leq 1 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$v_{kj} \geq \varepsilon \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, m$$

Siendo  $\varepsilon$  un número real mayor que cero, de manera a que el modelo obliga a que los pesos siempre sean estrictamente mayores a cero, no nulos. En el modelo, a la variable bajo estudio le corresponde el subíndice  $J$ .

El modelo realizar  $n$  (número de unidades productivas analizadas) optimizaciones, maximizando el modelo de la expresión 3.11, de manera que el modelo elige aquellos pesos que maximizan la eficiencia de cada DMU. La primera restricción obliga a que la eficiencia de cualquier DMU para los pesos calculados no exceda el valor de uno.

Una vez que se resuelven los  $n$  problemas de maximización se obtendrán dos conjuntos de DMUs. El primero de ellos, está formado por aquellas unidades cuyas eficiencias son iguales a uno, es decir, son DMUs eficientes. Por otro lado, quedará otro subconjunto que estará conformado por aquellas unidades con una eficiencia relativa inferior a uno, estas unidades serán las ineficientes. El valor determinado de eficiencia para las unidades ineficientes indica la distancia a la que se encuentran de la frontera eficiente, a menor valor de eficiencia, mayor distancia.

#### 3.5.3.2 Modelo CCR-INPUT

Una de las patologías que padecía el modelo RATIO es que su función objetivo era no lineal, era un cociente, por lo que el coste computacional de resolver el modelo era elevado. Como solución a esta problemática se desarrolló este modelo que convertía los cocientes en ecuaciones lineales.

Para dicha linealización se procede a modelar el modelo RATIO pero suponiendo ahora que el denominador de la función objetivo valga uno.

<sup>14</sup> Las siglas CCR corresponden con Charnes, Cooper y Rhodes, los cuales utilizaron modelos con retorno de escala constante en las primera aplicaciones que realizaron aplicando DEA.

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1 \quad (3-12)$$

Dado que ahora el denominador es constante se pasa a maximizar solo el numerador, que sí es una expresión lineal. El modelo lineal quedaría de la siguiente forma:

$$\text{Max} \quad \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} \quad (3-13)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1$$

$$v_{kj} \geq \varepsilon \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, m$$

Este modelo es un modelo de programación lineal primal conocido como *forma multiplicadora*, sin embargo, se suele utilizar para resolución el modelo dual conocido como *forma envolvente*. Dicho modelo dual quedaría de la siguiente forma:

$$\text{Min} \quad \theta_j - \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \quad (3-14)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

La resolución de este modelo consta de dos fases. La primera, denominada FASE I<sup>15</sup> se encarga de minimizar únicamente  $\theta_j$ . Una vez que tenemos una solución denominada  $\theta_j^*$ , usando dicha solución como dato pasamos a la FASE II<sup>16</sup> del problema donde se minimiza el término  $\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i$ .

De manera gráfica la resolución se puede interpretar de la siguiente manera. Las restricciones establecen una combinación entre el punto  $(x_{ij}, y_{kj})$  y el resto de puntos<sup>17</sup>  $(x_{ij}, y_{kj})$ , el resultado tras la optimización del modelo resulta ser el punto  $(\theta_j x_{ij} - s_i, y_{kj} + t_k)$ , llamado unidad virtual. Dicha unidad es un punto de la región tecnológica

15 También conocida como fase radial.

16 También conocida como fase rectangular.

17 Cada punto representa a los valores de entradas y salidas de cada DMU bajo estudio.

admisible que no forma parte del conjunto de puntos de las DMUs pero representa un punto al que cualquier DMU podría convertirse modificando sus entradas y salidas. Dado que se minimiza  $\theta_j$ , se reduce de manera equiproporcional las entradas, por lo tanto, el punto al que se llega sería uno que tendría el mismo nivel de salidas para un menor nivel de entradas, la interpretación es que las DMUs ineficientes se proyectan sobre el hiperplano que representa la frontera eficiente reduciendo el nivel de sus entradas y manteniendo el nivel de sus salidas. En ocasiones, cuando existen diversas entradas y salidas no se consigue proyectar una DMU sobre el hiperplano de la frontera eficiente realizando únicamente la fase radial<sup>18</sup>, de ahí surge la existencia de los términos  $s_j$  y  $t_k$ , estos términos son los optimizados en la fase rectangular y consiguen hacer que ciertas DMUs consigan proyectarse sobre un lugar óptimo de la frontera eficiente. En caso de que  $\theta_j^*=1$  y  $t_k^*=s_i^*=0$ , la unidad resulta ser eficiente ya que no se produce ninguna proyección. Visualmente, para el modelo de una entrada y una salida se tendría a modo de ejemplo:

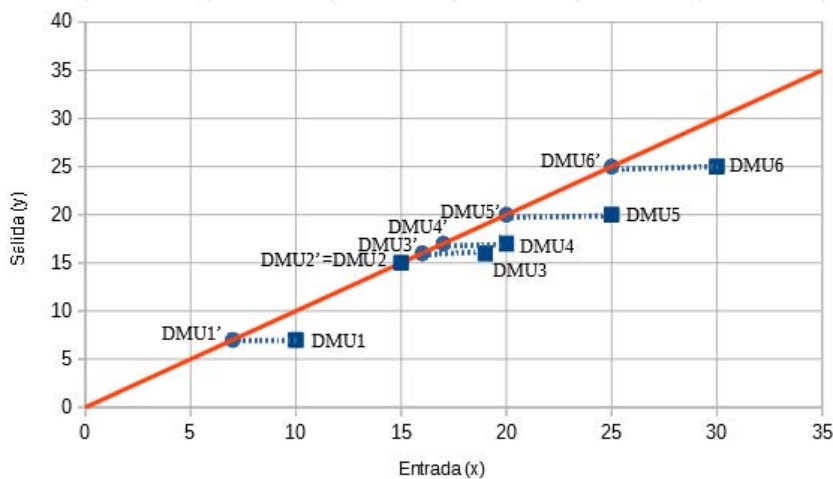


Figura 10. Solución de un modelo CCR-INPUT con una entrada y una salida.

Observando la figura se aprecian las proyecciones de las distintas DMUs sobre la frontera eficiente, dichas proyecciones representan qué valor de entrada, para una salida constante, debería de tener cada unidad productiva para ser eficiente. La DMU2, como ya es eficiente no tiene proyecciones y por tanto no tiene que cambiar ni su entrada ni su salida.

Se ha podido observar que éste modelo solo hace que en las proyecciones sobre la frontera eficiente reduciendo únicamente las entradas, esto es debido a que la linealización del modelo RATIO expuesta anteriormente tenía como objetivo modelar un entorno con retorno de escala constante y orientación de entrada, de ahí su nombre CCR-INPUT.

### 3.5.3.3 Modelo CCR-OUTPUT

Para el modelo CCR-OUTPUT el término del cociente que se iguala a la unidad es el numerador, es decir, que el modelo lineal primal nos queda:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} & (3-15) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad \forall j=1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1
 \end{aligned}$$

18 Mediante fase radial solo se conseguiría que se proyectara sobre un punto de la frontera tecnológica que podría no pertenecer a la frontera eficiente.



$$\begin{aligned} v_{kj} &\geq \varepsilon & \forall k=1,\dots,p \\ u_{ij} &\geq \varepsilon & \forall i=1,\dots,m \end{aligned}$$

Al igual que con CCR-INPUT para la resolución se recurre al modelo dual, dicho modelo quedaría con la siguiente forma:

$$\text{Max } \gamma_j + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \quad (3-16)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad \forall i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_j y_{kj} + t_k \quad \forall k=1,\dots,p$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1,\dots,n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1,\dots,m; \forall k=1,\dots,p$$

$$\gamma_j \text{ libre}$$

La manera de optimizar este problema es análoga a la expuesta en el modelo CCR-INPUT, realizándose en primer lugar la fase radial, maximizándose el valor de  $\gamma_j$ . Una vez obtenido el valor de  $\gamma_j^*$  se procede a realizar la fase rectangular de manera que se maximiza  $\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i$ . En caso de que para una unidad se obtenga la solución  $\gamma_j^*=1$  y  $t_k^*=s_i^*=0$  dicha unidad será eficiente ya que se proyecta sobre sí misma.

Para el mismo conjunto de unidades productivas que en el ejemplo anterior (Fig. 10) con una sola entrada y una sola salida, la representación gráfica de la solución quedaría de la siguiente forma:

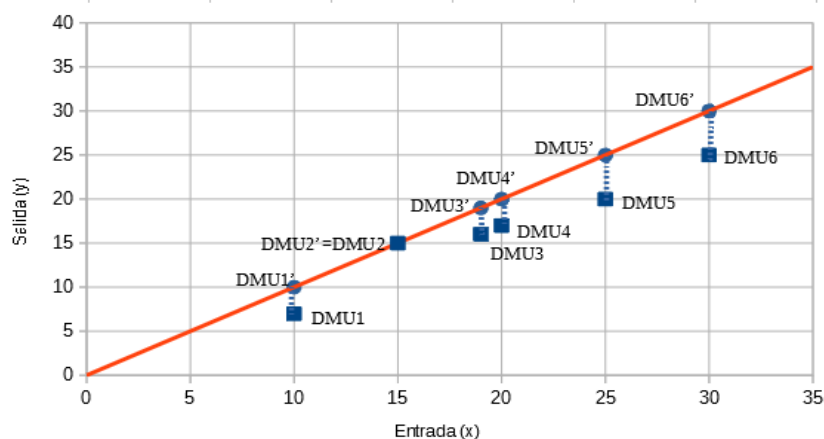


Figura 11. Solución de un modelo CCR-OUTPUT con una entrada y una salida.

Se puede apreciar en la figura como las distintas DMUs se proyectan sobre la frontera eficiente, representando estas unidades productivas virtuales el valor de entrada y salida que debería tener cada DMU para ser consideradas eficientes. Evidentemente, tal y como se aprecia en la figura la proyección sobre la frontera se realiza aumentando el nivel de salida manteniendo el valor de la entrada constante.

En este caso la linealización que se realizó sobre el modelo RATIO consiguió que el modelo únicamente se proyecte sobre la frontera eficiente aumentando el nivel de las salidas. Por lo tanto, el modelo es de orientación de salida, de ahí su nombre, CCR-OUTPUT.

### 3.5.4 Modelos con retorno de escala variable

A diferencia de los modelos expuestos anteriormente, estos dos modelos que se presentan a continuación hacen un análisis de la eficiencia técnica, es decir, se compara la productividad de aquellas unidades productivas con el mismo tamaño<sup>19</sup>. El modelo BCC-INPUT hará el análisis DEA con orientación de entrada y el BCC-OUTPUT lo hará con orientación de salida. Las siglas BCC se corresponde con sus autores: Banker, Charnes y Cooper, que presentaron estos modelos en 1984.

Comparando estos modelos con aquellos basados en tecnología CRS podemos remarcar que, para un mismo conjunto de DMUs, el tramo de frontera eficiente que compartan ambas soluciones será la región MPSS, ya que para dicha región de puntos la eficiencia global (obtenida con CCR) y la eficiencia técnica (obtenida con BCC) son iguales y unitarias.

#### 3.5.4.1 Modelo BCC-INPUT

Como se ha indicado anteriormente, este modelo hace un análisis con orientación de entrada. Partiendo de la forma dual del modelo CCR-INPUT se le añade una nueva restricción para modificar la frontera eficiente y pasar así de retorno de escalas constantes a variables.

$$\text{Min } \theta_j - \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \quad (3-17)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

Se puede apreciar que el modelo es exactamente el mismo que en CCR-INPUT con la salvedad de que hay una restricción extra que obliga a que la suma de las  $\lambda_j$  sea uno, de manera que las unidades eficientes se proyecten sobre el hiperplano creado por las unidades eficientes de su tamaño. Como es de esperar, habrá más unidades eficientes en este caso que en el caso con retorno de escala constante, algunas que eran ineficientes ahora son eficientes. Por tanto, la frontera eficiente VRS estará compuesta por un mayor número de unidades productivas que la frontera eficiente CRS. La resolución de este modelo requiere, al igual que en los modelos con retorno de escala constante, la aplicación de dos fases, minimizándose en primer lugar  $\theta_j$  y una vez hecho esto minimizar  $\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i$ . Gráficamente, la solución para el caso de una entrada y una salida tendríamos una situación parecida a la de la siguiente figura:

<sup>19</sup> Cuando en este ámbito se refiere a *unidades del mismo tamaño* nos referimos a unidades productivas que, normalmente se encuentran en unos niveles de entradas-salidas del mismo orden de magnitud.

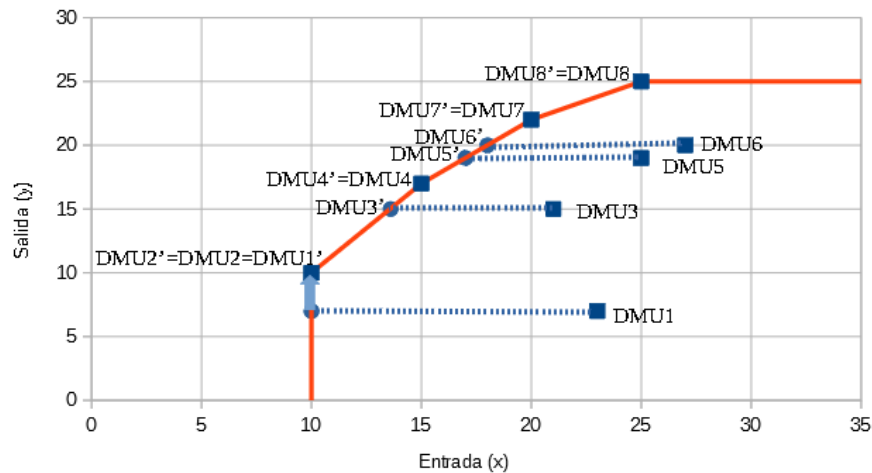


Figura 12. Solución de un modelo BCC-INPUT con una entrada y una salida.

En la figura, la frontera eficiente consiste en el conjunto de rectas que van desde la DMU2 a la DMU8, el resto de la frontera es frontera tecnológica, la cual no contiene puntos eficientes. Como se observa en la imagen cada DMU ineficiente se proyecta sobre la frontera eficiente, con la salvedad de la DMU1 que se proyecta sobre la frontera tecnológica y necesita de la fase rectangular para llegar a un punto eficiente. Se aprecia además como cada unidad se proyecta sobre la frontera definida por las DMUs eficientes de su tamaño de escala, es decir, la proyección de una DMU ineficiente es combinación lineal de las DMUs eficientes de su tamaño, a dichas DMUs se les conoce como *peer group*.

#### 3.5.4.2 Modelo BCC-OUTPUT

Al igual que lo realizado con el modelo anterior, en este caso se tomará el modelo CCR-OUTPUT dual y se le añadirá la misma restricción extra que en el modelo anterior de manera que el retorno de escala sea variable. Dicho modelo queda de la siguiente manera:

$$\text{Max } \gamma_j + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \quad (3-18)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_j y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p$$

$$\gamma_j \text{ libre}$$

La manera de proceder para su solución es análoga a la del modelo BCC-INPUT.

Para el mismo modelo que el de la Figura 12, la resolución en este caso quedaría:

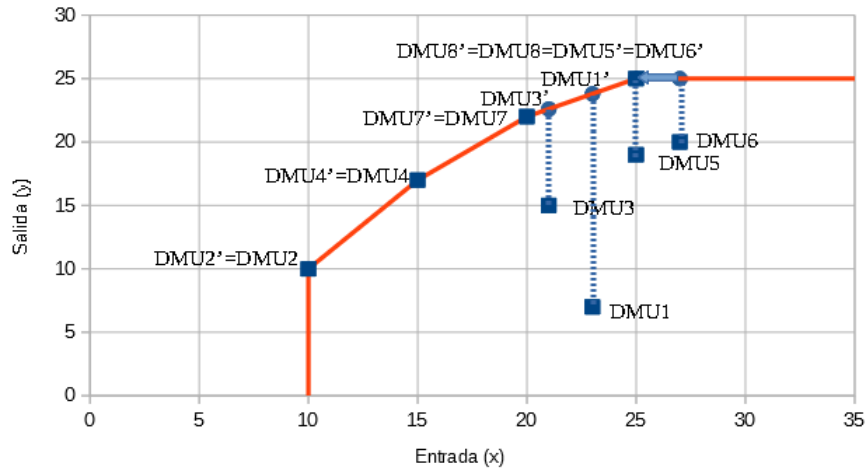


Figura 13. Solución de un modelo BCC-OUTPUT con una entrada y una salida.

Dado que la figura consta de las mismas DMUs que en el caso expuesto anteriormente, la frontera eficiente es la misma, consistiendo ésta en la línea quebrada que va desde DMU2 a DMU8. Evidentemente, las unidades que conforman la frontera son eficientes, por lo que no se proyectan (mejor dicho, se proyectan sobre sí mismas). Las unidades ineficientes 1,3 y 5 se proyectan radialmente<sup>20</sup> sobre la frontera (por lo que la fase de rectangular del modelo no cambiaría nada) mientras que la DMU6 se proyecta sobre la frontera tecnológica, necesitando de la fase rectangular del modelo para llegar a un punto eficiente. Todas estas proyecciones se realizan con orientación de salida (se aumenta la salida manteniendo la entrada constante con la salvedad de la DMU6 a causa de la fase rectangular) lo cual era el objetivo de este modelo.

### 3.5.5 Otros modelos

Los modelos más básicos y más extendidos de DEA son los expuestos anteriormente. Sin embargo, existen otros dos modelos sencillos de cierta relevancia que merece la pena recoger en este estudio, se trata de modelo aditivo (Additive model) y los modelos basados en la supereficiencia. Además, es interesante hacer mención a modelos que contengan entradas y salidas no discretionales.

#### 3.5.5.1 Modelo Aditivo

El modelo aditivo funciona solo para retornos de escala variables. En este modelo se elimina la fase radial de un problema VRS, llevándose a cabo solo la fase rectangular. Dado que solo se utiliza fase rectangular este modelo no tiene orientación ni de entrada ni de salida. El modelo matemático utilizado en este caso resulta ser de la siguiente forma:

$$Max \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \tag{3-19}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, m; \forall k=1, 2, \dots, p; \forall j=1, 2, \dots, n$$

<sup>20</sup> Es decir, aplicando la fase radial del modelo.

Aunque este modelo opera solo con retorno de escalas variables, si se desea usar para un entorno CRS se podría hacer eliminando la restricción que obliga a que la suma de las  $\lambda_j$  sea la unidad.

La solución que aporta este modelo es aquella tal que minimiza la distancia Manhattan entre cada unidad productiva y la frontera eficiente. De este modo la solución dada por el modelo puede ser reducir únicamente las entradas, aumentar únicamente las salidas o una combinación de ambas.

### 3.5.5.2 Modelos basados en la Superficie

El objetivo de este modelo no es identificar unidades productivas ineficientes y compararlas con las eficientes como hacían todos los modelos anteriormente expuestos. En este caso el objetivo de estos modelos es comparar a las propias unidades eficientes, comparando la “calidad” de las eficiencias, pudiéndose obtener eficiencias superiores a uno. La superficie es aplicable a cualquier modelo básico de los expuestos.

Tomando, por ejemplo, el modelo CCR-INPUT, el procedimiento que se lleva a cabo es el de eliminar la restricción que obliga a que las eficiencias sean menores a la unidad. De esta forma el modelo primal quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} & (3-20) \\ \text{s.a.} & \\ & \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 & \forall j \neq J \\ & \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1 \\ & v_{kj} \geq \varepsilon & \forall k=1, \dots, p \\ & u_{ij} \geq \varepsilon & \forall i=1, \dots, m \end{aligned}$$

Por tanto, el modelo es idéntico al original al CCR-INPUT con la salvedad de que se ha eliminado la restricción  $\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0$ , por tanto se permite que la unidad bajo estudio puede alcanzar una eficiencia superior a uno, una “superficie”. Aquellas unidades que fueran ineficientes obtendrían el mismo valor de eficiencia que en el modelo original.

En dual, el modelado del problema quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \theta_j - \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] & (3-21) \\ \text{s.a.} & \\ & \sum_{j \neq J} \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - s_i & \forall i=1, \dots, m \\ & \sum_{j \neq J} \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k & \forall k=1, \dots, p \\ & \lambda_j \geq 0 & \forall j=1, \dots, n \\ & s_i, t_k \geq 0 & \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p \\ & \theta_j \text{ libre} \end{aligned}$$

La interpretación de los valores obtenidos de esta “superficie”, que como se dijo anteriormente mide la

“calidad” de la eficiencia, es la siguiente. En un modelo de orientación de entrada por ejemplo, la supereficiencia mide cuánto podrían aumentar las entradas de una unidad productiva manteniendo salidas constantes de manera que el modelo siguiera considerando a dicha DMU eficiente, es decir, mide cuanta productividad podría perder una determinada unidad productiva siempre y cuando se mantuviese formando parte de la frontera eficiente. A mayor valor de supereficiencia mayor resulta ser esta capacidad, a mayor capacidad, mayor “calidad” de la eficiencia.

A modo de ejemplo, para un problema VRS con orientación de entrada de una entrada y una salida considerando solo las unidades eficientes, para la DMU3 el desplazamiento marcado es la capacidad que esta unidad tiene de perder productividad (aumentando entrada y manteniendo salida constante) y mantenerse en la frontera eficiente:

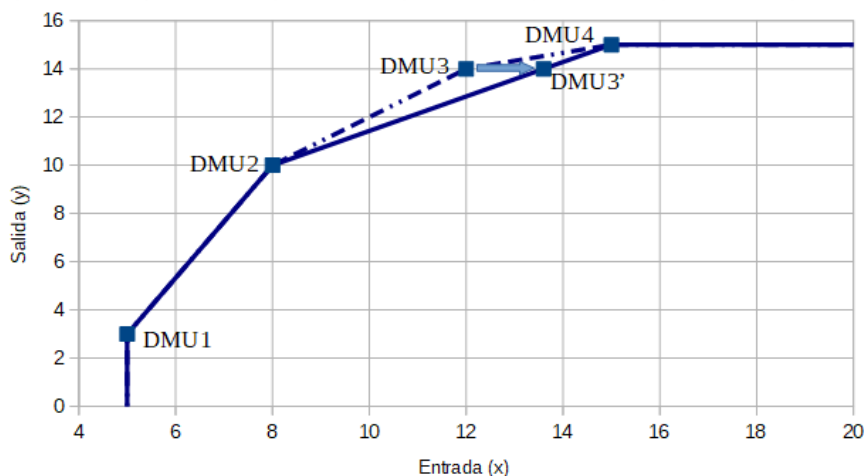


Figura 14. Solución dada para DMU3 por el modelo basado en la Supereficiencia para un modelo BCC-INPUT con una entrada y una salida.

### 3.5.5.3 Entradas y salidas no discrecionales

En ocasiones existen entradas o salidas en un modelo que no se pueden alterar pero que influyen en la productividad de las DMUs analizadas. Suelen ser, por lo general, factores ambientales que afectan al modelo. Son entradas o salidas que vienen impuestas, y a la hora de valorar la eficiencia relativa, el modelo DEA se verá afectado. Evidentemente, como no son alterables los resultados que aporte DEA no determinarán que para alcanzar la eficiencia haya que cambiar una de estas entradas o salidas no discrecionales.

Un ejemplo de ello podría ser, analizando la eficiencia relativa de una serie de parques eólicos, la cantidad de días que viento que sopla en cada lugar. Esta entrada, que se podría modelar como el número de días al año que sopla viento suficiente en cada parque eólico, es no discrecional ya que, a pesar de ser un recurso (una entrada) ésta no puede ser alterada y no se pueden tomar medidas para reducirla o aumentarla.

También hay que tener en cuenta que ciertos datos pueden resultar ser discrecionales para un tipo de DMU y no para otro<sup>21</sup>. Un ejemplo de ello podría ser el PIB de un país. Si realizáramos un análisis DEA cuyo objetivo fuera comparar la eficiencia económica de un país sería una entrada discrecional, que sí se podría cambiar. Sin embargo, si el objetivo del estudio es comparar la eficiencia de los distintos países a la hora de conseguir medallas en las olimpiadas el PIB sería una entrada (ya que un país con mayor PIB podrá realizar inversiones superiores en deporte y fomentar la cultura deportiva de forma que la cantidad de medallas que pudiera cosechar sería mayor) no discrecional, ya que ningún país tomaría decisiones para cambiar su PIB para mejorar la cantidad de medallas conseguidas.

Para poder introducir entradas y salidas de este estilo en nuestro modelo habrá que modificar el modelado de éste. En primer lugar, es necesario distinguir las entradas y salidas en dos subconjuntos, discrecionales y no discrecionales tal y como se muestra:

21 Evidentemente, serían estudios distintos de DEA que comparten un mismo dato, bien una entrada o bien una salida.

$$I = I_D \cup I_{ND} \quad O = O_D \cup O_{ND} \quad (3-22)$$

Siendo I aquellas variables consideradas entradas (inputs) y O aquellas consideradas salidas (outputs). Y siendo D aquellas variables consideradas discretionales y ND aquellas consideradas no discretionales.

De esta forma, el modelo de, por ejemplo, CCR-INPUT quedaría del siguiente modo:

$$\text{Min } \theta_j - \varepsilon \left[ \sum_{k \in O_D} t_k + \sum_{i \in I_D} s_i \right] \quad (3-23)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_j x_{ij} - s_i & i \in I_D \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} &= y_{kj} + t_k & \forall k=1, \dots, p \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= x_{ij} - s_i & i \in I_{ND} \\ \lambda_j &\geq 0 & \forall j=1, \dots, n \\ s_i, t_k &\geq 0 & \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p \\ \theta_j &\text{ libre} \end{aligned}$$

Analizando este modelo se puede apreciar cómo tanto la fase radial como la fase rectangular no afectan a las entradas y salidas no discretionales.

Para cualquier modelo de los anteriormente expuestos se podría proceder de igual manera que en el ya mostrado (3.23), sin embargo, el Modelo Aditivo, puesto que solo realiza fase rectangular, no incluye la restricción que distingue entre variables discretionales y no discretionales. De este modo, el modelo aditivo sería modelado de la siguiente manera:

$$\text{Max } \sum_{k \in O_D} t_k + \sum_{i \in I_D} s_i \quad (3-24)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= x_{ij} - s_i & \forall i=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} &= y_{kj} + t_k & \forall k=1, \dots, p \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0 & \forall j=1, \dots, n \\ s_i, t_k &\geq 0 & \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p \end{aligned}$$

### 3.5.6 Conclusión

En este apartado se han recopilado aquellos modelos más fundamentales y sencillos de DEA. Sin embargo, la cantidad de modificaciones que se pueden realizar sobre éstos modelos y la cantidad de modelos que combinan y añaden elementos es increíblemente extensa. De todos modos, se considera suficiente esta recopilación para esta memoria.

## 3.6 Revisión de Metodología DEA aplicado a Deportes

Como se ha comentado anteriormente, el campo de aplicación de DEA es muy amplio, abarcando desde estudios en el sector sanitario hasta estudios en el ámbito del deporte. En deportes, la metodología DEA es ampliamente utilizada y los resultados resultan ser tremendamente útiles y necesarios, más aún en la élite deportiva donde pequeñas diferencias generan grandes cambios en los resultados.

A continuación, se muestran una recopilación de distintas investigaciones realizadas en diversas disciplinas deportivas que recoge siquiera una pequeña parte de todas las investigaciones que se han realizado de DEA en deportes. Se han recopilado aquellos trabajos más similares al que se realiza en este estudio, por tanto, se han escogido deportes de equipo que cuentan con gran seguimiento por parte de la población.

Además, resulta interesante observar cómo existe gran diversidad de modelos DEA, los cuales van surgiendo, generalmente, según la situación lo requiera<sup>22</sup>. Algunos utilizan directamente modelos clásicos, otros son solo pequeñas modificaciones de modelos básicos para adaptarlos a ciertas situaciones específicas, en otros se combinan distintas técnicas DEA y otros utilizan modelos recientes e innovadores.

Tabla 3-1. Investigaciones DEA en Baloncesto.

<b>Título</b>	<b>Año</b>	<b>Autores</b>	<b>Modelo DEA utilizado</b>
Evaluando el rendimiento del jugador de la NBA usando DEA con datos enteros acotados	2016	Ya Chen, Yande Gong & Xiang Li	VRS-OUTPUT con datos enteros acotados <sup>23</sup>
Dynamic Network DEA aplicado al deporte del baloncesto	2018	Gabriel Villa & Sebastián Lozano	Dynamic Network DEA
Seleccionando pesos distintos de cero para evaluar la efectividad de jugadores de baloncesto con DEA	2008	W. W. Cooper, José L. Ruiz & Inmaculada Sirvent	CCR-OUTPUT <sup>24</sup>
Una evaluación mediante network DEA de la eficiencia de equipos en la NBA	2012	Plácido Moreno & Sebastián Lozano	Network DEA

Tabla 3-2. Investigaciones DEA en Beisbol.

<b>Título</b>	<b>Año</b>	<b>Autores</b>	<b>Modelo DEA utilizado</b>
Elección del mejor nueve del beisbol profesional de Japón basado en el modelo DEA	2015	Tohru Ueda & Hirofumi Amatatsu	CCR+assurance region

22 Muchos de estos modelos se limitan a realizar pequeñas modificaciones a modelos que ya existían.

23 Se emplea un método sin fase radial con orientación de salida y datos enteros acotados.

24 Con algunas modificaciones del original para que los pesos sean distintos de cero.



Una nueva medida de los bateadores de beisbol usando DEA	1997	Timothy R. Anderson & Gunter P. Sharp	CBI-Model
Fronteras en la Major League Baseball. Análisis no paramétrico usando DEA	2011	John Ruggiero	Diversos modelos y aplicaciones

Tabla 3-3. Investigaciones DEA en Fútbol.

Título	Año	Autores	Modelo DEA utilizado
Evaluando la eficiencia de marcar de un partido de fútbol	2016	Gabriel Villa & Sebastián Lozano	Network DEA
Evaluación del desempeño en la UEFA Champions League	2017	Fabiola Zambon-Ferraresi, Lucía Isabel García-Cebrián, Fernando Lera-López & Belén Iráizoz	BCC+ bootstrapped DEA
Evaluación del desempeño de la Premier League Inglesa con análisis por envoltura de datos	2007	Carlos Pestana Barros & Stephanie Leach	CCR-OUTPUT y BCC-OUTPUT
Midiendo la eficiencia y la productividad en equipos de fútbol profesionales: evidencia de la Premier League Inglesa	2007	Isidoro Guzmán & Stephen Morrow	Índice de Malmquist
Midiendo la eficiencia técnica de leyendas del fútbol: ¿quiénes fueron los jugadores más eficientes del Real Madrid de todos los tiempos?	2014	Daniel Santín	Supereficiencia aplicado a BCC-DEA sin orientación

### 3.7 Dynamic DEA

La metodología de DEA Dinámico (Dynamic DEA) se encarga de evaluar la eficiencia de distintas DMUs pero no solo en un determinado momento o en un determinado lapso de tiempo como hacían los modelos clásicos, sino que el objetivo es determinar qué DMU es eficiente considerando también un conjunto de instantes en el tiempo. La primera aproximación a este propósito fue el *análisis de ventana* de Klopp.

En DEA existen diversos métodos que miden la eficiencia considerando cambios en el tiempo, como por ejemplo podría ser el índice de Malmquist o el anteriormente mencionado análisis de ventana de Klopp. El problema con este tipo de métodos es que no admiten la posibilidad de que existan recursos (a los que llamaremos *carry-over*) que son salidas de una unidad productiva en un periodo y entradas en el periodo siguiente, se limitan a analizar de manera independiente cada DMU en un instante de tiempo. El problema de esto radica en que existen recursos que afectan a dos (o incluso más) periodos de tiempo considerados, y estos métodos tienden a darle una importancia más baja de la real o incluso llegan a obviar ciertos de estos datos. Inversiones a largo plazo, avances tecnológicos, desarrollo de I+D serían, por citar algunos, ejemplos de datos que podrían afectar a más de un periodo de tiempo. Dynamic DEA, propuesto por primera vez por Färe y Grosskopf, viene a resolver esta problemática con la inclusión del concepto de recurso *carry-over*.

Esta metodología será la seguida en este trabajo ya que, en el fútbol, resulta de vital importancia tener en consideración distintos datos considerados *carry-over*, tales como el valor monetario de una determinada plantilla, que resultará ser salida de una DMU<sub>t</sub> y entrada de una DMU<sub>t+1</sub>. Es un dato que se “arrastra”, de ahí su nombre en inglés.

La estructura que seguía cualquier modelo DEA de los expuestos, puesto que no se consideraba el tiempo, era, de manera muy básica la de la Figura 7. Ahora, como se están considerando variaciones en el tiempo y variables *carry-over*, la estructura para Dynamic DEA gana en complejidad. De manera básica, la estructura de un modelo DEA dinámico resulta ser la siguiente:

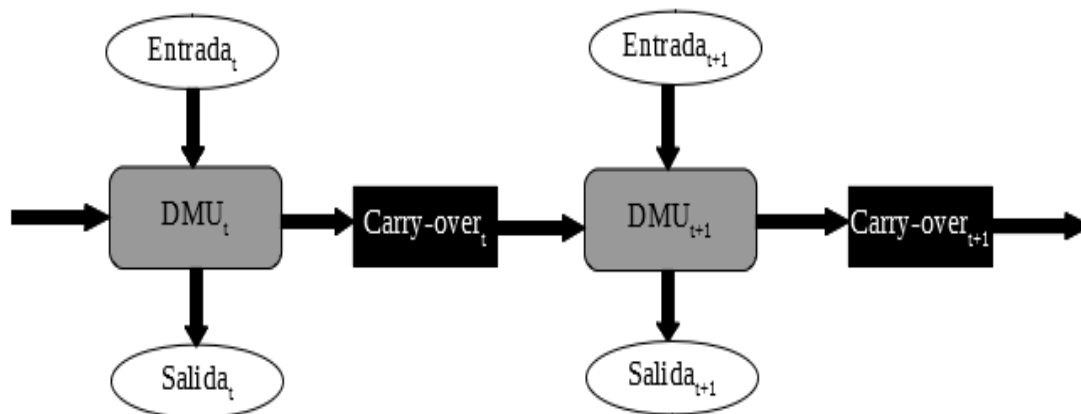


Figura 15. Estructura básica de Dynamic DEA.

Se puede apreciar en la figura cómo en Dynamic DEA existirán entradas y salidas corrientes, como las utilizadas en los modelos básicos para cada DMU en cada instante de tiempo  $t$ , y además existirán carry-over, los cuales son salida de una determinada DMU en un instante  $t$  y, a su vez, son entrada de la misma DMU en el instante  $t+1$ .

El modelo en específico que se va a desarrollar de ahora en adelante, y que será utilizado en el trabajo de esta memoria, va a ser el DSMB (Dynamic Slack-Based Measure). Este modelo está, como su propio nombre indica, basado en holguras. En este modelo, las actividades denominadas carry-over podrán ser deseables (a mayor nivel de ésta mayor productividad a priori), indeseables (a mayor nivel, menor productividad), libres o no discretionales. Además, dado que los modelos SBM (donde se engloba DSMB) son no radiales, se nos permita trabajar con entradas y salidas de manera individual, así es como este modelo nos permite la inclusión de pesos a las entradas y salidas en función de su importancia. Otra ventaja a tener en cuenta es que existen tres modelos en función de las orientaciones a la hora de realizar el análisis de eficiencia: modelo de entrada (input), salida (output) y no orientado (non oriented).

Estas ventajas anteriormente expuestas dotan al método de gran versatilidad, de esta forma la cantidad de aplicaciones de esta metodología resulta ser bastante amplia, cubriéndose así una gran demanda de uso por parte de investigadores y analistas.

### 3.7.1 Estructura del modelo

Usando como base todo el desarrollo anterior, el modelo Dynamic DEA constará de  $n$  DMUs ( $j=1, \dots, n$ ) en  $T$  instantes de tiempo ( $t=1, \dots, T$ ). Para cada instante, las DMUs tendrán en común  $m$  entradas ( $i=1, \dots, m$ ),  $p$  entradas no discretionales ( $i=1, \dots, p$ ),  $s$  salidas ( $i=1, \dots, s$ ) y  $r$  salidas no discretionales ( $i=1, \dots, r$ ). Teniendo esto en cuenta, se denota como  $x_{ijt}$  ( $i=1, \dots, m$ ),  $x_{ijt}^{fix}$  ( $i=1, \dots, p$ ),  $y_{ijt}$  ( $i=1, \dots, s$ ),  $y_{ijt}^{fix}$  ( $i=1, \dots, r$ ), a las entradas, entradas no discretionales, salidas y salidas no discretionales respectivamente, para la DMU  $j$  en  $t$ . Anteriormente se dijo que existían cuatro tipos de variables carry-over, las cuales se denotarán como  $z^{good}$  (deseable),  $z^{bad}$  (indeseable),  $z^{free}$  (libre),  $z^{fix}$  (fija). Como ejemplo de notación, se denotará a una carry-over  $i$ , de la DMU  $j$  en el instante  $t$  como  $z_{ijt}^{bad}$  ( $i=1, \dots, nbad$ ). Con todo esto el conjunto de producción quedaría del siguiente modo:

(3-25)

$$\begin{aligned}
x_{it} &\geq \sum_{j=1}^n x_{ijt} \lambda_j^t & i=1,\dots,m; t=1,\dots,T \\
x_{it}^{fix} &= \sum_{j=1}^n x_{ijt}^{fix} \lambda_j^t & i=1,\dots,p; t=1,\dots,T \\
y_{it} &\leq \sum_{j=1}^n y_{ijt} \lambda_j^t & i=1,\dots,s; t=1,\dots,T \\
y_{it}^{fix} &= \sum_{j=1}^n y_{ijt}^{fix} \lambda_j^t & i=1,\dots,r; t=1,\dots,T \\
z_{it}^{good} &\leq \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{good} \lambda_j^t & i=1,\dots,ngood; t=1,\dots,T \\
z_{it}^{bad} &\geq \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{bad} \lambda_j^t & i=1,\dots,nbad; t=1,\dots,T \\
z_{it}^{free} &: libre & i=1,\dots,nfree; t=1,\dots,T \\
z_{it}^{fix} &= \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{fix} \lambda_j^t & i=1,\dots,nfix; t=1,\dots,T \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j^t &= 1 & t=1,\dots,T \\
\lambda_j^t &\geq 0 & i=1,\dots,n; t=1,\dots,T
\end{aligned}$$

siendo  $\lambda_j^t$  el conocido como vector *intensidad* para la DMU  $j$  en el instante  $t$ . Además, se denotan como *ngood*, *nbad*, *nfree* y *nfix* al número de actividades carry-over deseadas, no deseadas, libres y fijas, respectivamente.

Es importante destacar la última restricción de las planteadas anteriormente en la ecuación (3.25). Esta restricción obliga a que, para un determinado instante de tiempo  $t$ , la suma de las  $\lambda$  de todas las DMUs sean igual a uno. Lo importante de esta ecuación es que tiene la capacidad de manipular el retorno de escala que se quiera emplear. Si se desea que sea un modelo con retorno de escala variable se implementará dicha restricción y si se desea que sea con retorno de escala constante se eliminará.

Como se comentó con anterioridad, las actividades carry-over son salidas de una DMU en un instante  $t$  y entradas en un instante  $t+1$ . Para hacer que esto se cumpla, se implementa la siguiente restricción:

$$\sum_{j=1}^n z_{ijt}^{\alpha} \lambda_j^t = \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{\alpha} \lambda_j^{t+1} \quad \forall i; t = 1, \dots, T \quad (3-26)$$

Donde la letra  $\alpha$  representa al conjunto completo de variables carry-over. Esta restricción es la más característica del modelo y es la que, de hecho, hace al modelo dinámico, ya que una misma DMU en instantes distintos de tiempo.

Teniendo en cuenta todas estas restricciones y considerando que el modelo sobre el que estamos trabajando utiliza holguras, se utilizarán como holguras  $s_{it}^{-}$ ,  $s_{it}^{+}$ ,  $s_{it}^{good}$ ,  $s_{it}^{bad}$  y  $s_{it}^{free}$  las cuales respectivamente representarán el exceso de entrada, déficit de salida, déficit de carry-over (en caso de ser variable deseable), exceso de carry-over (en caso de ser variable indeseable), desviación de carry-over (en caso de ser variable libre). El modelo, para una DMU genérica a la que denominaremos DMU<sub>0</sub> quedará del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
x_{i0t} &= \sum_{j=1}^n x_{ijt} \lambda_j^t + s_{it}^{-} & i=1,\dots,m; t=1,\dots,T \\
x_{i0t}^{fix} &= \sum_{j=1}^n x_{ijt}^{fix} \lambda_j^t & i=1,\dots,p; t=1,\dots,T \\
y_{i0t} &= \sum_{j=1}^n y_{ijt} \lambda_j^t - s_{it}^{+} & i=1,\dots,s; t=1,\dots,T \\
y_{i0t}^{fix} &= \sum_{j=1}^n y_{ijt}^{fix} \lambda_j^t & i=1,\dots,r; t=1,\dots,T
\end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned}
z_{i0t}^{good} &= \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{good} \lambda_j^t - s_{it}^{good} & i=1,\dots,ngood; t=1,\dots,T \\
z_{i0t}^{bad} &= \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{bad} \lambda_j^t + s_{it}^{bad} & i=1,\dots,nbad; t=1,\dots,T \\
z_{i0t}^{free} &= \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{free} \lambda_j^t + s_{it}^{free} & i=1,\dots,nfree; t=1,\dots,T \\
z_{i0t}^{fix} &= \sum_{j=1}^n z_{ijt}^{fix} \lambda_j^t & i=1,\dots,nfix; t=1,\dots,T \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j^t &= 1 & t=1,\dots,T \\
\lambda_j^t, s_{it}^-, s_{it}^+, s_{it}^{good}, s_{it}^{bad} &\geq 0 & i=1,\dots,n; t=1,\dots,T \\
s_{it}^{free} &: free (\forall i, t) & i=1,\dots,n; t=1,\dots,T
\end{aligned}$$

### 3.7.2 Función objetivo y cálculo de eficiencias

Una vez vistas las restricciones con las que debe contar un modelo Dynamic DEA, pasamos a desarrollar tres tipos distintos modelos de optimización en función del objetivo de análisis perseguido, bien sea orientación de entrada, orientación de salida o sin orientación y será tarea del analista, investigador, ingeniero, etc. determinar cuál ha de usar para la aplicación que está desarrollando, de hecho es fundamental realizar una correcta elección del modelo ya que de otro modo los resultados resultarán incorrectos.

Como se comentó con anterioridad, el modelo DSBM con el que estamos trabajando utiliza holguras, las cuales fueron definidas anteriormente ( $s_{it}^-, s_{it}^+, s_{it}^{good}, s_{it}^{bad}, s_{it}^{free}$ ), además nuestro modelo trabajará también con la variable  $\lambda_j^t$ .

El modelo con orientación de entrada el objetivo es reducir el nivel de las diferentes entradas manteniendo el nivel de salidas constante para cada DMU de forma que ésta resulte ser eficiente. Dado que estamos en el caso de trabajar con DSBM, el modelo en este caso realizará una maximización de aquellas holguras relativas asociadas a las entradas, minimizándose así el valor de dichas entradas.

Para el modelo con orientación de salida el objetivo será el de aumentar el valor de las diferentes salidas manteniendo el nivel de entrada constante para cada una de las distintas DMUs, de manera que se llegue a la frontera eficiente. El modelo DSBM, de manera análoga al anterior modelo, procurará en este caso maximizar el valor de las holguras y, por tanto, aumentando el nivel de las diferentes salidas.

El modelo sin orientación, a diferencia de los otros dos, no tiene una orientación específica, por lo que buscará simplemente desplazarse a la frontera eficiente sin reparar en si se está reduciendo el nivel de entrada, aumentando el nivel de salida o realizando ambas cosas al mismo tiempo. Por tanto, dado que admite tanto desplazamientos en los valores de las entradas como en los valores de las salidas, se podría decir que el modelo no orientado aúna en un solo modelo el modelo de orientación de entrada y de orientación de salida. En conclusión, el objetivo del modelo DSBM será maximizar todas las holguras, si realizar distinciones entre ellas.

#### 3.7.2.1 Modelo con orientación de entrada

La eficiencia global para el caso de orientación de entrada es la siguiente:

$$\theta_0^* = \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 - \frac{1}{m + nbad} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_{it}^-}{x_{i0t}} + \sum_{i=1}^{nbad} \frac{s_{it}^{bad}}{z_{i0t}^{bad}} \right) \right] \quad (3-28)$$

respetando las expresiones 3.26 y 3.27 y siendo  $w^t$  y  $w_i^-$  los pesos correspondientes al instante t y a la entrada i

respectivamente. Estos pesos han de ser datos dados por el analista y determinan la importancia que recibe cada instante y cada entrada. Dichos pesos deberán respetar las siguientes expresiones:

$$\sum_{t=1}^T w^t = T \quad y \quad \sum_{i=1}^m w_i^- = m \quad (3-29)$$

En caso de que las importancias fueran exactamente las mismas para cada periodo y cada entrada se le daría a cada peso un valor igual a la unidad.

Esta función objetivo, debido a que su modelo forma parte de los modelos SBM, trabaja con holguras. Estas holguras son, por un lado, excesos de entradas y por otro, holguras relacionadas con las actividades carry-over indeseadas. Estas holguras están tratadas de manera similar en la función objetivo debido a que sus características similares, de hecho, se busca una reducción de sus cantidades. De todos modos, una variable carry-over no es exactamente igual a una variable de entrada, debido a que las variables carry-over conectan dos instantes consecutivos de una misma DMU (expresión 3.26). En la expresión 3.28 cada uno de los periodos que son sumados (y que se encuentran entre corchetes) representa la eficiencia específica para un instante determinado de tiempo como una medida de las holguras tanto de entrada como de carry-over indeseada. De hecho, una unidad en un determinado instante de tiempo sería eficiente en el caso de que todas las holguras tuvieran valor 0, ya que así el valor de la eficiencia relativa para ese período sería la unidad.

La eficiencia específica para un determinado momento del tiempo se puede definir de la siguiente forma, teniendo en cuenta que se parte de la solución óptima dada por 3.28 sujeto a 3.26, 3.27 y 3.29:

$$\theta_{0t}^* = 1 - \frac{1}{m + nbad} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_{i0t}^-}{x_{i0t}} + \sum_{i=1}^{nbad} \frac{s_{i0t}^{bad*}}{z_{i0t}^{bad}} \right) \quad t = 1, \dots, T \quad (3-30)$$

Esta eficiencia se limita a medir la eficiencia relativa de una DMU en un determinado instante, por lo tanto, la eficiencia global para una DMU previamente planteada se podría definir como la suma ponderada de las eficiencias específicas para cada instante de dicha DMU. De esta manera, la eficiencia global para una DMU<sub>0</sub> se podría expresar como:

$$\theta_0^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \theta_{0t}^* \quad (3-31)$$

De todo lo expresado anteriormente se pueden obtener una serie de conclusiones:

- Si la eficiencia de una determinada DMU para un periodo  $t$  resulta ser 1 ( $\theta_{0t}^*=1$ ) se considera que dicha DMU para ese instante concreto de tiempo es eficiente para una orientación de entrada. En caso de que sea eficiente dicha DMU significará que todas las holguras, tanto las de las entradas como las de las actividades carry-over indeseadas, son cero.
- Si la eficiencia global de una determinada DMU es igual a 1 ( $\theta_0^*=1$ ) se considerará que dicha DMU es eficiente globalmente para una orientación de entrada. Esto significa que todas las holguras de entrada y de carry-over no deseadas para todos los periodos de  $t$  considerados han debido de ser cero. Por tanto, una DMU cuyas eficiencias para para todos los periodos de  $t$  hayan sido uno (y por tanto sus holguras cero) será eficiente globalmente.
- La eficiencia global,  $\theta_0^*$ , será una solución única, es decir, mediante la expresión 3.28 quedaría definida con un único valor. Sin embargo, esto no significa que la eficiencia para cada periodo,  $\theta_{0t}^*$ , resulte ser única, de hecho, es posible que tenga múltiples soluciones óptimas. El hecho de que exista un óptimo

con múltiples soluciones significa que tanto  $s_{i0t}^-$  como  $s_{i0t}^{bad*}$  tienen soluciones óptimas alternativas y por tanto la proyección sobre la frontera eficiente no será única. En los modelos SBM como este no existe fase radial, y por tanto es común encontrar esta problemática. Para determinar el rango de variación de estas soluciones se podría maximizar (minimizar)  $\theta_{0t}^*$  mientras se mantiene constante la solución de óptimo global  $\theta_0^*$ , para lo cual se introduciría a modo de restricción.

### 3.7.2.2 Modelo con orientación de salida

En este modelo, la eficiencia global se define como:

$$\frac{1}{\tau_0^*} = \max \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 + \frac{1}{s + ngood} \left( \sum_{i=1}^s \frac{w_i^+ s_{it}^+}{y_{i0t}} + \sum_{i=1}^{ngood} \frac{s_{it}^{good}}{z_{i0t}^{good}} \right) \right] \quad (3-32)$$

sujeto a las restricciones expuestas en 3.26 y 3.27. Los pesos  $w^t$  y  $w_i^+$  se corresponden respectivamente con el instante  $t$  y la salida  $i$  y siendo  $\tau_0^*$  la eficiencia global de una determinada unidad productiva DMU<sub>0</sub>. Los pesos deberán respetar las siguientes restricciones:

$$\sum_{t=1}^T w^t = T \quad y \quad \sum_{i=1}^m w_i^+ = s \quad (3-33)$$

La función objetivo de este modelo trabaja con los déficits de las salidas y con los déficits de las carry-over deseables. Al igual que en el modelo con orientación de entrada, el modelo trabaja de igual forma con las holguras de las salidas como con las holguras de las carry-over deseables. Sin embargo, como ya se mencionó, se deberá respetar que las variables carry-over conectan dos periodos consecutivos (expresión 3.26).

La manera de funcionar de este modelo con orientación de salida es muy similar al de orientación de entrada, por tanto, las conclusiones y desarrollos lógicos serán análogos. Por consiguiente, la eficiencia para una determinada DMU<sub>0</sub> en un instante  $t$  ( $\tau_{0t}^*$ ) será, para una solución óptima dada de resolver 3.32 sujeto a 3.26, 3.27 y 3.33:

$$\frac{1}{\tau_{0t}^*} = 1 + \frac{1}{s + ngood} \left( \sum_{i=1}^s \frac{w_i^+ s_{i0t}^{+*}}{y_{i0t}} + \sum_{i=1}^{ngood} \frac{s_{i0t}^{good*}}{z_{i0t}^{good}} \right) \quad t = 1, \dots, T \quad (3-34)$$

Al igual que en el modelo de orientación de entrada, la eficiencia global de una DMU será la media ponderada de las eficiencias de las eficiencias para cada instante:

$$\frac{1}{\tau_0^*} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tau_{0t}^* \quad (3-35)$$

Las conclusiones que se desprenden de este modelo son completamente análogas a las del modelo con orientación de entrada y por tanto no se desarrollarán.

### 3.7.2.3 Modelo sin orientación

El modelo sin orientación resulta de la combinación de los dos últimos modelos, por lo tanto, la eficiencia se puede definir como:

$$\rho_0^* = \min \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 - \frac{1}{m + nbad} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_{it}^-}{x_{iot}} + \sum_{i=1}^{nbad} \frac{s_{it}^{bad}}{z_{iot}^{bad}} \right) \right]}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 + \frac{1}{s + ngood} \left( \sum_{i=1}^s \frac{w_i^+ s_{it}^+}{y_{iot}} + \sum_{i=1}^{ngood} \frac{s_{it}^{good}}{z_{iot}^{good}} \right) \right]} \quad (3-36)$$

sujeto a 3.26 y 3.27.

Este modelo trabaja tanto con los excesos de entradas y de carry-overs no deseadas y con los déficits de salidas y de carry-overs deseadas. Se puede apreciar como este modelo surge de la combinación de los dos anteriores, ya que el denominador es la inversa de la eficiencia global del modelo con orientación de salida y el numerador es la eficiencia global del modelo con orientación de entrada. Por tanto la eficiencia global del modelo sin orientación será el ratio de estas dos, y obtendrá valores entre cero y uno. Una unidad se considerará eficiente cuando dicha función objetivo alcance el valor 1, y esto sucederá cuando todas las holguras presentes en la función objetivo valgan cero.

Como sucedía con los modelos anteriores, la eficiencia de una DMU<sub>0</sub> en un instante  $t$  será, para una solución óptima dada por resolver 3.36 sujeto a 3.26 y 3.27, será:

$$\rho_{ot}^* = \frac{1 - \frac{1}{m + nbad} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_{iot}^{-*}}{x_{iot}} + \sum_{i=1}^{nbad} \frac{s_{iot}^{bad*}}{z_{iot}^{bad*}} \right)}{1 + \frac{1}{s + ngood} \left( \sum_{i=1}^s \frac{w_i^+ s_{iot}^{+*}}{y_{iot}} + \sum_{i=1}^{ngood} \frac{s_{iot}^{good*}}{z_{iot}^{good*}} \right)} \quad t = 1, \dots, T \quad (3-37)$$

Las conclusiones desprendidas de este modelo son similares a las planteadas en los modelos anteriores.

#### 3.7.2.4 Incorporación a la función objetivo de carry-overs libres

Tal y como se describió en la expresión 3.27,  $s_{it}^{free}$  admite tanto valores positivos como negativos, por tanto,  $z_{iot}^{free}$  se considerará como excesivo si  $s_{it}^{free*} > 0$  y como deficitario si  $s_{it}^{free*} < 0$ .

En las funciones objetivos de los modelos anteriormente planteados no se tenían en consideración las variables carry-over libres. A diferencia de las carry-over deseables e indeseables, los cuales se incluyen en su respectiva función objetivo, las variables libres no están consideradas de manera explícita. En caso de que fuera necesario incorporar estas variables libres a la función objetivo se podría añadir a través de dos formas: la primera de ellas es la considerada *Ex-post* y la segunda mediante el método MIP (Mixed Integer fractional Program).

La primera, el método *Ex-post*. Usando el modelo sin orientación (se puede extrapolar todo al resto de modelos), si obtenemos una solución óptima de resolver 3.36 sujeto a 3.26 y 3.27 obteniéndose por tanto unos valores óptimos para las holguras libres  $s_{it}^{free*}$ , podemos pasar a definir:

$$s_{iot}^{free-*} = \max(0, s_{iot}^{free*}) \quad y \quad s_{iot}^{free+*} = -\min(0, s_{iot}^{free*}) \quad (3-38)$$

De esta forma  $s_{iot}^{free-*} + s_{iot}^{free+*} = s_{iot}^{free*}$  y  $s_{iot}^{free-*} * s_{iot}^{free+*} = 0$ . Evidentemente,  $s_{iot}^{free-}$  y  $s_{iot}^{free+}$  son respectivamente el exceso y el déficit de la variable libre considerada. Una vez que tenemos definidas estas dos variables, podemos definir la función objetivo del modelo no orientado (aplicable adecuadamente al resto de modelos) como:

$$\bar{\rho}_0^* = \min \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 - \frac{1}{m + nbad + nfree} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_{it}^-}{x_{i0t}} + \sum_{i=1}^{nbad} \frac{s_{it}^{bad*}}{z_{i0t}^{bad}} + \sum_{i=1}^{nfree} \frac{s_{i0t}^{free-*}}{z_{i0t}^{free}} \right) \right]}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 + \frac{1}{s + ngood + nfree} \left( \sum_{i=1}^s \frac{w_i^+ s_{it}^+}{y_{i0t}} + \sum_{i=1}^{ngood} \frac{s_{it}^{good*}}{z_{i0t}^{good}} + \sum_{i=1}^{nfree} \frac{s_{i0t}^{free+*}}{z_{i0t}^{free}} \right) \right]} \quad (3-39)$$

La eficiencia para un determinado instante en este caso se podría redefinir de manera análoga a lo realizado en la expresión 3.37. Se obtendrán conclusiones similares a las obtenidas por los modelos anteriores, de hecho, para la eficiencia de un determinado instante de tiempo también se obtendrán soluciones óptimas alternativas para las distintas holguras que intervienen.

La segunda forma de introducir las variables libres en el modelo sería mediante el método MIP. Es necesario para este método comenzar aplicando la expresión 3.38 de manera que tengamos:

$$s_{i0t}^{free-*} + s_{i0t}^{free+*} = s_{i0t}^{free*}, \quad s_{i0t}^{free-*} * s_{i0t}^{free+*} = 0, \quad s_{i0t}^{free-} \geq 0, \quad s_{i0t}^{free+} \geq 0 \quad (3-40)$$

Usando esta expresión la función objetivo ahora será:

$$\bar{\rho}_0^* = \min \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 - \frac{1}{m + nbad + nfree} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_{it}^-}{x_{i0t}} + \sum_{i=1}^{nbad} \frac{s_{it}^{bad}}{z_{i0t}^{bad}} + \sum_{i=1}^{nfree} \frac{s_{i0t}^{free-}}{z_{i0t}^{free}} \right) \right]}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w^t \left[ 1 + \frac{1}{s + ngood + nfree} \left( \sum_{i=1}^s \frac{w_i^+ s_{it}^+}{y_{i0t}} + \sum_{i=1}^{ngood} \frac{s_{it}^{good}}{z_{i0t}^{good}} + \sum_{i=1}^{nfree} \frac{s_{i0t}^{free+}}{z_{i0t}^{free}} \right) \right]} \quad (3-41)$$

Con esta función objetivo, minimizamos 3.41 sujeto a 3.26, 3.27 y 3.40. Una vez realizado esto se podría obtener la eficiencia de una DMU para un determinado instante de manera análoga a como se ha realizado en 3.37. Las conclusiones obtenidas aplicando este método son similares a las obtenidas con el método Ex-post.

### 3.7.3 Inclusión de una condición inicial en las variables carry-over

Hasta el momento se ha trabajado con modelos en los cuales cada carry-over en el instante  $t$  era salida de una DMU en  $t$  y a su vez conectaba como entrada con la DMU en  $t+1$ . Sin embargo, en gran cantidad de ocasiones se hace necesario que el modelo cuente con una medida de carry-over inicial que será entrada de la DMU en el instante  $t=1$  tal y como se muestra en Fig. 16.

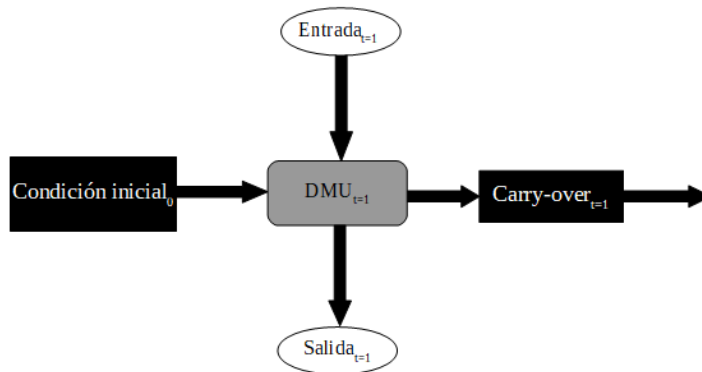


Figura 16. Estructura de Dynamic DEA con condición inicial.



Consideremos que estos términos iniciales serán  $z_{io0}^{good}$ ,  $z_{io0}^{bad}$ ,  $z_{io0}^{free}$ ,  $z_{io0}^{fix}$ , para carry-over deseables, indeseables, libres y fijas, respectivamente, a las cuáles queremos añadirle una condición inicial. Teniendo esto, las restricciones que modelarían esta condición inicial serían:

$$\begin{aligned}
 z_{io0}^{good} &\leq \sum_{j=1}^n z_{ij0}^{good} \lambda_j^1 && i=1,\dots,ngood \\
 z_{io0}^{bad} &\geq \sum_{j=1}^n z_{ij0}^{bad} \lambda_j^1 && i=1,\dots,nbad \\
 z_{io0}^{free} &= \sum_{j=1}^n z_{ij0}^{free} \lambda_j^1 + s_{io}^{free}, \quad s_{io}^{free} : free && i=1,\dots,nfree \\
 z_{io0}^{fix} &= \sum_{j=1}^n z_{ij0}^{fix} \lambda_j^1 && i=1,\dots,nfix
 \end{aligned}
 \tag{3-42}$$

Una vez que tenemos estas restricciones bastaría con añadir las al modelo que se desee implementar.

Es importante remarcar que en un mismo modelo pueden coexistir tanto variables carry-over que tengan condición inicial como variables carry-over sin ella, simplemente se añaden las restricciones vistas en la expresión 3-42 particularizadas para aquellas variables que requieran de condición inicial.

### 3.7.4 Índice de factor de eficiencia

Tal y como se comentó con anterioridad, SBM es un modelo no radial. Por tanto, debido a que no se produce variación radial de las variables, sino que cada una de ellas se reduce o aumenta (según corresponda) de manera independiente se puede obtener un índice de factor de eficiencia (FEI, *Factor Efficiency Index*, en inglés) para cada una de las entradas, salidas y carry-over usando solo el valor actual de la variable y el valor de su proyección sobre la frontera eficiente. De este modo nos quedaría la siguiente expresión:

$$FEI = \frac{DatoActual}{Proyección} - 1
 \tag{3-43}$$

En caso de que el valor de FEI para una determinada variable de una DMU sea cero, entonces significa que el valor actual y el de la proyección son iguales y por tanto dicha variable se encontrará en la frontera eficiente y el factor<sup>25</sup> será considerado eficiente.

También se podría dar el caso de que se obtuviera un valor negativo, y por tanto estaríamos ante una salida o una carry-over deseable ineficiente.

Otra posibilidad es que se obtuviera un valor positivo, entonces estaríamos ante una entrada o una carry-over indeseable ineficiente.

Es importante remarcar que este indicador, determina si una variable de una unidad productiva es eficiente o no y por tanto no valora si la DMU al completo es o no eficiente. En todo caso, si todas las variables de una DMU tuvieran un FEI con valor cero se consideraría a dicha DMU eficiente. En caso contrario, aunque solo hubiera una variable que no obtiene FEI nulo, se considerará a esa DMU en concreto ineficiente.

<sup>25</sup> Que no la de su DMU correspondiente.

### 3.8 Tratamiento de variables no positivas

Hasta el momento, se ha considerado que las variables eran todas positivas. Sin embargo, existen ocasiones (como la que surgirá más adelante en esta investigación) donde las variables pueden ser tanto positivas como negativas. Para poder trabajar adecuadamente con este tipo de variables se recurre a una modificación de estos datos llamada RDM (*Range Directional Model*, en inglés). Dicha modificación distingue entre si el dato tratado es entrada o salida del modelo. Es importante recalcar que estas modificaciones solo son aplicables a modelos SBM ya que admiten modificaciones de este estilo, es decir, para otro tipo de modelos aplicar estas modificaciones no resultarían en conclusiones satisfactorias.

En caso de ser una variable de entrada se trataría del siguiente modo:

$$P_{i0}^- = x_{i0} - \min_j(x_{ij}) \quad i = 1, \dots, m \quad (3-44)$$

Siendo  $x_{i0}$  la entrada del modelo para una DMU genérica  $DMU_0$ .

En caso de tener una variable de salida se procedería de esta forma:

$$P_{r0}^+ = \max_j(y_{rj}) - y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \quad (3-45)$$

Siendo  $y_{r0}$  la salida del modelo para una DMU genérica  $DMU_0$ .

Una vez tenemos estas modificaciones se pueden aplicar a un modelo SBM. Considerando el modelo MSBM, para una DMU genérica  $DMU_0$  nos quedaría del siguiente modo:

$$\text{Min } \rho = \frac{1 - \sum_{i=1}^m \frac{w_i s_i^-}{P_{i0}^-}}{1 + \sum_{r=1}^s \frac{v_r s_r^+}{P_{r0}^+}} \quad (3-46)$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^s \lambda_j y_{rj} - s^+ = y_{r0} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_j x_{ij} + s^- = x_{i0} \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1; \quad \sum_{r=1}^s v_r = 1$$

$$v_r, w_i, \lambda_j, s^-, s^+ \geq 0$$

Podemos apreciar cómo, existirán casos donde el valor de  $P$  valdrá cero (en aquellas unidades donde se alcance el mínimo o máximo según corresponda), para estos casos donde se realiza una división entre cero, se asumirá que se eliminan estos términos de la función objetivo.

Si nos fijamos, estas modificaciones se realizan solo en la función objetivo, con la intención de que dicha función siempre se halle entre 0 y 1 (con valores negativos se corre el riesgo de que esto no suceda). En las restricciones del problema no se realiza ninguna modificación, quedándose los datos originales en el modelo.

### 3.9 Conclusiones

A lo largo de este capítulo se han expuesto una gran amalgama de conceptos sin los cuáles no estaríamos en condiciones de dar paso a analizar la eficiencia relativa de los distintos clubes que, a priori, participarán en la Superliga Europea. Por citar solo unos pocos podríamos hablar del término eficiencia relativa, retorno de escala (variable y constante), orientación de entrada y de salida, unidad productiva, fase radial, fase rectangular y un largo etcétera.

Además, se han planteado una recopilación de modelos básicos sin los cuales no se podría haber dado pie a las diversas investigaciones que utilizan DEA a lo largo del mundo. Como se ha visto en el apartado 3.6, a día de hoy siguen siendo usados a pesar de que algunos de ellos consten de pequeñas modificaciones para adaptarlos a ciertas situaciones específicas de la investigación llevada a cabo.

Uno de los apartados más importantes para esta investigación es el 3.7. En este apartado se ha desarrollado de manera extensa la teoría de Dynamic DEA. Dicho modelo será el utilizado posteriormente en nuestra investigación y por tanto es de vital importancia una buena recopilación teórica del mismo.

## 4 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

---

*No hay rama de la matemática, por abstracta que sea,  
que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del  
mundo real*

*- Nikolai Ivanovich Lobachevski-*

### 4.1 Introducción

A lo largo de este capítulo se pretende plantear el modelo DEA que se utilizará para medir la eficiencia relativa de los clubes que conformarán la Superliga Europea de Fútbol. Para ello, en primer lugar, se describirá el objetivo del análisis así como el objeto (es decir, las distintas DMUs analizadas). A continuación, se procederá a describir las distintas variables que serán consideradas para medir la eficiencia relativa (entradas, salidas y variables carry-over), además de plantear esquemáticamente el modelo utilizado. Tras esto, se discutirán las distintas características con las que contará el modelo. Por último, se hará mención a las distintas fuentes de las cuales se han obtenido los datos justificándose la fiabilidad de los mismos. Con todo esto, se describirán las distintas ecuaciones que regirán el modelo (función objetivo y restricciones).

### 4.2 Objetivo del análisis DEA

Como se ha descrito en el Capítulo 2, la industria del fútbol es, a día de hoy, un negocio que mueve grandes cantidades de dinero y donde la rivalidad y competitividad es máxima, donde cualquier mínimo detalle, para bien o para mal, puede tener grandes repercusiones.

En este ámbito no es descabellada la idea de medir la eficiencia de los distintos clubes, es decir, analizar cómo cada uno de los equipos está sacando partido a los recursos con los que cuenta. Y no solo esto es relevante, también es importante concluir en qué medida cada recurso está siendo bien o mal utilizado para así ser más acertado a la hora de poner soluciones. Además, aquellos equipos que no estén haciendo un buen uso de sus recursos querrán saber en qué equipos han de fijarse para alcanzar la eficiencia, información que también surgirá del análisis a realizar.

Para este caso, además, se va a realizar un análisis mediante Dynamic DEA<sup>26</sup>, por tanto, no solo se desea determinar qué DMU es eficiente o ineficiente sino cuándo lo fué, dentro de un período que abarcará desde la temporada 2014-2015 a la 2017-2018.

---

<sup>26</sup> Ver apartado 3.7.

### 4.3 Objeto del análisis DEA

Todo análisis DEA debe contar con una serie de DMUs. En esta investigación, dicho conjunto de DMUs estará formado por los 16 equipos de fútbol que aspiran a formar parte de la Superliga Europea de Fútbol, los cuales se detallan en la siguiente tabla:

Tabla 4-1. Listado de clubes bajo análisis.

Nombre	Abreviatura <sup>27</sup>
Real Madrid Club de Fútbol	Real Madrid
Fútbol Club Barcelona	Barcelona
Manchester United Football Club	United
Bayern Munich e.V.	Bayern
Juventus Football Club S.p.A.	Juventus
Chelsea Football Club	Chelsea
Arsenal Football Club	Arsenal
París Saint-Germain Football Club	PSG
Manchester City Football Club	City
Liverpool Football Club	Liverpool
Associazione Calcio Milan	AC Milan
Club Atlético de Madrid	Atlético
Ballspielverein Borussia e.V. Dortmund	Borussia
Olympique de Marseille	Marseille
Football Club Internazionale Milano S.p.A.	Inter
Associazione Sportiva Roma	Roma

Como es de esperar, el objetivo de estos clubes será tener éxito deportivo y, a su vez, tener éxito económico. Aunque normalmente, suelen ser dos objetivos que van de la mano ya que un mejor resultado deportivo proporciona más ingresos y viceversa, se van a medir ambos, y por tanto, en este análisis se considerarán tanto variables económicas de los clubes como variables que midan el desempeño deportivo.

## 4.4 Descripción del modelo a implementar

### 4.4.1 Variables del modelo

Ya es sabido que este trabajo pretende aplicar Dynamic DEA a la medida de la eficiencia. Debido a esto, cada una de nuestras DMUs en cada una de las temporadas consideradas (2014-2015 hasta la 2017-2018) tendrá una serie de entradas y salidas. Además, existirá una variable que será de tipo carry-over de manera que los distintos momentos en el tiempo de cada una de las DMUs queden conectados entre sí.

En primer lugar, pasemos a describir la variable carry-over:

- Valor de mercado de la plantilla (ver Anexo 2): uno de los activos más importantes de un equipo de fútbol es el valor de mercado de su plantilla. Dicho valor varía dependiendo de dos factores, en primer lugar, de la inversión en fichajes realizada (a mayor inversión se espera mayor valor de la plantilla); y en segundo lugar, de los resultados deportivos obtenidos (mejores resultados deportivos implica que la plantilla es, en término medio, de mayor calidad y por tanto más valiosa), además de esto, el valor de una plantilla puede mejorar por el rendimiento individual de un jugador o por la inclusión de canteranos en el equipo principal. Esta variable se considerará carry-over porque, para cada DMU, existirá en cada

<sup>27</sup> Estas abreviaturas serán las que se usarán de aquí en adelante en este trabajo. Dichas abreviaturas son ampliamente utilizadas para hacer referencia a estos clubes en el mundo del Fútbol.

temporada un valor de plantilla al comienzo y un valor de plantilla al final. Dicho valor final será a su vez valor al comienzo de la temporada siguiente.

A continuación, se describen las distintas salidas del modelo:

- Puntuación total ponderada (ver Anexo 3): Debido a que los clubes analizados son de países distintos y debido a que no está cuantificado el valor de salir victorioso de ciertos torneos, se hace necesaria una ponderación de puntuación, que refleje el rendimiento deportivo de un club en todas las competiciones de las cuales ha formado parte. Esta salida tendrá gran relevancia, ya que es la que determina, en su mayor parte, cómo ha sido la temporada de un club a nivel deportivo.
- Goles a favor por partido (ver Anexo 4): Esta variable determina la media de goles marcados por partido. Esta salida también valora el rendimiento deportivo ya que a mayor número de goles por partido se considera que el desempeño ha sido mayor.
- Goles en contra por partido (ver Anexo 5): Similar a la anterior, esta variable determina el número de goles recibidos por partido. Esta salida será no deseable, puesto que aquí a menor valor de esta variable significará un mejor rendimiento deportivo. Debido a esta característica, se va a tratar a modo de entrada en la función objetivo del modelo<sup>28</sup>.

Por último, las entradas del modelo serán:

- Sueldo de los jugadores (ver Anexo 6): El sueldo de los jugadores será una entrada de gran relevancia, ya que las cantidades que los clubes pagan a ciertos jugadores en salarios no es baladí. Se considerará una entrada ya que se espera que a mayor sueldo, mayor rendimiento deportivo tendrán los futbolistas, y por tanto mejores resultados deportivos así como valoración de la plantilla. Esta variable representa todo el gasto que un club ha hecho en pagar salarios de jugadores a lo largo de una temporada.
- Inversión en fichajes (ver Anexo 7): La inversión en fichajes podría parecer que está implícita dentro del valor de mercado de la plantilla, pero es importante tener en cuenta que, en el mundo del fútbol, el valor de mercado es una cosa y el pago que realiza un club por un jugador es otra. Es decir, un jugador puede tener un valor determinado en el mercado (que sirve como referencia para negociaciones y demás), pero por otro lado está la cantidad finalmente pagada por el futbolista, la cual puede diferir de la cifra dada por su valor de mercado, siendo esta cantidad más alta o más baja. A modo de ejemplo, un jugador que se encuentre sin equipo tendrá un determinado valor de mercado mayor a 0€, sin embargo, si un club lo ficha el desembolso que realizará por él será de 0€, simplemente se hará cargo de su salario. Esta variable podrá tener valores positivos (en caso de que el gasto en fichajes supere a los ingresos, y por tanto se esté invirtiendo) o valores negativos (en caso de que el gasto en fichajes sea menor a los ingresos, y por tanto se esté obteniendo ingresos por las ventas de jugadores). Esta variable se considerará como entrada ya que se espera que a mayor inversión en fichajes, mayores resultados deportivos y de valor de plantilla se obtendrán.

#### 4.4.2 Esquema del modelo

Una vez descritas las variables del modelo, ya estamos en condiciones de describir esquemáticamente (de manera análoga a Fig. 7 y Fig. 15) el modelo utilizado. En el esquema se mostrarán instantes de tiempo  $t$  y  $t+1$ , los cuales serán las distintas temporadas bajo análisis. Las temporadas de análisis serán  $t=2014-2015$ ,  $2015-2016$ ,  $2016-2017$  y  $2017-2018$ . Con todo esto, el esquema quedará como se muestra a continuación:

<sup>28</sup> Según Halkos G. y Petrou K. N. (2019) una forma habitual de tratar las entradas no deseadas es modelarlas como una entrada clásica, de manera que ahora el modelo tendrá como objetivo reducir su cantidad hasta llegar a la frontera eficiente.

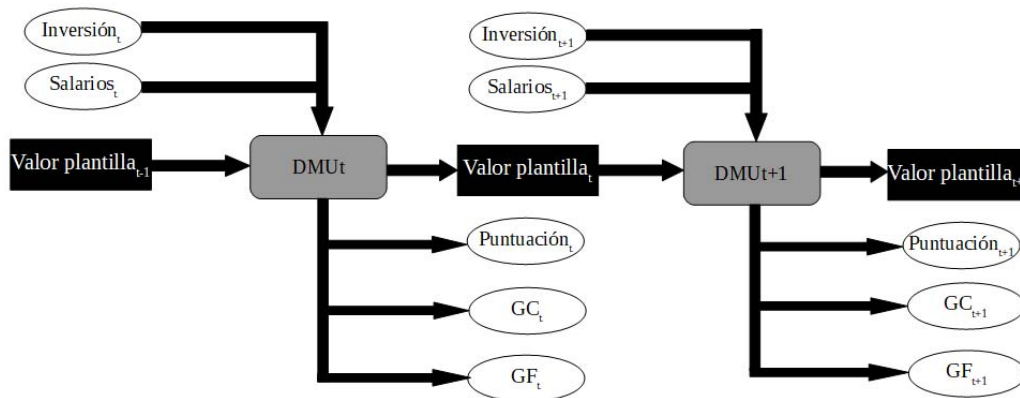


Figura 17. Estructura del modelo a implementar

#### 4.4.3 Características del modelo implementado

La característica más relevante del modelo a implementar es que se hará uso de los modelos basados en Dynamic DEA.

Además, como ya es sabido, este modelo contará con dos entradas, inversión en fichajes y salarios, con tres salidas, puntuación global ponderada y goles a favor y en contra por partido, además de tener una variable carry-over que será el valor de mercado de la plantilla. A la variable carry-over se le incluirá, además una condición inicial (ver apartado 3.7.2).

Otra cuestión bastante importante es determinar si se va a realizar un análisis con retorno de escala constante o con retorno de escala variable.

Resulta muy discutible si el análisis sería relevante con un tipo de retorno de escala u otro. Por un lado se podría considerar retornos de escala constantes debido a que los equipos que pretenden formar parte de la Superliga son de los más fuertes de todo el continente europeo y de la práctica totalidad del fútbol mundial, todos ellos manejan unas cifras económicas muy elevadas de un orden de magnitud similar y su desempeño a nivel deportivo es bastante elevado. Por todo ello, se podría afirmar que todos los clubes del conjunto analizado podrían encuadrarse dentro de un análisis CRS.

Sin embargo, resulta también que se puede considerar que el retorno de escala sea variable. Esto es motivado porque equipos muy punteros (como serían Barcelona, Real Madrid o Bayern) estarían, en cuanto a inversión y nivel deportivo, un escalón por encima de otros clubes más débiles (como serían Atlético, Borussia o Marseille).

Pensemos por ejemplo que un equipo como el Barcelona recibe 1 millón de € para que los invierta en mejorar el equipo, es de esperar que su valor de plantilla y su desempeño deportivo mejore un cierto nivel. Pensemos ahora que ese mismo millón de euros lo recibiese el Atlético por ejemplo, en este caso el incremento que se produciría en cuanto a mejora del nivel de la plantilla y resultados deportivos sería mayor en proporción que el del Barcelona. Con este ejemplo se ilustra que la idea de realizar un análisis VRS también sería muy acertada.

Por todo esto, puesto que determinar qué retorno de escala es más adecuado podría acabar siendo una cuestión de eterno debate, en esta investigación se van a realizar ambos análisis, tanto con retorno de escala variable como constante.

Por último, cabe mencionar que nuestro modelo será no orientado, debido a que no queda claro si un equipo tendrá como intención aumentar sus resultados manteniendo sus recursos constantes o mantener los resultados actuales reduciendo el nivel de recursos. Con lo cual se deja abierta la posibilidad de que cada club tome sus propias decisiones de cambio, pudiendo tanto reducir entradas como aumentar salidas como hacer un cambio

que aúne ambos objetivos.

## 4.5 Justificación del modelo

### 4.5.1 Elección de variables

Tal y como se comentó durante el desarrollo de la teoría de DEA, seleccionar correctamente las entradas y salidas que realmente son influyentes para medir la eficiencia sin dejar otras variables importantes de lado es una tarea sesuda y, generalmente abierta a debate debido a que en cualquier trabajo sobre DEA que se realice normalmente existirán dudas sobre si un determinado dato es relevante para medir la eficiencia o no. Sin embargo, las variables en esta investigación han sido seleccionadas usando como referencia ciertos estudios sobre DEA aplicado al fútbol (Ver Tabla 3.3), artículos periodísticos sobre el funcionamiento y la gestión de los clubes de fútbol y el siempre importante criterio propio, fruto de la más profunda reflexión y análisis del funcionamiento de un club de fútbol.

También es cierto que otras variables, como por ejemplo el valor de las plantillas filiales o la incidencia de lesiones podría influir en la eficiencia de los clubes. Pero existen dos problemas importantes con la mayoría de ellas que impiden que se puedan añadir al análisis de la eficiencia mediante DEA. En primer lugar, es muy discutible el hecho de que realmente debieran de considerarse estos datos como relevantes (de hecho, gran parte de investigaciones DEA sobre fútbol lo han ignorado). En segundo lugar, existe una gran falta de información fiable, como en el caso del valor de las plantillas filiales. Además, en algunas variables, como la incidencia de las lesiones, es realmente complejo cuantificar el perjuicio que le supone una lesión a un club ya que muchos factores serían importantes en esta medición (importancia del jugador en la plantilla, existencia de sustitutos, periodo de recuperación tras lesión, duración, gravedad, etc.).

En definitiva, tras un análisis de investigaciones DEA sobre fútbol, artículos de especialistas sobre fútbol y reflexión propia, las variables elegidas son las consideradas más relevantes a la hora de medir la eficiencia. A ello se añade que las fuentes de las cuales se obtienen los datos de las variables elegidas son de una alta fiabilidad.

### 4.5.2 Fuentes de los datos utilizados

Las fuentes de las cuales se han tomado datos son diversas pero todas ellas son altamente fiables.

En primer lugar, los datos sobre el valor de la plantilla han sido tomados del sitio web de Transfermarkt, de origen alemán. Esta web se dedica a recopilar datos sobre el mundo del fútbol, entre ellos el valor de mercado de los futbolistas. Este sitio es ampliamente utilizado a nivel mundial<sup>29</sup> para realizar consultas sobre el mundo del fútbol y está considerado como uno de los mejores y más fiables proporcionando datos sobre este mundo.

Para las tres variables de salida, puntuación, goles a favor y goles en contra, no existía una fuente que fuera altamente fiable. Sin embargo, haciendo consulta en las bases de datos que proporcionan tres diarios españoles especializados en el mundo del deporte (Sport, Marca y As) resultó que la información proporcionada era exactamente la misma por los tres diarios. Por tanto, estos datos se pueden considerar también altamente fiables.

Una entrada de bastante relevancia son los salarios totales de los jugadores. En este caso los datos fueron tomados de una prestigiosa publicación de la agencia Sporting Intelligence denominada Global Sports Salaries Surveys que publica cada año un informe con los salarios de multitud de deportistas, así como los gastos que han hecho en este área distintos clubes de diversas áreas (fútbol, baloncesto, fútbol americano, etc.).

La inversión en fichajes fue obtenida nuevamente del sitio web Transfermarkt, el cual mostraba el balance entre los gastos realizados en fichajes y los ingresos obtenidos por la venta de jugadores.

---

<sup>29</sup> Sin ir más lejos, en Alemania se encuentra en el Top 25 de los sitios webs más visitados del país.



## 4.6 Modelado matemático del modelo

Teniendo en cuenta todo lo desarrollado a lo largo de este capítulo, las ecuaciones matemáticas por las que se registrará el modelo serán las desarrolladas a continuación.

Los nombres de los datos usados y su correspondencia se detallan en la siguiente tabla:

Tabla 4-2. Relación de datos del modelo y su significado

Significado	Variable
Inversión en fichajes	INVERSION
Salarios de los jugadores	SALARIOS
Puntuación total ponderada	PUNTUACION
Goles en contra por partido	GC
Goles a favor por partido	GF
Valor de mercado de la plantilla	PLANTILLA

También existirán variables *slack*, cuyas siglas serán el término *slack* junto con la sigla del dato correspondiente, además de las ya conocidas como  $\lambda$  (ver capítulo 3).

Los goles en contra, debido a que son una salida no deseada, serán modelados como una entrada (Halkos y Petrou, 2019). Además, dado que la inversión en fichajes podrá ser tanto positiva como negativa se hará uso de la transformación propuesta en el capítulo 3. Dicha transformación quedaría del siguiente modo (para cada  $DMU_0$  ( $o=1, \dots, n$ )):

$$rangoINVERSION_{ot} = INVERSION_{ot} - \min(INVERSION_{jt}) \quad t=2014/15, \dots, 2017/18, j=1, \dots, n \quad (4-1)$$

En primer lugar se muestra el modelo sin linealizar y posteriormente se mostrará el mismo modelo una vez linealizado para cada  $DMU_0$  ( $o=1, \dots, n$ ).

Para las variables de entrada las restricciones serían:

$$\begin{aligned} INVERSION_{ot} &= \sum_{j=1}^n INVERSION_{jt} \lambda_j^t + slackINVERSION_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18 \\ SALARIOS_{ot} &= \sum_{j=1}^n SALARIOS_{jt} \lambda_j^t + slackSALARIOS_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18 \end{aligned} \quad (4-2)$$

Para las variables de salida nos tendríamos las siguientes restricciones, se puede apreciar cómo los goles en contra, debido a que son una salida indeseable, son tratados como una entrada, es decir, una variable a reducir. El tratamiento para dicha variable será también aplicado en la función objetivo:

$$\begin{aligned} PUNTUACION_{ot} &= \sum_{j=1}^n PUNTUACION_{jt} \lambda_j^t + slackPUNTUACION_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18 \\ GC_{ot} &= \sum_{j=1}^n GC_{jt} \lambda_j^t + slackGC_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18 \\ GF_{ot} &= \sum_{j=1}^n GF_{jt} \lambda_j^t - slack'GF_t^+ \quad t=2014/15, \dots, 2017/18 \end{aligned} \quad (4-3)$$

Para la variable carry-over de valor de plantilla habría que implementar las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} PLANTILLA_{ot}^{good} &= \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt}^{good} \lambda_j^t - slackPLANTILLA_t^+ \quad t=2014/15, \dots, 2017/18 \\ PLANTILLA_{ot}^{good} &\leq \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt}^{good} \lambda_j^{t+1} \quad t=2013/14 \\ \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt} \lambda_j^t &= \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt} \lambda_j^{t+1} \quad t=2014/15, \dots, 2016/17 \end{aligned} \quad (4-4)$$

Donde la segunda línea de la expresión hace que pueda existir un valor de plantilla inicial a modo de entrada en el primer periodo analizado. También hay que tener en cuenta la siguiente expresión, la cual aplica a los tres grupos de restricciones precedentes:

$$\lambda_j^t, slackINVERSION_t^-, slackSALARIOS_t^-, slackGC_t^-, slackPUNTUACION_t^+, slackGF_t^+, slackPLANTILLA_t^+ \geq 0 \quad (\forall t) \quad (4-5)$$

Por último, la función objetivo será:

$$\rho_o^* = \min \frac{\frac{1}{4} \sum_{t=2014/15}^{2017/18} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{slackINVERSION_t^-}{rangoINVERSION_{ot}} + \frac{slackSALARIOS_t^-}{SALARIOS_{ot}} + \frac{slackGC_t^-}{GC_{ot}} \right) \right]}{\frac{1}{4} \sum_{t=2014/15}^{2017/18} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{slackPUNTUACION_t^+}{PUNTUACION_{ot}} + \frac{slackGF_t^+}{GF_{ot}} + \frac{slackPLANTILLA_t^+}{PLANTILLA_{ot}} \right) \right]} \quad (4-6)$$

Las expresiones aquí planteadas se corresponden con el modelo no lineal, se puede apreciar cómo la función objetivo no es lineal debido a que es un cociente. Por tanto, se hace necesaria una linealización.

La linealización (Fulanito, 2936) se realiza mediante la inserción de una nueva variable  $w$  e incluyendo un cambio de variables, donde la variable  $x' = w * x$ , siendo  $x$  cualquier variable tipo slack o  $\lambda$ . El modelo linealizado para una DMU<sub>o</sub> con  $(o=1, \dots, n)$  quedará como se presenta a continuación.

$$\theta_o^* = \min \frac{1}{4} \sum_{t=2014/15}^{2017/18} \left[ w - \frac{1}{3} \left( \frac{slack'INVERSION_t^-}{rangoINVERSION_{ot}} + \frac{slack'SALARIOS_t^-}{SALARIOS_{ot}} + \frac{slack'GC_t^-}{GC_{ot}} \right) \right] \quad (4-7)$$

s.a.

$$\frac{1}{4} \sum_{t=2014/15}^{2017/18} \left[ w + \frac{1}{3} \left( \frac{slack'PUNTUACION_t^+}{PUNTUACION_{ot}} + \frac{slack'GF_t^+}{GF_{ot}} + \frac{slack'PLANTILLA_t^+}{PLANTILLA_{ot}} \right) \right] = 1$$

$$w \cdot INVERSION_{ot} = \sum_{j=1}^n INVERSION_{jt} \lambda_j^t + slack'INVERSION_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18$$

$$w \cdot SALARIOS_{ot} = \sum_{j=1}^n SALARIOS_{jt} \lambda_j^t + slack'SALARIOS_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18$$

$$w \cdot PUNTUACION_{ot} = \sum_{j=1}^n PUNTUACION_{jt} \lambda_j^t + slack'PUNTUACION_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18$$

$$w \cdot GC_{ot} = \sum_{j=1}^n GC_{jt} \lambda_j^t + slack'GC_t^- \quad t=2014/15, \dots, 2017/18$$

$$w \cdot GF_{ot} = \sum_{j=1}^n GF_{jt} \lambda_j^t - slack'GF_t^+ \quad t=2014/15, \dots, 2017/18$$

$$w \cdot PLANTILLA_{ot}^{good} = \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt}^{good} \lambda_j^t - slack'PLANTILLA_t^+ \quad t=2014/15, \dots, 2017/18$$

$$PLANTILLA_{ot}^{good} \leq \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt}^{good} \lambda_j^{t+1} \quad t=2013/14$$

$$\sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt} \lambda_j^t = \sum_{j=1}^n PLANTILLA_{jt} \lambda_j^{t+1} \quad t=2014/15, \dots, 2016/17$$

$$rangoINVERSION_{ot} = INVERSION_{ot} - \min_j (INVERSION_{jt}) \quad t=2014/15, \dots, 2017/18, j=1, \dots, n$$

Una vez resuelto este modelo linealizado, se desharía el cambio de variables realizado en aras de obtener los valores de *slacks* originales óptimos. Y una vez concluido este paso, se procedería a la medida de la eficiencia de cada DMU en cada instante (de manera análoga a la expresión 3.37) mediante la siguiente expresión:

$$\rho_{ot}^* = \frac{1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\text{slack}INVERSION_t^-}{\text{rango}INVERSION_{ot}} + \frac{\text{slack}SALARIOS_t^-}{SALARIOS_{ot}} + \frac{\text{slack}GC_t^-}{GC_{ot}} \right)}{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\text{slack}PUNTUACION_t^+}{PUNTUACION_{ot}} + \frac{\text{slack}GF_t^+}{GF_{ot}} + \frac{\text{slack}PLANTILLA_t^+}{PLANTILLA_{ot}} \right)} \quad (4-8)$$

#### 4.7 Retorno de escala variable

Tras esto, el modelo quedaría planteado y podríamos pasar a resolver el modelo. Una vez hayamos resuelto el modelo y aplicado la expresión 4.8, tendremos un cálculo de eficiencia, slacks y  $\lambda$  para un modelo de retorno de escala constante. Sin embargo, se comentó que se iba a realizar el análisis de la eficiencia suponiendo tanto retorno de escala constante como variable. Por lo que para proceder a obtener los resultados VRS se añadiría la siguiente restricción al modelo ya existente:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^t = 1 \quad t = 2014/15, \dots, 2017/18 \quad (4-9)$$

Para el modelo linealizado, dado que se trabaja con un cambio de variable, la restricción quedaría del siguiente modo:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^t = w \quad t = 2014/15, \dots, 2017/18 \quad (4-10)$$

Una vez tenemos los dos modelos pasaríamos a implementar ambos mediante el lenguaje de programación LINGO®.

#### 4.8 Procedimiento de implementación del modelo

El modelo linealizado que se mostró en la expresión 4-7 y 4-8 (se incluiría la expresión 4-10 para VRS) será implementado creando un código mediante el programa LINGO® (ver Anexo 8), dicho programa permitirá resolver el modelo pretendido.

```

EQUIPOS: VAUX, FO, PLANTILLA0; !Variable asociada a EQUIPOS Funcion objetivo FO(eficiencia de cada aeropuerto);

EP(EQUIPOS, PERIODOS): PUNTOS, GF, GC, SALARIOS, INVERSION, rangoINVERSION, PLANTILLA, slackPUNTOS,
    slackGF, slackGC, slackSALARIOS, slackINVERSION, slackPLANTILLA;
    !conjunto llamado MODELO y 6 variables asociadas: 3outp,lcarryover,2input; !DIMENSIONAMIENTO PBMA;

PEE(PERIODOS,EQUIPOS,EQUIPOS): LAMBDA; !LAMBDA(DMU BAJO ESTUDIO,RESTO DMU'S Y ADEMÁS OTRA VARIABLE PUES QUE HAY MÁS DE UN

ENDSETS

DATA:
PERIODOS = 1..4; !PARA ACTIVO Y DEUDA (CARRYOVER) PUEDEN SER 3 PERIODOS EN LUGAR DE 4;
EQUIPOS=1..16;

!Leemos datos desde EXCEL correspondientes a: OUTPUTS, CARRY-OVER, INPUTS del modelo (CUIDADO PORQUE EL FORMATO HA DE SER .xls;

SALARIOS, rangoINVERSION, INVERSION=@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls'); !ENTRADAS MODELO;
PLANTILLA=@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls');
PLANTILLA0=@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls'); !CARRY OVER MODELO;
PUNTOS, GF, GC=@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls'); !SALIDAS MODELO;

!Escribimos datos en EXCEL correspondientes a las holguras de las diferentes variables del modelo;

@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=slackSALARIOS, slackINVERSION;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=slackPUNTOS, slackGF, slackGC;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=slackPLANTILLA;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=FO, VAUX;

ENDDATA
    
```

Figura 18. Fragmento de código LINGO® utilizado.

Para que el programa funcione recibirá los datos sobre entradas y salidas del modelo de una hoja de Microsoft Excel® debidamente preparada. Una vez el programa resuelva el modelo, volcará los datos en la misma hoja Excel® en el conjunto de casillas que hayamos preparado para dicho fin.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	2014-15	2015-16	2016-17	2017-18			2014-15	2015-16	2016-17	2017-18			2014-15	2015-16	2016-17	2017-18
2	PUNTOS						GF						GC			
3	181	190	236	204			3,105263	2,894737	2,789474	2,473684			1	0,894737	1,078947	1,157895
4	249	206	180	198			2,894737	2,947368	3,052632	2,605263			0,552632	0,763158	0,973684	0,763158
5	146	186	169	137			1,763158	1,657895	1,842105	1,526316			0,763158	0,473684	0,710526	0,578947
6	60	77	81	89			1,473684	1,289474	1,5	1,473684			1,315789	1,131579	1,184211	1,105263
7	83	109	108	156			1,421053	2,184211	2,368421	1,605263			0,815789	1,078947	1	0,736842
8	68	83	70	80			1,552632	1,315789	1,894737	1,736842			1,263158	1	1,289474	0,789474
9	232	181	236	200			1,894737	1,973684	2,026316	2,263158			0,631579	0,526316	0,710526	0,631579
10	143	82,2	134,8	122,2			1,921053	1,552632	2,236842	1,631579			0,842105	1,394737	0,868421	1
11	134	113,2	125,6	97			1,868421	1,710526	2,026316	1,947368			0,947368	0,947368	1,157895	1,342105
12	76,4	95,8	141,4	123,6			1,631579	1,289474	1,421053	1,789474			0,973684	0,921053	0,763158	0,736842
13	104,8	150,2	116,6	184,2			2,184211	1,868421	2,105263	2,789474			1	1,078947	1,026316	0,710526
14	81	94	79,2	165			1,368421	1,657895	2,052632	2,210526			1,263158	1,315789	1,105263	1
15	106,1111	116,6667	151,1111	70,111111			1,382353	2,411765	2,117647	1,882353			1,235294	1	1,176471	1,382353
16	203,7778	227,7778	192,1111	223,3333			2,352941	2,352941	2,617647	2,705882			0,529412	0,5	0,647059	0,823529
17	69	68,6	66	114,2			2	1,263158	1,5	2,105263			1,105263	1,105263	1,078947	1,236842
18	198	211	152	183			2,184211	2,684211	2,184211	2,842105			0,947368	0,5	0,710526	0,763158

Figura 19. Fragmento de hoja Excel debidamente preparada.

Además, en la hoja Excel®, se realiza la medida de eficiencia (tanto global como para cada instante de cada DMU) y cálculo de las diferentes λ. Debido a que el programa en LINGO® solo nos devuelve el valor de los slacks, se creará un conjunto de casillas donde, de forma algebraica, a partir de estos slacks se calcularán estos datos anteriormente mencionados.

Tras haber programado de forma correcta los modelos (tanto VRS como CRS) obtendríamos las medidas de eficiencia relativa las cuales eran el objetivo principal de esta investigación, así como otros datos igualmente relevantes. Una vez hecho esto, estaremos en condiciones de extraer conclusiones relativas a cómo cada club está gestionando sus recursos a la hora de conseguir resultados económicos y deportivos.

## 5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

*Cuando estás solucionando un problema, no tienes que preocuparte. Ahora, después de que has resuelto el problema, entonces sí es momento de preocuparse.*

*- Richard Philips Feynman-*

### 5.1. Introducción

En este capítulo se pretende analizar los diversos datos obtenidos de haber medido la eficiencia. El primero y más relevante es la eficiencia, tanto global (relativa a los cuatro períodos analizados) como aquella relativa a cada año. Además resulta interesante analizar los distintos slacks obtenidos en aquellos clubes ineficientes, ya que este dato nos indica qué modificar y cuánto para que el equipo resulte eficiente. También se hará un ejercicio de *benchmarking*, ya que resultará de interés saber qué equipos eficientes serán referencia de los no eficientes. Resulta interesante dicho dato ya que si muchos clubes están *proyectándose* sobre un determinado equipo será porque su modelo de gestión es de los mejores y deberá de ser tenido muy en cuenta incluso por los propios equipos eficientes ya que, probablemente, su forma de gestionar los recursos es la mejor de todos los clubes bajo análisis.

### 5.2. Medida de la eficiencia

Tras haber realizado la medida de la eficiencia, tanto CRS como VRS se han obtenido los siguientes datos de la eficiencia de cada club en cada temporada analizada.

Tabla 5-1. Resultados de eficiencia CRS y VRS.

Club	2014-2015		2015-2016		2016-2017		2017-2018	
	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS
<b>Madrid</b>	1	1	0,690401	1	1	1	1	1
<b>Barcelona</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Atlético</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>AC Milan</b>	1	1	0,389251	0,459075	0,61054	0,615906	0,444857	0,477128
<b>Roma</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Inter</b>	1	1	0,537782	0,559271	0,504879	1	0,621859	1

<b>Juventus</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Chelsea</b>	1	1	0,362873	1	1	1	1	1
<b>Arsenal</b>	0,447487	0,441592	0,485453	0,551934	1	1	0,705837	1
<b>United</b>	0,273327	0,27503	0,366281	0,402297	0,539464	0,57377	0,70296	1
<b>City</b>	0,409933	0,392282	0,392131	0,448035	0,515085	0,563676	1	1
<b>Liverpool</b>	0,386553	0,413045	0,417686	0,411363	1	1	1	1
<b>Borussia</b>	0,653958	1	1	1	1	1	1	1
<b>Bayern</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Marseille</b>	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>PSG</b>	0,655921	1	1	1	0,644284	0,665391	1	1

De manera gráfica los datos CRS se pueden representar de la siguiente forma:

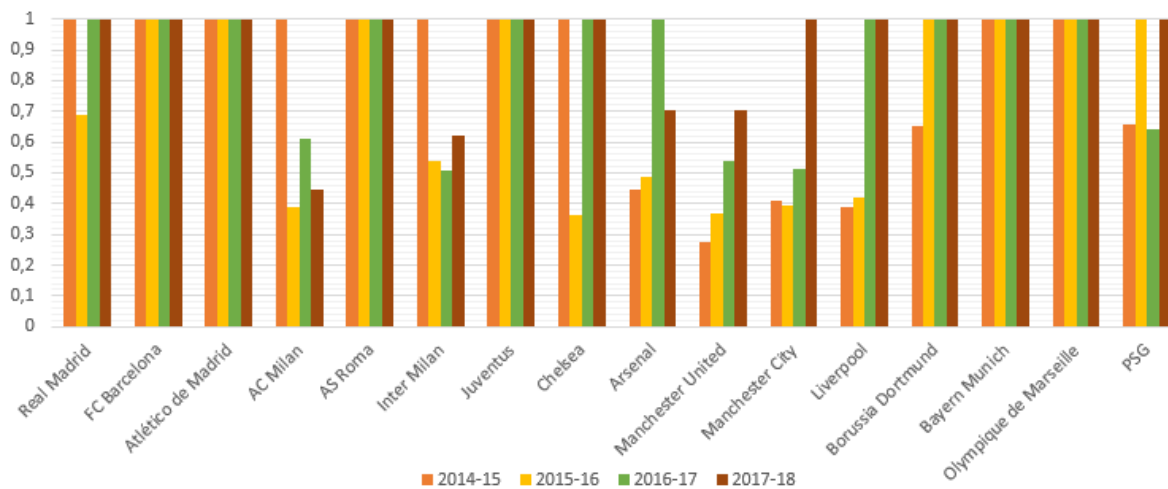


Figura 20. Resultados de eficiencia CRS.

Y los datos relativos al análisis VRS quedarían:

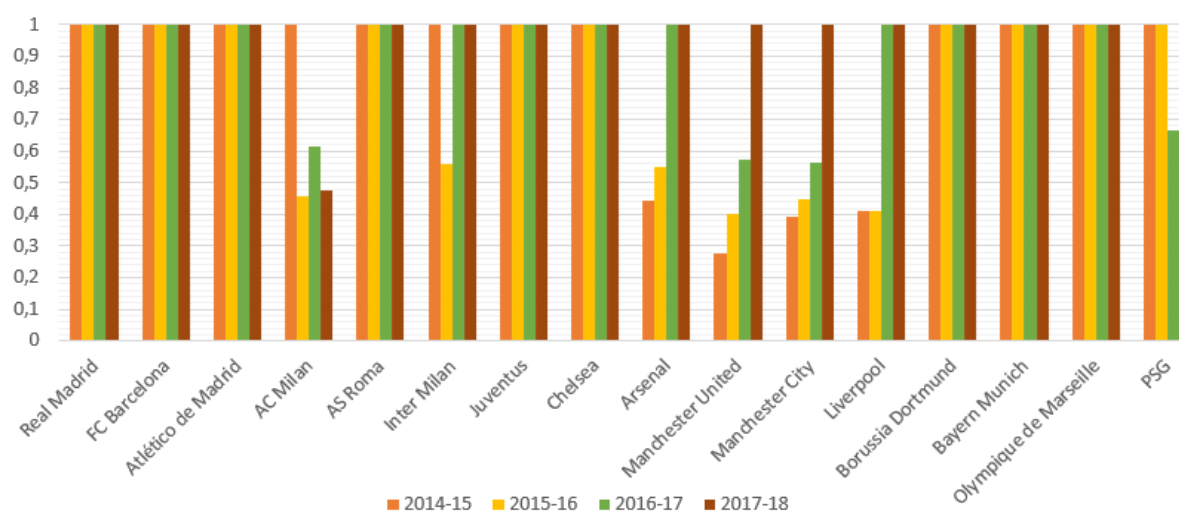


Figura 21. Resultados de eficiencia VRS.

Observando los datos anteriormente expuestos una de las cosas que más llama la atención es la alta cantidad de temporadas eficientes que han hecho los distintos clubes, en términos globales. Esto no es de extrañar ya que estamos analizando a un conjunto que contiene a varios de los mejores equipos a nivel mundial, y sin ser altamente eficiente resulta difícil mantenerse tanto tiempo en la cúspide del Fútbol como lo llevan haciendo estos equipos.

Analizando por países, los clubes españoles y alemanes se pueden englobar entre los más eficientes, en el análisis VRS son completamente eficientes para las cuatro temporadas y en CRS solo el Real Madrid en la temporada 2015-16 y el Borussia en la 2014-2015 no obtuvieron una eficiencia relativa unitaria. La causa de la eficiencia de Real Madrid, FC Barcelona y Bayern de Munich es que son los tres mejores equipos en cuanto a desempeño deportivo del conjunto analizado, son los que mejores datos han obtenido en cuanto a puntuación ponderada, goles y demás<sup>30</sup>. Mientras, Borussia y Atlético, resultan eficientes porque, a pesar de estar un “escalón” por debajo los demás en cuanto a presupuesto, han sido capaces de obtener unos resultados bastante meritorios.

En Francia el Olympique de Marseille es completamente eficiente, debido principalmente a que es el club con menos presupuesto y peor plantilla de todos los equipos analizados y, aún así, sus resultados deportivos son bastante decentes (en particular los de la última temporada). Por otro lado, el PSG presenta una ineficiencia solo VRS en la primera temporada y una segunda, tanto CRS como VRS. Esta segunda motivada porque no fue capaz de alzarse como campeón de la Liga de Francia, con la consecuente pérdida de puntos en lo que a rendimiento deportivo se refiere.

En Italia hay dos equipos que son completamente eficientes, Juventus y AS Roma. La Juventus por sus buenos resultados deportivos, siendo el mejor equipo de Italia con diferencia, mientras que la AS Roma, al igual que pasaba con el Olympique de Marseille, tiene unos resultados bastante respetables para el nivel de presupuestos y plantilla. Por otro lado, el AC Milan y el Inter, no han sido capaces en la mayoría de ocasiones de obtener unos resultados suficientemente buenos para los presupuestos con los que contaban.

El conjunto de equipos ingleses serían de los más ineficientes del análisis realizado. De todos modos, se puede apreciar una tendencia alcista en cuanto a eficiencia por parte de estos equipos. La causa más posible de estas ineficiencias sea que, a pesar de que estos equipos manejan unos presupuestos bastante altos, sus resultados deportivos dejan bastante que desear en comparación con el resto de equipos punteros de Europa, como podría ser el Real Madrid o el Bayern de Munich.

La eficiencia global, que se obtiene a través de la expresión 3-31, en nuestro caso no será más que la media de la eficiencia de cada temporada para cada club (Anexo 9). Los resultados obtenidos son los mostrados a

<sup>30</sup> En líneas generales. Para analizar de manera exhaustiva cada equipo habrá que recurrir a los anexos donde se muestran todos los datos al completo.

continuación.

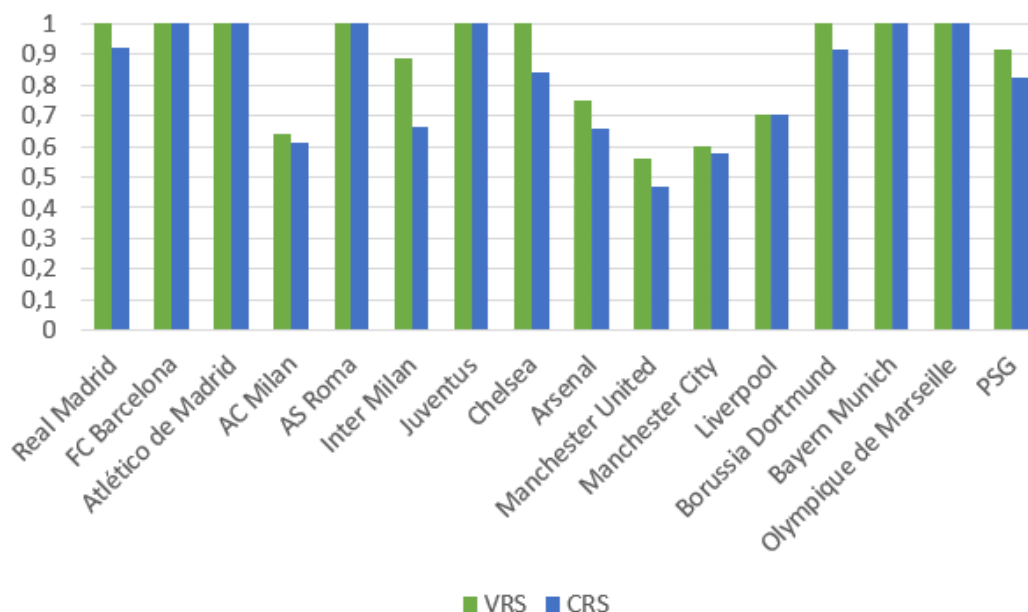


Figura 22. Eficiencia global CRS y VRS

Los resultados mostrados en este gráfico vienen a confirmar el análisis anteriormente realizado. Por tanto, los equipos plenamente eficientes en CRS será FC Barcelona, Atlético de Madrid, AS Roma, Juventus, Bayern Munich y Olympique de Marseille. Además, en VRS serán plenamente eficientes todos los anteriores más Real Madrid, Chelsea y Borussia Dortmund.

Una de las conclusiones más relevantes que se pueden obtener a partir de estos datos es que el conjunto de equipos ingleses, salvo el Chelsea, es tremendamente ineficiente en comparación con los demás. Exceptuando el AC Milán (quizá también se podría incluir al Inter de Milán), los equipos no ingleses son bastante eficientes y las ineficiencias que presentan no son muy altas. Sin embargo, el único club inglés que no tiene una situación alarmante en cuanto a eficiencia es el Chelsea (solo fue ineficiente una temporada en CRS). Por tanto, todos los clubes ingleses, exceptuando al Chelsea, y el AC Milan son bastante ineficientes. La causa de esto será vista en detalle más adelante (cuando se analicen los slacks), pero principalmente es debido a que tienen un gasto muy alto en salarios, en inversión y en valor de la plantilla para obtener unos resultados deportivos que no son tan excepcionales como las cantidades que desembolsan en estos aspectos. El único aspecto positivo que se puede desprender de este conjunto de equipos ineficientes es que los equipos ingleses muestran una tendencia alcista en cuanto a eficiencia se refiere, es decir, están aumentando su eficiencia año a año. De hecho, todos ellos al menos han sido eficientes en VRS en la última temporada.

Este grupo de equipos ineficientes deberá de poner bastante empeño en remediar esto y, por tanto, deberá de modificar su sistema de gestión de los recursos. Sin embargo, el resto de equipos también deberán de modificar ciertos aspectos en caso de mostrar alguna ineficiencia. E incluso si el club es plenamente eficiente, como el FC Barcelona por ejemplo, siempre deberá de mostrar interés por mejorar su sistema de gestión y en fijarse en otros equipos también eficientes como él. Todo esto se verá con mas detalle en los apartados venideros.

Otro dato de relevancia que podemos obtener es cómo ha evolucionado la eficiencia promedio de los clubes analizados para determinar si ésta está aumentado o empeorando. Este dato puede ser bastante relevante a la hora de evaluar el estado de la industria del Fútbol.



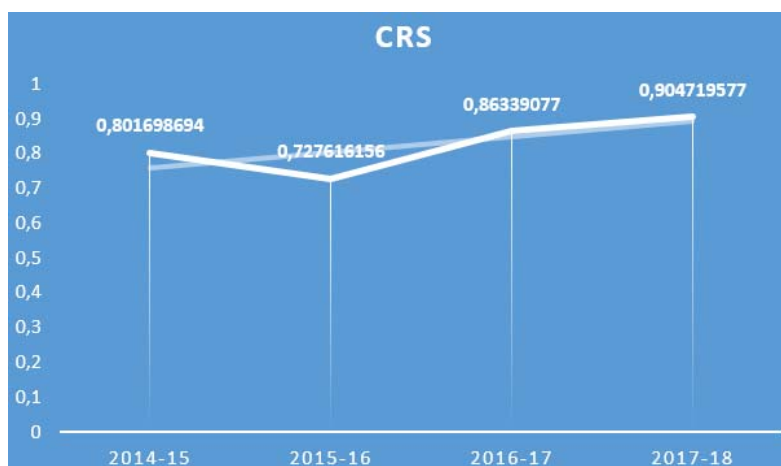


Figura 23. Evolución de la eficiencia promedio CRS



Figura 24. Evolución de la eficiencia promedio VRS

En las dos figuras anteriormente mostradas se puede observar principalmente que, a pesar de la pérdida de eficiencia que se produjo en la temporada 2015-2016, la tendencia es al alza y el crecimiento de la eficiencia promedio ha sido superior al 10% aproximadamente en tan solo cuatro años, se pasa de un 80% a un 90%. De todo esto se puede concluir que la industria del Fútbol trabaja asiduamente en la búsqueda de una gran eficiencia, y más aún en la élite de este deporte. De hecho, resulta fundamental, para los equipos que a día de hoy se encuentran en la cúspide, gestionar de manera muy eficiente los recursos de los que dispone, ya que, en caso de no hacerlo, con el paso del tiempo no sería capaz de estar al nivel del resto de equipos y terminaría fuera de esta élite.

### 5.3. Slacks

Los slacks son un conjunto de datos proporcionados por la resolución del modelo que nos da información acerca de los cambios (reducción o aumento, en función de si evaluamos una entrada o una salida y si éstas son deseables o indeseables) que tendría que hacer cada club en cada temporada para ser considerado eficiente, por tanto aquellos clubes con todos sus slacks con valor cero serán eficientes. Además, este dato muestra información relevante sobre cuál ha sido la causa de la ineficiencia y en qué grado. En el Anexo 10 se muestran todos los datos recogidos para todos los equipos, aquí solo analizaremos algunos de los más relevantes.

A modo de ejemplo podemos plantear el análisis de los slacks del club más ineficiente de todos los analizados, el Manchester United. A continuación, se muestran los distintas variaciones porcentuales que debería haber hecho el equipo para ser eficiente.

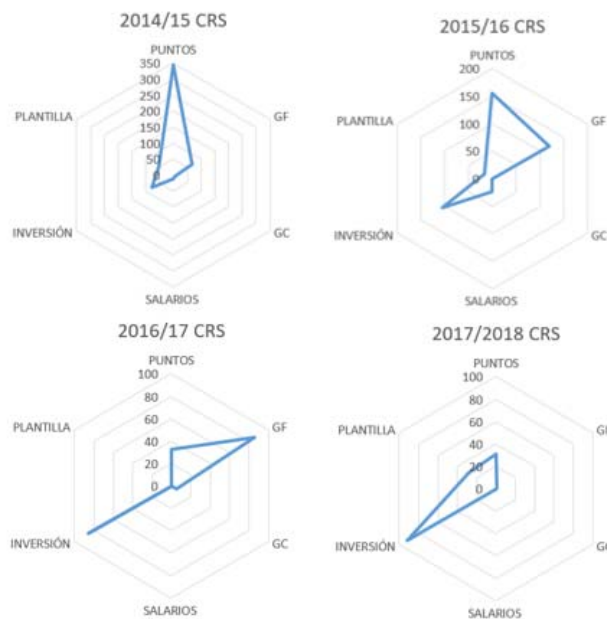


Figura 25. Variación porcentual slacks en CRS para Manchester United.



Figura 26. Variación porcentual slacks en VRS para Manchester United<sup>31</sup>.

Observando estos datos podemos observar cómo en las dos primeras temporadas el problema principal que arrastró el equipo fue la falta de puntos, lo cual ha ido mejorando temporada a temporada. Otra causa importante de ineficiencias fue la falta de acierto de cara a portería durante las temporadas 2015-2016 y 2016-17, aunque en la última temporada esa situación ha sido revertida. Una de las cosas que no estaban causando ineficiencias era el valor de la plantilla, el cual apenas debía cambiar para alcanzar la eficiencia. Por último, uno de los grandes

<sup>31</sup> No se muestra la última temporada puesto que en VRS ha sido eficiente, todos los valores serían cero por tanto.

problemas que tuvo el club fue la realización de inversiones excesivas. Es cierto, que en VRS en la última temporada se ha sido eficiente (y por tanto el slack vale cero), sin embargo el análisis CRS sigue avisando de que el principal problema, sobre todo de la última temporada, ha sido el exceso de inversión. De todos modos, el club parece estar gestionando cada vez mejor sus recursos, ya que, como se vió en las figuras 20 y 21 la eficiencia global ha aumentado.

Esta es una forma de analizar los slacks, equipo a equipo y sacar conclusiones acerca de qué mejoras puede realizar cada uno de forma individual. Pero también, se puede usar para analizar el *estado de salud* de la industria futbolística. Para ello vamos a analizar la evolución temporal de los distintos slacks pero del total de equipos evaluados, sumándolo.

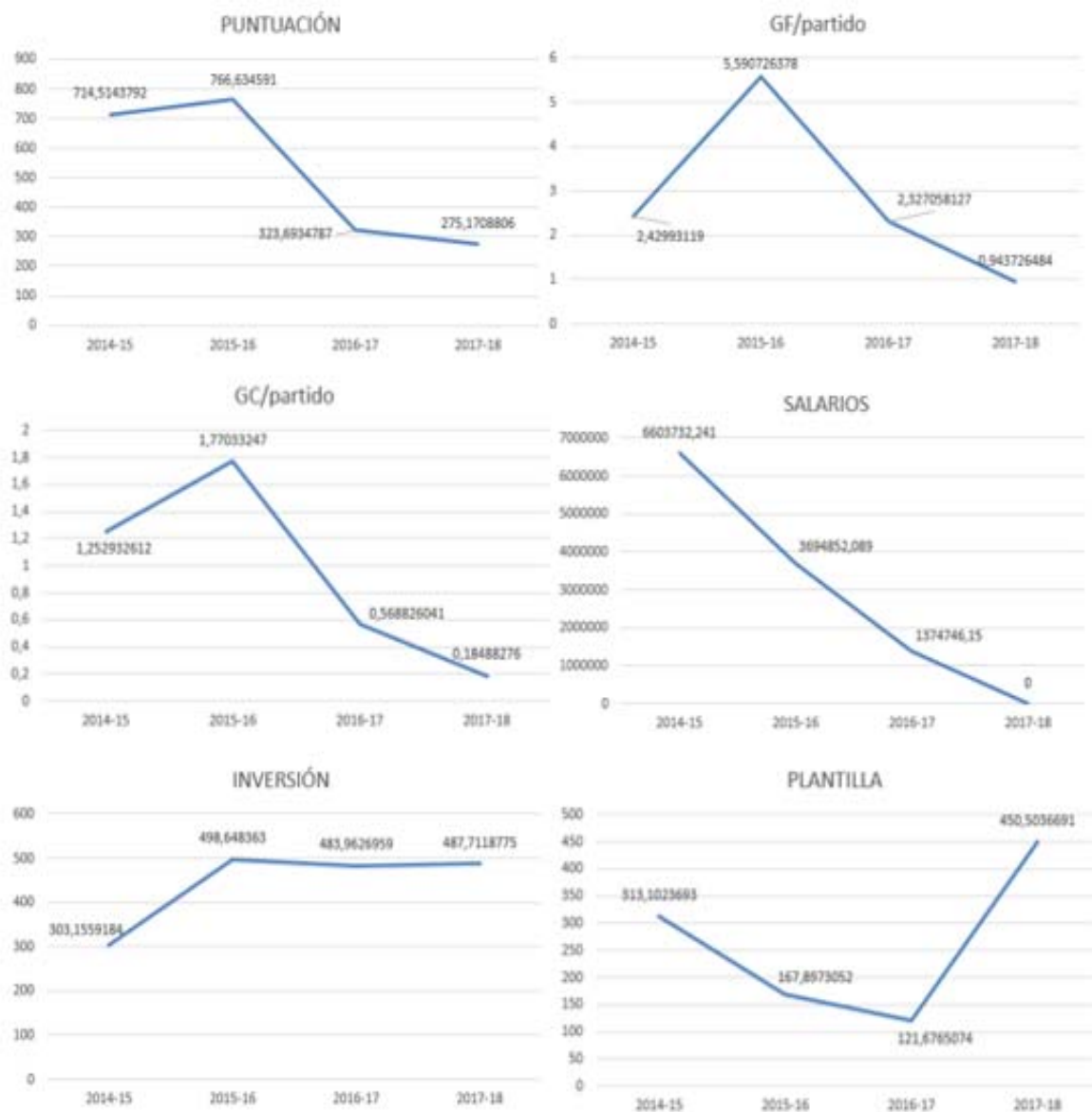


Figura 27. Variación de los distintos slacks en CRS de todos los equipos.

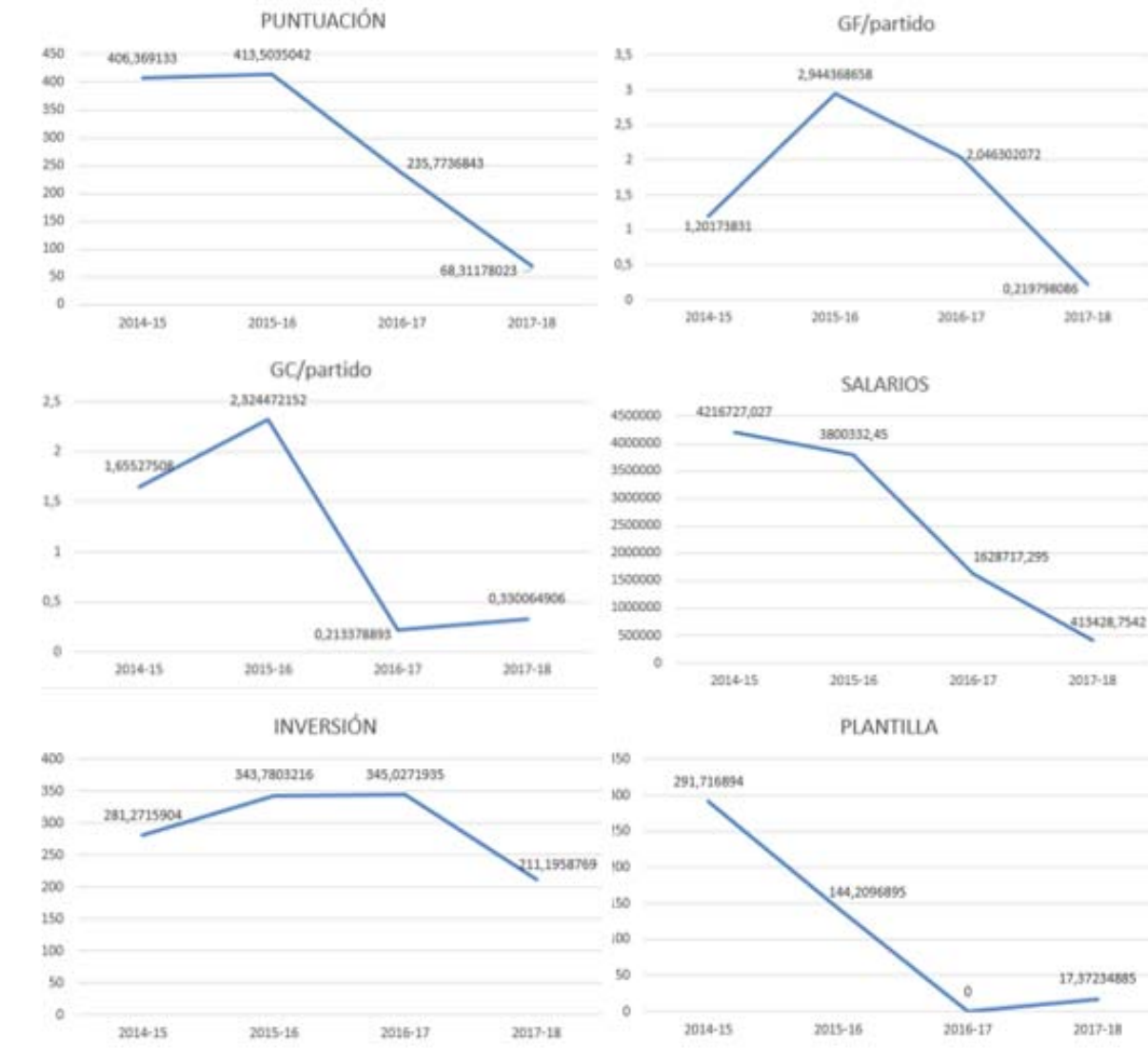


Figura 28. Variación de los distintos slacks en VRS de todos los equipos.

Uno de los aspectos más importantes que podemos inducir de estos datos es que se ha producido una mejora en cuanto a calidad deportiva en estos últimos años, es decir, los equipos tienen unos resultados deportivos (puntuación total ponderada, goles a favor y goles en contra) que los hacen bastante eficientes. Del mismo modo sucede con los salarios donde hay una disminución año a año hasta llegar a la última temporada analizada donde este valor vale cero.

Sin embargo, en las otras dos variables económicas, ha habido aumento en la inversión en fichajes y una bajada en las hoguras del valor de mercado de la plantilla pero en la última temporada se ha producido una subida (mucho más acentuada en CRS).

Hay que remarcar que estamos analizando las holguras y no los valores reales de estos datos, para eso no habría hecho falta utilizar la metodología DEA. Por tanto, con estos datos lo que medimos es la *distancia* a la que se encuentran los equipos ineficientes de los eficientes, los cuales delimitan la frontera eficiente. Es decir, el hecho de que las holguras de la variable salarios, por ejemplo, haya ido disminuyendo significa que los equipos ineficientes cada vez han estado más cerca de la frontera eficiente, en cuanto a salarios se refiere, sin embargo, esos mismo equipos se han ido alejando de los equipos eficientes en cuanto a inversión se refiere. Por tanto, como conclusión podemos plantear que mientras que en las primera temporadas lo que sucedía era que los equipos ineficientes tenían unos resultados deportivos, unas plantillas y unos salarios *alejados* de la frontera

eficiente, y por tanto esa era la causa de sus ineficiencias mientras que la inversión en fichajes estaba cerca de la frontera eficiente, estaba al nivel de los eficientes. Con el paso del tiempo esa tendencia se ha dado la vuelta y el problema actual es que los resultados deportivos y los salarios sí se encuentran al nivel de los eficientes, pero sin embargo, los equipos ineficientes están invirtiendo en exceso en fichajes y tienen unas plantillas con valores muy altos para el nivel de resultados que consiguen.

Es remarcable la diferencia en los análisis CRS y VRS de la subida que se produce en las holguras de los valores de las plantillas en la última temporada. Mientras que en VRS es pequeña en CRS es tremendamente abultada. Esto es debido a que esas distancias desde los ineficientes a los eficientes se da entre equipos que no se encuentran posiblemente en el mismo tamaño.

Así que como conclusión, dado que la causa actual de ineficiencias, en esta última temporada, es la inversión excesiva en fichajes y los elevados valores de plantilla. Lo primero que deberán considerar los equipos ineficientes si desean alcanzar la eficiencia es cambiar su sistema de gestión del club a la hora de manejar estos factores para reducirlos sin perder resultados deportivos. Para ello, deberán usar como referencia aquellos equipos que se analizarán a continuación.

## 5.4. Benchmarking

*Benchmarking*, no es más que un término que hace referencia a un conjunto de técnicas utilizadas por empresas, instituciones y cualquier tipo de entidad para realizar comparaciones con otras entidades similares en aras de mejorarse a ella misma.

La metodología DEA nos permite conocer, a través de la variable  $\lambda$ , sobre qué DMUs eficientes se deben proyectar cada una de las DMUs ineficientes para alcanzar la frontera eficiente, una DMU podrá proyectarse únicamente sobre una unidad eficiente, algo poco común, o sobre varias. El valor de  $\lambda_{ij}$  variará entre 0 y 1, en caso de valer 1, la DMU  $i$  ineficiente se proyecta completamente sobre  $j$ , en caso de valer 0 no habrá ninguna proyección de  $i$  sobre  $j$ . En caso de que una unidad se proyecte sobre varias DMUs eficientes, el valor de cada  $\lambda$  estará entre cero y uno.

La cantidad de  $\lambda$  obtenidas en esta investigación es enorme, ya que hay que ver si cada equipo se proyecta sobre todos los demás, y todo eso hecho para cada uno de las cuatro temporadas. Además, en nuestro caso estamos analizando el problema mediante CRS y VRS.

Los datos completos se encuentran en el Anexo 11. Sin embargo, resulta mucho más relevante determinar cuántos equipos se proyectan sobre cada equipo, ya que este dato es importante para determinar qué manera de gestionar los recursos puede ser mejor. Ya que cuanto más equipos se proyecten sobre un equipo, se considerará que su modelo de gestión será tomado como referencia por más clubes.

En la siguiente tabla se muestran los equipos que se han proyectado sobre cada equipo, tanto en CRS como en VRS, no se ha tenido en cuenta en esta tabla el valor de las  $\lambda$ , con que haya cierto grado de proyección ( $\lambda > 0$ ), se considerará que ese determinado equipo se proyecta sobre el otro. También figurará cuántas veces se ha proyectado un equipo sobre otro, es decir, en cuántas temporadas.

Tabla 5-2. Equipos que se proyectan sobre cada equipo.

	CRS	VRS
Real Madrid	Milan, Inter, City.	City(2), Milan, United, PSG.
Barcelona	--	United(2), City, Arsenal
Atlético	Liverpool(2), Borussia, PSG, Madrid, Milan, Inter, Chelsea, Arsenal, City, United(2).	Liverpool(2), Milan, Inter, Arsenal, United, City, PSG.
AC Milan	Borussia.	--

<b>AS Roma</b>	Inter(3), Chelsea, Arsenal(2), United(2), Milan.	Inter, City, Milan
<b>Inter</b>	--	City.
<b>Juventus</b>	United, Arsenal, City, Liverpool, Borussia, PSG(2), Milan.	PSG, Milan, Liverpool, City, United, Arsenal, Chelsea
<b>Chelsea</b>	Inter, United(2), City, Arsenal.	United, City
<b>Arsenal</b>	--	--
<b>United</b>	--	--
<b>City</b>	Inter.	--
<b>Liverpool</b>	Inter.	Milan
<b>Borussia</b>	Arsenal, Inter(2), Milan(2), Chelsea, Madrid,	Inter, Liverpool, Milan
<b>Bayern</b>	Madrid, Chelsea, Arsenal, United(2), City(2), PSG	PSG, United(3), City(3), Liverpool, Arsenal(2)
<b>Marseille</b>	PSG, Inter, Liverpool, Milan	Liverpool, Milan(2), Inter
<b>PSG</b>	--	--

De esta tabla se puede obtener el siguiente gráfico, que contabiliza cuántos equipos se proyectan sobre cada club.

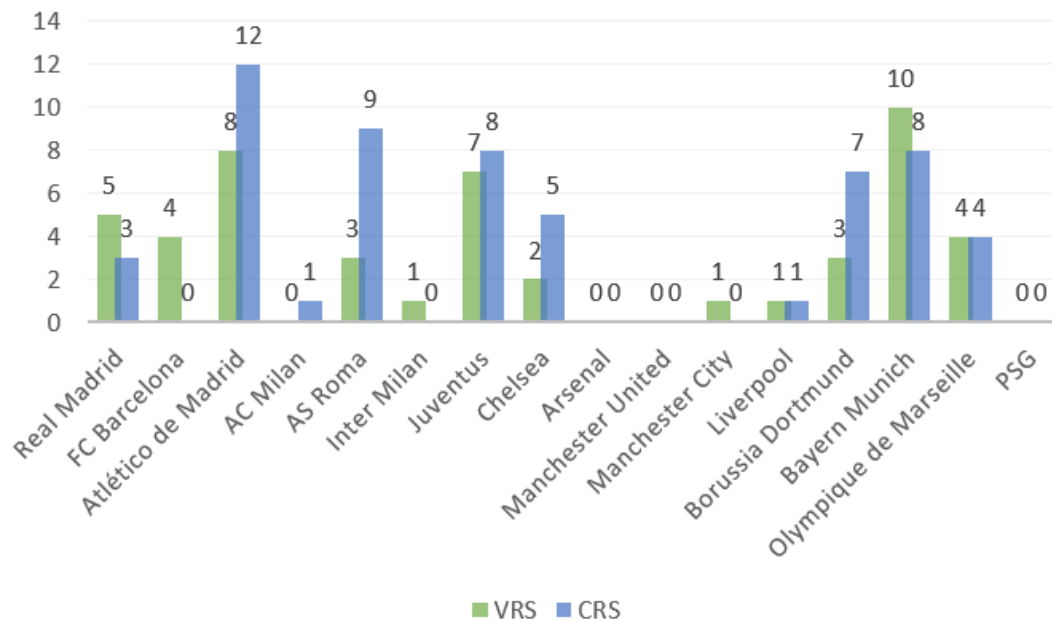


Figura 29. Número de equipos que se proyectan sobre cada club.

De todos estos datos mostrados con anterioridad se pueden desprender diversas conclusiones.

La primera de ellas es que Atlético de Madrid, Bayern de Munich y Juventus son los principales equipos sobre los que el resto se proyecta. La causa de que esto haya sucedido es atribuible al tamaño de estos clubes, todos ellos tienen un tamaño medio, lo que hace que haya un mayor número de equipos que se proyecten sobre éstos, tanto grandes como pequeños pueden usar como proyección algún equipo de tamaño medio. Además, su modelo de gestión deberán ser la referencia para muchos otros equipos. De hecho, incluso equipos eficientes podrían considerar fijarse en el modelo de funcionamiento de estos clubes en aras de seguir siendo eficientes con el paso de los años o en aras de mejorar su productividad *desplazando* la frontera eficiente.

La segunda conclusión importante es que hay clubes como el Real Madrid o FC Barcelona, que a pesar de ser eficientes (o estar muy cercano a la eficiencia plena, como es el caso del Real Madrid) muy pocos equipos se proyectan sobre ellos. Esto es debido principalmente al tamaño de estos clubes. Se encuentran entre los más grandes del conjunto analizado, por lo que pocos son capaces de compararse con ellos en su tamaño. Por tanto, si bien es cierto que son eficientes, podrían considerar la posibilidad de modificar su tamaño o su sistema de gestión (Fijándose en equipos como los mencionados en el párrafo anterior) en aras de buscar mejorar su productividad<sup>32</sup>. Exactamente las mismas conclusiones son aplicables al PSG, que siendo eficiente algunos años, absolutamente ningún equipo se proyecta sobre él.

La falta de proyecciones que hay en el resto de equipos, AC Milan, Arsenal, Manchester United, Manchester City y Liverpool es debido a que apenas son eficientes en algún año y, por tanto, son ellos quienes se proyectan sobre el resto.

Un caso especial, que se podría considerar a medio camino entre dos conclusiones anteriores es el caso del Inter de Milan. Es un club que ha sido eficiente en algunos años (cuatro, la mitad del total considerando CRS y VRS), por lo que algún equipo podría haberse proyectado sobre él en alguna de estas temporadas. Sin embargo, debido a su tamaño, es posible que, incluso habiendo sido eficiente, apenas el Manchester City en la temporada 2016-2017 en VRS se proyectase sobre él, siendo además el valor de  $\lambda$  muy pequeño ( $\lambda=0,069636$ ) y, por tanto, poco relevante.

Hay que recalcar que esto no significa que solo haya que considerar como referente a aquellos equipos sobre los que se proyectan muchos clubes dejando al resto de eficientes en un segundo plano, ya que a veces simplemente sucede porque el tamaño de ciertos clubes es ideal para que todos se proyecten en él. Todos los equipos eficientes, por el hecho de ser eficientes no están gestionando sus recursos peor que nadie al menos en su tamaño, lo cual ya debe hacer pensar que su manera de gestionar sus recursos no debe ser precisamente mala. Por tanto, aunque haya clubes eficientes sobre los que pocos se proyecten también pueden ser considerados por los equipos ineficientes para mejorar, aunque evidentemente deberán de prestar mucha más atención a la forma de funcionar de aquellos sobre los que sí se proyecta.

---

<sup>32</sup> Hacemos mención a mejorar la productividad y no a la eficiencia debido a que estos equipos son ya eficientes. Por tanto, la única mejora que pueden hacer es modificar la frontera eficiente mejorando su productividad propia. Evidentemente, un cambio de este modo haría que la eficiencia del resto de clubes bajase.

## 6 CONCLUSIONES

*Con cada verdad que nos es revelada ganamos un mejor entendimiento de la naturaleza, y nuestras concepciones y vicisitudes cambian por completo.*

*-Nikola Tesla-*

**D**espués de haber analizado los datos obtenidos tras haber analizado mediante Dynamic DEA la eficiencia de los posibles equipos de fútbol que conformarían la Superliga Europea de Fútbol han quedado patentes varios aspectos de este mundo deportivo.

El primero de ellos es que la eficiencia de estos clubes ha sido tremendamente alta, la eficiencia promedio en la temporada más baja fue superior al 72%, en la temporada 2015-2016 en el análisis CRS. En CRS hay 6 equipos que son eficientes todas las temporadas y en VRS fueron 9. Además, si consideramos la cantidad de veces que fueron eficientes los equipos en alguna temporada obtenemos un 76,64% de equipos eficientes en VRS y un 64,06% en CRS. Además, aquellos equipos que no fueron eficientes tuvieron unas eficiencias en general bastantes cercanas a la unidad. La eficiencia promedio fue de 87.89% en el análisis VRS y de 82.43% en el análisis CRS.

La liga donde mayores ineficiencias existen es en la inglesa con diferencia, seguida de la italiana. Esta es una de las conclusiones más relevantes que se puede desprender de este trabajo y es la falta de eficiencia que existe en los clubes ingleses y en algunos italianos. Sería necesario analizar la manera en cómo estas ligas están gestionadas, cómo funcionan estos clubes, etc. para hallar qué está fallando y cómo ponerle solución. Aunque esto queda fuera de este trabajo, los datos aportados en este documento pueden ser un buen punto de partida, analizando las distintas holguras obtenidas en los análisis realizados.

Este trabajo partió de la necesidad de conocer cómo los grandes clubes europeos de fútbol que pretenden crear una competición propia gestionaban sus recursos, como una manera de intentar comprender si estaban en condiciones de poder mantenerse en esa competición a largo plazo o no. En caso de que las eficiencias hubieran sido bajas, se podría haber concluido que aquellos equipos que no estuvieran siendo capaces de administrar inteligentemente sus recursos terminarían probablemente perjudicados de la participación en este torneo, no pudiendo mantener el ritmo del resto. Sin embargo, esto no ha sido así, y de hecho, todo indica que los equipos de alto nivel se preocupan de la eficiencia de sus equipos y trabajan en aras de mejorarla (basta con observar como la eficiencia promedio ha ido subiendo temporada tras temporada).

Aun así, este trabajo solo se puede considerar la punta del iceberg en este ámbito, por lo que se proponen las siguientes mejoras en cuanto al modelo utilizado para la medida de la eficiencia:

- Aumentar el número de entradas y salidas. Hay algunas variables de las cuáles no existen datos o son pocos fiables, como es el número de socios o los valores de los equipos filiales, así como la deuda que tienen estos equipos, entre muchas otras posibilidades. Por tanto, una investigación futura podría dar con estos datos e incluirlos en el modelo aumentando la precisión en las medidas de eficiencia obtenidas.
- Incluir un estudio más extenso en el tiempo. Bien hacia delante o hacia detrás. Por un lado, se puede considerar un intervalo que parta de más años atrás hasta llegar a nuestros días, para así aumentar la información y ver cómo se gestionaban los clubes en tiempos más pretéritos. O bien, partiendo de este trabajo y con el paso de los años analizar la eficiencia en un futuro próximo, incluyéndose más temporadas.



- Aumentar el número de unidades. Estas unidades productivas han sido seleccionadas en base al artículo publicado por Football Leaks que ya se comentó. Sin embargo, fuentes menos fiables apuntan a que otros equipos, también de la élite del fútbol, podrían formar parte de este campeonato, como podrían ser el Futebol Clube de Oporto, el Valencia FC o el AS Mónaco.
- Usar el estudio como referencia para otros estudios Dynamic DEA en otros campos futbolísticos o deportivos.
- Ampliar el estudio al funcionamiento interno de los equipos mediante Network DEA. Es decir, no considerar a los equipos como *cajas negras* con entradas y salidas, sino considerar también las actividades internas.

Aparte de posibles líneas futuras en el ámbito de la eficiencia este documento puede ser punto de partida para estudiar más a fondo las posibles causas y soluciones de las ineficiencias presentadas, entrando en el mundo de la gestión deportiva. Por ejemplo, se podrían plantear las siguientes investigaciones:

- Analizar las posibles consecuencias futuras que podría suponer en los equipos seguir siendo ineficientes.
- Evaluar las causas y posibles soluciones de las ineficiencias mostradas en los equipos ingleses.
- Evaluar las causas y posibles soluciones de las ineficiencias mostradas en los equipos italianos.
- Evaluar las causas y posibles soluciones de las ineficiencias mostradas en todos los equipos analizados.
- Analizar si la existencia de la Superliga Europea de Fútbol acarreará mayores o menores niveles de eficiencia a los equipos.
- Comparar la gestión de recursos en el fútbol con la gestión de estos en otros deportes de equipo.
- Plantear si realmente es útil para los equipos la eficiencia con respecto a la eficacia. Es evidente que ambas son importantes, pero resulta relevante valorar en qué medida lo son.

# REFERENCIAS

- Anderson T. R., y Sharp G. P. (1997) A new measure of baseball batters using DEA. *Annals of Operations Research*, 73, 141-155
- Arenas Silva F.J. (2017). Análisis de la eficiencia de los consistorios de la provincia de Sevilla mediante DEA: propuestas para una gestión pública sostenible. (TFG para Grado en Ingeniería Organización Industrial) Universidad de Sevilla; Sevilla, 137 pp.
- Castro Soria, I. (2018). Análisis dinámico de la eficiencia de aeropuertos en España (TFG para Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales) Universidad de Sevilla; Sevilla, 95 pp.
- Charnes, A.; Cooper, W.; Lewin, A. Y.; Seiford, L.; Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology, and Applications; Kluwer Academic publishers; USA; 1993: 513 pp.
- Chen Y., Gong Y., y Li X. (2017) Evaluating NBA player performance using bounded integer data envelopment análisis. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 55:1, 38-51, DOI: 10.1080/03155986.2016.1262581
- Consejo Europeo (2000). Declaración del Consejo Europeo de Niza sobre el Deporte.
- Cooper W. W., Ruiz J. L., y Sirvent I. (2008) Selecting non-zero weights to evaluate effectiveness of basketball players with DEA. *European Journal of Operational Research*, 195, 563-574
- El Betis paga 5.300 millones por Denilson, el fichaje más caro de la historia (28 de agosto de 1997). *El País*. Recuperado de <https://www.elpais.com>
- El ranking de importancia de los títulos: ¿cuál es el club con campeonatos internacionales de más valor? (14 de diciembre de 2017). *Goal*. Recuperado de <https://www.goal.com>
- Gallardo, A. (5 de enero de 2018) El drama de un jugador del Guadalajara: “Me siento esclavo, quizás muriendo de hambre me dejen libre”. *El Mundo*. Recuperado de <https://www.elmundo.es>
- García-del-Barrio P., Pujol F. (2007): El papel del fútbol en la sociedad actual. *Fútbol: ocio y negocio. Empresa y Humanismo*, 11, 89-108
- Guzmán I., y Morrow S. (2007) Measuring efficiency and productivity in profesional football teams: evidence from the English Premier League. *Central European Journal of Operations Research*, 15, 309-328, DOI: 10.1007/s10100-007-0034-y
- Halkos G., y Petrou K. N. (2019) Treating undesirable outputs in DEA: A critical review. *Economic Analysis and Policy*. 62, 97-104
- LaLiga. (2017). Memoria anual 2016-2017.
- La sorprendente importancia del fútbol en la economía mundial (14 de enero de 2013). *Gol y Fútbol*. Recuperado de <https://www.golyfutbol.com>
- Los 100 fichajes más caros de la historia del fútbol (27 de marzo de 2019). *Goal*. Recuperado de <https://www.goal.com>
- Molina, R. (1 de mayo de 2018) Ganar la Liga es un triunfo, pero el éxito económico está en la Champions League. *La Información*. Recuperado de <https://www.lainformacion.com>
- Moreno P., y Lozano S. (2012) A network DEA assessment of team efficiency in the NBA. *Annals of Operations Research*, 214, 99-124, DOI: 10.1007/s10479-012-1074-9
- Pestaña Barros C., y Leach S. (2006) Performance evaluation of the English Premier Football League with data envelopment análisis. *Applied Economics*, 38:12, 1449-1458, DOI: 10.1080/00036840500396574

- Philippe V.; La genèse de la Coupe des clubs champions. Un histoire du football européen (1920-1960); CIES; Francia; 2012: 165 pp.
- Romero, V. (25 de enero de 2012) El trato de los torneos coperos en Europa. Futbolprimera.es. Recuperado de [www.futbolprimera.es](http://www.futbolprimera.es)
- Ruggiero, J.; *Frontiers in Major League Baseball Nonparametric Analysis of Performance Using Data Envelopment Analysis*; New York, NY: Springer New York; USA; 2011.
- Santín D. (2014) Measuring the technical efficiency of football legends: who were Real Madrid's all-time most efficient players?. *International Transactions in Operational Research*, 21, 439-452, DOI: 10.1111/itor.12082
- Sharp J. A., Meng W., y Liu W. (2007) A modified slacks-based measure model for data envelopment análisis with 'natural' negativos outputs and inputs. *Journal of the Operational Research Society*, 58(12), 1672-1677, DOI: 10.1057/palgrave.jors.260318
- Silva Portela M. C. A., Thanassoulis E., Simpson G. (2004) Negative data in DEA: a directional distance approach applied to bank branches. *Journal of the Operational Research Society*. 66 (10), 1111-1121 DOI: 10.1067/palgrave.jors.2601768
- Sporting Intelligence. (2015). Global Sports Salaries Survey 2015.
- Sporting Intelligence. (2016). Global Sports Salaries Survey 2016.
- Sporting Intelligence. (2017). Global Sports Salaries Survey 2017.
- Sporting Intelligence. (2018). Global Sports Salaries Survey 2018.
- Thanassoulis, E.; *Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis. A foundation text with integrated software*; Kluwer Academic publishers; USA; 2001.
- Tone K., y Tsutsui M. (2009) Dynamic DEA: A slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197:1, 243-252
- Ubide, A. (15 de junio de 2014) La economía del fútbol. El País. Recuperado de <https://www.elpais.com>
- Ueda T., y Amatatsu H. (2015) Election of the best nine in Nippon Profesional Baseball on the DEA model, 12th International Symposium on Operations Research and its Applications in Engineering, Technology and Management (ISORA), p.9, DOI: 10.1049/cp.2015.0612
- UEFA. (2016). The European Club Footballing Landscape.
- Un informe asegura que el fútbol español está económicamente ahogado y "que está muriendo" (20 de septiembre de 2012). 20 Minutos. Recuperado de <https://www.20minutos.es>
- Villa Caro, G. (2003) *Análisis por Envoltura de Datos (DEA): Nuevos modelos y aplicaciones* (Tesis doctoral); Universidad de Sevilla; Sevilla, 559 pp.
- Villa G., y Lozano S. (2016) Assessing the scoring efficiency of a football match. *European Journal of Operational Research*, 255, 559-569
- Villa G., y Lozano S. (2018) Dynamic Network DEA approach to basketball games efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 69:11, 1738-1750, DOI:10.1080/01605682.2017.1409158
- Zambon-Ferraresi, F., García-Cebrián L. I., Lera-López F., y Iráizoz B. (2017) Performance Evaluation in the UEFA Champions League. *Journal of Sports Economics* 18:5, 448-470, DOI: 10.1177/1527002515588135

**Sitios web:**

<https://footballleaks2015.wordpress.com/>

<https://westegg.com/inflation/infl.cgi>

<https://www.transfermarkt.es>

<https://www.marca.com>

<https://www.sport.es>

<https://as.com/>

<https://www.goal.com/es/noticias/el-ranking-de-importancia-de-los-titulos-cual-es-el-club-con/1fn9fi8jaqfkg1t9jlycapiqbq>

<https://listas.20minutos.es/deportes/los-mejores-torneos-internacionales-de-futbol-362525/>

# ANEXOS

## Anexo 1. Documento filtrado por Football Leaks.

**TERM SHEET**

This binding Term-Sheet ("TS") is made in Madrid on [...] November 2018

**BETWEEN**

**On the one hand**

- (1) *[insert details]* ("Real Madrid");
- (2) *[insert details]* ("FC Barcelona");
- (3) *[insert details]* ("Manchester United");
- (4) *[insert details]* ("Bayern Munich"); and
- (5) *[insert details]* ("Juventus");
- (6) *[insert details]* ("Chelsea");
- (7) *[insert details]* ("Arsenal");
- (8) *[insert details]* ("PSG");
- (9) *[insert details]* ("Manchester City");
- (10) *[insert details]* ("Liverpool"); and
- (11) *[insert details]* ("AC Milan");

Real Madrid, FC Barcelona, Manchester United, Bayern Munich, Juventus, Chelsea, Arsenal, PSG, Manchester City, Liverpool and AC Milan shall be jointly referred to as the "Founders".

**On the other hand**

- (12) *[insert details]* ("Atlético Madrid");
- (13) *[insert details]* ("Borussia Dortmund");
- (14) *[insert details]* ("Olympique de Marseille");
- (15) *[insert details]* ("Inter Milan"); and
- (16) *[insert details]* ("AS Roma");

Atlético Madrid, Borussia Dortmund, Olympique de Marseille, Inter Milan and AS Roma shall be jointly referred to as the "Initial Guests".

Each of the Founders and the Initial Guests shall be jointly referred to as the "Parties" and, individually, as a "Party".

Figura 30. Documento filtrado por Football Leaks sobre los integrantes de la Superliga Europea.

## Anexo 2. Valor de mercado de la plantilla

Los valores mostrados se corresponden con el valor de la plantilla en millones de euros al final de la temporada correspondiente.

Tabla A-1. Valor de mercado de la plantilla (en millones de euros).

Club	2013-2014	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	647,65	700,75	743,1	716,2	937,8
<b>Barcelona</b>	598,45	618,5	787,2	772,5	1170
<b>Atlético</b>	289	336	456,9	585	908,5
<b>AC Milan</b>	305,23	233,83	223,45	352,58	458
<b>Roma</b>	260,5	319,08	285,43	328,28	398,4
<b>Inter</b>	311,7	297,9	318,85	347,43	582,4
<b>Juventus</b>	357,7	394,33	422	540,53	797,8
<b>Chelsea</b>	526,1	579,8	603,3	649,65	861,75
<b>Arsenal</b>	404,35	408,6	522,75	633,9	615,5
<b>United</b>	522,4	374,15	533,25	645,1	759
<b>City</b>	478	452,75	621,4	616,35	1130
<b>Liverpool</b>	285	325	394,15	495	926,5
<b>Borussia</b>	329,8	311,6	321,05	449,23	556,8
<b>Bayern</b>	564,18	608,5	595,4	610,25	745,7
<b>Marseille</b>	144,55	143,85	109,4	162,15	272,55
<b>PSG</b>	386	433,3	502,05	581,1	915,95

## Anexo 3. Puntuación total ponderada

La puntuación total ponderada consiste en la suma de una serie de puntuaciones que valoran los resultados de los equipos a lo largo de las distintas competiciones que han disputado. Entre ellas están los torneos nacionales (Liga, Copa y Supercopa, principalmente) y los torneos internacionales (Champions League, Europa League y Supercopa de Europa).

En primer lugar, comencemos por el torneo liguero nacional. En este caso la puntuación ponderada consistirá en la puntuación obtenida en el torneo liguero más un extra de 25 puntos para el campeón del torneo, ya que se considera que la puntuación total del torneo no es suficiente para valorar el hecho de que un equipo resulte, a diferencia de los demás, campeón del torneo. Además, en Alemania compiten 18 equipos mientras que en el resto lo hacen 20. Por tanto, las puntuaciones de los equipos alemanes (Bayern y Borussia) han sido ponderadas mediante una regla de tres.

Tabla A-2. Puntuación liguera y campeón de Liga.

Club	2014-2015		2015-2016		2016-2017		2017-2018	
	Puntos	Campeón	Puntos	Campeón	Puntos	Campeón	Puntos	Campeón
<b>Real Madrid</b>	92	No	90	No	93	Sí	76	No
<b>Barcelona</b>	94	Sí	91	Sí	90	No	93	Sí
<b>Atlético</b>	78	No	88	No	78	No	79	No
<b>AC Milan</b>	52	No	57	No	63	No	64	No
<b>Roma</b>	70	No	80	No	87	No	77	No
<b>Inter</b>	55	No	67	No	62	No	72	No
<b>Juventus</b>	87	Sí	91	Sí	91	Sí	95	Sí
<b>Chelsea</b>	87	Sí	50	No	93	Sí	70	No
<b>Arsenal</b>	75	No	71	No	75	No	63	No

<b>United</b>	70	No	66	No	69	No	81	No
<b>City</b>	79	No	66	No	78	No	100	No
<b>Liverpool</b>	62	No	60	No	76	No	75	Sí
<b>Borussia</b>	46	No	78	No	64	No	55	No
<b>Bayern</b>	79	Sí	88	Sí	82	Sí	84	Sí
<b>Marseille</b>	69	No	48	No	62	No	77	No
<b>PSG</b>	83	Sí	96	Sí	87	No	93	Sí

Con estos datos se obtiene la puntuación ponderada de la liga.

Tabla A-3. Puntuación de Liga ponderada.

<b>Club</b>	<b>2014-2015</b>	<b>2015-2016</b>	<b>2016-2017</b>	<b>2017-2018</b>
<b>Real Madrid</b>	92	90	118	76
<b>Barcelona</b>	119	116	90	118
<b>Atlético</b>	78	88	78	79
<b>AC Milan</b>	52	57	63	64
<b>AS Roma</b>	70	80	87	77
<b>Inter</b>	55	67	62	72
<b>Juventus</b>	112	116	116	120
<b>Chelsea</b>	112	50	118	70
<b>Arsenal</b>	75	71	75	63
<b>United</b>	70	66	69	81
<b>City</b>	79	66	78	125
<b>Liverpool</b>	62	60	76	75
<b>Borussia</b>	51	87	71	61
<b>Bayern</b>	113	123	116	118
<b>Marseille</b>	69	48	62	77
<b>PSG</b>	108	121	87	118

Procedemos ahora a determinar la puntuación de la supercopa nacional, debido a que es un torneo poco prestigioso y valioso se otorgarán 10 puntos al campeón y 0 al resto.

Tabla A-4. Puntuación ponderada Supercopa Nacional.

<b>Club</b>	<b>2014-2015</b>	<b>2015-2016</b>	<b>2016-2017</b>	<b>2017-2018</b>
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	10
<b>Barcelona</b>	0	0	10	0
<b>Atlético</b>	10	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	0	10	0
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	0	0	0
<b>Juventus</b>	0	10	0	0
<b>Chelsea</b>	0	0	0	0
<b>Arsenal</b>	10	10	0	10
<b>United</b>	0	0	10	0
<b>City</b>	0	0	0	0
<b>Liverpool</b>	0	0	0	0
<b>Borussia</b>	10	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	10	10
<b>Marseille</b>	0	0	0	0

<b>PSG</b>	10	10	10	10
------------	----	----	----	----

En los torneos coperos se otorgará 30 puntos al campeón, 20 al subcampeón, 16 a los caídos en semifinales, 8 a los caídos en cuartos de final, 4 a los caídos en octavos de final y 0 en otros casos. En Inglaterra y Francia se compite en dos copas nacionales distintas, pero en diversos artículos periodísticos se menciona que la FA Cup y la Copa de Francia tienen mucha más relevancia que la Copa de la Liga de sus respectivos países, por lo tanto, se ponderará en un 80% y un 20% la puntuación de estos torneos.

Tabla A-5. Resultados coperos en Inglaterra y Francia.

Club	2014-2015		2015-2016		2016-2017		2017-2018	
	Copa	Copa de Liga	Copa	Copa de Liga	Copa	Copa de Liga	Copa	Copa de Liga
<b>Chelsea</b>	0	30	8	4	20	4	30	16
<b>Arsenal</b>	30	0	8	4	30	8	0	20
<b>United</b>	8	0	30	4	8	30	20	8
<b>City</b>	0	4	4	30	16	4	4	30
<b>Liverpool</b>	16	16	0	20	0	16	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	20	8	4	4	8	4
<b>PSG</b>	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla A-6. Puntuación ponderada Copa Nacional.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	4	0	8	8
<b>Barcelona</b>	30	30	30	30
<b>Atlético</b>	8	8	16	8
<b>AC Milan</b>	8	20	8	20
<b>AS Roma</b>	8	4	16	4
<b>Inter</b>	8	16	8	8
<b>Juventus</b>	30	30	30	30
<b>Chelsea</b>	6	7	17	27
<b>Arsenal</b>	24	7	26	4
<b>United</b>	6	25	12	18
<b>City</b>	1	9	14	9
<b>Liverpool</b>	16	4	3	0
<b>Borussia</b>	20	20	30	4
<b>Bayern</b>	16	30	16	20
<b>Marseille</b>	0	18	4	7
<b>PSG</b>	30	30	30	30

En competición europea existirán tres torneos, Champions League, Europa League y Supercopa de Europa. Las puntuaciones otorgadas están basadas en el prestigio del torneo además del valor de los premios recibidos. Las puntuaciones otorgadas se detallan en la siguiente tabla:

Tabla A-7. Puntuación a otorgar en función de los resultados europeos.

PUNTUACIÓN	Champions League	Europa League	Supercopa de Europa
<b>Campeón</b>	100	50	10
<b>Subcampeón</b>	90	30	0
<b>Caer en semifinal</b>	75	20	--
<b>Caer en cuartos</b>	50	10	--
<b>Caer en octavos</b>	25	5	--
<b>Caer en dieciseisavos</b>	--	3	--



<b>Caer en fase de grupos</b>	2	0	--
-------------------------------	---	---	----

A través de esta tabla obtenemos la puntuación ponderada en competiciones europeas:

Tabla A-8. Puntuación ponderada de competiciones europeas.

<b>Club</b>	<b>2014-2015</b>	<b>2015-2016</b>	<b>2016-2017</b>	<b>2017-2018</b>
<b>Real Madrid</b>	85	100	110	110
<b>Barcelona</b>	100	60	50	50
<b>Atlético</b>	50	90	75	50
<b>AC Milan</b>	0	0	0	5
<b>AS Roma</b>	5	25	5	75
<b>Inter</b>	5	0	0	0
<b>Juventus</b>	90	25	90	50
<b>Chelsea</b>	25	25	0	25
<b>Arsenal</b>	25	25	25	20
<b>United</b>	0	5	50	25
<b>City</b>	25	75	25	50
<b>Liverpool</b>	3	30	0	90
<b>Borussia</b>	25	10	50	5
<b>Bayern</b>	75	75	50	75
<b>Marseille</b>	0	3	0	30
<b>PSG</b>	50	50	25	25

Tras todo esto se puede obtener la puntuación total ponderada, que no será más que la suma de todas las puntuaciones ponderadas anteriormente detalladas.

Tabla A-9. Puntuación total ponderada.

<b>Club</b>	<b>2014-2015</b>	<b>2015-2016</b>	<b>2016-2017</b>	<b>2017-2018</b>
<b>Real Madrid</b>	181	190	236	204
<b>Barcelona</b>	249	206	180	198
<b>Atlético</b>	146	186	169	137
<b>AC Milan</b>	60	77	81	89
<b>AS Roma</b>	83	109	108	156
<b>Inter</b>	68	83	70	80
<b>Juventus</b>	232	181	236	200
<b>Chelsea</b>	143	82	135	122
<b>Arsenal</b>	134	113	126	97
<b>United</b>	76	96	141	124
<b>City</b>	105	150	117	184
<b>Liverpool</b>	81	94	79	165
<b>Borussia</b>	106	117	151	70
<b>Bayern</b>	204	228	192	223
<b>Marseille</b>	69	69	66	114
<b>PSG</b>	198	211	152	183

#### Anexo 4. Goles a favor por partido

Estos datos fueron obtenidos teniendo en cuenta solo los partidos en liga.

Tabla A-10. Goles a favor por partido

Club	N° de partidos	Goles totales a favor				Goles a favor por partido			
		14-15	15-16	16-17	17-18	14-15	15-16	16-17	17-18
Real Madrid	38	118	110	106	94	3,11	2,89	2,79	2,47
Barcelona	38	110	112	116	99	2,89	2,95	3,05	2,61
Atlético	38	67	63	70	58	1,76	1,66	1,84	1,53
AC Milan	38	56	49	57	56	1,47	1,29	1,50	1,47
Roma	38	54	83	90	61	1,42	2,18	2,37	1,61
Inter	38	59	50	72	66	1,55	1,32	1,89	1,74
Juventus	38	72	75	77	86	1,89	1,97	2,03	2,26
Chelsea	38	73	59	85	62	1,92	1,55	2,24	1,63
Arsenal	38	71	65	77	74	1,87	1,71	2,03	1,95
United	38	62	49	54	68	1,63	1,29	1,42	1,79
City	38	83	41	80	106	2,18	1,87	2,11	2,79
Liverpool	38	52	50	78	84	1,37	1,66	2,05	2,21
Borussia	34	47	82	72	64	1,38	2,41	2,12	1,88
Bayern	34	80	80	89	92	2,35	2,35	2,62	2,71
Marseille	38	76	48	57	80	2,00	1,26	1,50	2,11
PSG	38	83	102	83	108	2,18	2,68	2,18	2,84

#### Anexo 5. Goles en contra por partido

Estos datos fueron obtenidos teniendo en cuenta solo los partidos en liga.

Tabla A-11. Goles en contra por partido

Club	N° de partidos	Goles totales en contra				Goles en contra por partido			
		14-15	15-16	16-17	17-18	14-15	15-16	16-17	17-18
Real Madrid	38	38	34	41	44	1,00	0,89	1,08	1,16
Barcelona	38	21	29	37	29	0,55	0,76	0,97	0,76
Atlético	38	29	18	27	22	0,76	0,47	0,71	0,58
AC Milan	38	50	43	45	42	1,32	1,13	1,18	1,11
Roma	38	31	41	38	28	0,82	1,08	1,00	0,74
Inter	38	48	38	49	30	1,26	1,00	1,29	0,79
Juventus	38	24	20	27	24	0,63	0,53	0,71	0,63
Chelsea	38	32	53	33	38	0,84	1,39	0,87	1,00
Arsenal	38	36	36	44	51	0,95	0,95	1,16	1,34
United	38	37	35	29	28	0,97	0,92	0,76	0,74
City	38	38	41	39	27	1,00	1,08	1,03	0,71
Liverpool	38	48	50	42	38	1,26	1,32	1,11	1,00
Borussia	34	42	34	40	47	1,24	1,00	1,18	1,38
Bayern	34	18	17	22	28	0,53	0,50	0,65	0,82
Marseille	38	42	42	41	47	1,11	1,11	1,08	1,24
PSG	38	36	19	27	29	0,95	0,50	0,71	0,76

## Anexo 6. Sueldo de los jugadores

Los datos mostrados están en euros (€).

Tabla A-12. Sueldo total de los jugadores (en euros).

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	5.040.520	5.051.875	6.224.933	8.089.582
<b>Barcelona</b>	4.715.116	5.649.091	6.597.500	10.454.259
<b>Atlético</b>	1.747.511	2.583.391	3.849.130	6.155.066
<b>AC Milan</b>	2.382.854	1.867.452	3.135.877	3.550.172
<b>AS Roma</b>	2.240.920	2.956.159	2.598.580	2.842.212
<b>Inter</b>	2.078.432	2.474.609	2.637.754	3.706.739
<b>Juventus</b>	2.859.195	3.977.569	4.853.467	6.726.615
<b>Chelsea</b>	4.353.056	4.513.600	4.451.200	5.020.004
<b>Arsenal</b>	4.054.066	3.707.407	4.037.222	4.853.130
<b>United</b>	4.679.377	5.770.000	5.241.185	6.534.654
<b>City</b>	5.051.122	5.423.077	5.235.917	5.993.000
<b>Liverpool</b>	3.509.286	3.012.414	3.649.862	4.862.963
<b>Borussia</b>	2.344.823	2.008.603	2.739.148	3.206.769
<b>Bayern</b>	4.468.643	4.165.600	5.184.038	6.352.435
<b>Marseille</b>	1.556.045	1.185.427	1.769.700	2.133.900
<b>PSG</b>	5.298.693	4.476.835	6.472.355	6.105.840

## Anexo 7. Inversión en fichajes

Los datos mostrados son en millones de euros.

Tabla A-13. Inversión en fichajes (en millones de euros).

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	13,3	76,85	-7,5	-88
<b>Barcelona</b>	84,92	12,7	90,95	126,87
<b>Atlético</b>	29,65	-18Va,39	37	18,5
<b>AC Milan</b>	-7,1	77,42	7,55	156,43
<b>AS Roma</b>	56,31	-40,42	29,77	-61,3
<b>Inter</b>	-6,55	-13,07	139,35	60,8
<b>Juventus</b>	22,04	70,67	22,22	11,05
<b>Chelsea</b>	-7,15	3,01	24,4	60
<b>Arsenal</b>	91,18	24	102,65	-3,35
<b>United</b>	146,06	53,93	137,85	152,9
<b>City</b>	57,68	140,86	178,15	226,15
<b>Liverpool</b>	52,16	34,85	-5	-16,47
<b>Borussia</b>	60,4	-22,55	10,1	-146,12
<b>Bayern</b>	4,7	56	17,7	83,95
<b>Marseille</b>	16,65	-35,3	-32,9	59,25
<b>PSG</b>	47,3	93,2	74,7	144,6

Ya se comentó con anterioridad que este dato tenía que ser modificado adecuadamente para que se pudiera trabajar satisfactoriamente con él. Para ello, haciendo uso de la expresión 4-1 se crea el dato rangoINVERSIÓN que se muestra en la tabla a continuación.

Tabla A-14. Datos rangoINVERSIÓN.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	20,45	117,27	25,4	58,12
<b>Barcelona</b>	92,07	53,12	123,85	272,99
<b>Atlético</b>	36,8	22,03	69,9	164,62
<b>AC Milan</b>	0,05	117,84	40,45	302,55
<b>AS Roma</b>	63,46	0	62,67	84,82
<b>Inter</b>	0,6	27,35	172,25	206,92
<b>Juventus</b>	29,19	111,09	55,12	157,17
<b>Chelsea</b>	0	43,43	57,3	206,12
<b>Arsenal</b>	98,33	64,42	135,55	142,77
<b>United</b>	153,21	94,35	170,75	299,02
<b>City</b>	64,83	181,28	211,05	372,27
<b>Liverpool</b>	59,31	75,27	27,9	129,65
<b>Borussia</b>	67,55	17,87	43	0
<b>Bayern</b>	11,85	96,42	50,6	230,07
<b>Marseille</b>	23,8	5,12	0	205,37
<b>PSG</b>	54,45	133,62	107,6	290,72

## Anexo 8. Modelo en LINGO ®

Tal y como ya se mencionó, se realizó un análisis tanto VRS como CRS, por lo que se desarrollaron dos códigos.

En primer lugar se muestra el código para CRS:

SETS :

PERIODOS ;

EQUIPOS : VAUX , FO , PLANTILLA0 ;

EP(EQUIPOS, PERIODOS) : PUNTOS, GF, GC, SALARIOS, INVERSION,  
 rangoINVERSION, PLANTILLA, slackPUNTOS,  
 slackGF, slackGC, slackSALARIOS,  
 slackINVERSION, slackPLANTILLA;

PEE(PERIODOS, EQUIPOS, EQUIPOS) : LAMBDA;

ENDSETS

DATA :

PERIODOS = 1..4;

EQUIPOS=1..16;

SALARIOS, rangoINVERSION, INVERSION= @OLE('DATOSEFICIENCIA.xls');

PLANTILLA= @OLE('DATOSEFICIENCIA.xls');

PLANTILLA0= @OLE('DATOSEFICIENCIA.xls');

```

PUNTOS, GF, GC= @OLE('DATOSEFICIENCIA.xls');

@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=slackSALARIOS, slackINVERSION;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=slackPUNTOS, slackGF, slackGC;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=slackPLANTILLA;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=FO, VAUX;
@OLE('DATOSEFICIENCIA.xls')=LAMBDA;

ENDDATA

MIN= TFO;
TFO=@SUM(EQUIPOS(INDICEEQUIPO):FO(INDICEEQUIPO));

@FOR(EQUIPOS(INDICEEQUIPO):

FO(INDICEEQUIPO)=(1/4)*@SUM(PERIODOS(INDICEPERIODO):VAUX(INDICEEQUIPO)-

@IF(rangoINVERSION(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO) #GT# 0,

(1/3)*(slackSALARIOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/SALARIOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackINVERSION(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/rangoINVERSION(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackGC(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/GC(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)),

(1/2)*(slackSALARIOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/SALARIOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackGC(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/GC(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)))

);

(1/4)*@SUM(PERIODOS(INDICEPERIODO):VAUX(INDICEEQUIPO)+(1/3)*(slackPUNTOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/PUNTOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackGF(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/GF(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackPLANTILLA(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)/PLANTILLA(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)))=1;

);

@FOR(EP(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO):

@SUM(EQUIPOS(J):INVERSION(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*INVERSION(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)-slackINVERSION(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO);

@SUM(EQUIPOS(J):SALARIOS(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*SALARIOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)-slackSALARIOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO);

@SUM(EQUIPOS(J):GC(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*GC(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)-slackGC(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO);

@SUM(EQUIPOS(J):PUNTOS(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*PUNTOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackPUNTOS(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO);

@SUM(EQUIPOS(J):GF(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*GF(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackGF(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO);

```

$@SUM(EQUIPOS(J):PLANTILLA(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*PLANTILLA(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)+slackPLANTILLA(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO);$

);

$@FOR(EQUIPOS(INDICEEQUIPO):$

$@SUM(EQUIPOS(J):PLANTILLA0(J)*LAMBDA(1,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO)*PLANTILLA0(INDICEEQUIPO);$

);

$@FOR(EP(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO)|INDICEPERIODO \#NE\# 4:$

$@SUM(EQUIPOS(J):PLANTILLA(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=@SUM(EQUIPOS(J):PLANTILLA(J,INDICEPERIODO)*LAMBDA(INDICEPERIODO+1,INDICEEQUIPO,J));$

);

Para el caso VRS el código sería idéntico al mostrado anteriormente, sin necesidad de modificar nada, solo sería necesario incluir la siguiente restricción que caracteriza al modelo con retorno de escala variable:

$@FOR(EP(INDICEEQUIPO,INDICEPERIODO):$

$@SUM(EQUIPOS(J):LAMBDA(INDICEPERIODO,INDICEEQUIPO,J))=VAUX(INDICEEQUIPO);$

);

## Anexo 9. Eficiencia global

Tabla A-15. Eficiencia global CRS y VRS

Real Madrid		FC Barcelona		Atlético		AC Milan	
VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS
1	0.9226	1	1	1	1	0.63803	0.61116

AS Roma		Inter		Juventus		Chelsea	
VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS
1	1	0.88982	0.66613	1	1	1	0.84072

Arsenal		Manchester United		Manchester City		Liverpool	
VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS
0.74838	0.65969	0.56277	0.47051	0.601	0.57929	0.7061	0.70106

Borussia		Bayern		Marseille		PSG	
VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS
1	0.91349	1	1	1	1	0.91635	0.82505

## Anexo 10. Slacks

En primer lugar, se muestran los slacks obtenidos en CRS.

Tabla A-16. Slack de puntuaciones, CRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	99,14746	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	43,77602	71,36902	105,8577
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	53,37703	56,65471	92,5967
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	149,8525	0	0
<b>Arsenal</b>	128,2566	95,47824	0	38,51273
<b>United</b>	262,4225	148,4303	46,08091	38,20378
<b>City</b>	205,2252	96,77773	78,10025	0
<b>Liverpool</b>	78,09745	79,79538	0	0
<b>Borussia</b>	8,195705	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	32,31694	0	71,48858	0

Tabla A-17. Slack de goles a favor por partido, CRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	0	0,613758	0,53143
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	0,601587	0	0,226896
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	1,951981	0	0
<b>Arsenal</b>	0,273421	0,790316	0	0,171975
<b>United</b>	1,135574	1,529041	1,223042	0,013426
<b>City</b>	0,347755	0,465308	0,361891	0
<b>Liverpool</b>	0,28558	0,252493	0	0
<b>Borussia</b>	0,387601	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	0	0	0,128368	0

Tabla A-18. Slack de goles en contra por partido, CRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
Real Madrid	0	0,215311	0	0
Barcelona	0	0	0	0
Atlético	0	0	0	0
AC Milan	0	0,714895	0	0,184883
AS Roma	0	0	0	0
Inter	0	0	0,318072	0
Juventus	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0
Arsenal	0,233421	0	0	0
United	0,0513	0	0,038958	0
City	0,156011	0,48281	0,202051	0
Liverpool	0,602815	0,357317	0	0
Borussia	0,083214	0	0	0
Bayern	0	0	0	0
Marseille	0	0	0	0
PSG	0,126172	0	0,009745	0

Tabla A-19. Slack de salarios (en €), CRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
Real Madrid	0	131151,8	0	0
Barcelona	0	0	0	0
Atlético	0	0	0	0
AC Milan	0	129712,3	0	0
AS Roma	0	0	0	0
Inter	0	0	0	0
Juventus	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0
Arsenal	821984,7	31019,35	0	0
United	503689,4	1351507	0	0
City	1230336	1581887	0	0
Liverpool	1580743	469574,7	0	0
Borussia	0	0	0	0
Bayern	0	0	0	0
Marseille	0	0	0	0
PSG	2466980	0	1374746	0



Tabla A-20. Slack de inversión (en millones de €), CRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	35,40658	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	91,07105	11,37058	232,9991
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	21,74135	126,9077	68,98897
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	34,46802	0	0
<b>Arsenal</b>	66,26562	58,07639	0	44,52703
<b>United</b>	113,8719	56,96246	117,8956	141,1968
<b>City</b>	28,22761	133,0801	173,9732	0
<b>Liverpool</b>	27,24076	67,84239	0	0
<b>Borussia</b>	49,77679	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	17,77327	0	53,81565	0

Tabla A-21. Slack de valor de la plantilla (en millones de €), CRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	78,5801	57,4705	39,63653
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	0	64,206	0
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	0	0	0
<b>Arsenal</b>	37,15716	0	0	198,8454
<b>United</b>	201,746	89,31721	0	212,0217
<b>City</b>	74,19923	0	0	0
<b>Liverpool</b>	0	0	0	0
<b>Borussia</b>	0	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	0	0	0	0

En segundo lugar, se muestran los slacks obtenidos en VRS.

Tabla A-22. Slack de puntuaciones, VRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	46,57607	60,75425	68,31178
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	45,85265	0	0
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	0	0	0
<b>Arsenal</b>	91,62376	87,71168	0	0
<b>United</b>	133,0884	118,4163	38,28252	0
<b>City</b>	110,3057	55,00389	79,60866	0
<b>Liverpool</b>	71,35126	59,9429	0	0
<b>Borussia</b>	0	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	0	0	57,12826	0

Tabla A-23. Slack de goles a favor por partido, VRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	0,158532	0,319976	0,219798
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	0,584921	0	0
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	0	0	0
<b>Arsenal</b>	0,129838	0,254941	0	0
<b>United</b>	0,628647	1,12176	1,169139	0
<b>City</b>	0	0,474399	0,518318	0
<b>Liverpool</b>	0,443253	0,349816	0	0
<b>Borussia</b>	0	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	0	0	0,038868	0

Tabla A-24. Slack de goles en contra por partido, VRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
Real Madrid	0	0	0	0
Barcelona	0	0	0	0
Atlético	0	0	0	0
AC Milan	0	0,322072	0,213379	0,330065
AS Roma	0	0	0	0
Inter	0	0,1221	0	0
Juventus	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0
Arsenal	0,338872	0,447075	0	0
United	0,4236	0,347432	0	0
City	0,407624	0,487411	0	0
Liverpool	0,485179	0,598382	0	0
Borussia	0	0	0	0
Bayern	0	0	0	0
Marseille	0	0	0	0
PSG	0	0	0	0

Tabla A-25. Slack de salarios (en €), VRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
Real Madrid	0	0	0	0
Barcelona	0	0	0	0
Atlético	0	0	0	0
AC Milan	0	27386,43	0	413428,8
AS Roma	0	0	0	0
Inter	0	0	0	0
Juventus	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0
Arsenal	831248,6	415752,2	0	0
United	536396,2	1433026	0	0
City	1257352	1230735	0	0
Liverpool	1591730	693433	0	0
Borussia	0	0	0	0
Bayern	0	0	0	0
Marseille	0	0	0	0
PSG	0	0	1628717	0

Tabla A-26. Slack de inversión (en millones de €), VRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	104,8014	15,32036	211,1959
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	17,57245	0	0
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	0	0	0
<b>Arsenal</b>	73,05762	16,11928	0	0
<b>United</b>	137,8514	23,41967	111,2078	0
<b>City</b>	45,12298	126,7826	165,7471	0
<b>Liverpool</b>	25,23963	55,0849	0	0
<b>Borussia</b>	0	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	0	0	52,75192	0

Tabla A-27. Slack de valor de la plantilla (en millones de €), VRS.

Club	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018
<b>Real Madrid</b>	0	0	0	0
<b>Barcelona</b>	0	0	0	0
<b>Atlético</b>	0	0	0	0
<b>AC Milan</b>	0	48,6773	0	17,37235
<b>AS Roma</b>	0	0	0	0
<b>Inter</b>	0	0	0	0
<b>Juventus</b>	0	0	0	0
<b>Chelsea</b>	0	0	0	0
<b>Arsenal</b>	34,1174	0	0	0
<b>United</b>	191,014	95,53239	0	0
<b>City</b>	66,58552	0	0	0
<b>Liverpool</b>	0	0	0	0
<b>Borussia</b>	0	0	0	0
<b>Bayern</b>	0	0	0	0
<b>Marseille</b>	0	0	0	0
<b>PSG</b>	0	0	0	0





Tabla A-30. Lambdas obtenidas en el análisis VRS temporada 2016-2017.

	Madrid	Barcelona	Atlético	AC Milan	AS Roma	Inter	Juventus	Chelsea	Arsenal	United	City	Liverpool	Borussia	Bayern	Marseille	PSG
Madrid	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Barcelona	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Atlético	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AC Milan	0,050	0	0	0	0	0	0,3288	0	0	0	0	0	0,1334	0	0,488	0
AS Roma	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Inter	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Juventus	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Arsenal	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
United	0,05726	0,1202	0	0	0	0	0	0,2353	0	0	0	0	0	0,587	0	0
City	0,6299	0	0	0	0,155	0,069636	0	0,034985	0	0	0	0	0	0,110413	0	0
Liverpool	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Borussia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Bayern	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Marseille	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
PSG	0,055276	0	0,190881	0	0	0	0,432971	0	0	0	0	0	0	0,320871	0	0





Tabla A-32. Lambdas obtenidas en el análisis CRS temporada 2014-2015.

	Madrid	Barcelona	Atlético	AC Milan	AS Roma	Inter	Juventus	Chelsea	Arsenal	United	City	Liverpool	Borussia	Bayern	Marseille	PSG
Madrid	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Barcelona	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Atlético	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AC Milan	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AS Roma	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Inter	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Juventus	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Arsenal	0	0	0	0	0	0	1,130417	0	0	0	0	0	0	0	0	0
United	0	0	0	0	0	0	1,460442	0	0	0	0	0	0	0	0	0
City	0	0	0	0	0	0	1,336315	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Liverpool	0	0	0,621355	0	0	0	0,29474	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Borussia	0	0	0,458818	0,584069	0	0	0,05291	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bayern	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Marseille	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
PSG	0	0	0,468673	0	0	0	0,690411	0	0	0	0	0	0	0	0,024859	0



Tabla A-34. Lambdas obtenidas en el análisis CRS temporada 2016-2017.

	Madrid	Barcelona	Atlético	AC Milan	AS Roma	Inter	Juventus	Chelsea	Arsenal	United	City	Liverpool	Borussia	Bayern	Marseille	PSG
Madrid	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Barcelona	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Atlético	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AC Milan	0,02131	0	0	0	0	0	0,18508	0	0	0	0	0	0,51389	0	0,39403	0
AS Roma	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Inter	0,004502	0	0	0	0,086624	0	0	0,138285	0	0	0	0	0,645856	0	0	0
Juventus	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Chelsea	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Arsenal	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
United	0	0	0	0	0	0	0	0,223787	0	0	0	0	0	0,818872	0	0
City	0,497456	0	0	0	0	0	0	0,065581	0	0	0	0	0	0,356358	0	0
Liverpool	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Borussia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Bayern	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Marseille	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
PSG	0	0	0	0	0	0	0,615975	0	0	0	0	0	0	0,406632	0	0



