



PROYECTO FIN DE GRADO

ESTUDIO GEOMÉTRICO Y CONSTRUCTIVO DE LA OBRA DE ANTONIO GAUDÍ

Autor: Jose Sevillano Coello

Tutor: Dra. María Isabel Sanz Domínguez

Junio 2019



ESTUDIO GEOMÉTRICO Y CONSTRUCTIVO DE LA OBRA DE ANTONIO GAUDÍ

Proyecto Fin de Grado presentado por Jose Sevillano Coello siendo la tutora del mismo,
la Doctora María Isabel Sanz Domínguez.

Tutora:

Alumno:

Dra. D^a María Isabel Sanz Domínguez

D. Jose Sevillano Coello

Sevilla, Junio 2019





Índice General

<u>AGRADECIMIENTOS</u>	<u>6</u>
<u>RESUMEN</u>	<u>7</u>
<u>ABSTRACT</u>	<u>8</u>
<u>1. INTRODUCCIÓN</u>	<u>9</u>
<u>2. OBJETIVO, JUSTIFICACIÓN Y METODOLOGÍA</u>	<u>12</u>
<u>3. APORTACIONES DE ANTONIO GAUDÍ A LA CURVA CATENARIA</u>	<u>13</u>
<u>3.1 BIOGRAFÍA Y ARQUITECTURA GAUDIANA</u>	<u>13</u>
<u>3.2 ESTUDIO DE LA CURVA CATENARIA</u>	<u>16</u>
<u>3.2.1 HISTORIA DE LA CATENARIA</u>	<u>17</u>
<u>3.2.2 DESCRIPCIÓN DE LA CATENARIA</u>	<u>19</u>
<u>3.2.3 DIFERENCIA DE LA CATENARIA CON LA PARÁBOLA</u>	<u>22</u>
<u>3.2.4 PROPIEDADES DE LA CATENARIA. LA FORMA FUNICULAR</u>	<u>24</u>
<u>3.2.5 EL ARCO CATENARIO</u>	<u>27</u>
<u>3.2.6 LAS ESTRUCTURAS ANTIFUNICULARES</u>	<u>29</u>
<u>4. ARQUITECTURA Y GEOMETRÍA EN LA OBRA DE GAUDÍ</u>	<u>40</u>
<u>4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES REGLADAS</u>	<u>40</u>
<u>4.2 SUPERFICIES REGLADAS EN LA OBRA DE GAUDÍ</u>	<u>51</u>
<u>4.2.1 EL HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA EN LA SAGRADA FAMILIA</u>	<u>51</u>
<u>4.2.2 EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO EN LA IGLESIA DEL PARC GUELL</u>	<u>56</u>
<u>4.2.3 EL CONOIDE EN LA ESCUELA PARROQUIAL</u>	<u>61</u>
<u>4.2.4 EL CONO COMO ELEMENTO ESTÉTICO</u>	<u>65</u>
<u>4.2.5 OTRAS INNOVACIONES TÉCNICAS Y ESTÉTICAS</u>	<u>69</u>



5.	INFLUENCIA DE GAUDÍ EN LA OBRA ARQUITECTÓNICA CONTEMPORÁNEA	71
5.1	INNOVACIONES DE OTROS ARQUITECTOS CONTEMPORÁNEOS	71
5.2	SUPERFICIES REGLADAS Y SANTIAGO DE CALATRAVA	73
6.	CONCLUSIONES	82
7.	INDICE DE FOTOS	83
8.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90
9.	WEBS CONSULTADAS	93
10.	ANEXOS	94



Agradecimientos

Han pasado ya varios años desde que pisé la Escuela por primera vez. Entré lleno de ilusión por empezar la carrera que quería y ahora salgo con más ganas de seguir estudiando y de trabajar.

Han sido unos años muy duros, desde el principio, pero me alegro mucho de haber elegido el camino que tomé, ya que no solo he estudiado lo que me gusta, sino que además he adquirido madurez y he conocido a personas increíbles.

Por supuesto, debo de agradecer el incondicional apoyo de mis padres, que siempre han estado ahí fuera cual fuese el día y me han dado fuerzas para seguir. A mi hermana, que siempre ha sido una fuente de inspiración para mí y a mis amigos cuyo apoyo también ha sido importante en estos años.

También debo de agradecer profundamente la gran ayuda de mi tutora, María Isabel Sanz Domínguez. No solo me ha guiado en cada paso en este trabajo, me ha atendido siempre que ha podido y ha respondido a mis correos a una velocidad increíble, sino que además me ha dado ánimos durante todo el año para seguir adelante. Jamás podría haber tenido una tutora mejor.

Me voy de la escuela formado como una nueva persona, con más ganas de seguir y sabiendo que con constancia, dedicación y perseverancia todo es posible.



Resumen

Las matemáticas han sido, y son, una fuente de inspiración para el arte y la arquitectura. La geometría nos permite conocer el mundo que nos rodea, pasar del espacio real al abstracto comprendiendo como es esa realidad. Desde la antigüedad, la geometría, ha adquirido diferentes acepciones y significados a lo largo de la historia en el diseño, la arquitectura, la pintura o la escultura.

Este trabajo se centra en el análisis geométrico de la arquitectura de Antonio Gaudí y en el uso de las superficies regladas en sus innovadoras obras, tales como el paraboloides hiperbólico, el hiperboloides, el conoide y el cono.

Este análisis requiere conocer la estructura y la clasificación de las superficies regladas para poder entender las obras de Antonio Gaudí. Por ello, comenzaremos haciendo una breve descripción y estudio de las superficies regladas que vamos a tratar para luego reflejarlas en las diferentes obras del arquitecto catalán. Completando este estudio con obras de Santiago Calatrava, arquitecto contemporáneo, que también hace uso de estas superficies

En este trabajo lo que se pretende es reflejar la importancia de la geometría en la arquitectura y como hoy en día se sigue empleando superficies para todo tipo de construcciones.

«El uso de las superficies regladas es lógico por su superioridad plástica y su facilidad constructiva.» Antoni Gaudí



Abstract

Mathematics are, and have always been a source of inspiration for art. Geometry allows us to understand the world around us. Since ancient times it has acquired different meanings and throughout history such as design, architecture, painting or sculpture.

This work focuses on the geometric analysis of the architecture of Antonio Gaudí and on the use of ruled surfaces in his innovative works, such as the hyperbolic paraboloid, the hyperboloid, the conoid and the cone.

This analysis requires knowledge of the structure and classification of said regulated surfaces in order to understand the works of Antonio Gaudí. For this reason, we are going to start by making a brief description and study of the aforementioned regulated surfaces to then reflect them in the different works of the Catalan architect. Completing this study with works by Santiago Calatrava, contemporary architect, who also makes use of these surfaces.

What is intended through this work is to reflect the importance of geometry in architecture and how it is still being used today in surfaces for all types of construction.

«The use of regulated surfaces is logical because of its plastic superiority and its ease of construction.» Antoni Gaudí



1. INTRODUCCIÓN

Este proyecto se centra en el análisis de las obras más significativas de Antonio Gaudí, estudiando las diferentes técnicas matemáticas y como hace uso de la geometría de una manera singular, lo que lo convierte en un arquitecto modernista.

El objetivo es estudiar la clasificación de las superficies para así poder comprender mejor la obra del arquitecto catalán. Mostrar la excelencia de Gaudí en la creatividad arquitectónica con una investigación geométrica de formas, transformaciones y operaciones espaciales.

Hay cinco tipos de curvas con un protagonismo especial en la obra de Gaudí: las catenarias, las espirales, las sinusoidales, las cónicas y las redondeadas. Nosotros en este tema nos centraremos en la catenaria, ya que Gaudí fue el primero en descubrir que la simetrización de la catenaria daba lugar a uno de los arcos más perfectos: el que se aguanta a sí mismo.

Una de las grandes aportaciones de Gaudí a la arquitectura moderna ha sido el uso constructivo de las superficies regladas. Muchas de ellas contaban con una historia destacada en el ámbito geométrico, pero fue precisamente Gaudí el primer arquitecto que se dio cuenta de su interés arquitectónico. Por ello estudiaremos cuatro principales superficies regladas que caracterizan la mayoría de sus obras y las más destacables: el paraboloides hiperbólico, el hiperboloides de una hoja, el cono y el conoide. Las ventajas de estas superficies es la eficiencia estructural, el alto valor estético, la reducción de los costos y de la cantidad de material.

No obstante, cabe destacar entre las superficies regladas gaudinianas el uso de cilindros como la torre cilíndrica de El Capricho, o los helicoides como las columnas helicoidales del Parc Güell y la rampa helicoidal de la Casa Milà.

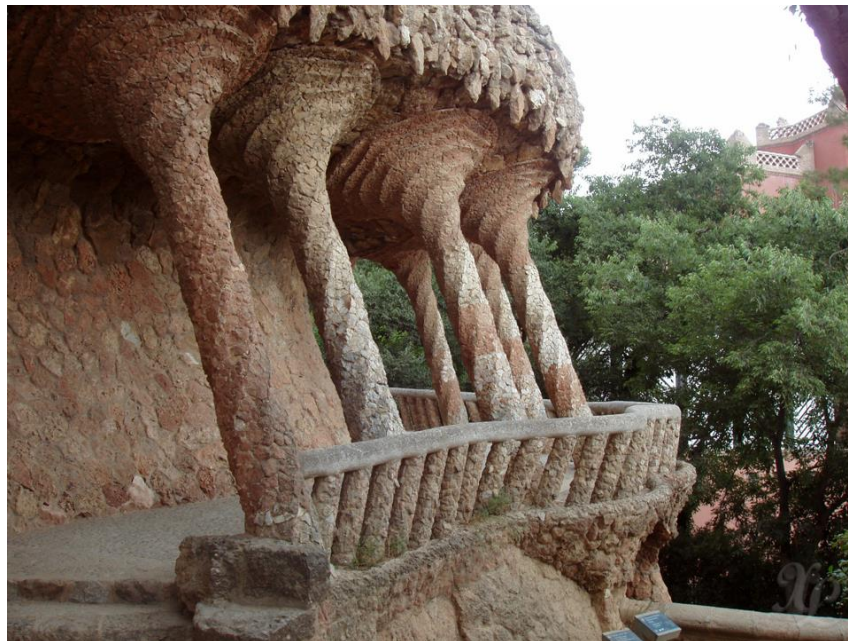


Figura 1: Columnas helicoidales del Parc Güell, Barcelona



Entre las superficies no regladas, Gaudí hizo un uso singular del paraboloides de revolución en la cúpula del Palau Güell, de los elipsoides en los nudos de las columnas de la Sagrada Familia, y de las esferas de ámbito religioso en el rosario de piedra del Parc Güell, en las chimeneas de la Casa Batlló y de la Milà, etc.



Figura 2: Los nudos de las columnas de la Sagrada Familia eran elipsoides, donde se subdividen las columnas en ramas

Proseguiremos con un estudio de los elementos constructivos más relevantes, aunque no utilizó otra cosa que los materiales propios de la arquitectura de los siglos anteriores al XIX (acero laminado para luces pequeñas para la Casa Milà y el Parc Güell, cemento Portland para la Iglesia de la Colonia Güell. Para la mayoría de las fachadas empleó el ladrillo y la piedra. No obstante, el hormigón armado, no la empleó nunca en sus obras.

Cabe mencionar el revestimiento característico de Gaudí fue empleado con fragmentos de cerámica formando una especie de mosaico denominado *el trencadis* y con el cual podía revestir cualquiera de las formas inusuales que daba a sus elementos. Como el famoso lagarto de mosaico del Parc Güell de Barcelona.



Figura 3: Lagarto mosaico en el Parc Güell de Antonio Gaudí, Barcelona

Concluiremos con una comparación de la arquitectura de Gaudí con un arquitecto actual que podemos relacionar también con algunas de sus obras y su manera de usar las superficies regladas. Santiago Calatrava, arquitecto valenciano, es uno de los arquitectos actuales españoles más conocido y admirado internacionalmente y seguramente uno de los arquitectos en los que su preparación en el campo de la geometría resulta más evidente.



2. OBJETIVOS, JUSTIFICACIÓN Y METODOLOGÍA

2.1 OBJETIVOS

El presente trabajo pretende demostrar el uso de las matemáticas en la obra del arquitecto Antonio Gaudí.

Nos planteamos exponer la influencia que ha tenido la geometría de las superficies regladas, estudiadas en las asignaturas de Matemáticas del Grado en Edificación, en la estructura y decoración de la obra de Gaudí.

Es objetivo de este trabajo valorar las formas utilizadas por Gaudí y sus fuentes de inspiración. Se pretende dar muestra de como Gaudí se aleja de las formas arquitectónicas típicas de Cataluña al adentrarse en su propio entendimiento estético del modernismo.

También analizaremos la influencia de Gaudí en la arquitectura contemporánea, mostrando como ejemplo la obra de Santiago Calatrava que aplicando el mismo movimiento artístico obtiene diferentes resultados.

2.2 JUSTIFICACIÓN

A la hora de plantearnos el Proyecto de Fin de Grado surgieron varias ideas que tenían en común un mismo origen, la geometría. Siempre me ha interesado las matemáticas desde que tengo uso de razón, y ahora, poder estudiarla y verla plasmada en la arquitectura es aún mejor.

De los autores estudiados en el Grado, me decanté por Gaudí porque une la geometría en un arte mayor que es la arquitectura. Todos los elementos de artes y oficios quedan recogidos en la obra de Gaudí, elegido como protagonista también por un gusto personal (por enseñanzas y viajes familiares).

Con esto en mente, se desarrolla una de las propuestas que ofreció la tutora de este proyecto: el estudio geométrico y constructivo de la obra de Antonio Gaudí.

Además, la figura de Gaudí ha sido un reto constante en este aspecto ya que sobre él hay muchos escritos, pero la intención ha sido desentrañar el simbolismo y la manera en la que Gaudí utiliza la geometría como modo de expresar la naturaleza en sus obras.

2.3 METODOLOGÍA

Para el presente trabajo comenzamos buscando información en la Biblioteca de la Universidad de Arquitectura de Sevilla donde recopilamos gran parte de libros sobre Antonio Gaudí, su biografía y arquitectura. Consultamos webs donde encontramos artículos y libros online donde encontramos mucha información sobre este famoso arquitecto.

También hice uso de los apuntes recogidos durante mis años de carrera sobre construcción y mas concretamente de las asignaturas de Matemáticas para el desarrollo de las ecuaciones. Con el programa Máxima representamos gráficamente las superficies regladas analizadas en este trabajo, así como la comprobación de la veracidad de la curva Catenaria.



3. APORTACIONES DE GAUDÍ A LA CURVA CATENARIA

3.1 BIOGRAFÍA Y ARQUITECTURA GAUDIANA

I) Nacimiento e infancia



Figura 4: Antonio Gaudí fotografiado por Pablo Audouard (1878)

Antonio Gaudí nació el 25 de junio de 1852 en Reus según unas biografías y en Riudoms según otras, una pequeña población cerca de Reus donde su familia veraneaba. Provenía de una familia de caldereros, hecho que le permitió al joven Antoni Gaudí adquirir una especial habilidad para tratar el espacio y el volumen mientras ayudaba a su padre y a su abuelo en el taller familiar.

Su facilidad a la hora de concebir los espacios y la transformación de materiales prosperó hasta convertirse en el genio de la creación en tres dimensiones que posteriormente demostraría ser.

Gaudí fue un niño de salud delicada, razón por la que se vio obligado a pasar largas temporadas de reposo en el Mas de Riudoms, donde pasaba horas y más horas contemplando y reteniendo los secretos de la naturaleza, que consideraba su gran maestra y transmisora del conocimiento más elevado por ser la obra suprema del Creador. Gaudí encontraba la esencia y el sentido de la arquitectura al seguir los patrones, de la naturaleza respetando siempre sus leyes.



Se trataba, no de copiarla, pero de seguir su curso mediante un proceso de cooperación y, en este contexto, hacer de su arquitectura la obra más bella, sostenible y eficaz posible. Por todo eso, Gaudí afirmaba: «La originalidad consiste en volver al origen».

II) Estudios

En el año 1870 se trasladó a Barcelona para cursar sus estudios de arquitectura a la vez que se ocupaba con diversos empleos que le permitían pagarse los estudios. Fue un estudiante irregular, pero que ya manifestaba algunos indicios de genialidad que le abrieron las puertas para colaborar con algunos de sus profesores. Cuando en 1878 culminó sus estudios en la Escuela de Arquitectura, el director, Elies Rogent, declaraba: «No sé si hemos dado el título a un loco o a un genio, el tiempo lo dirá.» Era innegable que las ideas de aquel joven no eran una mera repetición de lo que se había hecho hasta el momento ni dejarían a nadie indiferente.

Una vez obtenido el título, Antoni Gaudí se estableció por su cuenta en su despacho de la calle del Call en Barcelona desde donde, con gran entrega, inició el inconfundible legado arquitectónico, gran parte del cual es considerado Patrimonio de la Humanidad. Pero el encuentro, que resultó en una de las relaciones de amistad y mecenazgo más productivas de la historia, se produjo a mediados de 1878, cuando la casualidad quiso que el artista y Eusebi Güell, un impulsor de la industria nacional con un acentuado gusto por las artes, cruzaran sus caminos.

La relación que se inició desde aquel momento no fue únicamente la de cliente-arquitecto, sino que se convirtió en un vínculo de admiración mutua y aficiones compartidas, tejiendo una amistad que dio al arquitecto la oportunidad de iniciar una trayectoria profesional plena donde poder desarrollar todas sus cualidades artísticas.

Más allá de la relación con Güell, Antoni Gaudí recibió gran cantidad de encargos y planteó innumerables proyectos. Muchos de ellos, afortunadamente, pudieron convertirse en realidad, pero algunos otros no pasaron del papel.

Durante su etapa de madurez, las obras maestras se fueron sucediendo las unas a las otras: la Torre Bellesguard, el Parc Güell, la restauración de la catedral de Mallorca, la iglesia de la Colonia Güell, la Casa Batlló, La pedrera y, finalmente, la Sagrada Familia.

Curiosamente, el esplendor de la arquitectura gaudiniana coincidió, en una decisión personal del arquitecto, con un progresivo abandono y aislamiento. Gaudí, que en su juventud había frecuentado teatros, conciertos y tertulias, pasó de parecer un joven dandi con gustos de gourmet a descuidar su aspecto personal, comer con frugalidad y alejarse de la vida social a la vez que se entregaba con más fervor a un sentimiento místico y religioso.



Figura 5: La comitiva fúnebre de Antonio Gaudí tras su muerte por las calles de Barcelona

III) Fallecimiento

Antoni Gaudí murió el 10 de junio de 1926 atropellado por un tranvía mientras se encaminaba, como cada anochecer, hacia la Sagrada Familia desde la iglesia de Sant Felip Neri. Después del golpe, perdió la consciencia y nadie sospechó que aquel anciano indocumentado y de aspecto descuidado era el célebre arquitecto, y fue trasladado al Hospital de la Santa Cruz, donde posteriormente sería reconocido por el cura de la Sagrada Familia.

El entierro tuvo lugar dos días después en la Sagrada Familia después de un multitudinario funeral: buena parte de los barceloneses salieron a la calle para dar el último adiós a Gaudí (figura 5), el arquitecto más universal que la ciudad había visto.

3.2 ESTUDIO MATEMÁTICO DE LA CATENARIA

Una catenaria es una curva ideal que representa físicamente la curva generada por una cadena, cuerda o cable sin rigidez flexional, suspendida de sus dos extremos y sometida a un campo gravitatorio uniforme. Esta palabra proviene del latín *catēnariūs* ('propio de la cadena').

En matemáticas y arquitectura se emplea la palabra catenaria para designar la curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena o cuerda de densidad uniforme y perfectamente flexible sujeta por sus dos extremos y que se encuentra sometida únicamente a las fuerzas de la gravedad.

En sentido estricto no se trata de una curva sino una familia de curvas, en la que cada una de ellas viene determinada por las coordenadas de sus extremos y por su longitud.

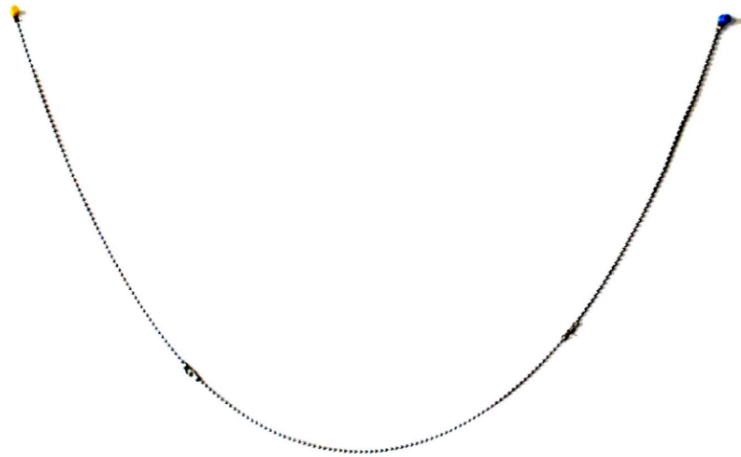


Figura 6: Forma de una catenaria

3.2.1 HISTORIA DE LA CATENARIA

A lo largo de la historia, los matemáticos se mostraron fascinados por la forma que adoptaba una cuerda o cadena que se combaba bajo su propio peso e intentaron descubrir cuál era la curva que la describía. Como, por ejemplo, en los libros de notas de Leonardo da Vinci podemos encontrar esquemas de cadenas colgando.

La prueba de que la resolución del problema no era nada fácil la tenemos en que un hombre de la talla intelectual de Galileo erró en su solución puesto que en 1638 publicó, en sus *Diálogos sobre dos nuevas ciencias*, que la cadena asumiría la forma de una parábola.

Sin embargo, hoy sabemos que, aunque el trazado de la parábola se asemeja mucho al trazado de la catenaria, ambas curvas son diferentes pues mientras la parábola está descrita por una ecuación cuadrática, en la expresión de la catenaria se involucran funciones hiperbólicas.

En 1669 el matemático alemán Joachin Jungius fue capaz de demostrar que una cadena colgante no adoptaba una forma de parábola, pero fue necesario que pasara casi medio siglo tras la muerte de Galileo, en 1642, para encontrar la solución verdadera.

En 1690 el suizo Jakob Bernoulli propone un desafío en la prestigiosa *Acta Eruditorum*, descubrir la fórmula matemática que definiera la verdadera forma de la curva de la cadena colgante. La respuesta no tardó en llegar y en 1691 la ecuación fue obtenida, de forma independiente, por su hermano menor Johann Bernoulli, con el que tenía gran rivalidad, y por Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens en 1691.

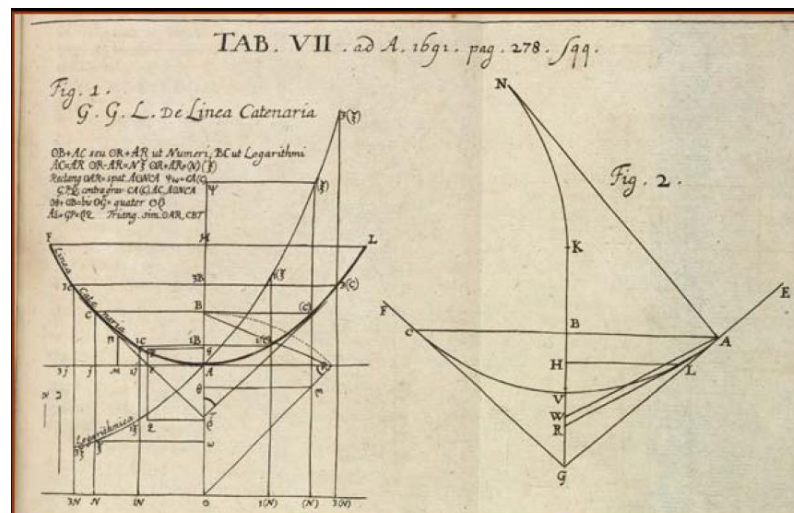


Figura 7: Soluciones emitidas por Leibniz y Huygens a Bernouille para su publicación en *Acta Eruditorum* (1691)



Fue también durante el transcurso de estas investigaciones cuando Huygens emplea por primera vez el término *catenaria* para designar a esta familia de curvas en una carta dirigida a Leibnitz. Este término que deriva del latín *catena*, cuyo significado es *cadena*, se ha impuesto a otros sinónimos como *curva funicular* o *chainette*.

Es curioso reflejar que, como se puede deducir del examen de su correspondencia con Mersenne, un jovencísimo Huygens, ya había mostrado interés en el problema de la forma que adoptaba la cadena colgante, pero, en ese momento, con sólo 17 años, fue incapaz de resolverlo, aunque sí pudo solucionar un problema relacionado, ¿cómo se deben colgar pesos en la cuerda para que adquiriera una forma parabólica?

En el mismo año en que el problema fue resuelto, 1691, David Gregory escribió, uno de los primeros tratados sobre esta familia de curvas y más tarde, en 1744, Leonhard Euler demostró que la catenaria es la curva que, rotada sobre el eje x produce una forma tridimensional que fue tras el plano, la primera superficie mínima descubierta, el catenoide.

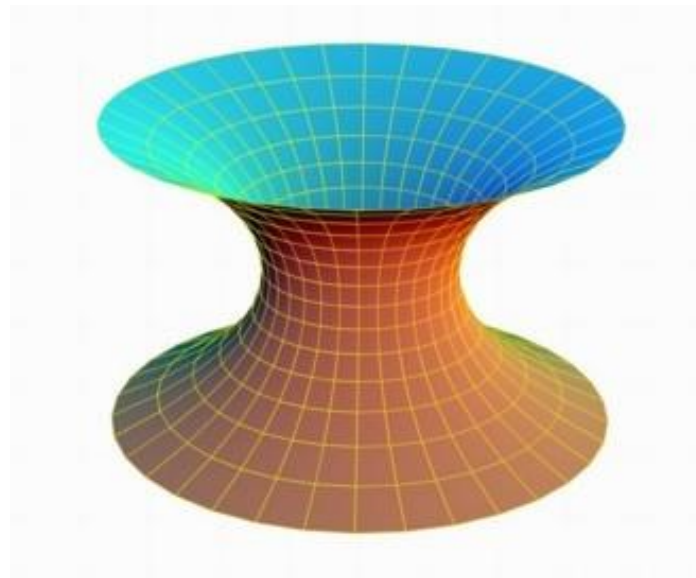


Figura 8: Catenoide

3.2.2 DESCRIPCIÓN DE LA CATENARIA

Considérese una cuerda ideal perfectamente flexible e indeformable, con masa distribuida uniformemente por unidad de longitud, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme. Considerando la mitad de esta cuerda (tramo A-B), de longitud s , las fuerzas que actúan sobre esta porción de cuerda son las indicadas en la figura 9.

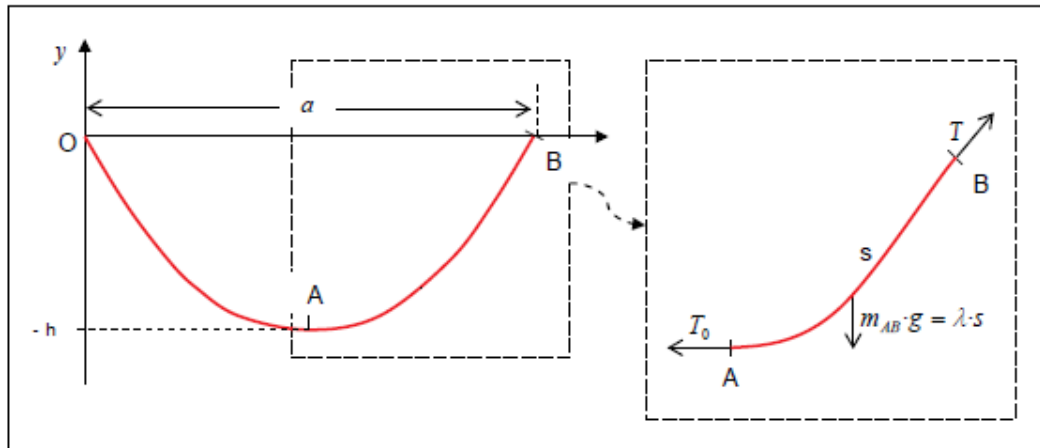


Figura 9: Esquema de fuerzas que actúan sobre una porción AB de la catenaria de longitud s , masa M_{AB} y peso específico λ .

Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow T \cos \theta - T_0 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow T \sin \theta - \lambda s = 0 \quad (2)$$

Siendo:

T la fuerza de tracción en el punto B T_0 la fuerza de tracción en el punto A

θ el ángulo formado por la fuerza T y la horizontal

λ el peso por unidad de longitud

s la mitad de la longitud total de la cuerda



De la ecuación (1) se deduce que:

$$T \cos \theta = T_0 = cte$$

es decir, la tensión horizontal permanece constante a lo largo de toda la catenaria.

Dividiendo la ecuación (2) entre (1) queda:

$$\tan \theta = \frac{\lambda s}{T_0} \quad (3)$$

Considerando ahora elementos infinitesimales se pueden considerar las siguientes expresiones:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad ds^2 = dy^2 + dx^2 \quad (4)$$

Derivando (3) y sustituyendo (4) se obtiene que:

$$\frac{d}{dx} (\tan \alpha) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\lambda}{T_0} \frac{ds}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (5)$$

Realizando el cambio de variable $u = \frac{dy}{dx}$ queda:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{1 + u^2} \quad (6)$$

Separando variables, integrando y teniendo en cuenta que para $x = \frac{\alpha}{2}$, (en el punto

más bajo A de la curva) $\frac{dy}{dx} = 0$ se puede escribir:

$$\int_A^P \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda}{T_0} \int_{\frac{\alpha}{2}}^x dx \quad (7)$$



$$\sinh^{-1}(u) = \frac{\lambda}{T_0} \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) \rightarrow u = \sinh \left[\frac{\lambda}{T_0} \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (8)$$

Integrando nuevamente, para $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = -h$ se encuentra

$$y = -h + \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[\frac{\lambda}{2T_0} (2x - \alpha) \right] + \frac{T_0}{\lambda} \quad (9)$$

Dada la simetría de la curva anterior (catenaria) para $x = \alpha$ e $y = 0$ se obtiene

$$h = \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[\frac{\lambda \alpha}{2T_0} \right] - \frac{T_0}{\lambda} \quad (10)$$

De donde se encuentra que la ecuación de la catenaria queda como

$$y = \frac{T_0}{\lambda} \left\{ \cosh \left[\frac{\lambda}{2T_0} (2x - \alpha) \right] - \cosh \left[\frac{\lambda \alpha}{2T_0} \right] \right\} \quad (11)$$

La ecuación anterior (11) para un cable suspendido de dos puntos a la misma altura y cuyo mínimo es el punto (0, a) resulta ser:

$$y = h \cosh \left(\frac{x}{h} \right) = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right) \quad (12)$$

3.2.3 DIFERENCIA ENTRE LA CATENARIA Y LA PARÁBOLA

Si se desarrolla en series de Taylor la función coseno hiperbólico, $\cosh(x)$, se obtiene que:

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (13)$$

La ecuación (13) solo permite el desarrollo en las potencias pares, la ecuación de forma genérica queda como:

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O^4(x) \quad (14)$$

Esto corresponde a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Es por este motivo que las gráficas son tan parecidas en el entorno de cero.

Si se observan superpuestas las gráficas de una catenaria y una parábola (figura 9) se puede entender por qué los antiguos matemáticos en un principio suponían que era la parábola la curva que se combaba bajo su propio peso.

El desarrollo de las fórmulas matemáticas de una catenaria y una parábola coincide en sus tres primeros términos ($y = a + bx + cx^2$) y solo a partir del cuarto ambas expresiones se diferencian (pudiendo existir en los últimos términos de la expresión de la catenaria x elevadas a potencias mayores). Esto hace que las gráficas de ambas curvas se parezcan para valores pequeños de la x , acusando más su diferenciación según aumentan los valores de ésta.

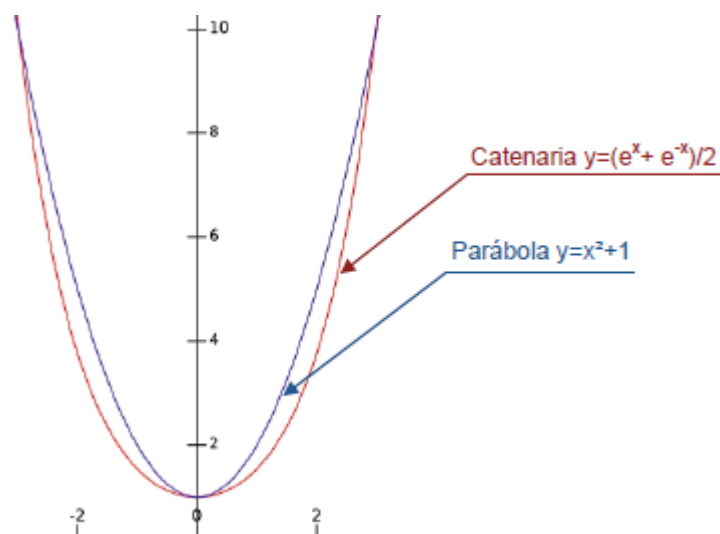




Figura 10: Diferencia entre la curva parabólica y la catenaria

La mayor diferencia entre las curvas corresponde a sus respectivas tangentes, en la catenaria el valor de la tangente tiende a la verticalidad mientras que en la parábola este valor tiende a una constante. Esto condiciona que, en la catenaria, para valores infinitos de la y , la x tiende a valores limitados, mientras que en la parábola para los valores infinitos de la y se obtienen valores infinitos de la x .

Ésta debería ser la característica que hiciese prevalecer a los arcos catenarios frente a los parabólicos en arquitectura, pero la facilidad de dibujar las parábolas frente a las catenarias hizo que el uso de éstas últimas fuera relativamente reducido en Europa hasta el siglo XIX.

De cualquier manera, a pesar de la óptima calidad del arco catenario, así como de otras formas estáticamente estables, como la parábola invertida u otros arcos antifuniculares, durante mucho tiempo se consideró que tenían formas poco elegantes y no se utilizaron en la arquitectura clásica.

3.2.4 PROPIEDADES DE LA CATENARIA. LA FORMA FUNICULAR

Si se considera un sistema de masas concentradas unidas por un hilo de peso despreciable, El hilo adoptaría una forma diferente en función del número de cargas y del valor de cada una de estas cargas o masas concentradas. Esta forma es conocida por el nombre de polígono o curva funicular.

Conforme se aumenta el número de cargas, la forma funicular tiende a aproximarse a la curva catenaria pues esta última es la que resultaría de aplicar una carga vertical distribuida uniformemente.

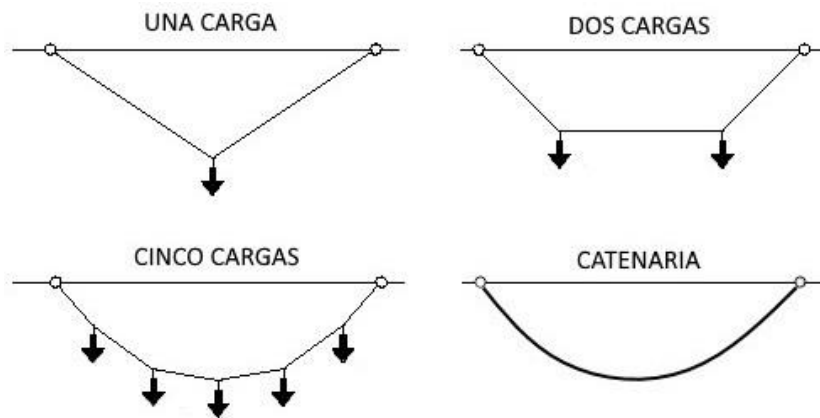


Figura 11: Aproximación de las curvas funiculares a la curva catenaria

Por tanto, puede considerarse la curva funicular como el caso discreto de la curva catenaria, obteniéndose la formulación matemática como se muestra a continuación.

Considerando N masas concentradas, la curva de equilibrio obtenida podría definirse por el ángulo que forma cada masa con la horizontal. Sobre la masa i actuarán las fuerzas de tracción que ejercen los dos tramos de hilo.

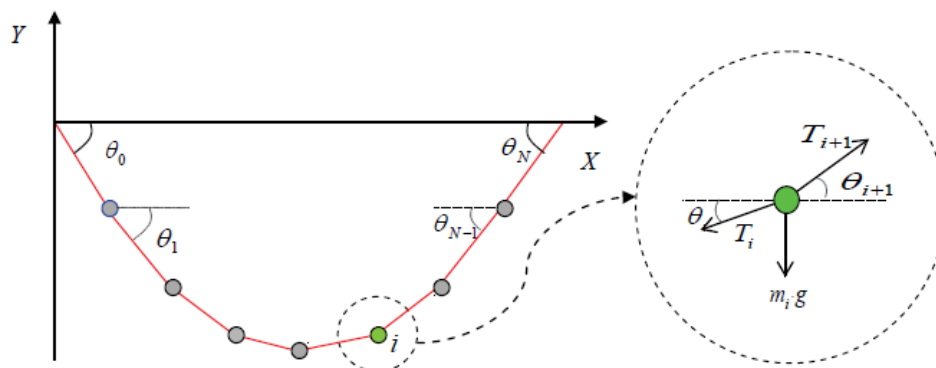




Figura 12: Esquema de fuerzas actuantes en cada masa concentrada de una curva funicular

Si se consideran todas las masas idénticas, la condición de equilibrio estático para la masa i -ésima $m_i = m$ queda expresada como:

$$\text{Eje x:} \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} \quad (15)$$

$$\text{Eje y:} \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow T_i \text{sen} \theta_i - T_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1} = mg \quad (16)$$

Dado que todas las componentes horizontales de la tensión del hilo T_x son iguales, se puede escribir

$$T_x = T_0 \cos \theta_0 = T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} = T_N \cos \theta_N \quad (17)$$

Por otra parte, dividiendo la ecuación (16) entre T_x se tiene

$$\frac{T_i \text{sen} \theta_i}{T_x} - \frac{T_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1}}{T_x} = \frac{mg}{T_x} \quad (18)$$

De la expresión anterior, es posible encontrar la relación entre θ_i y θ_{i+1} , para lo cual reemplazamos (17) en (18) obteniéndose

$$\tan \theta_{i+1} = \tan \theta_i - \frac{mg}{T_x} \quad (19)$$

Definiendo: $\gamma = \frac{mg}{T_x}$ como el cociente entre el peso de cada elemento y la componente horizontal de la tensión, la relación de recurrencia a partir de (19) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \tan \theta_0 - \gamma \\ \tan \theta_2 &= \tan \theta_1 - \gamma \\ &\vdots \\ \tan \theta_i &= \tan \theta_{i-1} - \gamma \\ &\vdots \\ \tan \theta_N &= \tan \theta_{N-1} - \gamma \end{aligned} \quad (20)$$



Sumando miembro a miembro se obtiene el ángulo θ_N en términos del ángulo inicial θ_0 en la forma:

$$\boxed{\tan \theta_N = \tan \theta_0 - N\gamma} \quad (21)$$

Para el caso particular en que los extremos del cable están a la misma altura, por simetría, se tiene $\tan \theta_0 = -\tan \theta_N$ lo cual permite escribir

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{2} N\gamma \quad (22)$$

Al sumar miembro a miembro la relación de recurrencia (20) hasta el término $N = i$, luego utilizando (21) es posible determinar la relación entre los ángulos θ_i y θ_N

$$\tan \theta_i = \tan \theta_0 - i\gamma = \frac{(N - 2i)\gamma}{2} \quad (23)$$

Los ángulos θ_0 y θ_N se determinan a través de la siguiente relación

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{(N - 2i)\gamma}{2}\right) \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots N \quad (24)$$

Las coordenadas (x_i, y_i) del elemento i -ésimo se obtienen sumando las proyecciones sobre el eje X ($d \cos \theta_j$), y sobre el eje Y ($-d \operatorname{sen} \theta_j$, $j = 0 \dots, i - 1$), donde d es la

distancia entre dos elementos consecutivos, luego $d = \frac{L}{(N + 1)}$, de donde se obtiene

$$x_i = \frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{j=i-1} \cos \theta_j \quad y_i = -\frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{j=i-1} \operatorname{sen} \theta_j \quad (25)$$

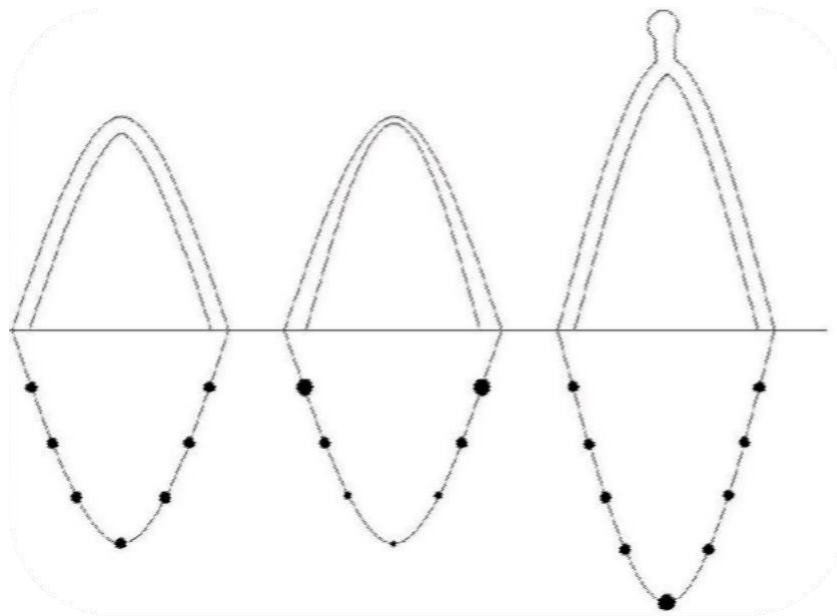
Consiguiendo las coordenadas para cualquier punto de la curva catenaria que haya sufrido una deformación debido al peso que se le ha impuesto.

3.2.5 EL ARCO CATENARIO

Cabe preguntarse qué relación guarda la curva catenaria con el diseño de los arcos. La explicación se encuentra en el hecho de que, si consideramos un arco que tenga la misma geometría que la catenaria invertida, este arco se encontrará sometido únicamente a compresión.

Esta es por tanto la forma ideal para el arco sometido únicamente a su propio peso, ya que es posible optimizar la sección del mismo ajustándola a la resistencia máxima a compresión del material. Cuando el arco está formado por elementos individuales cuyas superficies son perpendiculares a la curva del arco, no existen fuerzas de cizalla significativas en las uniones y el empuje al apoyo se transmite a lo largo de la línea del arco.

Del arco catenario se derivan los arcos antifuniculares, que tienen igualmente óptimas características constructivas y que se pueden obtener con facilidad invirtiendo la forma de una cuerda sometida a los efectos de cargas puntuales. La elección de las cargas



puntuales apropiadas permite definir mejor la geometría y sección de los arcos.

Figura 13: Arcos antifuniculares y sus curvas funiculares equivalentes

En la medida que la forma de los arcos se corresponde con el antifunicular de la distribución de cargas, la estructura funcionará a compresión y en la medida que se separe de esta forma lo hará utilizando mecanismos auxiliares de flexión. Visto así un pórtico es un arco mal diseñado que evacúa la carga a base de flexiones. Se podría incluso afirmar que todas las estructuras funcionan como un arco y es importante descubrir el arco que albergan en su interior.

Además, para arcos catenarios de igual longitud, se cumple la norma de que, a mayor altura, más pequeño es el empuje horizontal en los puntos de arranque, con lo que se pueden obtener grandes alturas con mínimos empujes laterales.

Esta idea de invertir la curva catenaria surgió mucho antes de conocer su formulación matemática. Probablemente fue Leonardo da Vinci, a finales del siglo XV, el primero en comprender esta vinculación entre catenarias y arcos.

Entre sus manuscritos pueden encontrarse cadenas colgando y geniales anotaciones como la de que "el arco trabaja de forma análoga puesto del derecho que del revés", lo que demuestra que conocía que la catenaria debía ser el antifunicular de las fuerzas sobre las dovelas del arco. Pero hubo que esperar casi dos siglos para que Robert Hooke, en 1675, plasmase claramente esta idea, al afirmar que "del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido se sostendrá el arco rígido".

Aunque Hooke no fue quien resolvió el problema matemático, algunos autores defienden que sí resolvió el problema técnico, al comprender que un arco funciona como un cable invertido.

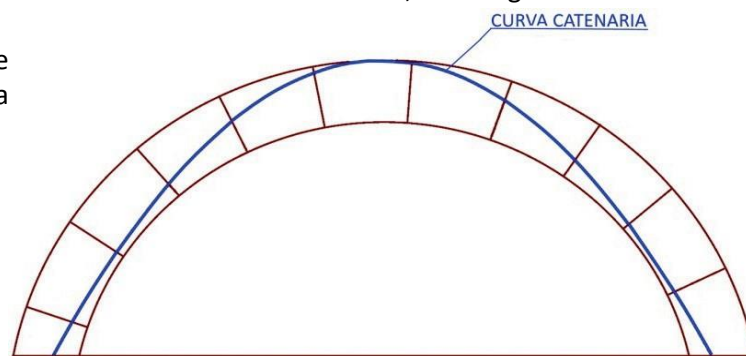
Años después, en 1697, David Gregory añadió un interesante matiz al afirmar que "si el resto de arcos se sostienen es porque hay una catenaria en su interior".

Figura 14: Idea de Gregory de que un arco cualquiera se sostiene si contiene un arco catenario en su interior

3.2.6 LAS ESTRUCTURAS ANTIFUNICULARES

De forma análoga a las Estructuras Tensadas, las estructuras antifuniculares o de compresión presentan líneas de presiones que coinciden en todos los puntos con el centro de gravedad de la sección recta. Pero, en este caso y a diferencia con las estructuras tensadas, dicha presión tiene signo negativo. Es decir, para un estado de cargas determinado, la estructura está sometida a compresión simple en todos sus puntos, sin flexión.

Como ya se ha comentado anteriormente, esta singularidad de los diseños sin flexión presenta ventajas de optimizar la estructura. permitido grandes



grandes
cara a
sección de la
Ha
salvar
luces con

construcciones tradicionales de piedra o ladrillo, antes del desarrollo de las tecnologías del acero y del hormigón y de su empleo generalizado en la construcción.

En occidente se han utilizado históricamente geometrías poco eficientes. La arquitectura griega y romana utilizaba arcos derivados de la circunferencia que facilitaban su construcción. Los arcos apuntados de la arquitectura gótica presentan un mejor comportamiento, pero aún están lejos de ser una buena aproximación a la catenaria.

A pesar de las ideas expresadas por Hooke y Gregory y de la obtención de la formulación matemática de la catenaria a finales del siglo XVII, hubo que esperar hasta



mediados del siglo XIX para contemplar formas catenarias en grandes obras arquitectónicas. El motivo principal es que la curva catenaria era considerada antiestética en esta época y la eficiencia y durabilidad no estaba convenientemente valorada.

Sin embargo, en otras culturas si se construían arcos, bóvedas y cúpulas con formas catenarias muchos siglos antes, aunque su empleo se debiese más a la intuición o al conocimiento empírico adquirido que al conocimiento científico.

Efectivamente, a lo largo de la historia aparecen algunos ejemplos de construcciones que muestran un acercamiento intuitivo o empírico al arco catenario. Posiblemente, el más antiguo de estos ejemplos lo constituye el Gran Arco del Palacio o Taq-i Kisra en la antigua Persia (figura 14), a 35 kilómetros al sur de la actual ciudad de Bagdad (Irak).

Figura 15: Arco de Ctesifonte (Irak). Grabado del siglo XVII

Construido en el siglo III durante la dinastía sasánida, esta colosal bóveda, de más de 30 metros de altura, sigue en pie en la actualidad a pesar del terremoto y de la inundación sufrida a finales del siglo XIX, que derribaron una de las alas del palacio. Además, la acertada geometría de esta bóveda permitió realizar su construcción sin cimbrado o, al menos sin emplear cimbras completas, tal y como aseguran autores como Ortega y Noval, 1995.

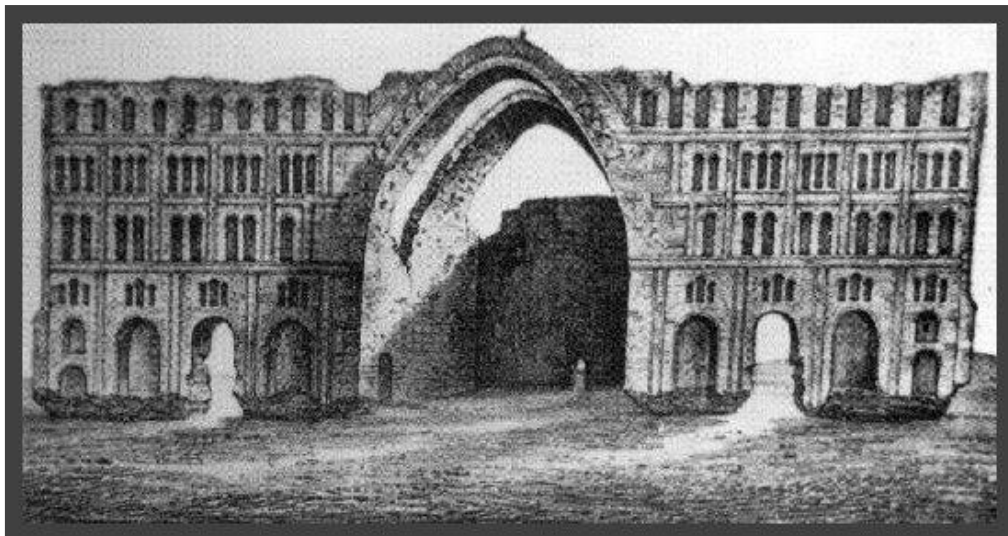




Figura 16: Arco de Ctesifonte (Irak). Situación actual



La cúpula de la Mezquita de la Roca en Jerusalén (figura 16), con un diámetro de 31,87 metros y una altura de 56,60 metros, tiene también una geometría que se aproxima a la catenaria perfecta. Construida en Jerusalén entre los años 687 y 691, esta cúpula es una muestra de cómo el arte islámico mostraba un conocimiento arquitectónico muy evolucionado.

Figura 17: Mezquita de la Roca. Jerusalén

También se puede apreciar una buena aproximación a la curva catenaria en la arquitectura tradicional de barro de la comunidad Musgum en las llanuras del norte de Camerún (figura 17). Estas viviendas, cuya existencia estaba contrastada ya en el siglo XVII, están hechas de barro comprimido secado al sol.



Figura 18: Casas Musgum en Camerún

De forma análoga, en el Noreste de África, durante siglos se encontró la forma de construir amplias habitaciones circulares cubiertas con una cúpula catenaria utilizando únicamente adobe y sin necesidad de entibar. Mientras duraba la construcción, los empujes horizontales eran tan pequeños que los adobes se mantenían en su posición simplemente con el rozamiento de los ya instalados y una vez cerrada la cúpula, ésta adquiría una resistencia extraordinaria.

El desarrollo de esta técnica surgió en Sudan como respuesta a la escasez y el alto coste de la madera, resultando inaccesible para la construcción de viviendas pobres, así como para realizar los andamiajes.

Volviendo a occidente, tras las aportaciones de Hooke y Gregory, son muy tímidas las apariciones de formas catenarias en las obras de arquitectura y de ingeniería. La cúpula de la Catedral de San Pablo, en cuyo diseño se cree que participó el propio Hooke, es uno de los pocos ejemplos que se encuentran. Una de las primeras aplicaciones del método de la inversión catenaria, que describió Thomas Young, en 1845, aparece en la construcción de puentes en la Inglaterra del siglo XVIII

El alemán Wilhelm Tappe, en 1818, propuso una arquitectura de formas catenarias, pero que desgraciadamente no se llegó a ejecutar.

A partir del siglo XX han sido numerosas las obras que han empleado geometrías antifuniculares. Eugène Freyssinet fue pionero en el diseño de estructuras a compresión con la construcción, en 1916, de dos Hangares para el Aeropuerto de Orly con forma de bóveda catenaria (figura 18).

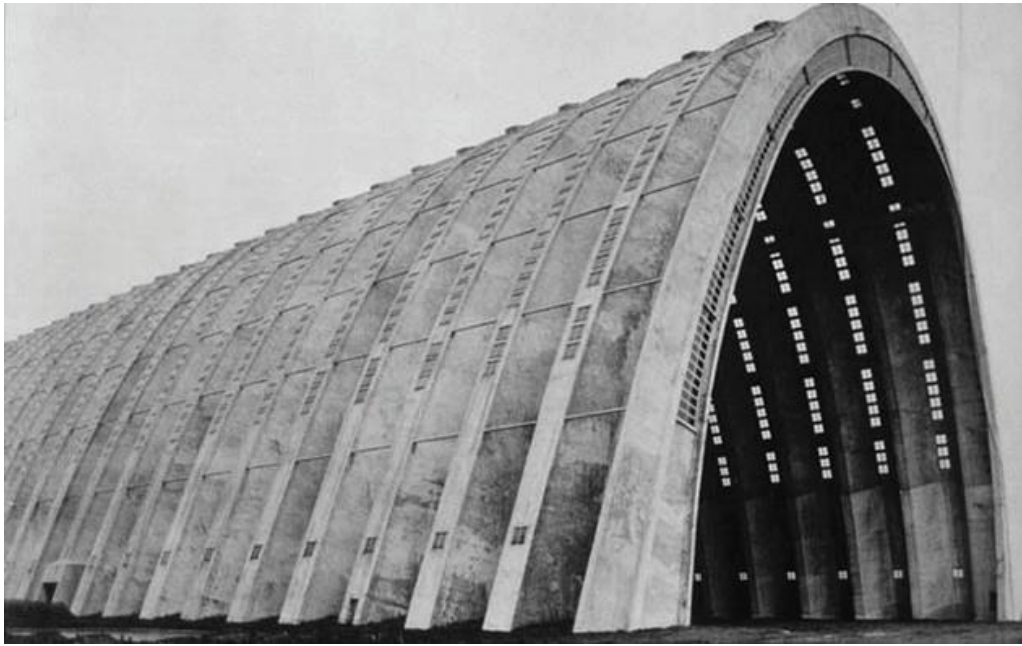


Figura 19: Hangar del Aeropuerto de Orly de hormigón pretensado. Eugène Freyssinet 1916. París (Francia)

Sin duda uno de los hitos históricos del método de inversión de formas funiculares corresponde a la obra de Antoni Gaudí i Cornet (1852-1926) cuya gran aportación fue el desarrollo y la aplicación sistemática de estos modelos en algunas de sus obras más conocidas.

Una de las principales características que diferencia a Gaudí del resto de arquitectos de su época es que, desde el inicio, hay una preocupación por el diseño de una estructura estable y no una mera comprobación de estabilidad a posteriori. Gaudí poseía una buena formación en cálculo de estructuras mediante métodos gráficos, que había tenido una enorme difusión a partir de los trabajos de Culmann en 1866.

También fue pionero en el diseño de edificios a compresión construyendo maquetas funiculares partiendo de una estructura de hilos a la que añadía pequeños sacos cargados con perdigones hasta obtener la forma deseada (figura 19)



Figura 20: Maqueta funicular de Gaudí expuesta en el Centre Reus (Tarragona)

En el estudio hecho por una universidad alemana para la reproducción de la maqueta funicular de Gaudí (Das Modello), se deducen las siguientes consideraciones:

- Para la construcción de los polígonos funiculares, definidos anteriormente, se considera la distribución del peso, a lo largo de la curva, en tramos regulares.
- En cuanto a la distribución de las cargas, el peso que soporta la estructura varía de acuerdo a su altura, es decir, la parte más alta está sometida a una carga mínima y la carga máxima está en las bases.
- La determinación de la altura, por lo anterior, dependerá de la materialidad y su peso, y de si la estructura soporta elementos adicionales.
- La forma del funicular, dependerá de la distribución de las cargas

La maqueta funicular consiste en fijar en el techo un tablero de madera, en el que se dibuja la planta del edificio, y de los puntos de sustentación -columnas e intersección de paredes- se cuelgan unos cordeles de los que, a su vez, se suspenden saquitos con peso que dan la curva catenaria resultante, tanto en arcos como en bóvedas. Este sistema creado por Gaudí fue utilizado tanto en la Cripta de la Colonia Güell como en la Sagrada Familia y con el mismo se pone fin a la concepción clásica de la circunferencia perfecta, rompiendo los arcos con tramos rectos.



Figura 21: Maqueta funicular de la Sagrada Familia. Gracias al reflejo del espejo tenemos el resultado de lo que sería una estructura que, manteniendo una orientación vertical, resulta apta para la construcción.



Este interés en construir estructuras estables le lleva a ser un gran defensor de los arcos catenarios y parabólicos, que eran muy poco habituales hasta entonces. Gaudí supo apreciar la belleza de estos arcos llegando a manifestar que *“La catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad a la construcción entera. La construcción autoestable de la catenaria evita los contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos”* (Bohigas, Giralt-Miracle y Casanova, 2002, p.169).

En la obra de Gaudí hay muchos ejemplos del uso de arcos catenarios, destacando los del Colegio de las Teresianas, la Casa Batlló o la Pedrera (Casa Milá) (figura 21).



Figura 22: Arcos catenarios en el Convento de las Teresianas (izquierda), Casa Batlló (centro) y La Pedrera (derecha)

Como reconocen algunos estudiosos del arquitecto, como Juan Bassegoda Nonell, el principal mérito de Gaudí es el de haber creado formas nuevas e inéditas utilizando materiales y técnicas tradicionales y esto es en buena parte gracias la utilización de geometrías que colaboran a la estabilidad de la estructura.

Otra gran aportación de Gaudí fue la observación de la naturaleza. Esta se convierte en un referente continuo para su obra imitando sus formas y creando otras nuevas inspiradas en ella. Un ejemplo de ello se encuentra en las terminaciones de los pilares de la Sagrada Familia en Barcelona, que intentan semejarse a las ramas de un árbol (figura 22).



Figura 23: Semejanza entre los pilares de la Sagrada Familia y las ramas de un árbol

Otros arquitectos contemporáneos a Gaudí dejaron su huella en la arquitectura tradicional diseñada a compresión. El valenciano Rafael Guastavino Moreno, junto con su hijo Rafael Guastavino Expósito, utilizando la estática gráfica, construyeron en todo Estados Unidos impresionantes bóvedas y cúpulas de ladrillo plano con formas antifuniculares y secciones muy livianas sin ningún tipo de cimbra.

Aunque algunas de sus teorías no eran acertadas, como la cohesiva, Guastavino poseía el conocimiento de que el problema crucial en el proyecto de las fabricas no es la resistencia sino la geometría (figura 25).



Figura 24: Estación de Metro de City Hall ("La catedral subterránea"). Guastavino. Nueva York (E.E.UU.)



No cabe duda de que el arco catenario más famoso de la arquitectura es el Gateway Arch de San Luis (Missouri), con 192 metros de altura (figura 25). Este inmenso arco de acero inoxidable, obra del arquitecto norteamericano de origen finlandés Eero Saarinen y del ingeniero de estructuras alemán Hannskarl Bandel, constituye una maravilla de la construcción, sobre todo teniendo en cuenta que fue proyectado en 1947, antes de la aparición de los ordenadores.



Figura 25: Gateway Arch. San Luis – Missouri (EEUU)

A partir de la segunda mitad del siglo XX, son numerosas las obras arquitectónicas con criterios de optimización a compresión simple. Tras la segunda guerra mundial surge una corriente arquitectónica que defiende las bóvedas catenarias como modelo de construcción de bajo coste. Es lo que algunos autores han denominado Sistema Ctesiphonte (Rabasco P., 2011). Dignos de mención son los proyectos del arquitecto hispano mejicano Félix Candela, que acude en numerosas ocasiones a la bóveda catenaria y al paraboloides hiperbólico (figura 26), así como los de viviendas ultrabaratadas llevados a cabo por arquitectos como Rafael de La-Hoz y J. M^a. García de Paredes en 1953 (figura 26).



Figura 26: Pabellón de rayos cósmicos. 1951. F. Candela y Jorge González. La Muela (Zaragoza)



Figura 27: Viviendas ultrabaratas. 1953. R. de la Hoz y J.M. Paredes Villaviciosa de Córdoba (Córdoba).

En 1955, los arquitectos Eduardo Torroja y Fruto Vivas diseñaron la bóveda de hormigón del club Tachira en Caracas (Venezuela) (Escrig y Sánchez, 2007). El diseño se obtuvo a partir de una doble curvatura generadas a partir de un arco catenarico que se desplaza de forma paralela a través de una directriz trigonométrica alabeada (figura 28)



Figura 28: Club Tachira. E. Torroja y F. Vivas. Caracas (Venezuela)



Otros arquitectos contemporáneos como Santiago Calatrava han seguido la escuela de Gaudí con la introducción de formas catenarias. Como ejemplo, la Galería BCE Place de Toronto (figura 31), construida en 1992, donde se puede ver cierta influencia del arquitecto catalán.

Observando la imagen de la Galería, se aprecia cierto parecido con el Colegio de las Teresianas. Además, las vigas, que luego se cierran en un arco parabólico, recuerdan a los árboles (de nuevo, la presencia de Gaudí); más concretamente, la Galería nos muestra un “camino entre árboles” que la comunica con la ciudad. La Galería se cierra con una cubierta acristalada por la que entra la luz natural.



Figura 29: Galería BCE Place. Toronto (Canadá)



4. ARQUITECTURA Y GEOMETRÍA EN LA OBRA DE GAUDÍ

4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES REGLADAS

I) INTRODUCCIÓN

Una superficie es el conjunto de puntos P de coordenadas (x,y,z) en el espacio R^3 que verifican una ecuación $F(x,y,z)=0$. Se clasifican en dos grandes grupos, superficies regladas y superficies no regladas. En este estudio desarrollaremos las superficies regladas.

Las superficies regladas se generan por el movimiento de una recta, denominada generatriz manteniéndose en contacto y desplazándose sobre una curva o varias, denominadas directrices, cumpliendo además en su desplazamiento ciertas condiciones particulares.

Se clasifican en dos grandes familias: las desarrollables y las alabeadas.



Figura 30: Bodegas Ysios de Santiago Calatrava. Laguardia (Álava) 2001



Han sido muy utilizadas en arquitectura desde hace siglos por la simplicidad que aportaban a la talla de sillares en las obras de cantería; y ya en el siglo XX por la facilidad que su geometría ofrece para el encofrado y armado del hormigón.

Un ejemplo espectacular nos lo ofrece Santiago Calatrava quien, para las bodegas Ysios (figura 30), ha levantado este impresionante edificio en las proximidades de Laguardia, en la Rioja Alavesa.

Un ejemplo de superficie reglada es el cilindro, se puede generar por una recta que se mueve apoyándose en una circunferencia situada en un plano perpendicular. También son superficies regladas los conos y un plano.

Estas superficies en arquitectura permiten realizar elegantes formas curvas recurriendo únicamente a elementos constructivos rectilíneos. El interés de estas superficies no reside en estas superficies sencillas, sino en las superficies regladas alabeadas que tiene doble curvatura, es decir en estas superficies un plano tangente también es secante y la intersección entre el plano y la superficie es la recta o rectas generatrices de dicha superficie.

Con el uso de estas superficies regladas alabeadas (hiperboloides, conoides, paraboloides y helicoides), además de crear una arquitectura rica y un diseño espectacular se consigue una eficacia estructural, ya que precisamente por la doble curvatura, proporciona una elevada rigidez y una capacidad de transmisión de las acciones mecánicas hacia los bordes o puntos de apoyo.



II) SUPERFICIES DESARROLLABLES O DE CURVATURA SIMPLE

Las superficies regladas están generadas por el movimiento de una recta. Las superficies regladas desarrollables se caracterizan porque las generatrices pasan por un punto llamado vértice y se apoyan sobre una línea denominada directriz. Si la directriz es poligonal es pirámide o prisma y si es curva, cono o cilindro.

Si el vértice es propio, es cono o pirámide y si es impropio, es decir, está en el infinito, es cilindro o prisma.

Estas superficies se pueden definir de la siguiente forma:

A) Superficie Cilíndrica:

Superficie generada por el movimiento de una recta generatriz (g) que se mantiene en contacto con una directriz (d) curva y paralelas a una dirección dada.

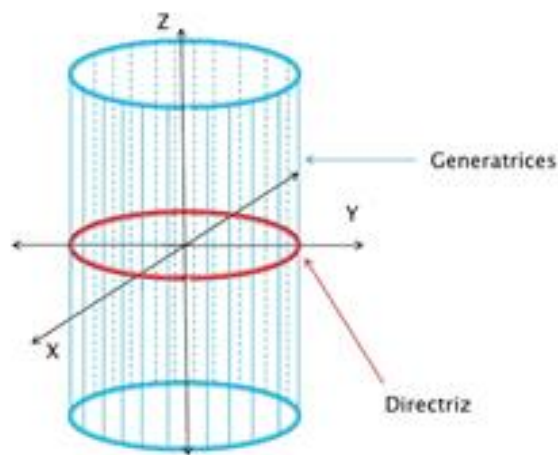
Si consideramos la curva directriz de ecuación $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

y la dirección de las generatrices son: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Las ecuaciones paramétricas de un cilindro son:

$$\begin{cases} x = x(t) + \lambda v_1 \\ y = y(t) + \lambda v_2 \\ z = z(t) + \lambda v_3 \end{cases}$$

Fórmula:
 $x^2 + y^2 = r^2$



Las superficies cilíndricas pueden ser:

- **Superficie cilíndrica de revolución:** Superficie cilíndrica en la cual todas las posiciones de la generatriz (g) equidistan de un eje (e), paralelo a ella.
- **Superficie cilíndrica de no revolución:** superficie cilíndrica en la cual no es posible definir un eje (e) que equidiste de todas las posiciones de la generatriz (g).

Representamos en Máxima un cilindro de curva directriz C la circunferencia situada en el plano $y=2$ y generatrices paralelas al vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$

$$C \equiv \begin{cases} x = 3 \cos(t) \\ y = 2 \\ z = 3 \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas del cilindro son:

$$S \equiv \begin{cases} x = 3 \cos(u) + v \\ y = 2 - v \\ z = 3 \operatorname{sen}(u) \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi], v \in [-2, 2]$$

En la gráfica la curva directriz está en color rojo y en amarillo la generatriz que pasa por el punto P (-3,2,0).

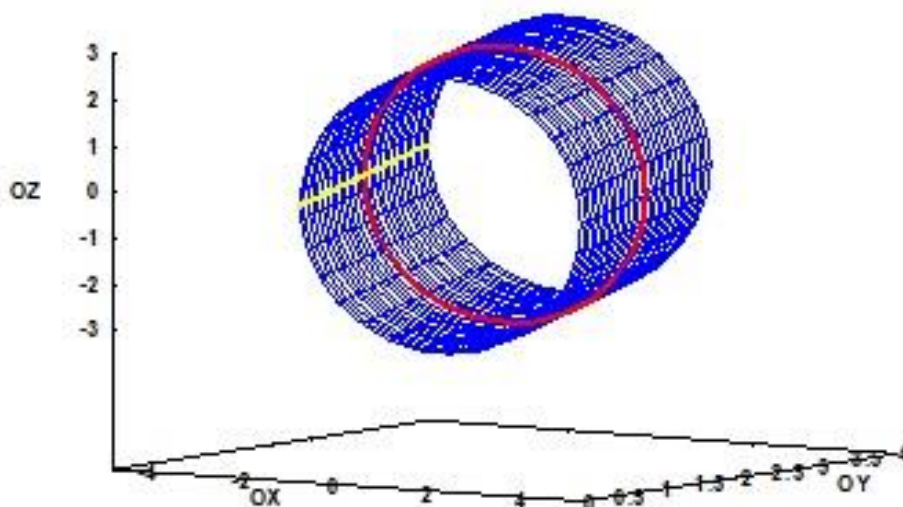
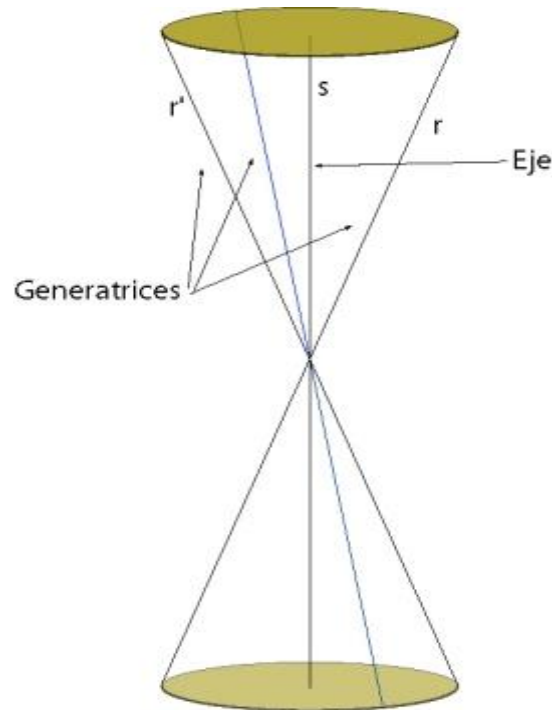


Figura 31: Representación gráfica de un cilindro realizado con el programa matemático Máxima

B) Superficie cónica:

Superficie reglada generada por el movimiento de una generatriz (g), manteniéndose en contacto con una directriz (d) curva, teniendo, todas las posiciones de la generatriz (g), un punto común(V), denominado vértice



Las superficies cónicas pueden ser:

- **Superficie cónica de revolución:** Superficie cónica en la cual, todas las posiciones de la generatriz (g), forman el mismo ángulo con un eje (e), que pasa por el vértice (V).
- **Superficie cónica de no revolución:** superficie cónica en la cual no es posible definir un eje (e), que forme el mismo ángulo con todas las posiciones de la generatriz.

Si consideramos la curva directriz de ecuación:

$$C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

y el vértice del cono $V(x_0, y_0, z_0)$

Las ecuaciones paramétricas de un cono son:

$$S \equiv \begin{cases} x = x_o + \lambda(x(t) - x_o) \\ y = y_o + \lambda(y(t) - y_o) \\ z = z_o + \lambda(z(t) - z_o) \end{cases}$$

Representamos un cono de curva directriz la parábola: $C \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \\ z = 2 \end{cases}$
situada en el plano $z=2$ y cuyo vértice es $V(2,0,0)$.

Las ecuaciones paramétricas del cono son:

$$S \equiv \begin{cases} x = 2 + u(2v - 2) \\ y = uv^2 \\ z = 2u \end{cases} \quad u \in [-1,1], v \in [-2,2]$$

En la representación gráfica la curva directriz del cono está en rojo.

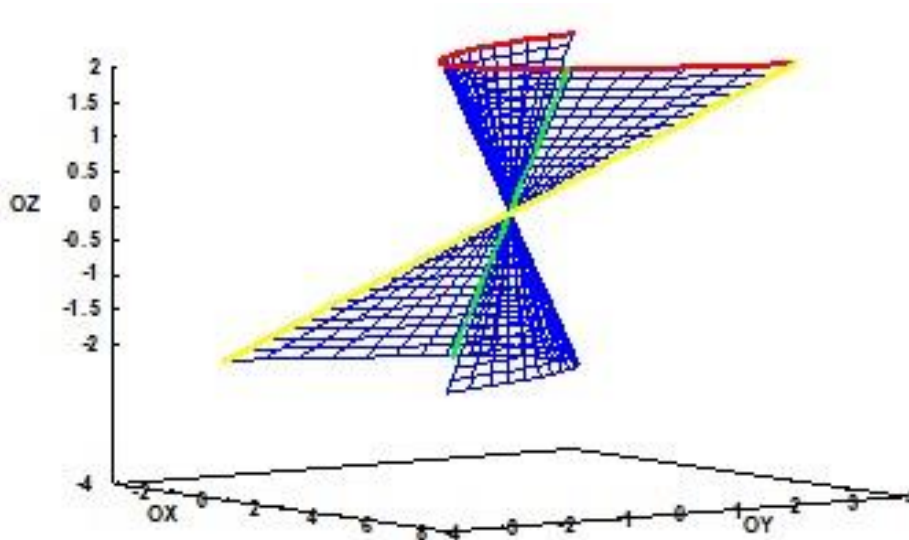


Figura 32: Representación gráfica de un cono realizado con el programa matemático Máxima



III) SUPERFICIES ALABEADAS

Las superficies alabeadas se generan por el movimiento de una recta, de forma que dos posiciones adyacentes de la recta se cruzan. Entre este tipo de superficies, se puede citar:

A) Paraboloide hiperbólico

El paraboloides está generado por una recta que se apoya en dos líneas directrices y siempre se mantiene paralela a un plano llamado director. Dos generatrices infinitamente próximas se cruzan mientras que las de distinto sistema se cortan.

La superficie es de segundo orden ya que, si es cortada por una recta, la corta como máximo en dos puntos. El plano tangente en un punto de la misma está definido por dos generatrices, una de cada sistema.

Las secciones planas de la superficie son de forma general hipérbolas y en casos particulares parábolas.

Para mostrar que un paraboloides hiperbólico es una superficie doblemente reglada se procede de la siguiente forma.

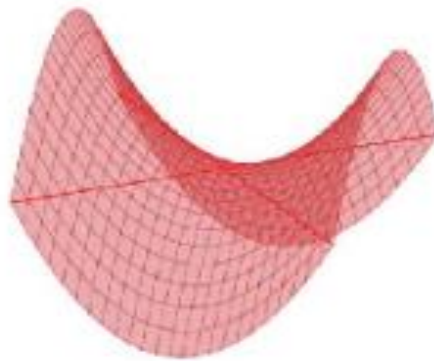


Figura 33: Representación gráfica de un paraboloides hiperbólico

Consideremos la ecuación de un paraboloides hiperbólico:

$$z = x^2 - y^2, \text{ si } k \neq 0, \quad zk\left(\frac{1}{k}\right) = x^2 - y^2$$

Podemos expresar la ecuación: $zk\left(\frac{1}{k}\right) = (x + y)(x - y)$

Se obtiene dos sistemas de ecuaciones:

$$x + y = kz, \quad x - y = \frac{1}{k} \quad (1)$$

$$x + y = \frac{1}{k}, \quad x - y = kz \quad (2)$$

Cada uno de estos sistemas líneas son dos planos no paralelos que determinan una recta. Por cada punto del paraboloido podemos obtener las dos rectas que están contenidas en el paraboloido. Si consideramos el punto P (0,1,-1) del paraboloido, al sustituirlo en (1) se obtiene $k=-1$, y al sustituir el punto en (2), se obtiene $k=1$. De esa forma se tienen las dos rectas que pasan por el punto P.

$$x + y = -z, \quad x - y = -1 \quad (1)$$

$$x + y = 1, \quad x - y = z \quad (2)$$

Estas dos rectas pasan por P (0,1,-1): Se pueden expresar en forma paramétrica calculando la dirección de cada recta con el producto vectorial de los vectores normales.

$$\vec{n}_1 = (1,1,1) \wedge (1,-1,0) = (1,1,-2) \quad \text{y} \quad \vec{n}_2 = (1,1,0) \wedge (1,-1,-1) = (-1,1,-2)$$

La recta de la familia (1): $r_1 \equiv \begin{cases} x = 0 + u \\ y = 1 + u \\ z = -1 - 2u \end{cases}$ La recta de la familia (2): $r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 - v \\ y = 1 + v \\ z = -1 - 2v \end{cases}$

Representamos el paraboloido hiperbólico con el programa de Máxima en color azul la recta generatriz r_1 y en color verde la generatriz r_2 . El punto de corte de las dos generatrices es el punto P (0,1,-1).

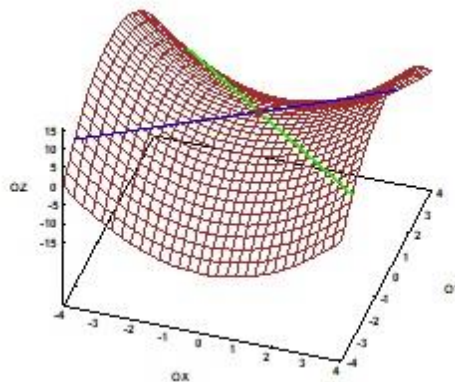


Figura 34: Representación gráfica de un paraboloido hiperbólico realizado con el programa matemático Máxima

B) Conoide

El conoide es una superficie reglada alabeada con un plano director y dos directrices, una rectilínea y otra curva. Si la directriz curva es un círculo se tiene el conoide circular, si es una elipse tenemos el conoide elíptico, etcétera. Son superficies regladas cuyas generatrices se apoyan en la curva directriz y en una recta (eje del conoide), siendo las generatrices paralelas a un cierto plano (plano director del conoide). Si el eje y el plano son perpendiculares, se dice que el conoide es recto.

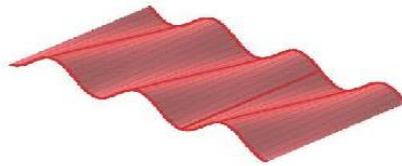


Figura 35: Representación gráfica de un conoide recto con directriz abierta

Como ejemplo de un conoide curva directriz abierta, representaremos en Máxima el conoide de curva directriz:

$$C \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -\text{sen}(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{y el eje del conoide el eje OX.}$$

Las ecuaciones de la superficie conoide en forma paramétricas son:

$$S \equiv \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = v\text{sen}(u) \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi], v \in [-2, 2]$$



Observamos en la gráfica la curva directriz en color rojo , el eje del conoide en verde
y en amarillo la generatriz que pasa por el punto $P(\pi/2, -1, -1)$

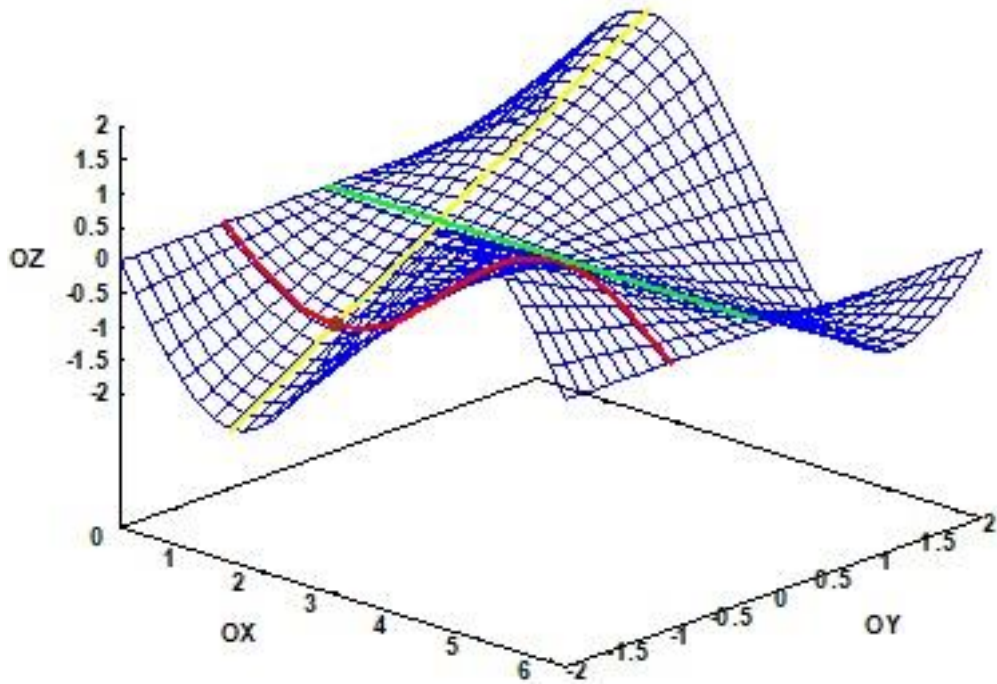


Figura 36: Representación gráfica de un conoide realizado con el programa matemático Máxima

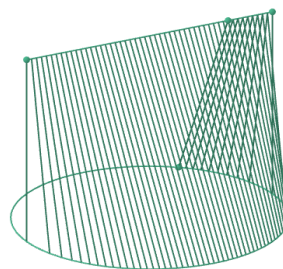


Figura 37: Representación gráfica de un conoide recto con directriz cerrada



C) Hiperboloide de una hoja de revolución o hiperbólico

Si consideramos dos rectas que se cruzan y una de ellas es el eje de revolución al girar las se genera un hiperboloide de una hoja. También se puede generar por rotación de una hipérbola en torno a su eje imaginario. Todas las secciones que cortan a la superficie perpendicularmente al eje son círculos.

El hiperboloide es una superficie cuyas secciones son siempre cónicas. Por cada uno de sus puntos pasan dos líneas de cada sistema que definen el plano tangente en uno de sus puntos. Éste plano secciona a la superficie en dos rectas. La superficie no se puede desarrollar por ser alabeada.

Las superficies regladas alabeadas encuentran una aplicación muy extendida en la construcción de cubiertas, tejados, ajustes de tuberías, engranajes, torres de refrigeración de centrales nucleares, engranajes hiperbólicos para ajustar ruedas cuyos ejes se cruzan, etc.



Figura 38: Representación gráfica de un hiperboloide de una hoja

La ecuación de un hiperboloide de revolución de eje OZ: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Este hiperboloide se puede generar al girar la hipérbola $x^2 - z^2 = 1$ de eje imaginario OZ alrededor de dicho eje.

4.2 SUPERFICIES REGLADAS EN LA OBRA DE GAUDÍ

4.2.1 EL HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA EN LA SAGRADA FAMILIA



Figura 39: Sagrada Familia de Antonio Gaudí. Barcelona

En la sagrada familia cada columna soporta la parte de cubierta que le corresponde independiente de las otras, de este modo la inclinación de la resultante de la composición de los pesos que gravitan sobre ella, traslada el peso de la nave central al suelo; al igual que el árbol, las cargas son soportadas por el ramaje que siguen las líneas que le dictan la estática. Para terminar, el espacio entre ramificaciones se usan superficies regladas (paraboloides, hiperboloides) logrando que generatrices deslicen por directrices (de lo cóncavo a lo convexo).

Gaudí menciona numerosas veces que con el templo de la Sagrada Familia desea superar el estilo gótico de las catedrales que necesitan arbotantes y contrafuertes como si fueran unas muletas y que no muestran otra cosa que el complicado recorrido de la bajada de cargas que aquellos hábiles constructores llegaron a concebir.

Gaudí consigue su objetivo por dos caminos simultáneos. Por un lado, estudia con un modelo de pesas y cuerdas el recorrido natural de las cargas y, gracias a este ensayo previo, inclina las columnas-árbol y todas sus ramas según las direcciones que obtiene en su modelo experimental de tal manera que recojan las diferentes cargas directamente del centro de gravedad de cada sección de bóveda.



Figura 40: Techo de la nave central de la Sagrada Familia. Barcelona

La concepción del templo como un bosque de árboles (columnas) con ramas (ramificaciones) y follaje (bóvedas) le permite concebir que cada árbol soporta su follaje sin necesitar de los árboles vecinos. Habiendo visto las desgracias de la primera guerra europea no quería que, al hundirse una parte, un contrafuerte, por ejemplo, se hundiera todo el templo.

Él pensaba que si cae un árbol sólo debe caer aquel árbol y no todo el bosque. Con la utilización de las columnas-árbol, Gaudí consigue superar el gótico y llevar las cargas directamente a los cimientos por la vía más directa. Así, al eliminar los arbotantes y contrafuertes, consigue para las naves una fachada exterior plana, sin las aletas perpendiculares que en el gótico las segmentan.



Además del Paraboloides hiperbólico, en la Sagrada Familia pueden también apreciarse otras figuras geométricas que conforman las bóvedas de la catedral, como los hiperboloides de revolución de una hoja (figura 41)

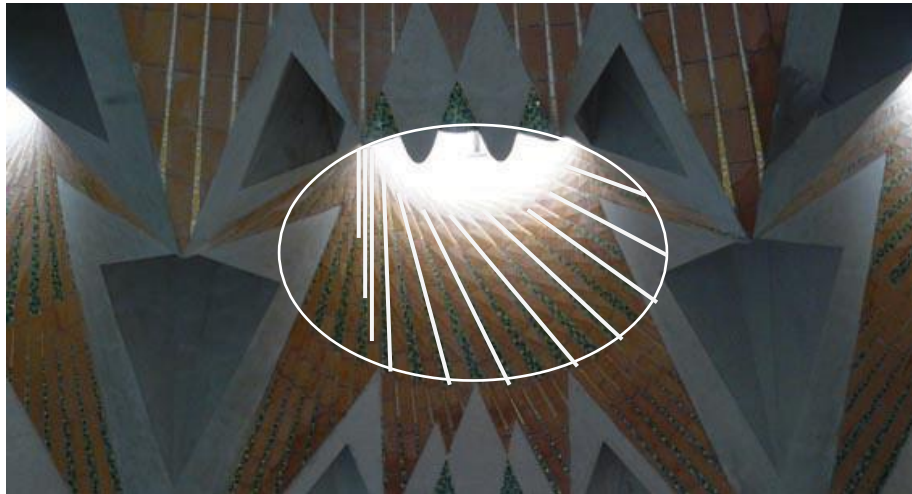


Figura 41: Forma de hiperboloide de revolución de una hoja en la Sagrada Familia. Gaudí. Barcelona

Con las bóvedas, Gaudí también supera el gótico. Las bóvedas góticas de crucería se concebían con unos nervios que se ordenaban jerárquicamente para recoger las cargas de la bóveda, que era el último elemento, considerado complementario y sin papel estructural (aun cuando después se demostró que esta piel entre nervios, este caparazón, también era capaz de resistir, aunque le fallara algún nervio). Adelantándose en las teorías y en el tiempo, Gaudí concibe la bóveda en su conjunto como piel, como caparazón, sin nervios.



Figura 42: Techo de la nave central de la Sagrada Familia. Barcelona



Utiliza otra vez superficies regladas, de doble curvatura, como son los hiperboloides y los paraboloides para lograr la máxima resistencia y optimizar el comportamiento mecánico en su última versión de las bóvedas, que tanto estudió y que nos ha llegado gracias a la maqueta de yeso que realizó,

En el punto de la clave, dónde las bóvedas góticas necesitan una concentración de peso para que las arcadas no se abran, las bóvedas de hiperboloides tienen el ojo, el cuello del hiperboloide, un gran vacío por dónde pasará la luz natural desde las buhardillas hacia la nave.

Gaudí recupera la idea plástica del medallón de la clave haciendo un difusor de la luz, ligero, de vidrio y metal, a modo de flor o estrella, pero esta función ya no es estructural. En las costuras entre los diferentes hiperboloides de las bóvedas, donde se podría adivinar la existencia de nervios, Gaudí vuelve a hacer una colección de pequeños agujeros, pequeños hiperboloides elípticos, para la luz artificial que por la noche deben servir para dar la sensación del cielo estrellado.

Parece, pues, talmente como si Gaudí quisiera dejar claro que sus bóvedas no necesitan nervios y con esto también explica otra vez su voluntad clara de superar el gótico.



Figura 43: Techo de la nave central de la Sagrada Família. Barcelona

El dominio total de las superficies regladas y el conocimiento de las rectas generatrices hacen que pueda colocar, siguiendo estas direcciones, la baldosa cerámica, inspirándose en la técnica de la bóveda catalana de ladrillo plano, el material de cobertura más sencillo de aquella época. Así, con el color de la cerámica junto con el vidrio verde y dorado para las juntas que se van abriendo consigue la bóveda más florida que nunca se hubiera visto en una catedral. De esta forma consigue otra vez dar una lección magistral, uniendo la mecánica y la geometría.



El dominio de la geometría reglada se pone de manifiesto observando en detalle las costuras entre hiperboloides, donde todas las intersecciones son trabajadas en un grado extremo. En estas intersecciones, en el contacto entre los diferentes elementos geométricos que combina, no aparecen nunca curvas extrañas, sino que utiliza siempre las rectas generatrices para hacer todas las transiciones entre los planos que forman biseles, los pequeños paraboloides entrecruzados o los grandes paraboloides que todavía contienen dentro los hiperboloides elípticos de las estrellas de la noche.

Gaudí demuestra también su destreza con la geometría en otros aspectos distintos a las superficies regladas alabeadas (conoides, helicoides o rampas de tornillo, paraboloides e hiperboloides). Entre los mejores ejemplos que podríamos añadir está el conocimiento y aplicación de las proporciones básicas pitagóricas, su famosa columna de doble giro o el uso de formas poliédricas diversas.



Figura 44: Nave principal de la Sagrada Familia. Utiliza hiperboloides en las aberturas de los ventanales y en otras aberturas en las bóvedas, también en el techo de la nave principal.

4.2.2 EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO EN LA IGLESIA DE LA COLONIA GÜELL



Figura 45: Fotografía de la Cripta de la Colonia Güell, Barcelona

El paraboloid hiperbólico lo utiliza en superficies de enlace en bóvedas y en cubiertas. También en las columnas de la fachada de la Pasión.

El principal proyecto de Gaudí a principios del siglo XX fue el Parque Güell (1900-1914), nuevo encargo de Eusebi Güell para construir una urbanización residencial al estilo de las ciudades-jardín inglesas. El proyecto no tuvo éxito, ya que de 60 parcelas en que se dividió el terreno sólo se vendió una. Pese a ello, se construyeron los accesos al parque y las áreas de servicios.

El último proyecto para su gran mecenas, Eusebi Güell, fue el de una iglesia para la Colonia Güell, en Santa Coloma de Cervelló, cerca de Barcelona, de la que sólo se construyó la nave inferior (conocida hoy día como Cripta de la Colonia Güell)



Figura 46: Maqueta de la Iglesia de la colonia Güell

Cuando Eusebio Güell le encargó la cripta de la colonia Güell, Gaudí escogió una pequeña colina rodeada de pinos y dedicó 16 años de trabajo en completa libertad, porque lo que le importaba era la obra bien hecha, evitando las prisas como las evita la naturaleza.

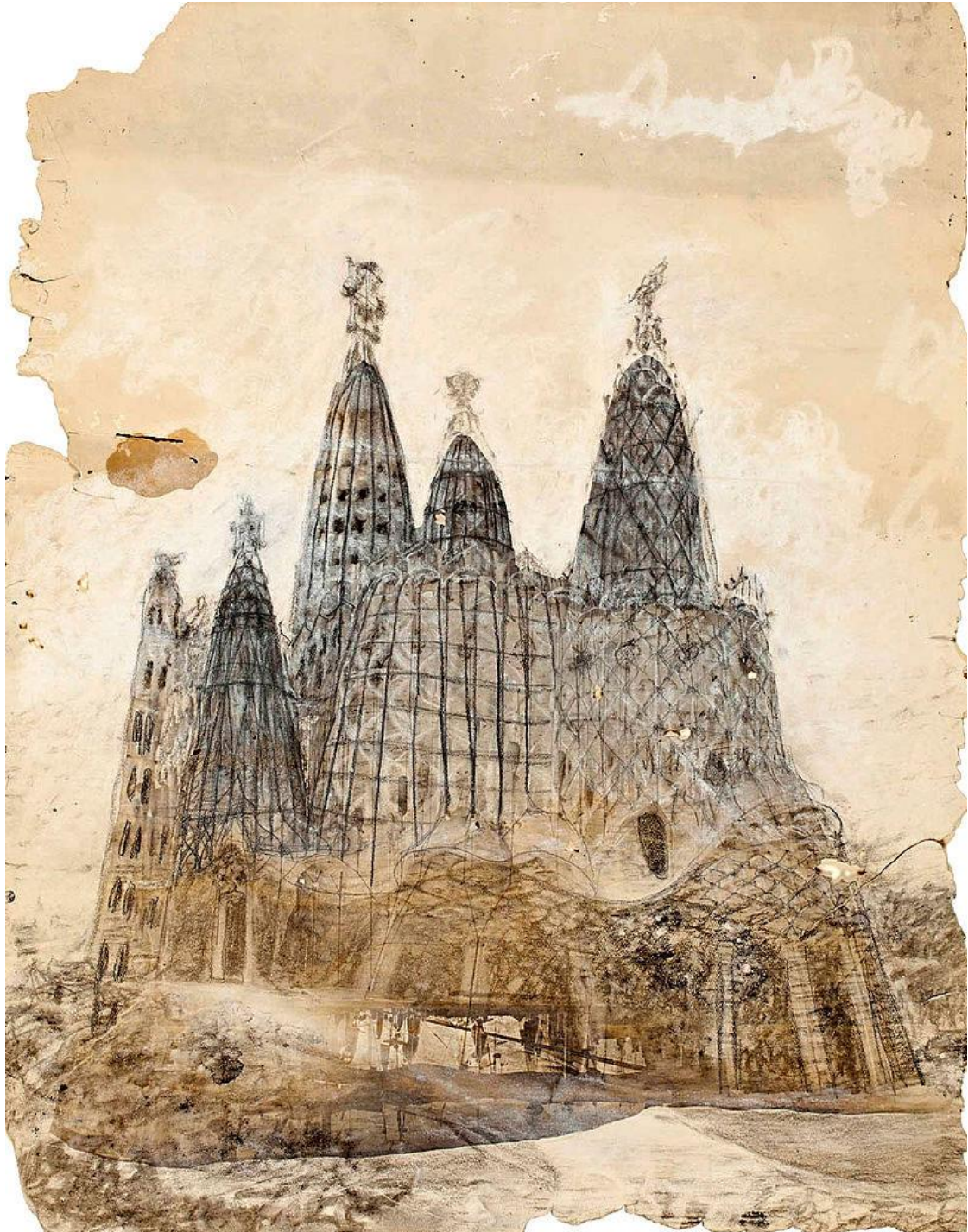


Figura 47: Dibujo original de la iglesia de la Colonia Güell en Santa Coloma de Cervelló, Barcelona

A pesar de estar inacabada, la iglesia de la Colonia Güell está considerada una de las obras maestras de Gaudí, en la que se anticipan muchas de las soluciones estructurales que el arquitecto aplicaría en la Sagrada Familia.

A su espíritu integrador con la naturaleza se deben el tratamiento dinámico y fluido del espacio interior o los mecanismos de fusión del edificio con el entorno natural adaptándose los diferentes niveles de las naves a la pendiente de la colina y los materiales son de colores y texturas similares al suelo y la vegetación.



Figura 48: Fotografía de la Cripta de la Colonia Güell

Para integrar la iglesia en el paisaje, Gaudí proyectó la superposición de estructuras de diversos materiales: la parte inferior está compuesta de muros de paraboloides hiperbólicos hechos con piedra basáltica negra y ladrillo quemado, en paralelo con el terreno oscuro sobre el que se levanta el edificio; a media altura utiliza ladrillo normal de color pardo rojizo, a tono con los pinos que rodean el edificio; y en la parte superior (si se hubiese construido) habrían figurado tonos verdes, en contraste con las ramas de los árboles, y azul, amarillo y blanco para entonar con los colores del cielo. En lo alto de las torres habrían figurado unas palomas blancas, en relación al nombre del lugar (coloma en catalán es «paloma»)



Figura 49: Fotografía de la Cripta de la Colonia Güell donde podemos observar las vidrieras que la rodean

Esta obra es un reflejo de la plenitud artística de Gaudí. Pertenece a su etapa naturalista (primera década del siglo XX), periodo en que el arquitecto perfecciona su estilo personal, inspirándose en las formas orgánicas de la naturaleza. Puso en práctica toda una serie de nuevas soluciones estructurales originadas en los profundos análisis que realizó de la geometría.



Figura 50: Bóvedas exteriores de la entrada de la Iglesia de la Colonia Güell



Cabe destacar que las bóvedas del pórtico que rodea la cripta de la Colonia Güell (figura 23) tienen forma de paraboloides hiperbólicos. Esta forma, debido a su doble curvatura gaussiana negativa, trabaja a compresión en todos sus puntos a pesar de presentar un abombamiento que parece contradecir la esencia de toda construcción de fábrica.



Figura 51: Forma de paraboloides hiperbólicos de la Cripta de la Colonia Güell. Gaudí. Barcelona (España)

Esta obra no pudo concluirse debido al fallecimiento del conde Güell en 1918. A su muerte, sus hijos abandonaron el proyecto. La cripta fue asaltada e incendiada el 19 de julio de 1936, durante el transcurso de la Guerra Civil, perdiéndose numerosos planos y documentos dejados por Gaudí, así como la maqueta polifuncional original.

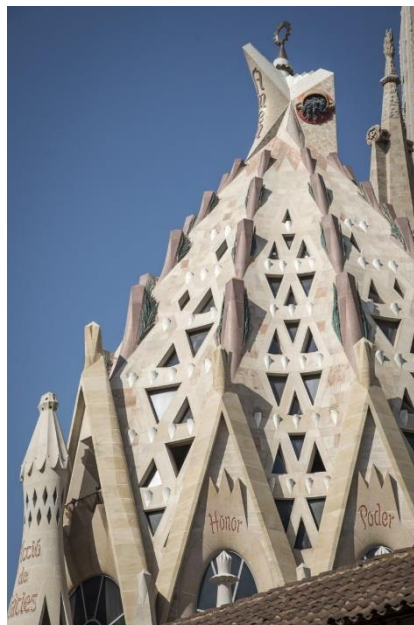


Figura 52: Cúpula de la sacristía (intersección de paraboloides)

4.2.3 EL CONOIDE EN LA ESCUELA PARROQUIAL



Figura 53: Escuela parroquial donde estudiaban los hijos de los trabajadores del Templo, Barcelona

La mejor representación de conoides en la Sagrada Familia está en las fachadas y cubiertas del edificio de las escuelas parroquiales, donde, por cierto, Gaudí instaló su taller en un principio.

Estas escuelas se construyeron para los hijos de los trabajadores del Templo, dentro del mismo solar en obras. La ubicación que Gaudí les da dentro del solar ocupaba parte de la planta del Templo proyectada por él mismo.

Todo esto nos muestra claramente que se trata de una construcción concebida totalmente como provisional, donde Gaudí no puede pretender levantar nada que sea superfluo, ni ningún lucimiento personal, ni ningún exceso en el coste, puesto que dispone de menos recursos económicos que los exiguos que tenía para realizar la obra principal (el templo).



Figura 54: Escuela parroquial vista desde arriba, Barcelona

Los exiguos recursos disponibles para estas escuelas quedan bien patentes en los materiales empleados (ladrillo plano, baldosa cerámica, vigas de madera...) y en los acabados (enlucido de cemento portland sin pavimento hasta la altura del arrimadero, enlucido blanco para el resto de paredes, material cerámico visto exterior en fachadas y cubiertas...). A pesar de todo esto la obra tiene una fuerza plástica conmovedora con todas las fachadas oscilantes y la cubierta ondulada. Formada por conoides, Le Corbusier, cuando visitó Barcelona, tomó croquis y notas de esta minúscula obra y no del resto del gran templo que estaba en lenta construcción.

Lo más importante de todo esto es que este conjunto de superficies onduladas no responde a una tendencia estilística ni a una voluntad de imprimir un sello personal sino a la genialidad de conseguir una estructura estable con el mínimo material.

Comentaremos el proceso Constructivo de esta forma:

La pared de cierre tiene, sólo, dos capas de ladrillo plano, de 4 cm. de grueso cada una. Es una pared de cierre, de obra vista, de menos de 10 cm. de grueso que llega casi a los 5,60 metros de altura. Es, por lo tanto, extremadamente esbelta y sería demasiado inestable si no fuera justamente porque la ondulación le da rigidez frente a la posible fuerza del viento.

Si se quisiera hacer aguantar derecha una cartulina encima de una mesa, le debería hacer pliegues o darle forma, de lo contrario caería antes incluso sin soplar. Gaudí, con la superficie ondulada de las fachadas está haciendo justamente esto. La ondulación no es un capricho formal es estructural, es una lección de mecánica.



Figura 55: Detalle de la cubierta de la Escuela Parroquial vista desde arriba, Barcelona

Construir una fachada ondulada podría ser muy complicado, pero Gaudí nos da otra lección, esta vez de geometría. La superficie de estas fachadas está formada por unas superficies regladas alabeadas denominadas conoides. El conoide es una superficie que contiene toda una serie de rectas, generatrices, todas ellas paralelas a un plano director y cada una de ellas se apoya simultáneamente en dos líneas guías, directrices, una recta y otra curva.



Para construir las fachadas de estas escuelas hace falta primero construir estas líneas directrices. La guía curva se dibuja en el suelo, como una senoide ondulada. Para hacer la guía recta, se tensa una cuerda o dispone de una barra metálica horizontal colgada a una cierta altura, intermedia entre los puntos más altos y los más bajos de la cubierta.

Entonces, se van poniendo toda una serie de cuerdas, cada 10 ó 15 cm., atadas a la barra recta de arriba y hasta la senoide de abajo. Finalmente se van levantando las paredes siguiendo el guiado de las cuerdas y al ser la dimensión del ladrillo lo suficientemente pequeña en comparación con el conjunto de la superficie, la pieza se adapta bastante bien y se consigue este espectacular resultado.



Figura 56: Detalle de la cubierta desde dentro de la Escuela Parroquial, Barcelona

4.2.4 EL CONO EN LAS CHIMENEAS DEL PALAU GÜELL



Figura 57: Chimeneas en la cubierta del Palau Güell, Barcelona

Las veinte chimeneas del Palau Güell, teniendo todas ellas unos rasgos generales comunes, se presentan muy diferentes a una observación detenida. Las bases de forma piramidal, los troncos cilíndricos y las envolventes cónicas de los sombreretes son sólo unas simplificaciones geométricas que ocultan una mayor complejidad en su estructuración morfológica.

Las bases de los sombreretes no son siempre circulares, algunos sombreretes presentan superficies alabeadas de tipo helicoidal, otros responden a una orientación vertical siguiendo las generatrices del cono envolvente. Debido a la gran diversidad de chimeneas, acabamos por encontrarnos con un panorama bastante complicado a la hora de elegir el ejemplo idóneo para la investigación.

Para el estudio nos hemos querido entrar en la chimenea numero 13 ya que es una de las pocas que no han sufrido alteración alguna respecto a su configuración original y que ha sido restaurada con un criterio puramente conservativo.



Figura 58: Chimeneas en la cubierta del Palau Güell, Barcelona

Esta chimenea, revestida con fragmentos de azulejos policromados (trencadís), fue reparada en 1992. Las piezas perdidas o muy deterioradas fueron sustituidas por otras de época o realizadas de acuerdo con el modelo antiguo., lo que le daba a su vez una mayor autenticidad a los planteamientos iniciales de la investigación.

La base presenta la forma de una pirámide muy esbelta de base cuadrada, de aproximadamente un metro de lado, que se macla con el cilindro circular del tronco. La intersección de los cuatro planos inclinados de la pirámide con el cilindro genera por intersección unas elipses visualizadas sólo parcialmente sobre la superficie común de ambos cuerpos

Estas elipses, al estar definidas por la sección de un plano que presenta una pendiente muy pronunciada respecto al plano base, presentan unos ejes muy diferenciados que definen una cónica de forma extremadamente esbelta. Debido a la intersección de los planos contiguos de la pirámide estas elipses no llegan a cerrarse, dibujando una porción muy limitada de su trazado.

El cuerpo del cilindro que hace de nexo de unión con el sombrero tiene un diámetro aproximado de unos 50 centímetros y lleva empotradas las seis ménsulas descritas anteriormente. Su dimensión desde el inicio de la elipse hasta la base del sombrero no llega a un metro de largo, penetrando unos centímetros en la base de dicho remate. El punto más interesante de este primer estudio de la morfología de la chimenea vendrá, sin embargo, al efectuar el primer reconocimiento gráfico del sombrero superior.

Este elemento de remate tiene como hemos dicho una forma asimilable a un cono truncado, cuya base mide unos 95 cm de diámetro y su orificio superior no excede de los 25 cm de diámetro. La altura total del cuerpo es de aproximadamente 1,50 metros.



Figura 59: Chimenea número 13 de la cubierta del Palau Güell, Barcelona

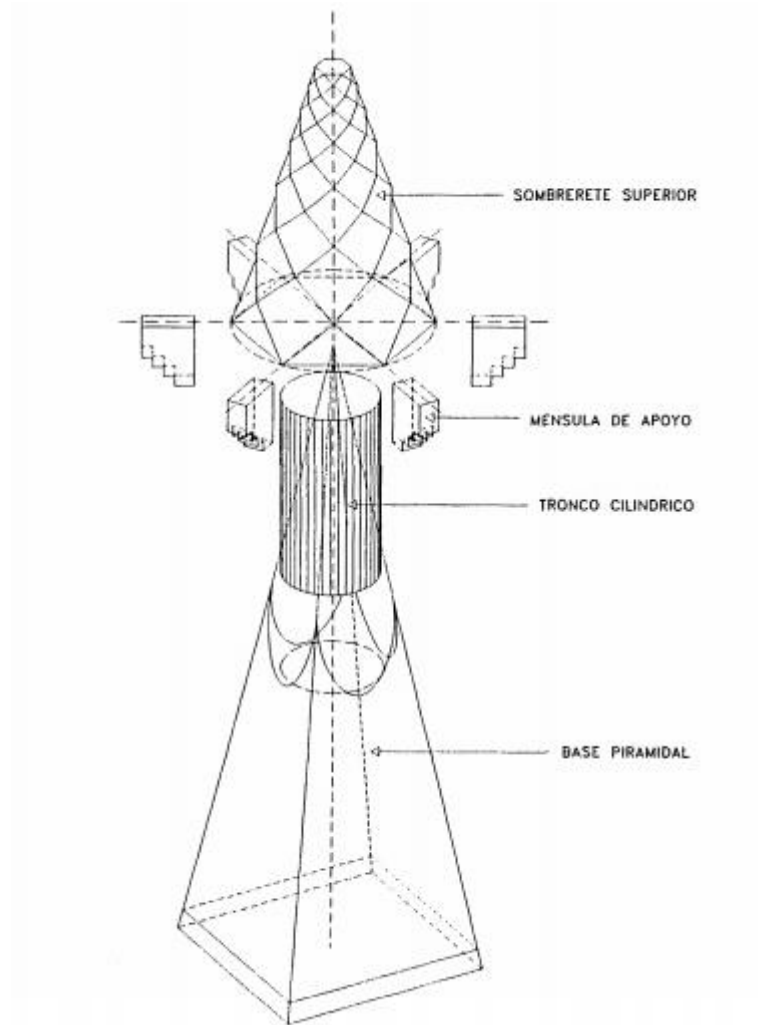


Figura 60: Despiece de las partes de la chimenea de la azotea del Palau Güell, Barcelona

En el dibujo axonométrico de la figura 60 puede observarse con facilidad los componentes de la configuración volumétrica de la chimenea: el pseudo-cono truncado que forma el sombrero superior, el cilindro que constituye el tronco, la base piramidal y las seis ménsulas escalonadas que soportan el sombrero.

A partir de esta primera descripción ya podemos intuir en cierta medida la manera en que pudo haber sido construido en obra el conjunto de la chimenea. Si exceptuamos el sombrero, parece bastante lógico pensar que fue levantada una pirámide truncada (con ladrillos) hasta la altura que define la curva de la elipse.

A partir de este punto comenzó a construirse el tronco cilíndrico, cuya circunferencia de base quedaba inscrita dentro del cuadrado originado por el truncamiento de la pirámide. A este cilindro se le van empotrando cada una de las seis ménsulas, regularmente repartidas en relación a la división hexagonal sobre donde descansará el remate de la chimenea.

Posteriormente, en base a una aplicación de mortero y un regleado uniforme que completa las aristas de la pirámide, se van dando forma a las elipses que se dibujan en el encuentro con la superficie cilíndrica.

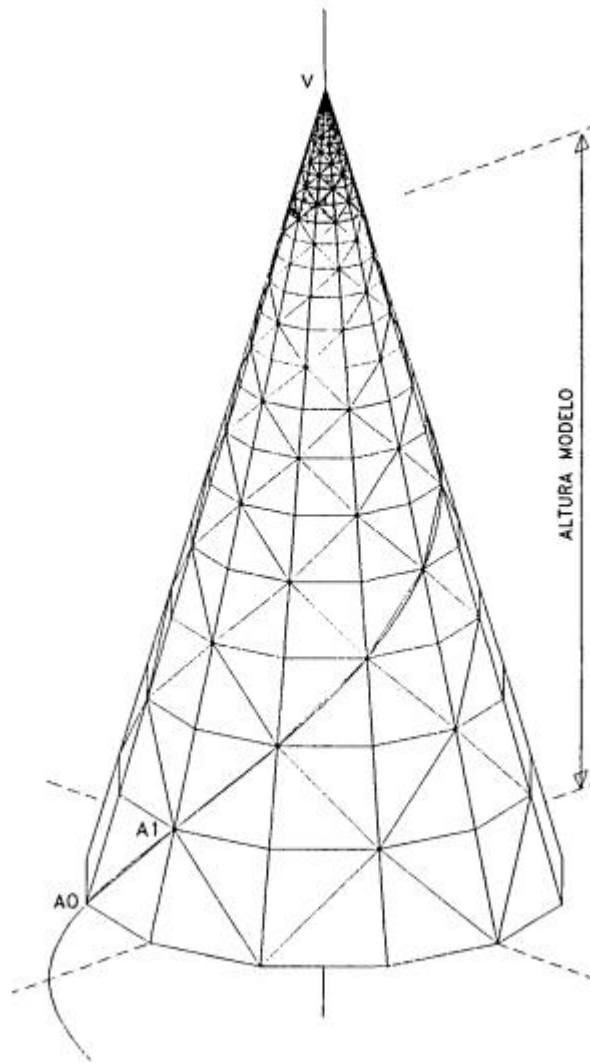


Figura 61: Distribución de los cuadriláteros alabeados que forman el cono envolvente de la chimenea de la azotea del Palau Güell, Barcelona

Para concluir, las chimeneas son uno de los ejes centrales del Palau. En su tiempo fueron funcionales, ya que en invierno hacía mucho frío en el Palau y por esa razón se equipó el edificio con tantas, mágicas en su punto culminante en la terraza, originales algunas, otras más clásicas. otras más sencillas y algunas de ellas ostentosas.

La mayoría de ellas fueron diseñadas por Gaudí como es el caso de la de la habitación de la mujer de Güell, y de Güell, y otras fueron diseñadas por Camil Oliveras como la de nogal que incorpora unos pequeños armarios para licores del comedor, y la de mármol rojo y alabastro que incorpora un panel de mármol blanco con incrustaciones de oro y piedras en la que se representa Isabel de Hungría, obra de Alexandre de Riquer.

En la azotea es donde Gaudí dejó aflorar su imaginación, es la parte más original, que evoca un bosque mágico y también la que más se acerca a sus obras posteriores.

4.2.5 OTRAS INNOVACIONES TÉCNICAS EN LA ARQUITECTURA

Gaudí, además de los conoides, bóvedas de hiperboloides, etc. que se mencionan en este trabajo, aportó muchas novedades al panorama constructivo y en otros ámbitos como la decoración. Fue el primero en manifestar los inconvenientes de las cubiertas con azotea, que finalmente han acabado desapareciendo de la práctica constructora en Cataluña. También fue el primero a utilizar vigas de cemento armado y el primero a recuperar las columnas inclinadas.

Gaudí fue pionero en desarrollar la idea de las campanas tubulares (para la Sagrada Familia) que, todavía hoy, están pendientes de realización. También utilizó novedades importantes en otros ámbitos como la jaula estereográfica, la fotografía múltiple o el enmoldado para la realización de esculturas de gran formato. Procedimientos adelantados de construcción de cristalerías, como el que utilizó en la Catedral de Palma de Mallorca y otras.

Gaudí consideraba que la decoración había de estar subordinada a la estructura. Pero pese a esta idea básica, sus construcciones tienen frecuentemente una gran riqueza decorativa. Así, por ejemplo, en la Sagrada Familia se encuentra con la necesidad de expresar el significado litúrgico de la obra y es por ello que desarrolla la titánica tarea de realizar las representaciones simbólicas que encontramos en la fachada de la Natividad y realiza un bosque de figuras sobre un campo ornamental que las ambienta, estudiando y resolviendo los problemas que plantea la escultura arquitectónica. Tuvo dificultad en encontrar artistas especializados para realizar su obra. Los principales colaboradores en esta tarea fueron los escultores Carles Mani y Joan Matamala.



Figura 62: Detalle de la fachada de La Casa Batlló, Barcelona



Utiliza ampliamente la técnica del enmoldado que habían utilizado según dice "los grandes maestros griegos, como Lisipo". El enmoldado exigía un laborioso trabajo de ajuste y de corrección para neutralizar el efecto óptico.

Un aspecto importante del acabado era la coloración. Gaudí decía que "la decoración ha sido es y será coloreada". De esto encontramos quizás la más espectacular realización en la casa Batlló, con una fachada totalmente recubierta de cerámica de vivísimos colores.

5. INFLUENCIA DE GAUDÍ EN LA OBRA ARQUITECTÓNICA CONTEMPORÁNEA

5.1 INNOVACIONES DE OTROS ARQUITECTOS CONTEMPORÁNEOS

El ingeniero suizo Heinz Isler diseñó sus láminas de hormigón armado a partir de modelos suspendidos que elaboraba de una forma muy novedosa y original (Chilton, 2000). Sumergía un tejido o una malla de hilo en un fluido de poliéster o parafina líquida y dejaba que se solidificara suspendido de unos hilos para así, una vez invertido, obtener la geometría antifunicular deseada (figura 63).



Figura 63: Izquierda: Garden Center Wyss de Heinz Isler.1961. Zuchwil (Suiza). Derecha: Modelo colgante de Isler antes y después de solidificarse.

En 1975 Frei Otto y su equipo utilizaron modelos colgantes para encontrar la forma de la cubierta de celosía madera de cicuta en Mannheim (figura 64). La piel del edificio estaba compuesta por fibras de poliéster tejidas impregnadas con pasta de PVC y con una capa de pigmentación, reflectante al calor.

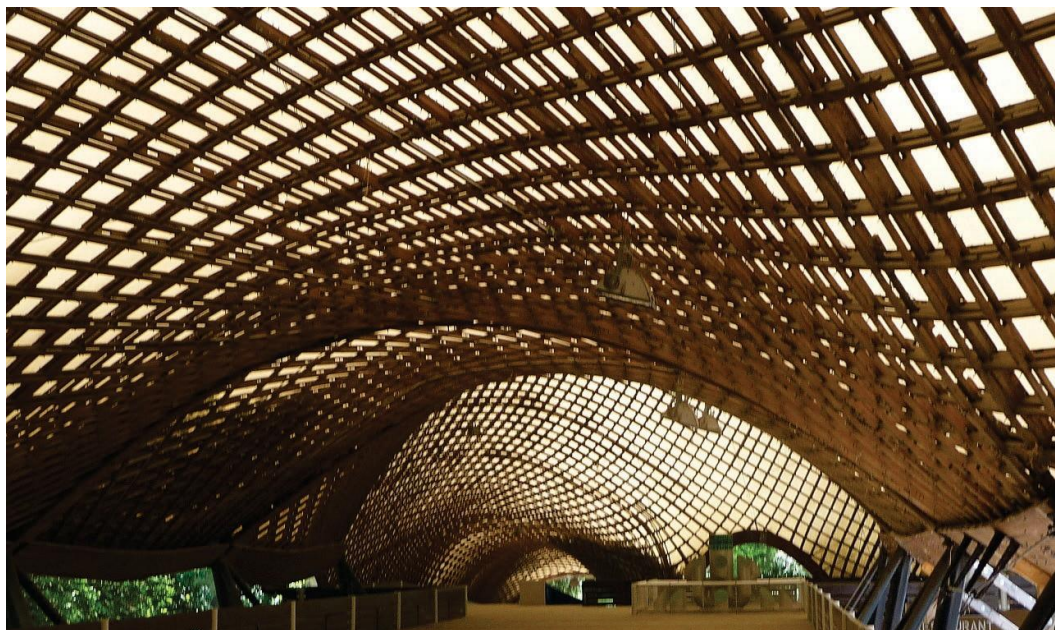


Figura 64: Estructura temporal Multihalle, Frei Otto. Mannheim (Alemania)



A mediados del siglo XX, la arquitectura religiosa en Europa se caracterizó por unos diseños modernistas donde la geometría y la luz adquirieron un gran peso. De esas arquitecturas religiosas se ha hecho eco el fotógrafo francés Fabrice Fouillet a través de su serie “Corpus Christi” donde nos presenta una arquitectura casi futurista a través de encuadres verticales.

Gracias a esta serie descubrimos la iglesia de Saint Martin en Donges (Francia). Una iglesia reconstruida por Jean Dorian entre 1952 y 1957, tras el bombardeo de 1944 que destruyó el templo construido entre 1882 y 1903 que a su vez se erigía sobre el primitivo edificio religioso del siglo XIII.

En el interior de Saint Martin podemos contemplar un ejemplar uso de los arcos parabólicos por Jean Dorian, arcos que frecuentemente empleó Gaudí en sus construcciones, como, por ejemplo, en el desván de la Casa Batlló donde se evoca al esqueleto del legendario dragón.



Figura 65: Iglesia de Saint Martin en Donges (Francia). Construcción terminada en 1903



5.2 SUPERFICIES REGLADAS Y SANTIAGO CALATRAVA

Nos centramos ahora en la Arquitectura de Santiago Calatrava. Este arquitecto valenciano cursó sus estudios en la Politécnica de Valencia y se doctoró posteriormente como ingeniero civil en el Instituto Federal de Tecnología de Zurich con una tesis cuyo título "Acerca de la Plegabilidad de las Estructuras"

Es tal vez uno de los arquitectos actuales españoles más conocido y admirado internacionalmente y seguramente uno de los arquitectos en los que su preparación en el campo de la geometría resulta más evidente.

Merece la pena recordar la relación de su obra menos conocida como son sus esculturas con su arquitectura posterior y subrayar la relación de ambas con la generación de superficies y con la geometría. En una de las figuras hemos elegido uno de sus "pájaros", esculturas realizadas desde mediados de los años 80.



Figura 66: Aeropuerto de Lyon-St Exupéri (izquierda) 1994. Auditorio diseñado por el arquitecto Santiago Calatrava en Santa Cruz de Tenerife. Islas Canarias (derecha) 2003

Mostramos la estación del aeropuerto de Lyon-St Exupéri (izquierda), obra terminada en 1994 y el auditorio de Santa Cruz de Tenerife (derecha) comenzado en 1991 y terminado en el 2003. Casi toda la obra significativa de este arquitecto gira alrededor de exploraciones previas en el campo de las curvas y las superficies.



Figura 67: Fachada principal de las Bodegas Ysios de Santiago Calatrava. Laguardia (Álava) 2001



Figura 68: Cubierta interior de las Bodegas Ysios de Santiago Calatrava. Laguardia (Álava) 2001

La podemos relacionar directamente con la cubierta del proyecto de las bodegas Ysios en La Rioja. No podemos dejar de hacer referencia a que esta geometría de las sinusoides contrapuestas fue ya experimentada, aunque más modestamente, por Gaudí en las escuelas de la Sagrada Familia de 1909, pequeño edificio que fascinó a Le Corbusier en su visita a Barcelona de 1928.

Para un arquitecto, tal vez la característica más importante de las superficies regladas es reconocer si es de doble curvatura (puntos hiperbólicos) o bien de curvatura simple, denominadas también de "curvatura nula" haciendo referencia al valor nulo que toma la curvatura de Gauss en todos sus puntos.

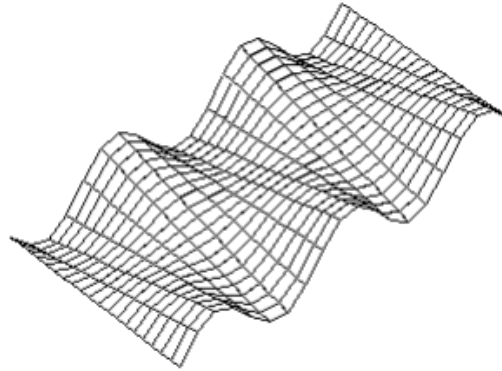


Figura 69: Diagrama de la cubierta compuesta por conoides de las Bodegas de Santiago Calatrava al igual que las escuelas de los trabajadores de Antoni Gaudí

Santiago Calatrava no solo hizo edificios singulares, sino también sus puentes son muy característicos en todo el mundo, además de fuentes y esculturas. En la figura 70 podemos contemplar, en primer lugar, la fuente de la plaza central de Alcoy en Alicante. Esta es una configuración que permite la transformación de superficies con plano director.



Figura 70: Fotografía de la fuente de la plaza central de Alcoy (Alicante) de Santiago Calatrava



En la figura 71 una maqueta muestra las posiciones más relevantes de la secuencia del movimiento y la consiguiente sucesión de los pares de cilindroides que pueden convertirse en dos fragmentos de un mismo plano que es el que permite la cubrición y protección total del recinto de la fuente.

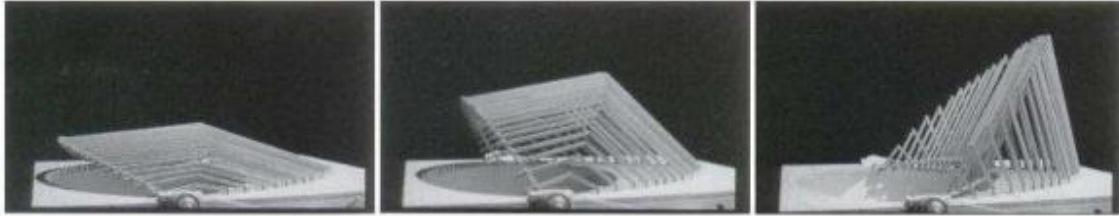


Figura 71: Maqueta de composición de cilindroides

Es un ejemplo de las que podemos denominar "superficies plegables", una ingeniosa combinación que Calatrava ha explotado ampliamente. Las generatrices se mueven en el plano director de la sucesión del par de "superficies" que se interceptan en una curva charnela. Este ejemplo nos sirve para ilustrar el que podríamos denominar "género estructural" que requiere conocimientos de la geometría, de la mecánica y del comportamiento estructural y que analizaremos más tarde con detalle.

En la figura 72 nos volvemos a encontrar con la familia de conoides "de ondas contrapuestas". Calatrava que ya la había explorado en diferentes esculturas, algunas de ellas animadas, transformó esta simple idea en una gigantesca escultura móvil de 250 m de longitud y 20 m de altura que denominó "Muro de las Naciones" diseñado para el Complejo Olímpico de Atenas. Las generatrices tubulares de acero substituyen a cada una de las superficies transformadas entre las que se incluye naturalmente el plano. Asociado a la directriz rectilínea central, un dispositivo permite el giro de las generatrices. La sencillez de la idea no resta mérito a la construcción y puesta a punto de un objeto que puede tener algo de símbolo mágico.

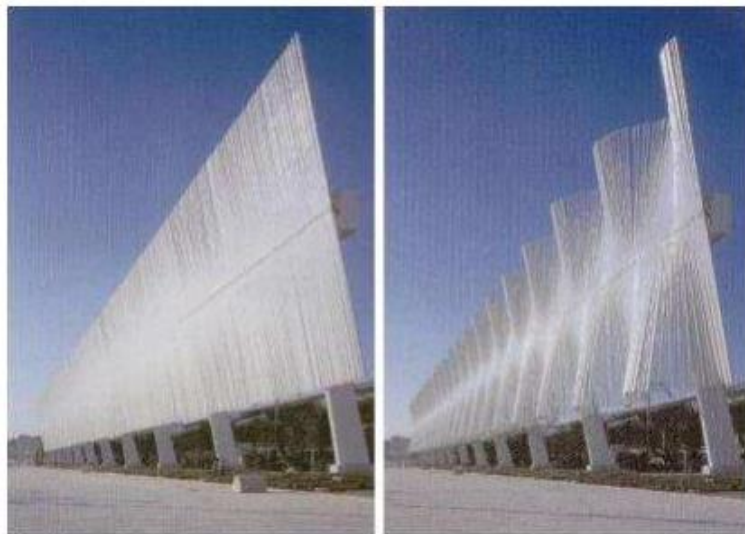


Figura 72: Muro de las Naciones de Santiago Calatrava. Complejo Olímpico de Atenas. 2004



Figura 73: Interior de la Llotja de Sant Jordi de Santiago Calatrava bajo la plaza España. Alcoy

La Llotja de Sant Jordi está compuesto por un extenso espacio de hormigón y granito. Creado entre 1992 y 1995 por el arquitecto e ingeniero valenciano Santiago Calatrava simulando el esqueleto de un animal de grandes dimensiones. Inaugurada en el año 1997, ha albergado numerosas actividades de carácter cultural y social.

La bóveda de esta sala subterránea, de un blanco immaculado, es una sucesión de arcos parabólicos, motivo habitual en Calatrava. El acceso se realiza por la Plaza de España a través de un sistema hidráulico de puertas que dan acceso a dos escaleras disimuladas por trampillas.

Una vez en su interior, la entrada principal nos transporta a la cola del animal, y el extremo opuesto, a la cabeza. Entre las características de este espacio destaca la luz natural que se infiltra desde el techo y su disposición en paralelo con respecto a la Plaza de España, respetando incluso la leve inclinación de la superficie.

Nos vamos a centrar a continuación en el estudio de la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia, donde Santiago Calatrava diseñó, junto a arquitectos como Félix Candela entre otros, grandes obras que reproducen la geometría de curvas y superficies.



CIUDAD DE LAS ARTES Y DE LAS CIENCIAS DE VALENCIA



Figura 74: Parte del recinto interior de la Ciudad de las Artes y de las Ciencias. Valencia

I) INTRODUCCIÓN

En los finales de la década de los 80, Joan Lerma, el por entonces presidente de la Generalitat Valenciana, adoptó la idea de construir un polo científico y cultural que sirviese a toda la comunidad. La idea era de un catedrático de historia de la ciencia de la Universidad de Valencia, José María López Piñero.

Esta idea pretendía brindarle a la ciudad un centro en el que se pudiese reunir el conocimiento con el entretenimiento.

Lerma formó un equipo especial para poder llevar a cabo este proyecto. El proyecto inicial constaba de una torre de comunicaciones (sería la tercera más alta en ese entonces), un planetario, y un museo científico.

Pero esta idea tuvo detractores desde un principio. Sin embargo, Lerma se las ingenió para que el arquitecto español Santiago Calatrava se hiciese cargo de gran parte del diseño, y que las obras pudieran comenzar unos meses después.

Así surgió la realización de la Ciudad de las Artes y Ciencias, en un proyecto que mantendría dos de los edificios del principio, sustituiría la torre de comunicaciones, y añadiría un nuevo elemento al proyecto (incluyendo al arquitecto Félix Candela en su diseño). Tras dos años, las obras volvieron a comenzar para darle forma a ésta inmensa inversión.



II) CONSTRUCCIONES MÁS EMBLEMÁTICAS

L'UMBRACLE

Situado en la Ciudad de las Ciencias y las Artes. La cuádrlica que podemos identificar fácilmente es un cilindro parabólico. L'Umbracle es la “puerta principal de acceso” a la Ciudad de las Ciencias y las Artes.



Figura 75: L'umbracle diseñado por el arquitecto Santiago Calatrava en la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia. Su forma responde a un cilindro parabólico

Fue concebido en su mayoría en hormigón blanco y con un fuerte componente de marquesinas metálicas en sus espacios exteriores y largos recorridos peatonales de adoquín de granito. En contraste con el hormigón, el paseo cubre su pavimento con madera de Teka.

Alberga en su interior El Paseo de las Esculturas, una galería de arte al aire libre con esculturas de autores contemporáneos, como Miquel Navarro o Yoko Ono. En esta construcción se unen arte y naturaleza.

Respecto al sistema constructivo de esta obra y pese a que se trata también de una superficie reglada, en este caso la estructura principal consta de unos arcos metálicos de una considerable magnitud que se ensamblan con una subestructura también metálica lineal que une el conjunto de los arcos formando el cilindro parabólico.

RESTAURANTE SUBMARINO DEL L'OCEANOGRAFIC



Figura 76: Restaurante submarino diseñado por el arquitecto Santiago Calatrava y Félix Candela en la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia.

Ubicado en el Oceanográfico de la Ciudad de las Ciencias y las Artes. En este caso la cuádrlica empleada es el paraboloides hiperbólico. Félix Candela, arquitecto mundialmente conocido por sus cubiertas con formas obtenidas a partir de este tipo de cuádrlicas llegó a decir que “todas las obras que envío están hechas de paraboloides hiperbólicos, y la posibilidad de combinaciones que den apariencias muy diversas es bastante grande, aunque no inagotable...” La planta del edificio es octogonal y su cubierta de hormigón presenta ocho lóbulos con simetría radial que le dan una forma de roseta, y es de un espesor mínimo, lo cual contribuye a realzar su sencillez. Cada lóbulo y su opuesto forman parte de un mismo paraboloides hiperbólico. Los apoyos están dispuestos en los vértices de un octógono de 13.58 m de lado. Como curiosidad, concretamente en este caso la ecuación de los paraboloides que lo forman es:

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{46792} = z - 6$$

Se necesitó un gran cimbrado para poder encofrar la cubierta con encofrados especiales y sólo realizados in situ en la unión con los apoyos, sobre esto se extendieron las armaduras, que por ser una superficie reglada son barras de acero lineales, que se reforzarán también en el encuentro con los apoyos.

Su hormigonado fue costoso, comenzando por la parte interior de la cubierta, la unión de los 8 lóbulos, y posteriormente hormigonando lóbulo a lóbulo. El hormigonado del primero duró 72 horas ininterrumpidas, pero con los siguientes la tarea se hizo más efectiva reduciendo el tiempo empleado. Otro punto tenso de la ejecución fue el desencofrado de la cubierta, pero no sólo salió según lo previsto, sino que las deformaciones fueron prácticamente nulas, coincidiendo así con los resultados de cálculo.



Figura 77: Cubierta del restaurante submarino de L'Oceanogràfic sito en la Ciudad de las Ciencias y las Artes. La planta del edificio es octogonal y su cubierta de hormigón presenta ocho lóbulos con simetría radial que le dan una forma de roseta. Cada lóbulo y su opuesto forman parte de un mismo paraboloides hiperbólico.

ELEMENTO DE VENTILACIÓN

En la Ciudad de Las Ciencias y las Artes. Se trata de un original espacio que tiene como función ventilar un parking que se encuentra justo en un sótano inferior del Umbracle. Desde la calle se puede ver una forma casi escultórica donde intersecan armónicamente dos cilindros y un cono. Arquitectónicamente, el cono apoyado en su parte plana es bastante estable.

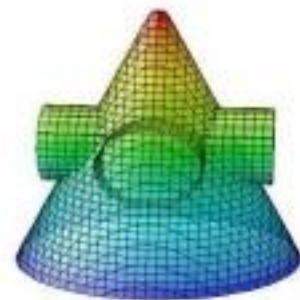


Figura 78: Elemento de ventilación de la Ciudad de las Ciencias y las Artes formado por la intersección de un cono y dos cilindros.

Este elemento singular responde a una geometría apropiada para ventilar el garaje inferior mediante aberturas rasgadas en las cuatro tapas de los 2 cilindros, dotándolo de una vistosidad apropiada para el entorno arquitectónico en el que se enclava.



6. CONCLUSIONES

El empleo de las cuádricas en el diseño de un edificio implica una complejidad añadida en su construcción e incluso un aumento en el coste del mismo. Quizás por ello el empleo de cuádricas en arquitectura esté, en la mayoría de los casos, restringido a edificios financiados con fondos públicos y con plazos de ejecución más definidos a lo largo del tiempo.

A pesar de estos inconvenientes, el empleo de estas superficies aporta un grado estético y de originalidad que es difícil de conseguir con otras formas geométricas más habituales en arquitectura, lo que hace que su uso esté presente en muchos espacios arquitectónicos repartidos por el mundo.

Desde el punto de la investigación, este estudio constituye el inicio de lo que sería un trabajo de investigación más ambicioso en el que cabría la posibilidad del empleo de superficies cuádricas en el diseño de superficies innovadoras.

En el presente trabajo nos hemos centrado en recopilar y analizar como Antonio Gaudí aplica la geometría como elemento estructural y decorativo con la intención de crear un catálogo al que se pueda recurrir como referencia para futuras intervenciones o estudios.

He aprendido las técnicas utilizadas en las cubiertas de superficies regladas y por supuesto ha incrementado la admiración que sentía por Gaudí al adentrarme en el estudio de sus obras.

Queda aún mucho trabajo, pero con este inicio se ha pretendido, además crear un camino de comunicación entre dos materias que no pueden estar reñidas. Las Matemáticas y la Arquitectura deben andar juntas, unificando tanto la rama más científica como aquella cuyo componente es más artístico.



7. INDICE DE FOTOS

Figura 1: Columnas helicoidales del Parc Güell, Barcelona

<http://www.sitiosdebarcelona.net/2012/04/camino-y-portico-de-la-lavandera/>

Figura 2: Los nudos de las columnas de la Sagrada Familia eran elipsoides, donde se subdividen las columnas en ramas

<https://www.slideshare.net/jaionetxu/sagrada-familia-ppt-76996536>

Figura 3: Lagarto mosaico en el Parc Güell de Antonio Gaudí, Barcelona

<https://es.wikipedia.org/wiki/Trencad%C3%ADs>

Figura 4: Antonio Gaudí fotografiado por Pablo Audouard (1878)

https://es.wikipedia.org/wiki/Antoni_Gaud%C3%AD

Figura 5: La comitiva fúnebre de Antonio Gaudí tras su muerte por las calles de Barcelona

https://www.abc.es/historia/abci-tragica-muerte-gaudi-atropellado-tranvia-y-confundido-mendigo-201606101212_noticia.html

Figura 6: Forma de una catenaria

<https://ideasecundaria.blogspot.com/2014/02/catenaria-o-parabola.html>

Figura 7: Soluciones emitidas por Leibniz y Huygens a Bernouille para su publicación en Acta Eruditorum (1691)

<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/Catenaria.pdf>

Figura 8: Catenoide

<http://www.ugr.es/~jperez/docencia/Evolver/tutorial4.html>

Figura 9: Esquema de fuerzas que actúan sobre una porción AB de la catenaria de longitud s , masa m y peso específico λ .

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm

Figura 10: Diferencia entre la curva parabólica y la catenaria

<http://www.cienladrillos.com/2007/08/27-arco-catenario>

Figura 11: Aproximación de las curvas funiculares a la curva catenaria

https://wiki.ead.pucv.cl/Victor_Flores_Aguilera_-_Ficha_05/24072014

Figura 12: Esquema de fuerzas actuantes en cada masa concentrada de una curva funicular

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm

Figura 13: Arcos antifuniculares y sus curvas funiculares equivalentes

https://wiki.ead.pucv.cl/index.php/ESTUDIO_Y_APLICACION_DE_LA_CATENARIA

Figura 14: Idea de Gregory de que un arco cualquiera se sostiene si contiene un arco catenario en su interior

<https://www.geogebra.org/m/mHNXPdq>



Figura 15: Arco de Ctesifonte (Irak). Grabado del siglo XVII

<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/Catenaria.pdf>

Figura 16: Arco de Ctesifonte (Irak). Situación actual

<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/Catenaria.pdf>

Figura 17: Mezquita de la Roca. Jerusalén

<https://www.artehistoria.com/es/obra/mezquita-de-la-c%C3%BApula-de-la-roca-jerusal%C3%A9n-israel>

Figura 18: Casas Musgum en Camerún

<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-320922/arquitectura-vernacula-viviendas-musgum-en-camerun>

Figura 19: Hangar del Aeropuerto de Orly de hormigón pretensado. Eugène Freyssinet 1916. París (Francia)

<http://arquiscopio.com/archivo/2013/02/02/hangares-para-dirigibles-de-orly/>

Figura 20: Maqueta funicular de Gaudí expuesta en el Centre Reus (Tarragona)

<https://superstarfloraluk.com/6439739-Gaudi-Sagrada-Familia-Model.html>

Figura 21: Maqueta funicular de la Sagrada Familia. Gracias al reflejo del espejo tenemos el resultado de lo que sería una estructura que, manteniendo una orientación vertical, resulta apta para la construcción.

<https://superstarfloraluk.com/6439739-Gaudi-Sagrada-Familia-Model.html>

Figura 22: Arcos catenarios en el Convento de las Teresianas (izquierda), Casa Batlló (centro) y La Pedrera (derecha)

http://apuntes.santanderlasalle.es/arte/siglo_xix/arquitectura/modernismo/gaudi_colegio_teresianas.htm

Figura 23: Semejanza entre los pilares de la Sagrada Familia y las ramas de un árbol

https://www.barcelona-tourist-guide.com/es/albums-es/gaudi-sagrada-familia/pages/sagrada-familia-12_jpg.html

Figura 24: Estación de Metro de City Hall ("La catedral subterránea"). Guastavino. Nueva York (EE.UU.)

<https://www.abc.es/cultura/arte/20140407/abci-guastavino-arquitectos-nueva-york-201404062157.html>

Figura 25: Gateway Arch. San Luis – Missouri (EEUU)

<https://www.fshsociety.org/wp-content/uploads/2018/09/St-Louis-Arch.jpg>

Figura 26: Pabellón de rayos cósmicos. 1951. F. Candela y Jorge González. La Muela (Zaragoza)

<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/photographer/adrian-mallol-i-more>



Figura 27: Viviendas ultrabaratadas. 1953. R. de la Hoz y J.M. Paredes Villaviciosa de Córdoba (Córdoba).

<https://www.arquitecturacontemporanea.org/cordoba/portfolio/viviendas-ultrabaratadas/>

Figura 28: Club Tachira. E. Torroja y F. Vivas. Caracas (Venezuela)

<http://guiaccs.com/obras/club-tachira/>

Figura 29: Galería BCE Place. Toronto (Canadá)

<http://www.galinsky.com/buildings/bce/index.htm>

Figura 30: Bodegas Ysios de Santiago Calatrava. Laguardia (Álava) 2001

<https://es.wikiarquitectura.com/edificio/bodegas-ysios/>

Figura 31: Representación gráfica de un cilindro realizado con el programa matemático Máxima

(El autor, 2019)

Figura 32: Representación gráfica de un cono realizado con el programa matemático Máxima

(El autor, 2019)

Figura 33: Representación gráfica de un paraboloides hiperbólico

(El autor, 2019)

Figura 34: Representación gráfica de un paraboloides hiperbólico realizado con el programa matemático Máxima

(El autor, 2019)

Figura 35: Representación gráfica de un conoide recto con directriz abierta

(El autor, 2019)

Figura 36: Representación gráfica de un conoide realizado con el programa matemático Máxima

(El autor, 2019)

Figura 37: Representación gráfica de un conoide recto con directriz cerrada

(El autor, 2019)

Figura 38: Representación gráfica de un hiperboloide de una hoja

(El autor, 2019)

Figura 39: Sagrada Familia de Antonio Gaudí. Barcelona

<https://pixers.es/fotomurales/sagrada-familia-de-antoni-gaudi-en-barcelona-espana-24004177>

Figura 40: Techo de la nave central de la Sagrada Familia. Barcelona

<https://www.alamy.es/el-techo-de-la-nave-central-con-la-tipica-catenaria-hiperbolica-arcos-en-la-sagrada-familia-barcelona-espana-image226774126.html>



Figura 41: Forma de hiperboloide de revolución de una hoja en la Sagrada Familia. Gaudí. Barcelona

<https://sites.google.com/site/obrasdestacadas/la-sagrada-familia-de-gaudi>

Figura 42: Techo de la nave central de la Sagrada Familia. Barcelona

<https://2bmfg.com/web/es/proyectos/destacados/destacados-templo-expiatorio-sagrada-familia/>

Figura 43: Techo de la nave central de la Sagrada Familia. Barcelona

<https://2bmfg.com/web/es/proyectos/destacados/destacados-templo-expiatorio-sagrada-familia/>

Figura 44: Nave principal de la Sagrada Familia. Utiliza hiperboloides en las aberturas de los ventanales y en otras aberturas en las bóvedas, también en el techo de la nave principal.

<http://www.sagradafamiliagaudi.com/Vista%20General/Fachada%20de%20la%20Pasion/Portico%20y%20Campanarios/Portico/Resurreccion.html>

Figura 45: Fotografía de la Cripta de la Colonia Güell, Barcelona

http://www.españacultura.es/es/monumentos/barcelona/cripta_de_la_colonia_guell.html

Figura 46: Maqueta de la Iglesia de la colonia Güell

https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Maqueta_Cripta_G%C3%BCell.jpg

Figura 47: Dibujo original de la iglesia de la Colonia Güell en Santa Coloma de Cervelló, Barcelona

<http://invertirenarte.es/tag/colonia-guell/>

Figura 48: Fotografía de la Cripta de la Colonia Güell

https://es.wikipedia.org/wiki/Cripta_de_la_Colonia_G%C3%BCell

Figura 49: Fotografía de la Cripta de la Colonia Güell donde podemos observar las vidrieras que la rodean

<http://catalunyaenimágenes-manel.blogspot.com/2015/02/cripta-colonia-guell-si-desea-ver-el.html>

Figura 50: Bóvedas exteriores de la entrada de la Iglesia de la Colonia Güell

<https://www.dosde.com/discover/cripta-guell/>

Figura 51: Forma de paraboloides hiperbólico de la Cripta de la Colonia Güell. Gaudí. Barcelona (España)

(El autor, 2019)

Figura 52: Cúpula de la sacristía (intersección de paraboloides)

<http://baulitoadelrte.blogspot.com/2016/09/gaudi-y-la-geometria.html>

Figura 53: Escuela parroquial donde estudiaban los hijos de los trabajadores del Templo, Barcelona

https://es.wikipedia.org/wiki/Escuelas_de_la_Sagrada_Familia



Figura 54: Escuela parroquial vista desde arriba, Barcelona

<https://elpoderdelarte1.blogspot.com/2018/07/las-escuelas-de-la-sagrada-familia-obra.html>

Figura 55: Detalle de la cubierta de la Escuela Parroquial vista desde arriba, Barcelona

<https://elpoderdelarte1.blogspot.com/2018/07/las-escuelas-de-la-sagrada-familia-obra.html>

Figura 56: Detalle de la cubierta desde dentro de la Escuela Parroquial, Barcelona

[https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Sagrada_Fam%C3%ADlia._Escoles_provisionals_\(interior\).jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Sagrada_Fam%C3%ADlia._Escoles_provisionals_(interior).jpg)

Figura 57: Chimeneas en la cubierta del Palau Güell, Barcelona

https://www.barcelonacheckin.com/es/r/guia_barcelona/edificios/palau-guell

Figura 58: Chimeneas en la cubierta del Palau Güell, Barcelona

https://www.barcelonacheckin.com/es/r/guia_barcelona/edificios/palau-guell

Figura 59: Chimenea número 13 de la cubierta del Palau Güell, Barcelona

<http://www.portalgaudi.cat/es/los-edificios/palau-guell/>

Figura 60: Despiece de las partes de la chimenea de la azotea del Palau Güell, Barcelona

<https://studylib.es/doc/4548879/arquitectura-de-gaud%C3%AD-las-chimeneas-del-palau-g%C3%BCell>

Figura 61: Distribución de los cuadriláteros alabeados que forman el cono envolvente de la chimenea de la azotea del Palau Güell, Barcelona

<https://studylib.es/doc/4548879/arquitectura-de-gaud%C3%AD-las-chimeneas-del-palau-g%C3%BCell>

Figura 62: Detalle de la fachada de La Casa Batlló, Barcelona

<https://www.alamy.es/foto-barcelona-espana-28-de-octubre-de-2015-detalles-de-la-fachada-de-la-casa-batllo-de-gaudi-en-barcelona-espana-172835788.html>

***Figura 63: Izquierda: Garden Center Wyss de Heinz Isler.1961. Zuchwil (Suiza).

Derecha: Modelo colgante de Isler antes y después de solidificarse.

<https://structurae.net/structures/wyss-garden-center>

Figura 64: Estructura temporal Multihalle, Frei Otto. Mannheim (Alemania)

<http://baumad.com/2018/02/28/pabellon-multihalle-frei-otto-mannheim/>

Figura 65: Iglesia de Saint Martin en Donges (Francia). Construcción terminada en 1903

<http://www.fubiz.net/2012/12/19/modern-interiors-of-church/st-martin-church-dongesfrance-jean-dorian-1957/>

Figura 66: Aeropuerto de Lyon-St Exupéri (izquierda) 1994. Auditorio diseñado por el arquitecto Santiago Calatrava en Santa Cruz de Tenerife. Islas Canarias (derecha) 2003

<http://www.librediariodigital.net/texto-diario/mostrar/1301961/jorge-javier-vazquez-apuesta-cultura-ayuntamiento-santa-cruz-fin-semana>



Figura 67: Fachada principal de las Bodegas Ysios de Santiago Calatrava. Laguardia (Álava) 2001

<https://es.wikiarquitectura.com/edificio/bodegas-ysios/>

Figura 68: Cubierta interior de las Bodegas Ysios de Santiago Calatrava. Laguardia (Álava) 2001

<https://www.revistaestilopropio.com/nota/bodega-de-autor/>

Figura 69: Diagrama de la cubierta compuesta por conoides de las Bodegas de Santiago Calatrava al igual que las escuelas de los trabajadores de Antoni Gaudí (El autor, 2019)

Figura 70: Fotografía de la fuente de la plaza central de Alcoy (Alicante) de Santiago Calatrava

<https://www.diarioinformacion.com/alcoy/2008/07/04/vuelve-funcionar-fuente-plaza-espana/773487.html>

Figura 71: Maqueta de composición de cilindroides

<http://www2.camino.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/007%20Curvas.pdf>

Figura 72: Muro de las Naciones de Santiago Calatrava. Complejo Olímpico de Atenas. 2004

https://www.elperiodicodearagon.com/noticias/economia/tecnologia-firmas-aragonesas-llega-olimpiadas-atenas_133829.html

Figura 73: Interior de la Llotja de Sant Jordi de Santiago Calatrava bajo la plaza España. Alcoy

<https://thefullcalatrava.wordpress.com/tag/calatrava/page/2/>

Figura 74: Parte del recinto interior de la Ciudad de las Artes y de las Ciencias. Valencia

<https://www.lovevalencia.com/ciudad-de-las-artes-y-ciencias.html>

Figura 75: L'umbracle diseñado por el arquitecto Santiago Calatrava en la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia. Su forma responde a un cilindro parabólico

<http://vacarquitectura.es/lumbracle/>

Figura 76: Restaurante submarino diseñado por el arquitecto Santiago Calatrava y Félix Candela en la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia.

<https://www.paralelo66.com/en/ofertas/entradas/oceanografic-valencia.htm>

Figura 77: Cubierta del restaurante submarino de L'Oceanogràfic sito en la Ciudad de las Ciencias y las Artes. La planta del edificio es octogonal y su cubierta de hormigón presenta ocho lóbulos con simetría radial que le dan una forma de roseta. Cada lóbulo y su opuesto forman parte de un mismo paraboloide hiperbólico.

https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/14957/G%C3%93MEZ%20M%20C-TRUJILLO%20SANZ%20FVICENTE%20M%20T_Ojos%20matem%C3%A1ticos%20miran%20la%20ciudad%20de%20Valencia.pdf?sequence=1



Figura 78: Elemento de ventilación de la Ciudad de las Ciencias y las Artes formado por la intersección de un cono y dos cilindros.

https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/14957/G%C3%93MEZ%20M%20C-TRUJILLO%20MSANZ%20FVICENTE%20M%20T_Ojos%20matem%C3%A1ticos%20miran%20la%20ciudad%20de%20Valencia.pdf?sequence=1



8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LASTRA SEDANO, Alberto (2015). *Geometría de curvas y superficies con aplicaciones en arquitectura*. Paraninfo.

FERRER, David; GOMEZ SERRANO, Josep (2002). *Los arquitectos de Gaudí*. Barcelona.

MARTINELL I BRUNET, Cesar (1967). *Gaudí: su vida, su teoría, su obra*.

MARTINELL I BRUNET, Cesar (1999). *Gaudí i la Sagrada Família comentada per ell mateix*

INGENIERIA DE CAMINOS (2013). *La catenaria en la Arquitectura*

BARRIONUEVO FERRER, Antonio. (2005). *Las formas de crecimiento y construcción de la ciudad*. Sevilla. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla. Sevilla

CALATRAVA VALLS, Santiago. (2002). *Conversaciones con estudiantes*. Madrid. Ed. Gustavo Gili

CATALOGO de la Exposición Antológica en la Lonja de Valencia. Santiago Calatrava 1983-93. (1993). Madrid. Editorial El Croquis.

ORTIZ, Isabel; DELGADO, Ana (Dir). (2011). *Santiago Calatrava*. Madrid. Susaeta Ediciones S.A.

GIRALT-MIRACLE, Daniel (2002) Gaudí. *La búsqueda de la forma*. Lunwerg Eds.

UNIV. POLITÉCNICA DE CATALUÑA, *El Templo de la Sagrada Familia*.

IBAÑEZ TORRES R. (2003) *El vientre de un Arquitecto*

IBAÑEZ R, Macho M. (2004) *Ciclo de Conferencias de la Universidad de País Vasco: Un paseo por la geometría*.

CRIPPA MA. Gaudí (2007) *De la Naturaleza a la arquitectura*. Ed Taschen. Colonia 2007.

SERRAINO P. Eero Saarinen (2006): *Un expresionista estructural*. Ed Taschen. Colonia 2006.

HUERTA S. (2003) *El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí*. Ingeniería civil 2003;

RABASCO, P. (2011). *El sistema Ctesiphonte. Evolución de la estructura catenaria. Informes de la Construcción*.

BASSEGODA-NONELL, J. (1990). *La construcción tradicional en la arquitectura de Gaudí*. Informes de la Construcción.

BERGOS, J. (1953). *Materiales y elementos de construcción*. Estudio experimental. Barcelona: Bosch.

CODINACHS, M. (ed.) (1982). *Antoni Gaudí. Manuscritos, artículo, conversaciones y dibujos*. Madrid: Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos.



COLLINS, G. R. (1966). *Antonio Gaudí: Estructura y forma, Hogar y Arquitectura*

GONZALEZ MORENO-NAVARRO, J. L. yA. Casals Balagué (2002). *Gaudí y la razón constructiva*. Un legado inagotable. Madrid: Akal.

HUERTA, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.

TARRAGO CID, S. (1974). *Gaudí entre la estructura y la forma*.



9. WEBS CONSULTADAS

<http://baulitoadelrte.blogspot.com/2016/09/gaudi-y-la-geometria.html>

https://wiki.ead.pucv.cl/ESTUDIO_Y_APLICACION_DE_LA_CATENARIA

<https://www.casabatllo.es/antoni-gaudi/>

https://wiki.ead.pucv.cl/index.php/ESTUDIO_Y_APLICACION_DE_LA_CATENARIA#DESARROLLO_DEL_EXPERIMENTO

<http://www.iespana.es/legislaciones/index.htm> Base de datos de artistas que incluye una biografía de Gaudí

http://www.gaudiclub.com/esp/e_equipo/cg/Estudio_analitico.pdf

https://wiki.ead.pucv.cl/Informe_Catenaria_y_Gaud%C3%AD

https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/14957/G%C3%93MEZ%20M%20C-TRUJILLO%20MSANZ%20FVICENTE%20M%20T_Ojos%20matem%C3%A1ticos%20miran%20la%20ciudad%20de%20Valencia.pdf?sequence=1

https://es.wikipedia.org/wiki/Ciudad_de_las_Artes_y_las_Ciencias

<https://www.slideshare.net/jaionetxu/sagrada-familia-ppt-76996536>

<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/Catenaria.pdf>

https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/calatrava_santiago.htm

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm

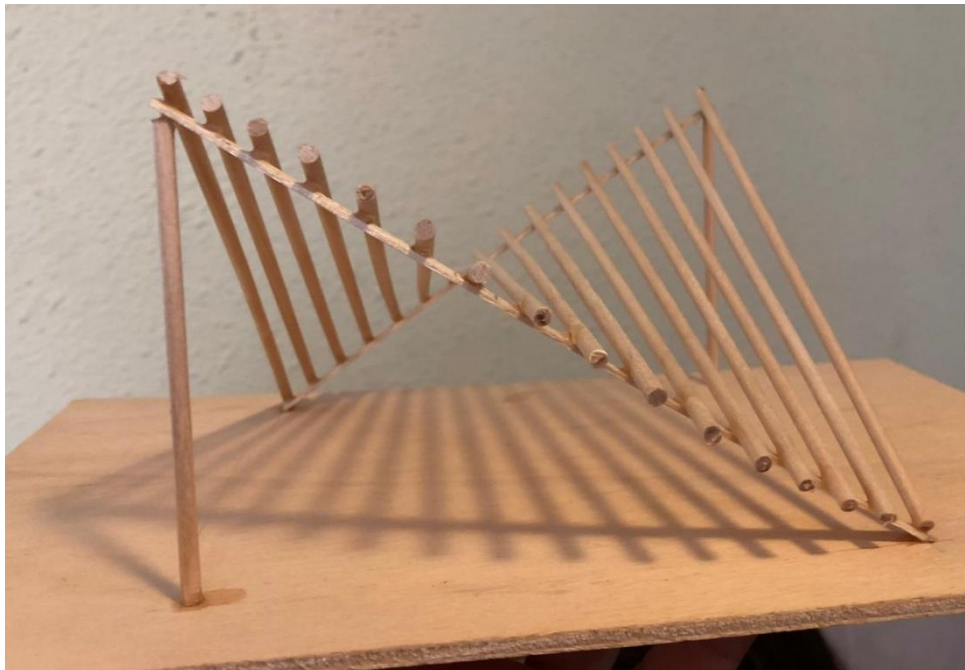
<https://www.xatakaciencia.com/matematicas/la-curva-catenaria>

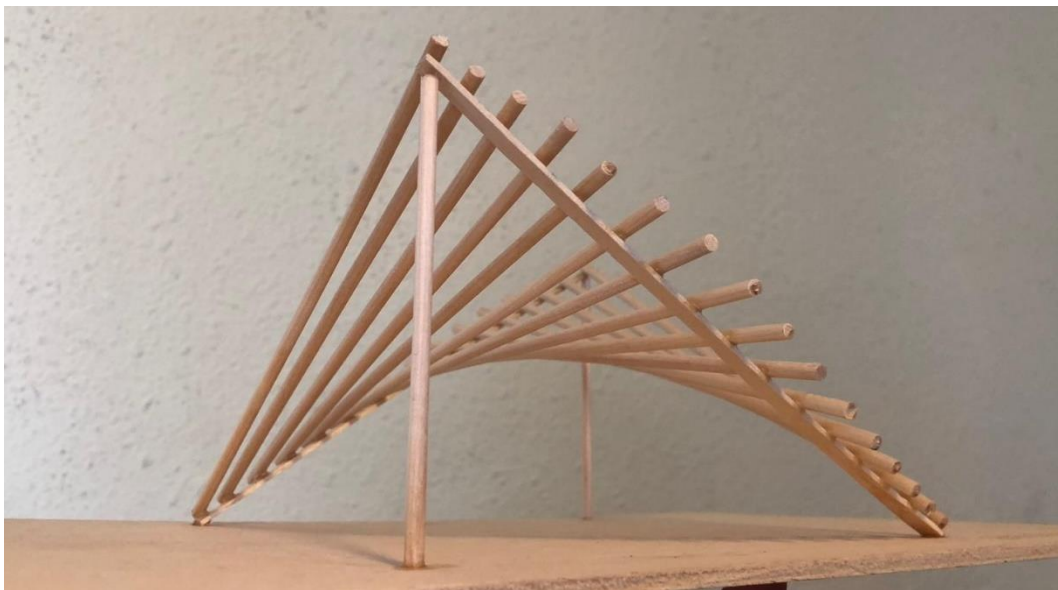
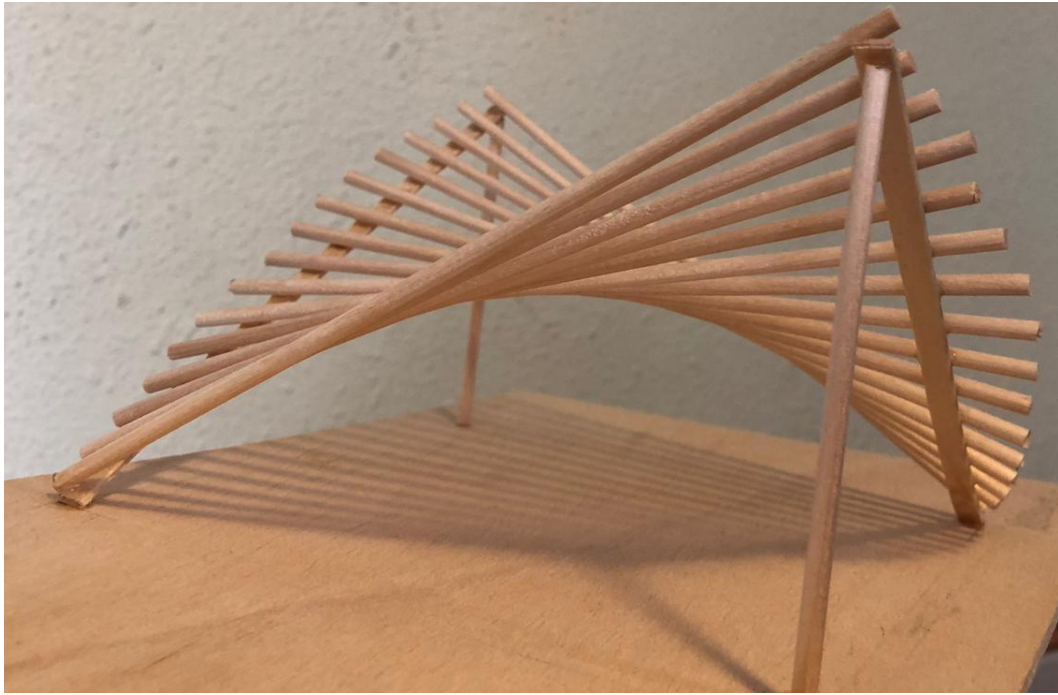


10. ANEXOS



Maqueta realizada por el autor representando un paraboloides hiperbólico compuesto por palos de madera.







Maqueta realizada por el autor representando un conoide a base de palos de madera





Maqueta realizada por el autor recreando uno de los edificios más característico del arquitecto, estudiado en este trabajo, La escuela de los trabajadores donde observa claramente la cubierta compuesta por conoides abiertos.

