FACULTAD DE CIENCIAS

ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Trabajo Fin de Grado presentado por Sara María Muñoz Martín, siendo la tutora del mismo la profesora Loreto Delgado González.

Vº. Bº. de la Tutora: Alumna:

Dª. Loreto Delgado González Dª. Sara María Muñoz Martín

Sevilla, Junio de 2018

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO 2017-2018

TÍTULO:

EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

AUTOR:

SARA MARÍA MUÑOZ MARTÍN

TUTOR:

Dª. LORETO DELGADO GONZÁLEZ

DEPARTAMENTO:

ECONOMÍA APLICADA I

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

RESUMEN:

Con este trabajo se pretende mostrar la relación existente entre la matemática y la tecnología. Desde la antigüedad, numerosos matemáticos han intentado construir máquinas para facilitar el cálculo. En la búsqueda de esas máquinas, apareció el concepto de computación y con ello el ordenador. Hoy día se pueden resolver problemas matemáticos aprovechando los recursos digitales existentes, entre ellos, las aplicaciones móviles. A su vez, los avances tecnológicos permiten mejorar la didáctica y aprendizaje de las matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

Computación; Matemáticas; TIC; Mobile Learning; Enseñanza-Aprendizaje.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de las matemáticas es importante para desarrollar cualquier disciplina. Sin embargo, su entendimiento es complicado. Por este motivo, se debe prestar atención a su enseñanza y aprendizaje, buscando métodos que ayuden a mejorarla.

El propósito de este trabajo es, por un lado, la investigación de la relación recíproca que existe entre matemáticas y tecnología, ya que ambas sirven de soporte la una a la otra. Por otro lado, mostrar los beneficios de esa relación. Todo ello se pone de manifiesto en los tres capítulos de este trabajo y sus conclusiones.

En el primer capítulo se estudian los orígenes de la computación desde el punto de vista matemático. Para ello, se exponen las aportaciones de matemáticos como Alan Mathison Turing o Claude Elwood Shannon, que han hecho posible la aparición de los ordenadores y de las nuevas tecnologías.

En el segundo capítulo se analizan seis aplicaciones móviles que resuelven problemas matemáticos. Para ello se ha utilizado la información disponible en cada una de las aplicaciones y se han realizado pruebas de cálculo con cada una de ellas. Posteriormente, se hace una comparativa de las mismas, contrastando tanto sus características como los tipos de problemas matemáticos que solucionan.

En el tercer capítulo se muestra como la tecnología puede mejorar la didáctica y el aprendizaje de las matemáticas gracias a los recursos digitales disponibles. Así mismo, se explican alternativas de docencia que pueden mejorar la problemática existente con el aprendizaje de las matemáticas.

Por último, se exponen conclusiones sobre el trabajo expuesto.

CAPÍTULO 1

DE LA MATEMÁTICA A LA TECNOLOGÍA

1.1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas están presentes en todo lo que nos rodea, hasta en lo más simple. Abren la mente y aumentan la capacidad de raciocinio de las personas. Se aplican a un sinfín de disciplinas y dan sentido a muchas otras. Por tanto, el estudio y la investigación de las matemáticas es muy importante, no solo para el que las imparte, sino también para el que las aprende. Por ello, hay que prestar especial atención a su enseñanza.

Cuando se habla de la asignatura de matemáticas es común escuchar que el alumnado (indistintamente de su etapa educativa) no se entera, no las comprende o simplemente, no ve el sentido al estudio de éstas. Piensan que en el futuro no las utilizarán. Lo que no saben es que están equivocados. Siempre estarán presentes en sus vidas de un modo directo o indirecto. En este sentido, como se ha comentado anteriormente, cuando uno domina las matemáticas, tiene más facilidad para la resolución de cualquier problema, ya sea de ámbito laboral o no.

En un mundo que gira en torno a las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, no es de extrañar que pueda hacerse uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TICS) para la enseñanza de las matemáticas. De hecho, en las aulas se utilizan ordenadores con acceso a internet, proyectores de imágenes, diapositivas, presentaciones PowerPoint, así como programas o aplicaciones para la resolución de problemas matemáticos. Hoy en día, la tecnología es vital, todo se encuentra informatizado. Los ordenadores han hecho la vida del hombre mucho más fácil, puesto que llegan hasta límites a los que la mente humana no puede llegar: gran capacidad de almacenamiento, cálculos complejos realizados en milésimas de segundos, ahorran tiempo en la realización de operaciones y sirven de apoyo a la hora de realizar cualquier cálculo.

En este contexto nos hacemos las siguientes preguntas: ¿Cuál fue el germen que propició la aparición de las nuevas tecnologías? ¿Qué papel desempeñaron las matemáticas en su descubrimiento? A groso modo, es curioso saber que todo se originó por el afán de superación del hombre con el fin de encontrar soluciones a problemas matemáticos.

El propósito de este capítulo es viajar en el tiempo para conocer a aquellos matemáticos cuyas contribuciones fueron de especial relevancia para la computación. Aunque, antes de empezar, resaltar que es tal la cantidad de matemáticos que han aportado su granito de arena, que sólo se habla de algunos de ellos.

1.2 LA BASE MATEMÁTICA DE LA COMPUTACIÓN. LAS APORTACIONES DE LOS MATEMÁTICOS.

En este apartado se pone de manifiesto el papel que jugaron las matemáticas en el origen de las TICS. Todas las formas de computar o hacer cálculo que se utilizan actualmente tienen una base matemática. Las personas han tenido la necesidad de hacer operaciones desde la antigüedad. De hecho, hacia el año 2000 a. de C. ya se tienen pruebas de la existencia de máquinas para calcular: el ábaco. “En sus orígenes, consistía en una serie de piedras (piedra = cálculo, operaciones con piedras =calcular) que se colocaban en surcos hechos en el suelo. El ábaco se considera una de las primeras máquinas para la realización de operaciones de cálculo, aún vigente hoy en día”. (Rodríguez, Penin, 2007)

A continuación, se enuncian los matemáticos y sus correspondientes aportaciones en materia de computación.

Blaise Pascal (1623-1662) fue el matemático inventor de la primera calculadora mecánica, a la que llamó Pascalina (1642). Con el objetivo de ayudar a su padre a recaudar los impuestos de Normandía, construyó una máquina, basada en un sistema de engranajes, capaz de hacer las operaciones de suma y resta necesarias para el cobro. A pesar de ello la máquina no tuvo el reconocimiento ni el éxito que esperaba, siendo utilizada solo por adinerados y burgueses del resto de Europa, debido a su elevado coste. Posteriormente fue introduciendo mejoras en el aparato, llegando a fabricar cincuenta dispositivos en diez años (en la actualidad se conservan dos ejemplares en museos de Alemania y París). Finalmente fue sustituida por artilugios con prestaciones mayores. (López, 2015)

Los mecanismos y engranajes que utilizó Pascal son los principios en los que se basan el cuentakilómetros de los vehículos, las cajas registradoras y calculadoras actuales. (Rodríguez, Penin, 2007)

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) se basó en los métodos que utilizó Pascal para realizar operaciones con el fin de construir una máquina que pudiera multiplicar y dividir, además de sumar y restar. Además, en el 1679 ya escribió sobre la aplicación al cálculo mecánico del sistema binario de unos y ceros. (Rodríguez, Penin, 2007)

Charles Babbage (1791-1871) fue el primero en concebir la idea de ordenador. El conocimiento de las tablas logarítmicas y polinómicas y su afán por el orden, le llevaron a crear la máquina diferencial y la máquina analítica. Le sirvieron de inspiración los trabajos realizados por Blaise Pascal y Gottfried Leibnitz. (Gifreu, 2013)

El objetivo de la máquina de diferencias era tabular polinomios utilizando un sistema numérico de diferencias. Empezó la construcción de su máquina, pero esta nunca fue terminada. (Rodríguez, Penin, 2007)

En 1834 inventó una máquina analítica capaz de realizar operaciones (suma, resta, multiplicación y división) de manera automática. “Dicha máquina tendría capacidad para realizar hasta sesenta operaciones por minuto y podría almacenar hasta mil números de cincuenta cifras. Recibió el nombre de "la locura de Babbage", debido a las enormes dificultades que implicaba su puesta en práctica” (Rodríguez, Penin, 2007).

El diseño de la máquina era una adaptación del telar mecánico de Joseph Marie Jacquard, que empleaba tarjetas perforadas. “La máquina analítica presentaba unos dispositivos de entrada basados en las tarjetas perforadas de Jacquard (inputs), un procesador aritmético que calculaba números (microprocesador), una unidad de control que determinaba qué tarea debía ser realizada (CPU), un mecanismo de salida (output) y una memoria donde los números podían ser guardados hasta ser procesados (ROM, RAM)” (Gifreu, 2013). Aunque nunca llegó a funcionar, es considerado el primer computador del mundo. (Gifreu, 2013)

Augusta Ada King-Byron (1815-1852) conocida como Ada Lovelace es considerada la primera programadora de la historia. Trabajó junto a Charles Babbage en la construcción de su máquina analítica y le sugirió la introducción de las tarjetas para la realización de operaciones de forma repetitiva. Ada tradujo al inglés el escrito de Babbage, añadió sus propias ideas y duplicó su extensión. Ella vio en la máquina analítica la capacidad de realizar tareas que fueran más allá de meros cálculos y describió la utilización de símbolos. “Ada fue la primera persona en escribir un programa para un ordenador programable: escribió un «plan» donde describe los pasos que permitirían calcular los valores de los números de Bernoulli, su primer programa, que utilizaba dos bucles, y con esto demostró la capacidad de bifurcación de la máquina de Babbage. También describió cómo se podían calcular operaciones trigonométricas que contaban con variables utilizando la máquina de Babbage” (Gifreu, 2013).

En 1979 el ejército de Estados Unidos le puso el nombre de ADA a un nuevo lenguaje de programación, en su honor. (Rodríguez, Penin, 2007)

Herman Hollerith (1860-1929) inventó un nuevo método para realizar el censo en Estados Unidos. Un sistema basado en tarjetas perforadas que una máquina pudiera leer. Como la mayoría de preguntas del censo se respondían con SI o NO, al introducir la tarjeta en la máquina, esta podría saber la respuesta en función del criterio elegido (que la tarjeta tuviese agujero o no). Con este sistema se ahorró mucho tiempo y dinero en la elaboración del censo. Se consiguió hacer en tres años, lo que antes se hacía en diez. Hollerith constituyó la Tabulating Machine Company, que posteriormente fue absorbida y se convirtió en International Business Machines Corporation (IBM). (Varella, 2010) (Gifreu, 2013)

David Hilbert (1892-1943) presentó 23 problemas matemáticos en el “Segundo Congreso Internacional de Matemáticos” celebrado en 1900. El intento de resolución de algunos de ellos propició la aparición de nuevos métodos y herramientas de cálculo cuya influencia en la computación fue muy significativa. (Coello, 2000)

Por otro lado, Hilbert propuso la construcción de un sistema formal para demostrar la consistencia de las matemáticas. Surgió así el tratado “Principia Mathematica” de Whitehead y Russell.

Kurt Gödel (1906-1978) público en el año 1931 un trabajo titulado “Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y Sistemas afines). En su obra, Gödel prueba que la aritmética no está libre de contradicciones y que hay verdades matemáticas indecidibles, es decir, que no se pueden demostrar por medio de un conjunto de algoritmos. Pues desarrolló una fórmula aritmética cierta tal que, si se podía demostrar formalmente, ello conducía a una contradicción. Todo ello se oponía al pensamiento de David Hilbert, según el cuál era fácil demostrar la consistencia e integridad de las matemáticas. (Guti, 1999) (Coello, 2000)

El descubrimiento de lo que se conoce por "teorema de la incompletitud de Gödel" tuvo una gran influencia en la teoría de la computación. (Guti, 1999) (Coello, 2000)

Alonzo Church y Stephen Cole Kleene desarrollaron lo que se conoce como cálculo lambda en la década de los años treinta. Un formalismo matemático que pretendía convertir a una forma estándar todas las fórmulas de tipo aritmético. Church demostró que no siempre era cierto proporcionando otra solución al problema de la decidibilidad de Hilbert. (Coello, 2000)

Alan Mathison Turing (1912-1954) fue el primero en desarrollar el concepto de computador de una manera teórica. Su intriga por estudiar los algoritmos y axiomas, así como la forma en que estos podían mecanizarse, le llevó a desarrollar la teoría de la computabilidad. Revolucionó así la forma de entender el cálculo y análisis matemático, sistematizándolo con el empleo de una simple máquina teórica: la máquina de Turing, de ahora en adelante TM (Turing Machine). (Martin Delgado, 2013)

En 1936 publicó un artículo llamado "On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem" (Sobre Números Computables con una Aplicación al Problema de la Decidibilidad). En su trabajo, Turing diferenció tres conceptos: computabilidad, complejidad y universalidad. ¿Es todo computable? Una vez que se sabe que el problema es computable o solucionable, debemos saber su complejidad de cálculo. En última instancia, si vamos a utilizar la máquina de Turing para resolver problemas, necesitamos saber si una misma TM sirve para resolver problemas distintos, o si por el contrario cada supuesto necesita de una TM diferente para su resolución. Aquí es donde aparece el concepto de Maquina de Turing Universal o Universal Turing Machine (UTM). El propósito de Turing era demostrar si algún método podía determinar con fiabilidad la certeza de una aseveración. (Coello, 2000) (Martin Delgado, 2013)

A pesar de la sencillez de la máquina, compuesta apenas por una cinta infinita con casillas cuadradas en las que se podía leer, escribir o borrar un símbolo de un determinado alfabeto, esta herramienta supuso un antes y un después en las fronteras de la computación. Turing también probó que existen infinitos problemas que una computadora no podrá resolver. Entre ellos se encontraba el problema de la detección, muy importante en computación. "La pregunta es si la Computadora X puede programarse para decidir en tiempo finito si la computadora Y, cargada con otro programa y algunos datos iniciales, se llegará a detener alguna vez". Turing demostró la imposibilidad de resolución de este problema. (Coello, 2000)

"Del trabajo de Turing es aparente que con un conjunto finito de axiomas no es posible cubrir las matemáticas como un todo. Hay verdades irreducibles, axiomas que no son evidentes en el sentido de Euclides o Hilbert, y deben ser añadidos como axiomas independientes. Esto hace a la teoría del todo (TOE) de las matemáticas imposible". (Martin Delgado, 2013)

Alan Turing participó en el descifrado del código enigma de los alemanes durante la segunda guerra mundial, el proyecto Colossus. Máquina que descifraba los mensajes del enemigo. Además, diseñó una máquina inspirada en su modelo matemático: la Pilot Ace. En 1947 apareció la Prueba de Turing, publicada en el libro maquinaria inteligente. Esta consistía en intentar diferenciar una persona de una máquina y en caso de que no fuera posible, entonces se consideraría a la máquina como inteligente. Se puede decir que había nacido el concepto de inteligencia artificial. (Coello, 2000) (Rodríguez, Penin, 2007)

Stephen Cole Kleene (1909-1994) fue un importante lógico matemático que dejó huella en el ámbito de la computación. Inventor de funciones definidas en una secuencia finita de pasos combinatorios (funciones recursivas). En 1952 publicó un libro titulado Introduction to Metamathematics (introducción a la metamatemática) en el que hablaba sobre las máquinas de Turing y mostraba que las matemáticas eran la base de la computación. Se entiende por metamatemática una parte reflexiva de las matemáticas que estudia los límites de las mismas. Kleene proporcionó métodos para determinar qué tipo de problemas puede resolver una computadora y cuáles no. (Coello, 2000) (Digital & York, 2010)

Konrad Zuse (1910-1995) construyó de manera autodidacta una calculadora electromecánica llamada Z1. Esta máquina era programable, leía tarjetas perforadas y se basaba en el sistema binario. Posteriormente construyó las versiones Z2 y Z3. El Z1 nunca llegó a funcionar correctamente, sin embargo, el Z3 realizaba operaciones en muy poco tiempo. Posteriormente desarrolló el Z4 y el Z5. Para desarrollar sus trabajos se basó en las aportaciones de Turing. Tras la Segunda Guerra Mundial desarrolló un lenguaje de programación algorítmico que en futuro recibiría el nombre de International Algoritmic Language (ALGOL). (Rodríguez, Penin, 2007) (Coello, 2000) (Gifreu, 2013)

Cabe destacar que Konrad Zuse no fue puramente matemático, era ingeniero, pero se basó en los trabajos de matemáticos para construir sus computadores.

Claude Elwood Shannon (1916-2001) publicó una tesis en 1937 sobre el funcionamiento de los circuitos eléctricos denominada “A symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”. Su tesis, basada en el álgebra Booleana, fue muy significativa en la historia de la computación. En ella expuso como una computadora podía realizar operaciones lógicas utilizando un alfabeto de unos y ceros (binario). En 1948 anunció su “Teoría Matemática de Comunicaciones” que lo apadrinaría como el “padre de la teoría de la información”. Las comunicaciones vía satélite, la codificación de las señales de televisión, así como los sistemas para detectar y corregir los errores de los ordenadores tienen su origen en esta teoría. Shannon escribió también una monografía publicada en 1948 titulada “Programing a computer for playing chess” que lo convirtió en pionero de una disciplina conocida después como inteligencia artificial (IA). Diseñó la primera máquina capacitada para aprender una tarea: un ratón mecánico llamado Teseo. (Coello, 2000)

Oswald Veblen (1880-1960) fue uno de los científicos matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la primera computadora electrónica de la historia: Electronic Numerical Integrador and Computer (ENIAC). Fue construida para realizar los complejos cálculos de balística de la segunda guerra mundial. (Coello, 2000)

John Von Neuman (1903-1957) formó parte del proyecto de la ENIAC junto con Oswald Veblen. Se involucró a fondo con el proyecto pues pensaba que era necesaria la utilización de máquinas para realizar los complejos cálculos que requería su trabajo. Neuman introdujo mejoras en la máquina, que tenía que cablearse manualmente y el proceso duraba días. Entre sus mejoras destaca la utilización del sistema binario, en lugar del decimal, para programar y la colocación de los datos junto con las instrucciones en la memoria. La ENIAC pasó a ser un proyecto de primera. En 1950 construyó un computador llamado IAS (Instituto for Avances Studies) cuyo diseño ha servido de guía para las computadoras que se construyeron posteriormente. En 1951 se creó el Ordenance Variable Automatic Computer ORVAC, basado en los principios de Von Neuman. (Coello, 2000) (Rodríguez, Penin, 2007)

Jonh Backus (1924-2007) llevó a cabo el proyecto que recibió el nombre de FORmula TRANslation (FORTRAN) uno de los más conocidos y duraderos lenguajes de programación de la historia. El FORTRAN resultó ser "el primer lenguaje de programación de alto nivel de la historia". Mientras otros utilizaban para programar algo parecido a lo que hoy se conoce como macroensambladores, Backus se centró en traducir los comandos en ceros y unos, utilizando el sistema binario. (Coello, 2000)

En 1958 se inventó un nuevo lenguaje de programación denominado ALGOL, diseñado por un comité internacional especializado en computación. Pero a Backus no le convencía este lenguaje, por ello añadió al mismo un formalismo llamado "lenguajes de libre contexto", que había sido creado por el lingüista Noam Chomsky. Al modificar el lenguaje de programación ALGOL, inventó un nuevo lenguaje. (Coello, 2000)

En 1959 presentó en un congreso su propuesta para con los lenguajes de programación, que no tuvo mucho éxito. Peter Naur extendió la propuesta de Backus de utilizar gramática para la sintaxis de un lenguaje de programación y la aplicó al ALGOL. Este alfabeto, conocido como "forma Backus-Naur" se sigue empleando hoy día. (Coello, 2000)

Jonh Backus propuso también lenguajes funcionales basados en la composición de funciones: lenguaje FP. En 1963 fue nombrado "fellow" de IBM y recibió el premio Turing por sus aportaciones a la computación en 1977. (Coello, 2000)

Michael Oser Rabin (1931-actualidad) y Dana Stewart Scott (1932-actualidad) estudiaron la limitación de la máquina de Turing, que siempre se comportaba de la misma manera dado un conjunto de instrucciones y una entrada en particular (comportamiento determinista). La consideraron máquina de estados finitos, pues su número de estados se fijaba con antelación y era siempre el mismo. El concepto introducido por ambos fue el de "no determinismo". Una máquina en un cierto estado particular, dada una cierta entrada, tiene varias rutas o estados posibles que seguir. En definitiva, la máquina podía dar solución a un problema determinado. (Coello, 2000)

Rabin y Scott demostraron la posibilidad de transformar una máquina no determinista en una determinista. También probaron que este tipo de máquinas no deterministas eran perfectas para expresar modelos de búsqueda. En 1959 se publicó el artículo escrito por ambos sobre el no determinismo, que recibió el premio Turing en 1976. El impacto de su descubrimiento en computación fue enorme y otros teóricos extendieron el concepto introducido hasta límites inimaginables. (Coello, 2000)

Por su parte, Michael Oser Rabin, explicó la importancia del azar en la solución de problemas complejos. "Sus métodos aleatorios han tenido gran impacto en geometría computacional, cómputo distribuido, criptografía y comunicaciones, entre muchas otras áreas". (Coello, 2000)

Por otro lado, Dana Stewart Scott, estudió las cualidades de los sistemas de programación en cuanto a programas y lenguaje. Lo hizo junto a Christopher Strachey. De esta alianza surgió un sistema teórico llamado "semántica denotacional". Scott continuó investigando en este sector y unificó la lógica constructiva junto con la semántica denotacional. El fin era encontrar métodos que pudieran aplicarse a una computadora y que aseguraran la construcción correcta de programas. (Coello, 2000)

Stephen Arthur Cook (1939-actualidad) logró describir problemas de inteligencia artificial, investigación de operaciones y diseño, a los que nadie hasta entonces había dado solución. Cook consideró que tenían en común una serie de propiedades que podrían pertenecer a la misma familia matemática. En 1971 publicó un artículo donde explicaba este tipo de problemas matemáticos, a los que denominó "Nondeterministic Polynomial" (No Determinísticos Polinomiales o NP). Se trataba de problemas que podían resolverse en tiempo polinomial, es decir, en menos tiempo que el valor que resulta de sustituir ese tiempo en el polinomio dado. Debido a que no siempre es posible verificar la mejor solución, se necesitaría que una máquina la diera. Cook también probó que el problema de la satisfactibilidad era uno de los más difíciles de resolver dentro de la familia de los problemas NP. "Si hubiese un algoritmo para resolver ese problema en tiempo polinomial, entonces todos los problemas de la clase NP tendrían un algoritmo similar. De tal forma, los problemas equivalentes con el de la satisfactibilidad son llamados NP completos". (Coello, 2000)

"Decimos que un valor satisface a una ecuación o a una función cuando al sustituir este valor en la ecuación o función ésta se reduce a una igualdad válida". (Apolinar, 2011)

Richard Karp (1935-actualidad) utilizó un método llamado reductibilidad para demostrar otros veintiún problemas NP Completos. El procedimiento consistía en convertir cualquier problema al de la satisfactibilidad. Hoy día sigue usándose esta regla y siguen existiendo preguntas sin resolver sobre este tipo de problemas NP Completos. (Coello, 2000)

"En matemáticas, la palabra reducción es sinónimo de simplificación. Por ejemplo, cuando reducimos una expresión, la expresamos de una manera equivalente, pero más sencilla de interpretar". (Apolinar, 2011)

Donal Ervin Knuth (1938-actualidad) es el autor de la obra "The Art of Computer Programming" en la que habla sobre compiladores. En 1963 tenía listo su primer borrador, que resultó ser de 3000 páginas. Por este motivo, Knuth decidió dividir su libro en 7 volúmenes, de los que sólo se han publicado tres hasta la fecha y la primera parte del cuarto." The Art of Computer Programming es considerada por muchos como la gran Biblia de la programación, una lectura obligatoria para cualquier creador de software del mundo que por supuesto sigue estando a la venta". Por este trabajo recibió el Premio Turing en 1974. (Coello, 2000) (Magnet, 2017)

Posteriormente desarrolló TeX, un procesador de textos, y METAFONT, sistema de diseño de alfabetos que funcionaba utilizando las matemáticas. Una de las características más relevantes de TeX es la edición de ecuaciones matemáticas con resultados notorios. El lenguaje computacional tipográfico utilizado por TeX es considerado el primero de la historia y se sigue utilizando hoy día, sobre todo en ámbito científico. (Coello, 2000) (Magnet, 2017)

Cabe destacar que el inicio de la computación como una disciplina independiente se debe, entre otros factores, al trabajo de Knuth. (Coello, 2000)

Tabla 1.1 Contribuciones matemáticas a la computación

Autor	**Fecha**	**Invento/Contribución**
Blaise Pascal	1623-1662	Pascalina
Gottfried Wilhelm Leibnitz	1646-1716	Escribió sobre la aplicación del sistema binario al cálculo mecánico
Charles Babbage	1791-1871	La máquina analítica y la máquina diferencial
Augusta Ada King-Byron	1815-1852	Es considerada la primera programadora de la historia
Herman Hollerith	1860-1929	Tabulating Machine Company (TBM)
		Businnes Machines Company (IBM)
David Hilbert	1900	23 problemas matemáticos
Kurt Godel	1906-1978	Demostró que ciertos problemas matemáticos no se pueden resolver por medio de un conjunto de algoritmos “Teoría de la incompletitud”
Alonzo Church y Stephen Cole Kleene	Década 1930	Cálculo Lambda
Alan Mathison Turing	1912-1954	La máquina de Turing. La máquina de Turing Universal.
		“On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem”
		Proyecto Colossus
		Pilot Ace
Stephen Cole Kleene	1909-1994	“Introduction to Metamathematics”
		Funciones recursivas
Konrad Zuse	1910-1995	Computadores Z1, Z2, Z3, Z4 Y Z5.
		Futuro ALGOL
Claude Elwood Shannon	1916-2001	“A symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”
		“Teoría Matemática de Comunicaciones”
		“padre de la teoría de la información”
		“Programing a computer for playing chess”

		Ratón mecánico llamado Teseo
Oswald Veblen	1880-1960	Electronic Numerical Integrador and Computer (ENIAC)
John Von Neuman	1903-1957	ENIAC
		Instituto for Avances Studies (IAS)
		Ordenance Variable Automatic Computer (ORVAC)
Jonh Backus	1924-2007	FORmula TRANslation (FORTRAN)
		"Forma Backus-Naur" aplicada al ALGOL
		Lenguaje FP
Michael Oser Rabin y Dana Stewart Scott	1931-actualidad	Concepto de "no determinismo"
		Impacto en geometría computacional, cómputo distribuido, criptografía y comunicaciones
		"Semántica denotacional"
Stephen Arthur Cook	1939-actualidad	Problemas "No Determinísticos Polinomiales "o NP
Richard Karp	1935-actualidad	Problemas NP completos
Donal Ervin Knuth	1938-actualidad	"The Art of Computer Programming"
		TeX y METAFONT

Fuente: Elaboración propia

La tabla anterior recoge un resumen del apartado expuesto. En ella se muestran las aportaciones de cada matemático a la computación y el intervalo de tiempo en que sucedieron. Con posterioridad a la última contribución que aparece en la tabla, han sucedido otras innovaciones, que no se contemplan, ya que el objetivo es recoger las aportaciones únicamente de matemáticos y las siguientes derivan también de ingenieros, físicos, sociólogos e incluso filósofos.

1.3. EL ORIGEN DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN.

Actualmente es imposible concebir un mundo en el que no estén presentes las nuevas tecnologías. Rara es la persona que no posee un ordenador, tableta o smartphone. La tecnología evoluciona cada vez más rápido, dejando obsoletas innovaciones anteriores.

“Existen múltiples instrumentos electrónicos que se encuadran dentro del concepto de TIC, la televisión, el teléfono, el video, el ordenador. Pero sin lugar a duda, los medios más representativos de la sociedad actual son los ordenadores que nos permiten utilizar diferentes aplicaciones informáticas (presentaciones, aplicaciones multimedia, programas ofimáticos…) y más específicamente las redes de comunicación, en concreto Internet”. (Belloc, 2012)

El concepto de internet tal y como lo conocemos hoy día fue concebido por primera vez por J.C.R. Licklider, en los años sesenta. Éste formó parte de la creación de ARPANET (Red de la Agencia de Proyectos de Investigación Avanzada), considerada la primera red de telecomunicaciones. Aunque en sus orígenes el proyecto se creó con fines militares, posteriormente sirvió de apoyo a la investigación científica y pasó a llamarse internet. (Gifreu, 2013)

Internet ha pasado por diferentes fases desde su origen. En un primer momento, los ordenadores se conectaban a través de ARPANET. Posteriormente nació la web tradicional, etapa en la que la información permanecía estática en la web y no era posible interactuar con ella. Se trata del proceso de consolidación de internet gracias, en parte, al descubrimiento por Tim Berners Lee en 1989 de la World Wide Web (WWW). Después surgió la web social, etapa en la que la información pasa a ser dinámica y usuarios de todo el mundo pueden compartirla. La siguiente fase, en la que nos encontramos actualmente, es la denominada web semántica. Se caracteriza por la capacidad de las máquinas de procesar, razonar y deducir de forma lógica el contenido web, de la misma forma en que lo haría una persona. En la actualidad se cree que se está en proceso de cambio hacia una web 4.0. (Gifreu, 2013) (Amanda, Mas Bleda. F Aguillo, 2015)

Los ordenadores que se utilizan en el año 2018 también son fruto de un proceso de cambio. En sus orígenes los computadores nacieron por la necesidad de resolver problemas matemáticos y los primeros que se construyeron se destinaron a fines militares. El primer computador de uso personal fue creado por John Blankerbaker en el garaje de su casa en el año 1970. Así lo señala Bill Wilson en una noticia publicada en el periódico digital BBC Mundo en noviembre del año 2015. En el año 1975 salió a la venta el primer ordenador Apple (Apple I) creado por Steve Wozniak. La empresa Apple ya había sido creada a mediados de los años sesenta por Steve Jobs y Steve Wozniak. Steve Jobs diseñó y creó el primer ordenador personal con sistema Macintosh. Sin embargo, el ordenador que revolucionó el mundo de la computación fue el IBM PC lanzado en el año 1981. (Gifreu, 2013) (Wilson, 2015) (Cervera, 2016)

CAPÍTULO 2

DE LA TECNOLOGÍA A LA MATEMÁTICA

2.1 INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas o cálculos matemáticos requiere de tiempo y esfuerzo. Estas constantes varían según el tipo de supuesto y no siempre es fácil hallar la solución del mismo. Para minimizar este tipo de dificultades, existen herramientas digitales que se pueden utilizar tales como calculadoras, ordenadores, programas o aplicaciones.

El objetivo de este capítulo es estudiar y comparar aplicaciones que harán más eficiente el cálculo matemático. Cabe resaltar que en un primer momento el objetivo era analizar cualquier tipo de herramienta tecnológica que sirviera para resolver cálculos matemáticos. Sin embargo, algunos de estos programas o softwares son de pago y resultan poco accesibles y otros son conocidos por una gran mayoría. Lo anterior, unido al hecho de que ciertas aplicaciones móviles resuelven casi los mismos problemas que esos programas y son mucho menos conocidas, hizo que la investigación se centrara solo en aplicaciones. Es importante destacar que existen numerosas aplicaciones y no todas resuelven los mismos problemas ni cumplen sus funciones de la misma manera.

2.2 APLICACIONES Y PROGRAMAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

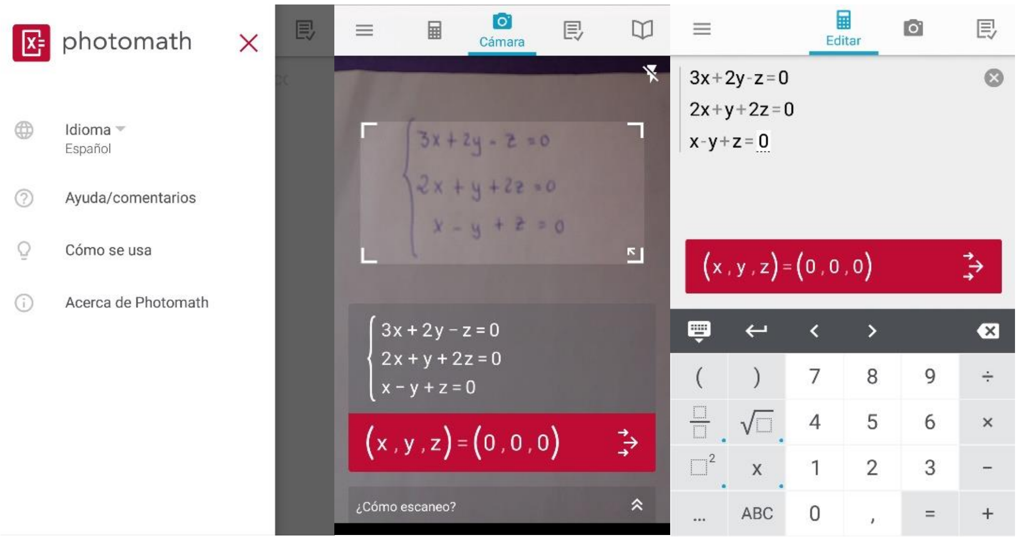
En este apartado se analizan seis aplicaciones/programas que sirven para resolver problemas matemáticos. Todas ellas están disponibles para descargar en Google Play de forma gratuita. El criterio seguido para la selección ha sido el número de descargas, la sencillez de la interfaz y el tipo de cuestiones que soluciona (funcionalidad).

2.2.1 PHOTOMATH

Photomath es una aplicación que escanea problemas matemáticos proporcionando la solución de los mismos en cuestión de segundos. Es una calculadora inteligente que reconoce el texto escrito a mano o de un libro, con solo hacer una fotografía. También permite editar o introducir los datos de forma manual utilizando el teclado.

La pantalla inicial cuenta con un botón superior izquierdo por medio del cual se accede a un menú compuesto por las siguientes pestañas: idioma, ayuda, como se usa o tutorial y acerca de Photomath.

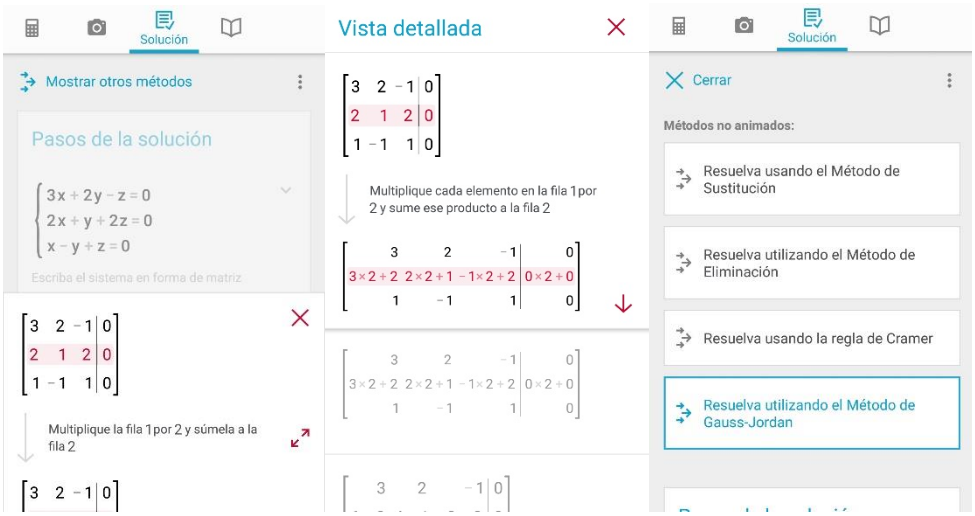
Figura 2.1. Menú y entrada de datos en Photomath



Fuente: Elaboración propia

Además, no solo muestra el resultado, si no que facilita una descripción paso a paso de la solución, con posibilidad de vista detallada. A su vez, permite elegir el método de resolución del problema en caso de que haya varios.

Figura 2.2. Ejemplo de descripción paso a paso, vista detallada y métodos de resolución Photomath



Fuente: Elaboración propia

Esta herramienta resuelve problemas aritméticos: operaciones con números reales, potencias, radicales y logaritmos; problemas algebraicos: expresiones algebraicas, ecuaciones/inecuaciones lineales, de segundo grado y con valores absolutos, sistemas de ecuaciones, vectores, números complejos; problemas de análisis: dominio, recorrido y representación de funciones básicas, cálculo de derivadas e integrales; problemas geométricos relacionados con la trigonometría.

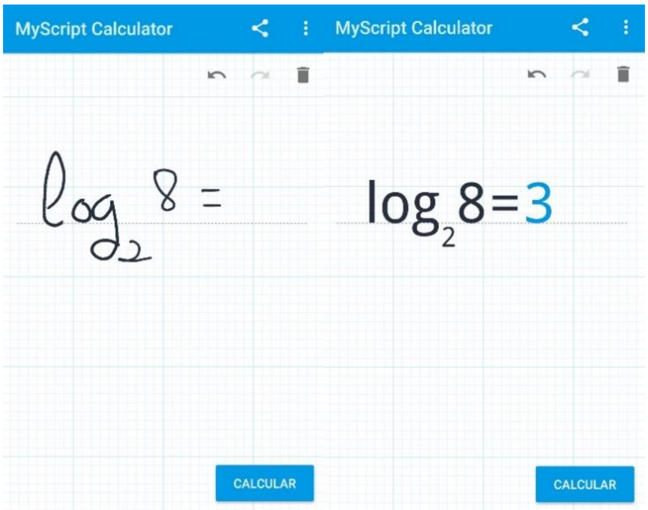
La aplicación está disponible en 36 idiomas, entre los que se encuentran el español, inglés, alemán, italiano, francés y portugués. No requiere de conexión a internet. Permite compartir las soluciones. Es compatible con Google, Android e iOS.

Cuenta con un historial de soluciones que se pueden marcar como favoritas.

2.2.2 MYSCRIPT CALCULATOR

MyScript Calculator transforma en texto digital los símbolos y números escritos sobre la pantalla de un dispositivo móvil. No dispone de teclado. El texto puede modificarse mediante gestos de sobrescritura, rayado y tachado. Esta herramienta combina las ventajas de escribir en papel con las ventajas de un aparato digital. También cuenta con funciones de deshacer y rehacer. Los cálculos se pueden realizar tanto en orientación vertical como en horizontal. No cuenta con la opción de mostrar la solución paso a paso.

Figura 2.3 Ejemplo de entrada de datos en MyScript Calculator



Fuente: Elaboración propia

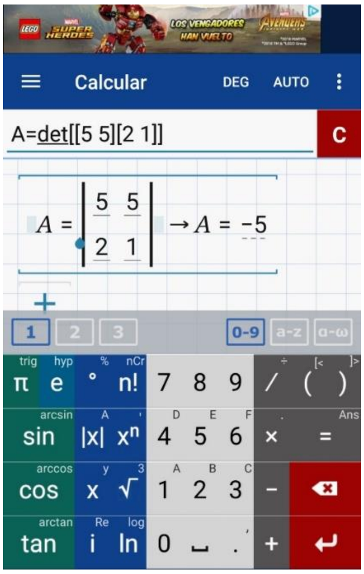
Por otro lado, las operaciones que soporta son de tipo aritmético: suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces, exponenciales, factorial, logaritmos y valor absoluto; operaciones de tipo geométrico: operaciones trigonométricas y trigonométricas inversas. A su vez soporta las constantes número e, número fi y numero pi. También permite la resolución de ecuaciones poniendo un símbolo de interrogación en el lugar de la incógnita.

La aplicación está disponible en español. Las soluciones se pueden compartir en redes sociales y no es necesario estar conectado a Internet para obtenerlas. My Script Calculator es compatible con dispositivos Android e iOS, aunque en este último la aplicación deja de ser gratuita.

2.2.3 CALCULADORA GRÁFICA MATHLAB

Calculadora Gráfica Mathlab resuelve problemas matemáticos introducidos por medio de un teclado. La solución se muestra automáticamente, sin especificar los pasos intermedios y se puede compartir. En caso de que se quiera ver el paso intermedio de una determinada operación, el usuario tendrá que ir introduciendo el problema paso a paso. Si se ha pulsado el botón de borrar sólo una vez, se podrá recuperar lo último que se escribió.

Figura 2.4. Ejemplo de entrada de datos en Calculadora Gráfica Mathlab

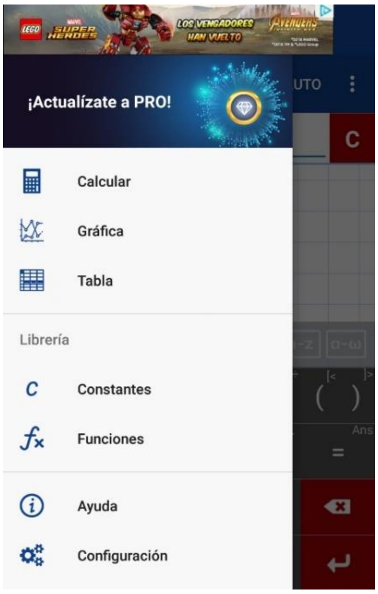


Fuente: Elaboración propia

La aplicación dispone de cuatro modos de entrada, a los que se puede acceder por medio de una pestaña que aparece en el lado izquierdo de la pantalla de inicio. Se trata de los modos calculadora, gráfico, tabla y biblioteca. Este último modo sólo está disponible en la versión pro o de pago. También dispone de los modos configuración y ayuda. (Figura 2.5)

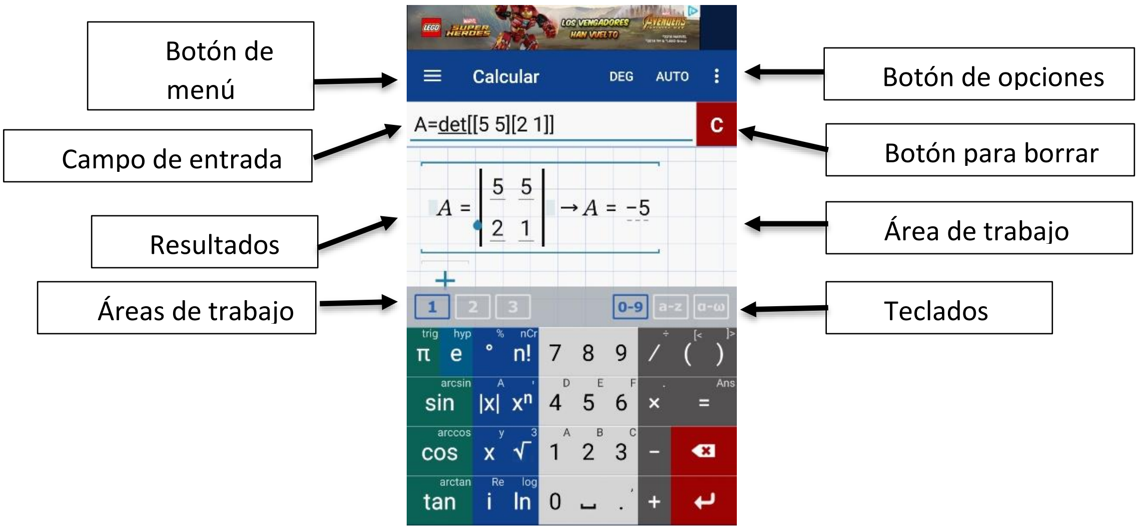
La ventana de la calculadora consta de los siguientes elementos: un botón de menú, un campo de entrada, un botón de opciones, un botón de borrar, un área de trabajo, 3-9 botones para cambiar de área de trabajo, 3 botones para cambiar de teclado y la pantalla predeterminada del teclado. La versión gratuita solo dispone de tres áreas de espacios de trabajo. Los botones de teclado permiten cambiar entre el teclado predeterminado (0-9), el teclado Qwerty (a-z) y el teclado griego (a-w). Las expresiones/ecuaciones se escriben en el campo de entrada. (Figura 2.6)

Figura 2.5 Menú principal de Calculadora Gráfica Mathlab



Fuente: Elaboración propia

Figura 2.6. Elementos de la ventana calculadora



Fuente: Elaboración propia

La calculadora gráfica Mathlab cubre las siguientes áreas de las matemáticas: aritmética, álgebra, análisis, geometría y estadística.

Aritmética: operaciones con números reales y complejos; cálculo de porcentajes, fracciones (propias e impropias), mínimo común múltiplo, máximo común divisor, logaritmos, raíces, valor absoluto y notación científica entre otros.

Álgebra: resolución de ecuaciones (con una variable) lineales, cuadráticas, cúbicas, polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y en valor absoluto; operaciones con polinomios, cálculo de raíces, factorización; resolución de inecuaciones (con una variable) racionales, lineales, cuadráticas, polinómicas y en valor absoluto; resolución de sistemas de ecuaciones/ inecuaciones lineales y cuadráticos, así como de ecuaciones/inecuaciones con dos variables.

Algebra lineal: matrices y vectores. Operaciones con matrices y vectores. Cálculo de matriz inversa, adjunta y traspuesta. Rango de una matriz. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando ecuaciones de matriz.

Análisis: representación de funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, funciones en valor absoluto y funciones a trozos. Cálculo de límites puntuales e infinitos. Cálculo de derivadas de orden uno, dos y superior, derivadas parciales y matriz hessiana. Calculo de integrales indefinidas y definidas.

Geometría: permite dibujar secciones cónicas tales como la circunferencia, la parábola, la hipérbola y la elipse. Además, permite la representación y el cálculo de funciones trigonométricas. También permite pasar de grados a radianes.

Estadística descriptiva. Cálculo de parámetros de localización: media, moda y mediana; cálculo de parámetros de dispersión: rango o recorrido, varianza, desviación media absoluta, desviación típica y coeficiente de variación; cálculo de parámetros de posición: cuartiles, deciles y percentiles. **Estadística inferencial**. Cálculo de covarianza y coeficiente de correlación, así como de la recta de regresión.

Gráfico: funciones en 2D y en 3D. Esta última solo está disponible en la versión pro.

La aplicación está disponible en 71 idiomas, entre los que se encuentran el español, inglés, alemán, italiano, francés y portugués. La versión gratuita requiere de conexión a internet y contiene anuncios. La herramienta cuenta con un manual de usuario compuesto por veintiún capítulos, en los que se detalla el funcionamiento de cada una de las opciones disponibles. La calculadora gráfica Mathlab solo es compatible con dispositivos Android.

2.2.4 MATHEMATICS

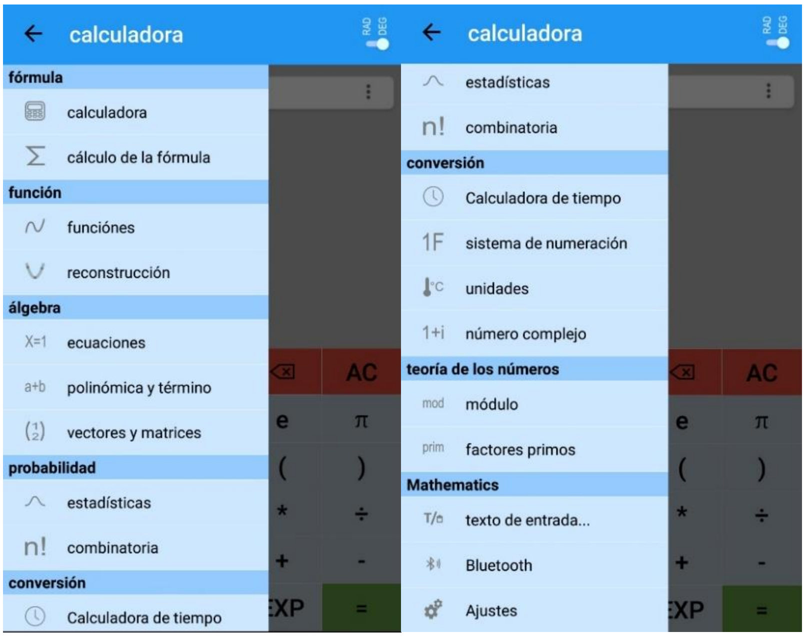
Mathematics resuelve problemas matemáticos utilizando un teclado. Esta herramienta muestra la solución del supuesto de manera automática, sin detallar el paso a paso. La pantalla de inicio cuenta con un botón de menú situado a la izquierda y un botón que permite cambiar el modo de radianes a grados, situado a la derecha. (Figura 2.7)

El menú contiene las siguientes pestañas: calculadora, cálculo de la fórmula, funciones, reconstrucción, ecuaciones, polinómica y término, vectores y matrices, estadísticas, combinatoria, calculadora de tiempo, sistema de numeración, unidades, número complejo, módulo, factores primos, texto de entrada, bluetooth y ajustes. (Figura 2.8)

Figura 2.7. Ejemplo de entrada de datos Mathematics

Fuente: Elaboración propia

Figura 2.8. Menú de Mathematics



Fuente: Elaboración propia

A continuación, se explican cada una de las pestañas anteriormente mencionadas:

Calculadora soporta operaciones de tipo aritmético: suma, resta, multiplicación, división, logaritmos, raíces y exponenciales. **Cálculo de la fórmula**, permite hacer operaciones dada una fórmula guardada.

Funciones se emplea para representar una función y calcular su derivada (orden uno en adelante), integral (indefinida y definida), límite, tabla de valores y la ecuación de la recta tangente a un punto. **Reconstrucción** sirve para crear funciones lineales dados dos puntos de la misma o un punto y su pendiente y funciones polinómicas, racionales y exponenciales dados varios puntos de la misma.

Ecuaciones permite resolver ecuaciones polinómicas y sistemas de ecuaciones lineales. **Polinómica y término** proporciona gráficos en 3D. **Vectores y matrices** soporta operaciones con estos elementos: suma, resta, multiplicación, cálculo de determinante.

Estadísticas se divide a su vez en ocho secciones: listas, tablas de contingencia, distribución binomial, distribución normal, prueba de Gauss, Student-t test, prueba de independencia y regresión lineal. **Combinatoria** permite realizar permutaciones y combinatoria.

Calculadora del tiempo soporta operaciones con horas, minutos y segundos. **Sistema de numeración** incluye los sistemas binario, decimal, octal y hexadecimal. **Unidades** se compone de seis secciones: longitud, área, volumen, temperatura, velocidad y masa. **Número complejo** permite realizar operaciones con números complejos.

Módulo. **Factores primos** calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de varios números, así como su identidad de Bézout's.

Texto de entrada se compone de un cuadro en el que se pueden escribir expresiones. **Bluetooth** se utiliza para compartir soluciones. **Ajustes** es para cambiar la configuración.

La aplicación está disponible en los siguientes idiomas: inglés, alemán, francés, español, italiano y portugués. Mathematics es compatible con dispositivos Android. Para su utilización no requiere de conexión a internet. Permite compartir los resultados. No tiene la función de rehacer.

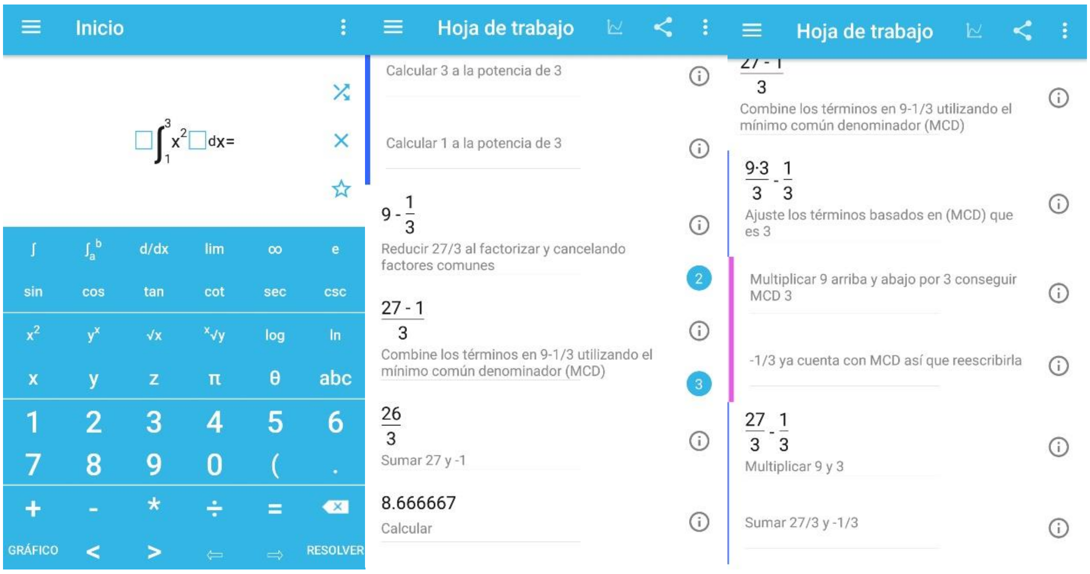
2.2.5 MALMATH

MalMath es un solucionador de problemas de matemáticas con descripción paso a paso y vista detallada. Las expresiones se introducen por medio de un teclado y las soluciones aparecen automáticamente, sin necesidad de conexión a internet. (Figura 2.9)

La aplicación cuenta con un botón superior izquierdo para acceder al menú principal. Este se compone de seis secciones: inicio, hoja de trabajo, gráfico, problema generador, favoritos y donar. Por otro lado, tiene también un botón superior derecho para acceder a la configuración, a la pestaña ayuda o enviar algún comentario. (Figura 2.10)

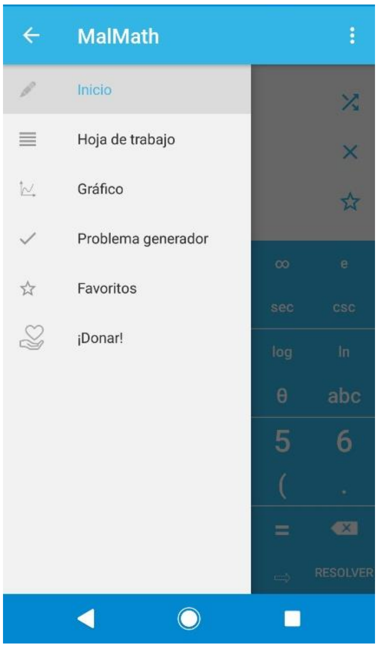
Malmath resuelve operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación; operaciones algebraicas: ecuaciones lineales y de segundo grado; operaciones analíticas: límites, derivadas (primer orden) e integrales (definidas e indefinidas) y representación de funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas y trigonométricas.

Figura 2.9. Ejemplo de entrada de datos, paso a paso y vista detallada en MalMath



Fuente: Elaboración propia

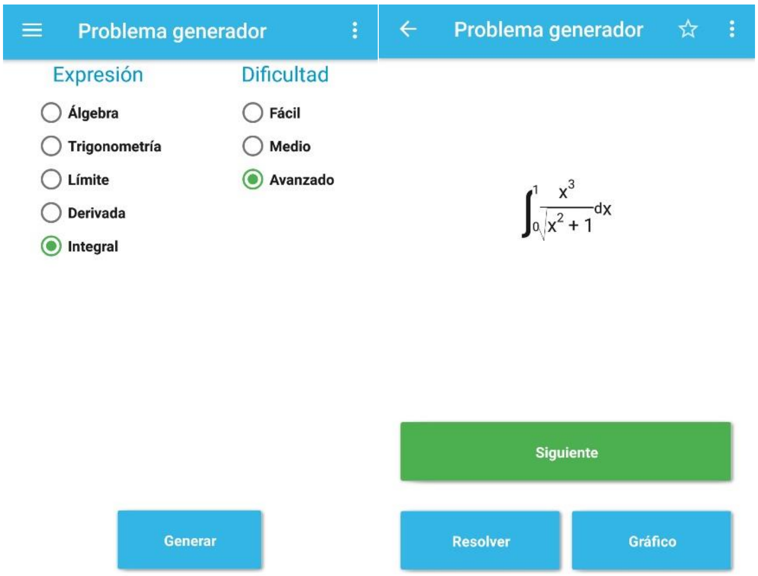
Figura 2.10. Menú principal de MalMath



Fuente: Elaboración propia

Esta herramienta genera problemas de matemáticas aleatorios con varias categorías (álgebra, trigonometría, límite, derivada e integral) y niveles de dificultad (fácil, medio y avanzado). Después de generar el supuesto, este puede ser resuelto de forma tanto analítica como gráfica.

Figura 2.11. Interfaz problema generador MalMath



Fuente: Elaboración propia

Los idiomas en los que está disponible la aplicación son inglés, alemán, francés, español, italiano, portugués, turco, albanés, croata y árabe. Existe la posibilidad de guardar y compartir soluciones y gráficos, además de marcar las favoritas. Compatible con Android.

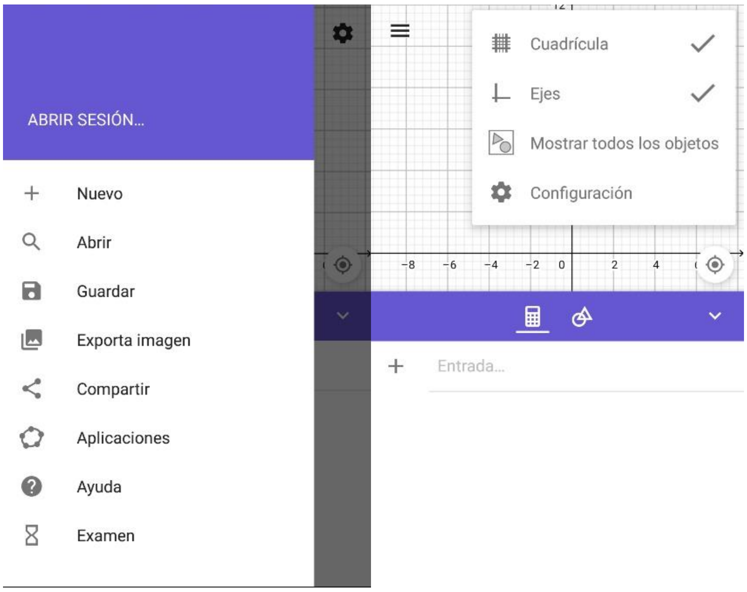
2.2.6 GEOGEBRA

GeoGebra es una herramienta diseñada especialmente para el estudio de álgebra, geometría y cálculo. Está disponible para descargar como programa informático en https://geogebra.softonic.com/. También se puede acceder a GeoGebra a través del siguiente enlace https://www.geogebra.org/ y comenzar a utilizar el programa directamente, sin necesidad de descargarlo previamente. En este apartado se analizará la aplicación descargada desde Google Play en un dispositivo móvil Android, aunque también es compatible con iOS.

La pantalla de inicio consta de un botón superior izquierdo, a través del cual se accede a las pestañas: nuevo, abrir, guardar, exportar imagen, compartir, aplicaciones, ayuda y modo examen. Por otro lado, si se pulsa la rueda dentada que aparece en el lado superior derecho aparecen las opciones: cuadrícula, ejes, mostrar todos los objetos y configuración. (Figura 2.12)

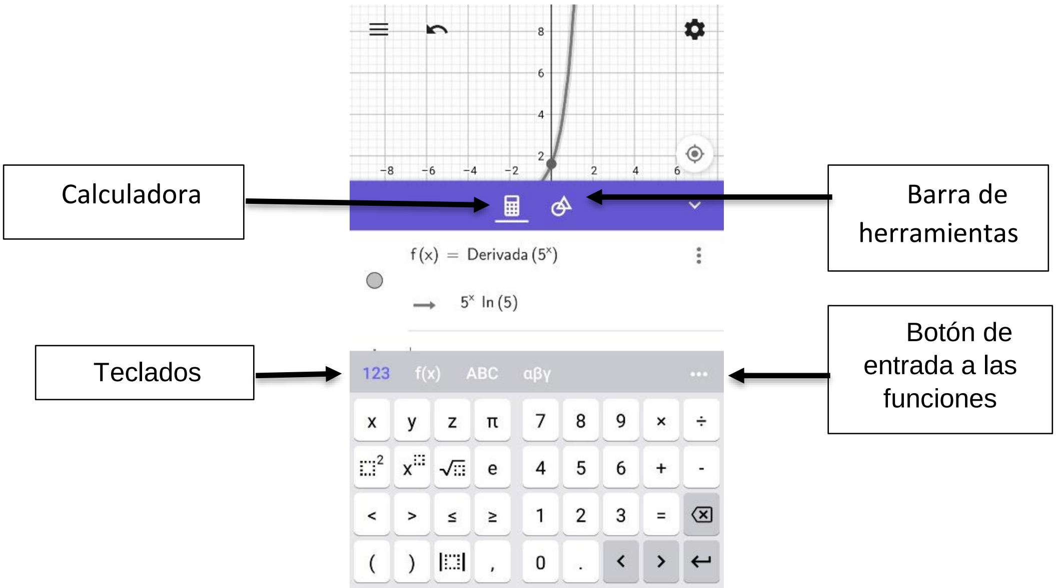
Los datos o expresiones se introducen por medio de un teclado, en el campo entrada. La solución aparecerá automáticamente, mostrando los resultados de forma analítica y gráfica. No proporciona el paso a paso de la solución. GeoGebra tiene cuatro teclados diferentes: un teclado de números, un teclado de funciones, un teclado de letras latinas y un teclado de letras griegas. A estos teclados puede accederse tras pulsar la tecla calculadora. Justo a la derecha de esta tecla se tiene acceso a la barra de herramientas. (Figura 2.13)

Figura 2.12. Menú GeoGebra



Fuente: Elaboración propia.

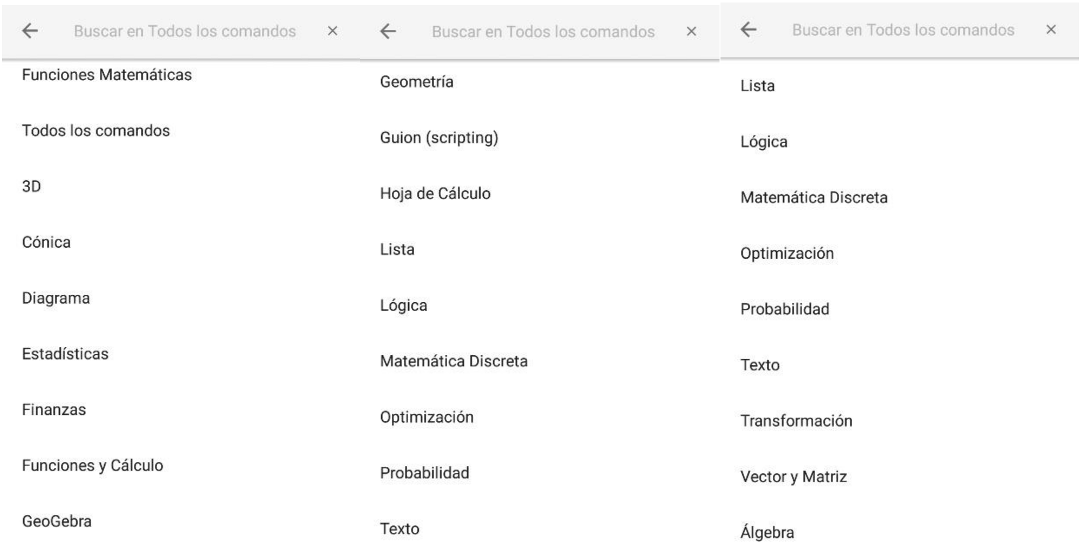
Figura 2.13. Teclados y entrada de datos GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

A la derecha de los cuatro teclados, un botón da entrada a las diferentes funciones de GeoGebra: funciones matemáticas, todos los comandos, 3D, cónica, diagrama, estadísticas, finanzas, funciones y cálculo, GeoGebra, Geometría, guión, hoja de cálculo, lista, lógica, matemática discreta, optimización, probabilidad, texto, transformación, vector y matriz y álgebra.

Figura 2.14. Funciones GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

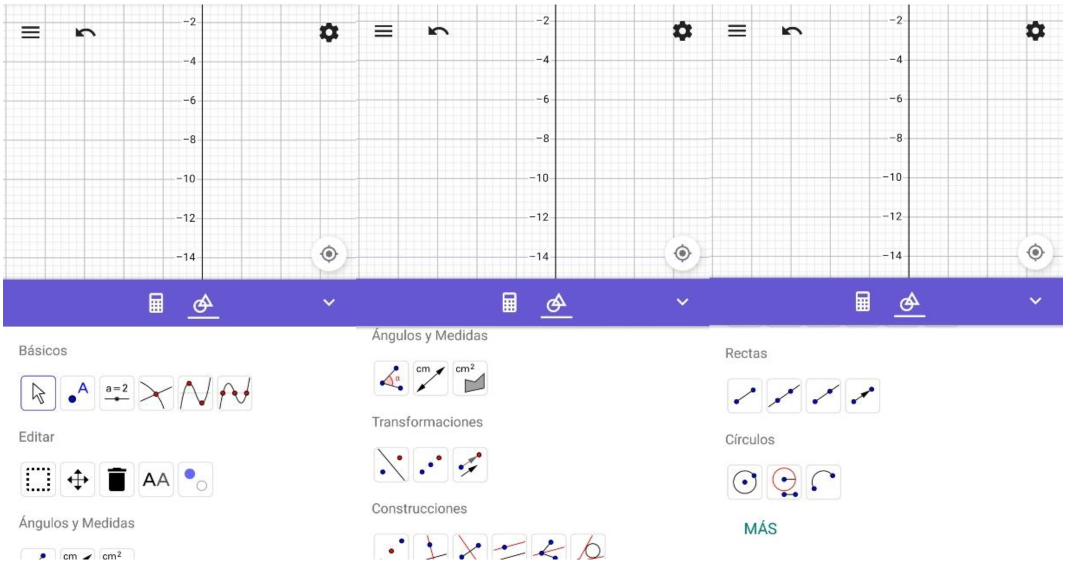
Cada una de las funciones anteriores tiene varias opciones. Además, disponen de un botón a la derecha que proporciona la ayuda necesaria para utilizarlas.

Con GeoGebra se resuelven problemas matemáticos de tipo aritmético: operaciones con números reales y complejos, radicales, logaritmos, potencias, exponenciales y valor absoluto, entre otros; problemas algebraicos: operaciones con expresiones algebraicas, ecuaciones/inecuaciones, sistemas de ecuaciones/inecuaciones, operaciones con vectores y matrices; problemas de análisis: cálculo de límites, derivadas, integrales, entre otros; problemas geométricos: representación de figuras, cónicas, cálculo de áreas, entre otros; problemas de matemáticas financieras; problemas de estadística tanto descriptiva como inferencial; problemas gráficos en 2D y en 3D.

La apariencia de la barra de herramientas se muestra a continuación. Esta se divide en los apartados: básicos, editar, ángulos y medidas, transformaciones, construcciones, rectas, polígonos, círculos, cónicas y otros. (Figura 2.15)

La aplicación está disponible en sesenta y tres idiomas, entre los que están disponibles el inglés, alemán, francés, español, italiano y portugués. Esta herramienta se puede utilizar sin necesidad de estar conectado a internet.

Figura 2.15. Barra de herramientas GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

2.3 COMPARATIVA DE LAS APLICACIONES

En este apartado se realiza una comparativa de las aplicaciones expuestas anteriormente.

En la primera tabla se contrasta el modo de entrada de datos, si posee o no descripción paso a paso de la solución del problema, la cantidad de idiomas en los que está disponible la herramienta y si requiere de conexión a internet o no para funcionar. También se compara si la aplicación dispone de modo ayuda, si dispone de creador de problemas aleatorios, si permite compartir las soluciones y si es compatible o no con dispositivos Android e iOS. (Tabla 2.1)

De la tabla 2.1 se extrae la siguiente información:

- La única aplicación que permite resolver los problemas por medio de una fotografía es Photomath, en todas las demás la entrada de datos se realiza de manera manual.

- Las aplicaciones que ofrecen una descripción paso a paso de la solución son Photomath y Malmath.

- Calculadora Gráfica Mathlab es la aplicación disponible en mayor número de idiomas (71), le siguen GeoGebra (63), Photomath (36), Malmath (10), Mathematics (6) y por último My Script Calculator (1).

- Calculadora Gráfica Mathlab es la única aplicación que requiere de conexión a internet para ser utilizada.
- Mathematics no proporciona un manual de usuario.

- Photomath, My Script Calculator y Calculadora Gráfica Mathab cuentan con la función de rehacer en caso de borrar por equivocación.

- Las aplicaciones que permiten crear problemas aleatorios son Mathematics, Malmath y GeoGebra.

- Todas las aplicaciones permiten compartir las soluciones.

- El conjunto de las aplicaciones es compatible con dispositivos Android. Mathematics y Malmath no son compatibles con dispositivos iOS, el resto sí.

De la figura 2.16 se deduce que la aplicación que ofrece un mayor número de características es Photomath, seguida de Calculadora Gráfica Mathlab, GeoGebra, Malmath, MyScript Calculator y en últmo lugar Mathematics.

En la segunda tabla se comparan los tipos de problemas matemáticos que resuelven cada una de las aplicaciones. (Tabla 2.2).

De la tabla 2.2 se extrae la siguiente información:

- Todas las aplicaciones son capaces de resolver cálculos de tipo aritmético.

- En cuanto a cálculos algebraicos las aplicaciones más completas son Photomath, Calculadora Gráfica Mathlab, Mathematics y GeoGebra.

- Photomath, My Script Calculator, Calculadora Gráfica Mathlab, Mathematics, Malmath y GeoGebra resuelven ejercicios de tipo geométrico en el sentido de que todas realizan operaciones trigonométricas y cálculos básicos utilizados en Geometría. Sin embargo, en este sentido la más completa es GeoGebra, puesto que es una herramienta especializada en geometría.

- El conjunto de las aplicaciones resuelve problemas de tipo analítico: todas realizan operaciones con funciones. Sin embargo, la única aplicación que no calcula límites, derivadas e integrales es My Script Calculator.

- Calculadora Gráfica Mathlab, Mathematics y GeoGebra realizan cálculos estadísticos tanto descriptivos como inferenciales, el resto de aplicaciones no realizan cálculos de tipo estadístico.

- En cuanto a gráficos en dos dimensiones (2D), todas las aplicaciones son capaces de crear gráficos de este tipo. Sin embargo, solo ofrecen gráficos en 3D Calculadora Gráfica Mathlab y GeoGebra.

En la figura 2.17 se contrastan los tipos de problemas que solucionan las aplicaciones. Según el gráfico las aplicaciones más completas son Calculadora Gráfica Mathlab y GeoGebra. La siguiente aplicación más completa es Mathematics. Después va Photomath, a la que siguen Malmath y My Script Calculator.

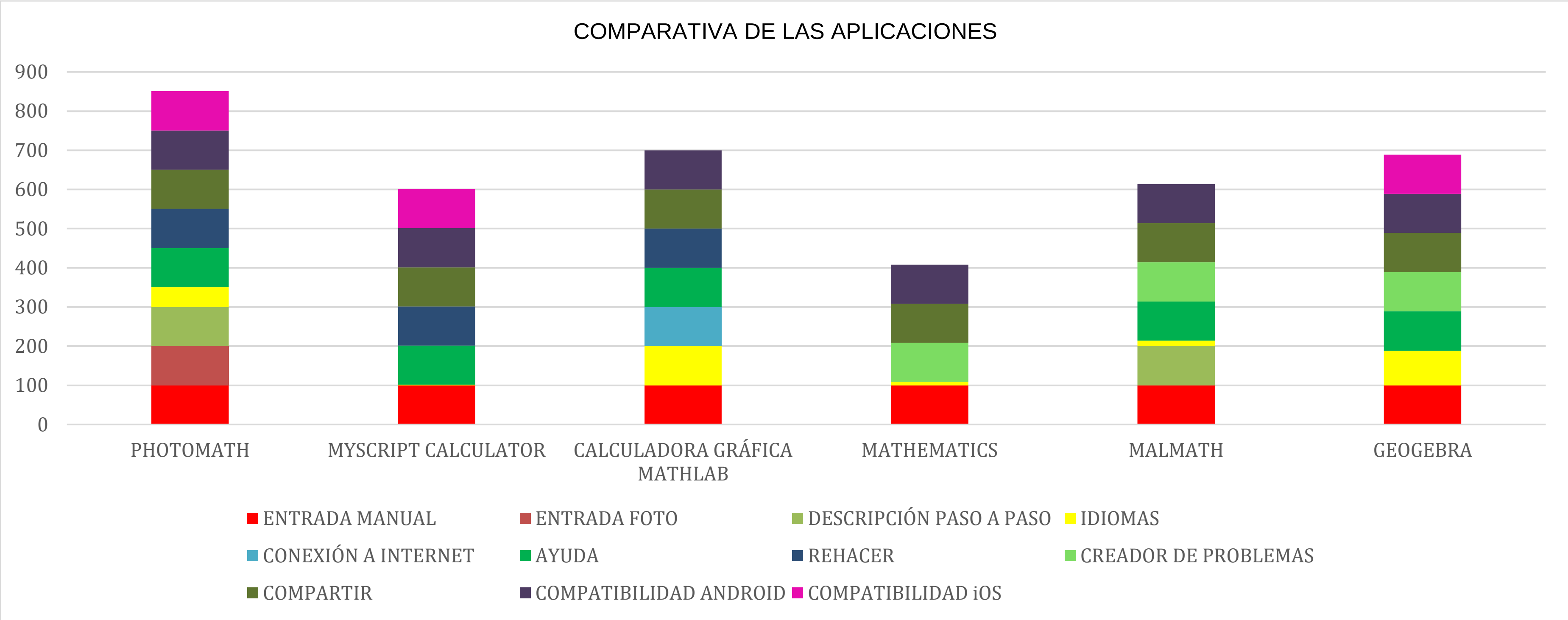
Tabla 2.1 Características de las aplicaciones

	ENTRADA		DESCRIPCIÓN PASO A PASO	IDIOMAS	CONEXIÓN A INTERNET	AYUDA	REHACER	CREADOR DE PROBLEMAS	COMPARTIR	COMPATIBILIDAD	
	MANUAL	FOTO								ANDROID	iOS
PHOTOMATH	✔	✔	✔	36	✘	✔	✔	✘	✔	✔	✔
MYSCRIPT CALCULATOR	✔	✘	✘	1	✘	✔	✔	✘	✔	✔	✔
CALCULADORA GRÁFICA MATHLAB	✔	✘	✘	71	✔	✔	✔	✘	✔	✔	✔
MATHEMATICS	✔	✘	✘	6	✘	✘	✘	✔	✔	✔	✘
MALMATH	✔	✘	✔	10	✘	✔	✘	✔	✔	✔	✘
GEOGEBRA	✔	✘	✘	63	✘	✔	✘	✔	✔	✔	✔

Leyenda	✔ Sí	✘ No

Fuente: Elaboración propia

Figura 2.16. Gráfico comparativo de aplicaciones según sus características



Fuente: Elaboración propia

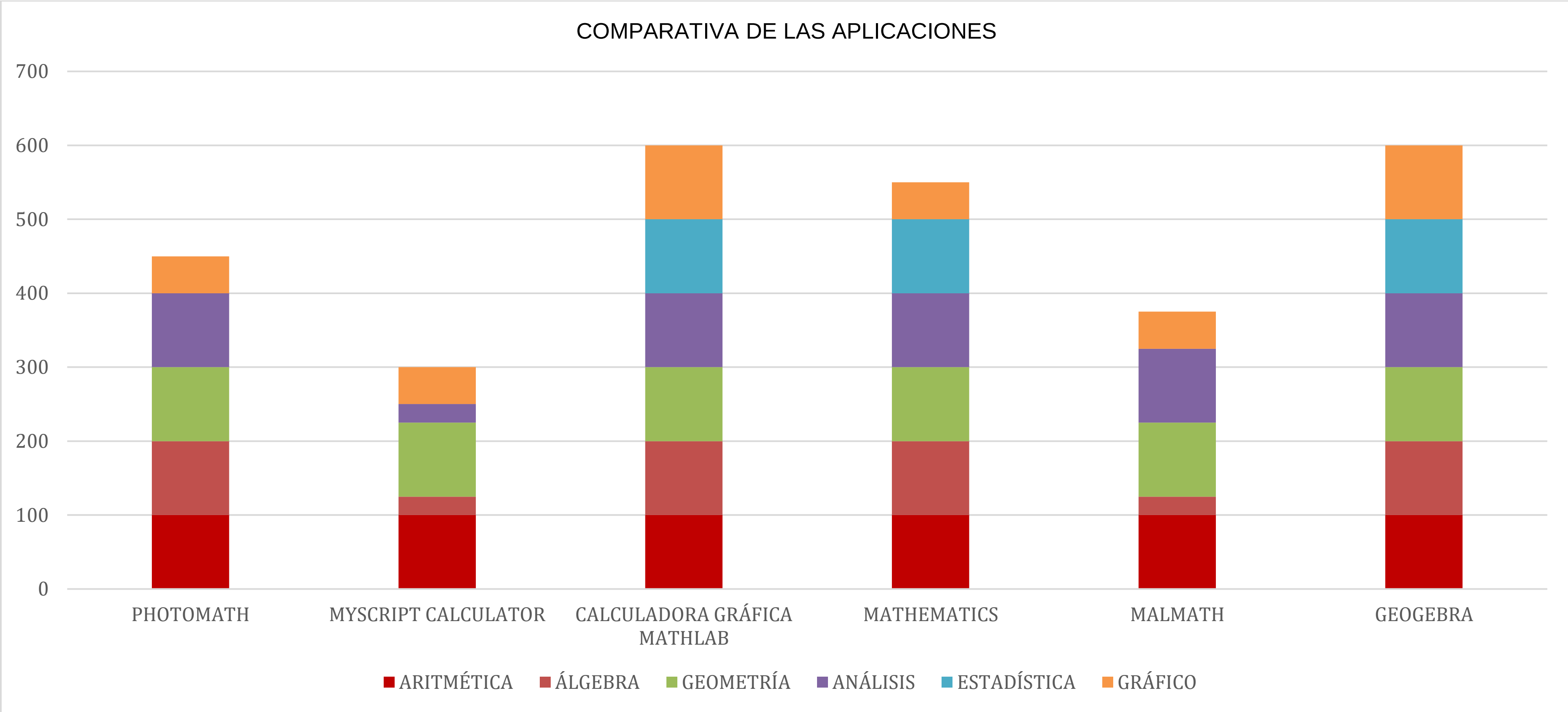
Tabla 2.2. Tipos de problemas que solucionan las aplicaciones

		PHOTOMATH	MYSCRIPT CALCULATOR	CALCULADORA GRÁFICA MATHLAB	MATHEMATICS	MALMATH	GEOGEBRA
ARITMÉTICA		✔	✔	✔	✔	✔	✔
ÁLGEBRA	ECUACIONES	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	INECUACIONES	✔	✕	✔	✔	✕	✔
	SISTEMAS	✔	✕	✔	✔	✕	✔
	MATRICES	✔	✕	✔	✔	✕	✔
GEOMETRÍA		✔	✔	✔	✔	✔	✔
ANÁLISIS	FUNCIONES	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	LÍMITES	✔	✕	✔	✔	✔	✔
	DERIVADAS	✔	✕	✔	✔	✔	✔
	INTEGRALES	✔	✕	✔	✔	✔	✔
ESTADÍSTICA	DESCRIPTIVA	✕	✕	✔	✔	✕	✔
	INFERENCIAL	✕	✕	✔	✔	✕	✔
GRÁFICO	2D	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	3D	✕	✕	✔	✕	✕	✔

Leyenda	✔ Sí	✕ No

Fuente: Elaboración propia.

Figura 2.17. Gráfico comparativo de los tipos de problemas que solucionan las aplicaciones



Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 3

EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA DIDÁCTICA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no es sencillo. “Es natural encontrarse con teorías matemáticas muy abstractas, difíciles de interiorizar si se le enseñan al estudiante de una manera exclusivamente magistral”.(Quesada, 2007)

“La utilización de software y materiales educativos computarizados como un recurso para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se ha convertido en una necesidad y constituye una respuesta ante la problemática que gira en torno de la comprensión cognoscitiva de conceptos y nociones matemáticas en los salones de clase”. (Quesada, 2007)

“Las nuevas tecnologías se utilizan para comunicarse, como herramienta de trabajo y también como instrumento de ocio. Aparecen en todas las parcelas de la vida actual, desde la investigación científica hasta el mundo de la empresa, pasando por la enseñanza. En esta última, se puede considerar que el uso de estos avances favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y la adquisición de destrezas por parte del alumno, mediante una nueva forma de organizar, distribuir, representar y codificar la realidad”. (Ferrer, 2017)

El propósito de este capítulo es exponer la importancia del uso de recursos computacionales en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

3.2. LA DIDÁCTICA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS MEDIADO POR LAS TIC.

Los resultados académicos referentes a la asignatura de matemáticas son mejorables en la mayoría de centros educativos. Algunos investigadores creen que se deben replantear los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en cuanto a metodología. El fin es que las nuevas estrategias permitan al estudiante construir su propio conocimiento. (Quesada, 2007)

En numerosas ocasiones, es frecuente escuchar de un alumno la típica frase de “no entiendo nada”, a pesar de que el profesor le haya explicado varias veces el concepto matemático. Esto puede deberse a que se está empleando un método de enseñanza arcaico y obsoleto. Todo ello pone en riesgo el aprendizaje efectivo de las matemáticas. (Quesada, 2007)

El objetivo del aprendizaje matemático no debe centrarse exclusivamente en el conocimiento de multitud de teoremas o definiciones, sino en el desarrollo de las habilidades cognitivas, aumento de la destreza y disciplina mental. La organización de los pensamientos con arreglo al método matemático permite formular conjeturas, criticarlas y mejorarlas. Todo ello puede conseguirse fomentando un ambiente de motivación, curiosidad, investigación y creatividad en las clases. (Quesada, 2007)(Ferrer, 2017)

Debido a lo anterior, el personal docente debe complementar sus explicaciones con los recursos oportunos disponibles, para hacer las clases más interactivas. Un problema frecuente en las clases de matemáticas es que el alumnado se dedica a copiar las explicaciones del profesor de una pizarra y no interactúa en ningún momento con él. En la mayoría de las ocasiones, tampoco interioriza la explicación y no comprende el objeto matemático. Esto es debido a que se concentra exclusivamente en copiar y no en comprender. Este problema puede solucionarse con el uso del computador en las clases.

La didáctica de las matemáticas utilizando el ordenador o cualquier otro dispositivo tecnológico enriquece el aprendizaje. Se trata de una modalidad educativa en la que las nuevas tecnologías son el medio utilizado para enseñar y no el fin. En este sentido, se debe hacer un uso adecuado de las herramientas digitales, diseñando estrategias específicas de aprendizaje. El uso de estos instrumentos debe estar justificado para obtener así unos resultados positivos. De lo contrario, puede complicarse aún más el proceso de aprendizaje. (Quesada, 2007)

EL uso del computador será efectivo siempre y cuando se utilice con fines educativos en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. El ordenador debe utilizarse en caso de que sea más eficaz o eficiente que otros medios. Éste aumenta la eficacia y eficiencia de las explicaciones docentes y permite diseñar estrategias didácticas que no son posibles de diseñar con otros medios. Además, proporciona una atención personalizada al estudiante que podrá autocorregir sus fallos y aprender de los mismos. La computadora aumenta también la motivación del alumno, que podrá interactuar con la materia objeto de estudio. De esta manera, el alumno desempeña un papel activo en el proceso de aprendizaje.(Quesada, 2007) (Ferrer, 2017)

El ordenador constituye un recurso más, puesto que la tarea del docente sigue siendo la de dirigir, planificar y evaluar. De nada sirve disponer de herramientas digitales para impartir clases de matemáticas si el docente no tiene claro lo que quiere transmitir a sus educandos.

Por otro lado, la necesidad de incorporar nuevas formas de enseñanza lleva consigo la necesidad de actualizar el currículo de los docentes. Lo cierto es que éstos deben aumentar su formación en informática y aprender a utilizar los recursos digitales disponibles. La realización de cursos para fortalecer su preparación tecnológica y pedagógica, puede ser una opción. (Quesada, 2007) (Pozuelo Echegaray, 2014)

Otro problema que puede solucionarse con el uso de las TIC es la carecía de atención personalizada a los alumnos que manifiestan los sistemas de enseñanza tradicionales. En la asignatura de matemáticas en concreto, juega un papel fundamental el conocer las características individuales de cada individuo. No todos los estudiantes interiorizan las mismas definiciones de la misma forma ni todos tienen la misma base. Cada uno necesita un plan personalizado de enseñanza, que no es sencillo de llevar a cabo. Aún más, si solo de utiliza una pizarra para dar una clase a un público de más de cien personas.

3.3 HERRAMIENTAS PARA LA DIDÁCTICA Y EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO.

Hoy día, existen numerosos instrumentos digitales que se pueden utilizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este apartado se hace referencia a algunas de esas herramientas.

Páginas Web tales como Vadenúmeros, Vitutor o Khan Academy proporcionan explicaciones sobre conceptos matemáticos seguidas de una lista de ejercicios para practicar.

Canales de YouTube tales como Unicoos ofrecen a los estudiantes la posibilidad de asistir a una clase gratuita de matemáticas desde su casa. El inconveniente de utilizar YouTube como medio para aprender es que, si surge alguna duda en el momento de la visualización del vídeo, es muy probable que no se resuelva en ese instante. Pues, al no ser en directo, la única posibilidad es dejar un comentario en el video y esperar a que el autor responda.

Otra opción para recibir clases de matemáticas desde casa sería la del profesor online. Los profesores en línea imparten clases de matemáticas por medio de web cam. La ventaja, al ser en directo, se pueden preguntar las dudas en el tiempo que dure la video conferencia. El inconveniente, suelen ser de pago.

Un instrumento que puede servir de apoyo a las explicaciones del docente en las aulas es la pizarra digital interactiva (PDI). Se trata de un dispositivo electrónico que "permite controlar y modificar cualquier recurso digital que se proyecte sobre ella, así como guardar en el disco duro o en un alojamiento virtual, todo lo que se ha realizado". La ventaja de esta herramienta es que permite la interacción entre profesor y alumno. Además, posibilita que el alumno pueda tener las explicaciones de clase sin tener que copiarlas, a diferencia de la pizarra tradicional. (Noda Herrera, 2009)

Por otro lado, las calculadoras tradicionales de bolsillo han evolucionado pasando de realizar únicamente cálculos aritméticos a realizar otro tipo de funciones. Las hay científicas, financieras, gráficas y programables, entre otras. Todas ellas sirven de apoyo a la realización de operaciones matemáticas.

También se pueden realizar operaciones haciendo uso de hojas de cálculo como Excell, disponible en el paquete Microsoft Office, o incluso utilizar la hoja de cálculo de los documentos de Google. Ésta última puede compartirse y ser modificada por varios usuarios, desde distintos dispositivos.

Además, existen programas informáticos que sirven para realizar todo tipo de cálculos matemáticos. Entre ellos destacan Cabri, Derive, Logo, Mathematica, GeoGebra, Descartes y Cinderella, entre otros. Este tipo de software puede ser utilizado por el docente para apoyar sus explicaciones, generar problemas o mostrar de manera interactiva determinados conceptos.

Por último, mencionar las aplicaciones móviles disponibles para resolver problemas matemáticos, tales como Photomath, Calculadora Gráfica de Mathlab o Malmath, analizadas en el capítulo anterior.

Cabe destacar que la didáctica y el aprendizaje de las matemáticas son procesos distintos. Es por este motivo que las herramientas TIC que deben utilizarse en cada uno de estos procesos deben ser también diferentes. Aunque a veces se puedan utilizar las mismas. En este sentido el uso de páginas web, canales de YouTube, profesor en línea, calculadoras o aplicaciones móviles es más apropiado para el aprendizaje de las matemáticas, lo que no quiere decir que no se puedan utilizar en la enseñanza. Por otro lado, el uso de pizarras digitales o programas informáticos es más idóneo en el proceso de didáctica.

3.4. EL APRENDIZAJE MÓVIL O MOBILE LEARNING.

“La fuerte irrupción de los dispositivos móviles y los medios de comunicación social en nuestra vida cotidiana ha transformado no sólo el modo en que nos comunicamos y relacionamos, sino también el modo en que aprendemos y enseñamos”. (Mart, 2011)

La revolución digital ha traído consigo la aparición de una nueva forma de aprendizaje denominada Mobile Learning o m-learning basada en el uso de dispositivos inalámbricos. En un primer momento, las definiciones sobre este tipo de aprendizaje se centraban más en la parte tecnológica, hoy día, tienen una percepción más educativa. Algunos autores consideran al m-learning una evolución del e-learning (aprendizaje con TICs), otros lo definen como una forma de aprendizaje a distancia y otros lo consideran una forma de apoyar, mejorar y desarrollar la enseñanza y el aprendizaje empleando tecnologías ubicuas de mano. (Menéndez, Machado, & Esteban, 2015)

Mobile Learning puede aplicarse con diferentes fines pedagógicos: distribuir contenidos, facilitar la reflexión de procesos, crear e implantar juegos móviles, impulsando el aprendizaje autodidacta. (Mart, 2011)

Las ventajas del uso de Mobile Learning en educación según (Mart, 2011) son las siguientes:

- “Aprendizaje centrado en el entorno y contexto del estudiante.
- Permite la publicación directa de contenidos, observaciones y reflexiones.
- Favorece la interacción y la colaboración.
- Facilita la creación de comunidades de aprendizaje.
- Permite que las nuevas habilidades o conocimientos se apliquen inmediatamente.
- Enfatiza el aprendizaje autodirigido y diferenciado.
- Ofrece posibilidades de capturar fácilmente momentos irrepetibles sobre los cuales hacer debate y reflexión.
- Favorece la colaboración distribuida y numerosas oportunidades de trabajo”.

El aprendizaje móvil cuenta con una serie de limitaciones, pero teniendo en cuenta los rápidos avances tecnológicos, estos inconvenientes terminarán desapareciendo. Destacan los siguientes: limitaciones físicas tales como el tamaño de la pantalla o la capacidad de almacenamiento del dispositivo; limitaciones de software y contenido; limitaciones de conectividad y velocidad de redes y, por último, limitaciones del entorno físico. (Tech, 2011)

Las ventajas del uso de dispositivos móviles como una forma de aprendizaje prevalecen sobre las limitaciones. Estos permiten conectarse a internet y consultar cualquier duda. Además, existen numerosas aplicaciones móviles disponibles, entre las que se encuentran las analizadas en el capítulo anterior que pueden utilizarse para aprender a resolver problemas matemáticos.

A continuación, se exponen las utilidades de las aplicaciones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas:

- **Corrección de errores**: mediante la resolución del problema, aplicaciones tales como Calculadora Gráfica de Mathlab proporcionan la solución en cuestión de segundos. Esto permite al alumno saber si ha realizado correctamente un problema resuelto anteriormente por él mismo, en caso de que no cuente con un docente especializado en la materia que pueda corregir el ejercicio en ese momento.

- **Explicación de la solución**: si el alumno no ha resuelto un problema con éxito y no sabe cómo llegar a la solución correcta, aplicaciones como Photomath facilitan una descripción detallada paso a paso.

- **Creación de problemas**: si se quiere practicar un tipo concreto de ejercicio matemático, aplicaciones tales como Malmath cuentan con un generador de problemas aleatorios.

- **Interacción con la materia**: aplicaciones tales como GeoGebra, permiten explorar conceptos matemáticos diversos e ir interiorizándolos por medio de un proceso de prueba y error.

- **Visualización de conceptos:** en determinadas ocasiones se necesita visualizar un objeto matemático para comprenderlo. En estos casos aplicaciones como GeoGebra pueden ayudar.

- **Apoyo en las clases:** si no se ha podido terminar de copiar la solución de un problema, herramientas tales como Malmath pueden servir para resolverlo.

- **Calculadora de bolsillo:** todas las aplicaciones cuentan con una calculadora básica de la que se puede hacer uso en caso de que no se tenga otro medio para realizar cualquier operación.

- **Aprendizaje en cualquier lugar:** el uso de los dispositivos móviles permite aprender desde cualquier lugar.

A pesar de todas las ventajas con las que cuenta este tipo de aprendizaje, es complicado encontrar centros donde el móvil esté presente en la enseñanza. Esto puede deberse o bien al desconocimiento de los recursos didácticos que proporcionan o a su escasez. Lo cierto es que cada vez son más las aplicaciones móviles disponibles y mejores sus características. Incluso es posible desarrollar aplicaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas sin ser un experto en crear aplicaciones, gracias al proyecto App Inventor desarrollado por Google. (Menéndez et al., 2015)

CONCLUSIONES

La aparición de las Tecnologías de la Información y Comunicación ha sido gracias al conocimiento matemático. Hoy día, estas tecnologías sirven de soporte a las matemáticas y ayudan tanto a enseñarlas como a aprenderlas.

El aprendizaje de las matemáticas siempre ha sido un proceso complejo. La asignatura de matemáticas suele tener alto porcentaje de suspensos. Muchos conceptos no se entienden con una simple explicación. El cambio en la forma de enseñar puede disminuir este problema.

Lo que está claro es que el cambio se debe aplicar desde la infancia. En matemáticas, es muy importante tener una buena base. El aprendizaje matemático se asemeja a la construcción de una casa, no se puede empezar por el tejado. El papel del docente es guiar al alumno y proporcionarle las herramientas y los pasos de esa construcción.

En este sentido, las tecnologías pueden ayudar a introducir la base matemática correcta desde pequeño. La lógica tiene que ir desarrollándose poco a poco. Así, cuando se alcancen niveles superiores, no existirá tanta dificultad porque cuando se domina lo anterior, lo nuevo es solo una extensión de lo ya conocido.

También es importante desarrollar la capacidad de comparar, relacionar y estructurar conceptos, así como de organizarlos. La posesión de estas cualidades facilita el aprendizaje matemático. De hecho, una persona puede ser muy buena realizando cálculos, pero si no sigue unos pasos estructurados para resolver un problema, probablemente se equivocará.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas el papel del docente es más importante incluso que el del alumno. Es cierto que, si el alumno no trabaja y no practica, no obtendrá buenos resultados. Pero, para poder practicar y obtener unos resultados positivos, primero tiene que comprender el concepto. Por lo tanto, si no se le proporciona la explicación oportuna, y el alumno nunca llega a entender el concepto, no podrá resolver un problema matemático con éxito.

Por todo ello, el cambio en la enseñanza de las matemáticas no va solo de la mano de las nuevas tecnologías, sino también, en cómo estas se pueden utilizar para diseñar nuevas estrategias pedagógicas enfocadas en la conducción hacia el orden y la lógica. En esta línea, el docente introducirá las herramientas digitales en sus estrategias pedagógicas cuando no pueda llevarlas a cabo de otra manera.

El uso de las nuevas tecnologías en cuanto a enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ayuda a ahorrar tiempo en las explicaciones. Pues el docente ya no tiene que resolver el problema paso a paso en directo, lo puede llevar hecho desde casa y mostrarlo en la pizarra digital. Con este apoyo, puede centrarse en explicar lo que no se entiende. Al mismo tiempo, los alumnos pueden estar concentrados en esa explicación sin sentir la presión de copiar para tener las soluciones. Pues como la pizarra permite guardar todo lo que se hace, el profesor puede pasar la solución del problema. Además, si de un mismo problema se quieren sacar otros cambiando los números, gracias a las tecnologías esto es posible. De esta manera no se pierde tiempo en tener que volver a copiar todo el proceso. Simplemente con darle a una tecla cambiará todo. Todo esto hace que las clases sean mucho más productivas y eficientes. De esta manera se aprende más en menos tiempo.

Numerosos centros cuentan con las condiciones para llevar a cabo una transformación educativa que rompa con la enseñanza tradicional. Sin embargo, la renovación didáctica no ha llegado. Pues, a pesar de disponer de los equipamientos necesarios, no se utilizan de una forma innovadora ni provechosa. “No se trata de dar una clase magistral con una pizarra digital, se trata de utilizar el recurso de otra forma, realizando un cambio en la forma de educar que concuerde con la realidad que rodea a la escuela, para que ésta no quede desfasada respecto a su entorno”. (Pozuelo Echegaray, 2014)

El futuro es que se utilice el m-learning en las clases. El uso del móvil en las clases puede ahorrar muchos costes, en el sentido de que cada persona posee un móvil y si cada persona lleva su propio móvil a clase no es necesario invertir en ordenadores para todos que son mucho más costosos. Además, el futuro será que los móviles puedan hacer incluso las mismas funciones que un ordenador y a pesar de su pequeña pantalla, seguro que habrá algo que proyecte la imagen en una pantalla grande. Es común que en las clases haya mayor número de alumnos que ordenadores y algunos no tengan pantalla. Este problema se puede solucionar con el uso de dispositivos móviles en clase.

Para cerrar este trabajo, se cita una frase de B. Eckmann “respecto al ordenador, he oído una y mil veces decir: les guste o no a los matemáticos, el ordenador está allí; yo no estoy de acuerdo con esta afirmación: nos gusta el ordenador y lo usamos, más vuelvo la frase por pasiva y respondo que, les guste o no el ordenador, las matemáticas están ahí”. (Quesada, 2007)

BIBLIOGRAFÍA

Amanda, Mas Bleda. F Aguillo, I. (2015). *La web social como nuevo medio de comunicación y evaluación científica*. (UOC, Ed.) (Javier Gua). UOC. Retrieved from http://ebookcentral.proquest.com/lib/uses/detail.action?docID=4536346.

Apolinar, S. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*.

Belloc, C. (2012). *Las Tecnologías de la Información y Comunicación en el aprendizaje*.

Cervera, J. (2016). IBM PC: 35 años de revolución informática. Retrieved from https://www.eldiario.es/tecnologia/IBM-PC-anos-revolucion-informatica_0_549795574.html

Coello, C. A. C. (2000). breve historia de las aportaciones matematicas a la computacion..pdf. *Miscelanea Matemática*, *31*, 29–60.

Digital, R., & York, N. (2010). Computation and mathematics paradoxes. computación y paradojas matemáticas, Jhon Sideleat Tasenm, (3), 9–15.

Fernández Tovar, E., & Bercht, M. (2016). Explorando la dimensión afectiva entre el estudiante y el conocimiento matemático mediado por las TIC. *Tecnologias, Cinted-Ufrgs Novas*, *14*, 1–9.

Ferrer, D. M. (2017). Las nuevas Tecnologías y el Aprendizaje de las Matemáticas Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *42*(January 2007).

Gifreu, A. (2013). *Pioneros de la tecnología digital: ideas visionarias del mundo tecnológico actual*. (UOC, Ed.). Barcelona: Sònia Poch Masfarré. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com/lib/uses/detail.action?docID=3223020.

Guti, C. (1999). El Teorema de Incompletitud de Gödel (Versión para no iniciados) ∗, *1*, 1–9.

López, R. (2015). El origen de las calculadoras actuales: la Pascalina, *17*, 59–60.

Magnet. (2017). La historia detrás de Donald Knuth, el padre de la biblia de la programación moderna.

Mart, M. C. (2011). Mobile Learning : aproximación conceptual y prácticas colaborativas emergentes. *UT. Revista de Ciències de l'Educació*, 43–50.

Martin Delgado, M. A. (2013). Alan Turing and the origins of complexity. *Arbor Ciencia, Pensamiento Y Cultura*, *189–764*.

Menéndez, F. A., Machado, A. M., & Esteban, C. L. (2015). Tecnología móvil y enseñanza de las matemáticas : una experiencia de aplicación de App Inventor Mobile technology and teaching mathematics : an experience of application of App Inventor, *32*(3), 77–85.

Noda Herrera, A. (2009). Pizarra digital interactiva en aulas de matemáticas. *Números, Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *72*, 121–127. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros%0AISSN:

Pozuelo Echegaray, J. (2014). ¿Y si enseñamos de otra manera ? Competencias digitales. *Revista Digital de Investigación En Docencia*, *2*(1), 21.

Quesada, E. V. (2007). Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.*, *3*, 45–67.

Rodríguez, Penin, A. (2007). *Sistemas scada* (Marcombo). Barcelona.

Tech, V. (2011). A Pedagogical Framework for Mobile Learning: Categorizing Educational Applications of Mobile Technologies into Four Types. Retrieved from http://www.irrodl.org/index.php/irrodl/article/view/791/1699?utm_sourc

Varella, A. M. V. (2010). *Introducción a la informática y al uso y manejo de aplicaciones comerciales*. (I. E. SL, Ed.). Vigo.

Wilson, B. (2015). John Blankerbaker, el hombre que creó la primera computadora personal de la historia. Retrieved from http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/11/151109_tecnologia_john_blankenbaker_hombre_creo_primera_computadora_personal_lv