



**FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

GRADO EN ECONOMÍA

**ANÁLISIS DEL MODELO DE CRECIMIENTO CÍCLICO DE
GOODWIN
APROXIMACIÓN A LA ECONOMÍA ESPAÑOLA (2002-2016)**

Trabajo Fin de Grado presentado por Javier García Clemente,
siendo el tutor del mismo el profesor Francisco Velasco Morente.

Vº. Bº. del Tutor/a/es/as:

Alumno/a:

D. Francisco Velasco Morente

D. Javier García Clemente

Sevilla, 29 de Mayo de 2018



GRADO EN ECONOMÍA

**FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

**TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2017-2018]**

TÍTULO:

**ANÁLISIS DEL MODELO DE CRECIMIENTO CÍCLICO DE GOODWIN.
APROXIMACIÓN A LA ECONOMÍA ESPAÑOLA (2002-2016)**

AUTOR:

JAVIER GARCIA CLEMENTE

TUTOR:

D. FRANCISCO VELASCO MORENTE

DEPARTAMENTO:

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA I

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y EMPRESA

RESUMEN:

El modelo de crecimiento cíclico de Goodwin es un modelo macroeconómico atípico ya que permite describir los ciclos económicos a partir de factores endógenos, haciendo uso de ecuaciones diferenciales no lineales.

La última crisis ha vuelto a poner de manifiesto la necesidad de utilizar este tipo de modelos, y la coyuntura de la economía española en el presente siglo parece un escenario de prueba óptimo para el mismo. Así, en el presente trabajo, además de realizar un análisis acerca del modelo con herramientas analíticas y gráficas como el software *Mathematica*, se trabaja con cifras reales de la economía española en el periodo 2002-2016 que permitirán extraer ciertas conclusiones acerca de la validez y el poder explicativo de este modelo en el contexto español más reciente.

PALABRAS CLAVE:

Ciclo endógeno; Goodwin; Dinámica no lineal; Economía española; Crecimiento.

ABSTRACT:

Goodwin's growth cycle is an atypical macroeconomic model due to the fact that it allows us to describe economic cycles from endogenous factors using nonlinear differential equations.

The last crisis has revealed once again the need to use this kind of models, and the Spanish economy situation in the current century seems to be an optimal test scenario for it. Therefore, in the present piece of work, in addition to making an analysis about the model with analytics and graphics tools as the software *Mathematica*, real Spanish economic data from 2002 to 2016 is used, which allows us to draw certain conclusions about the validity and explanatory power of this model in the recent Spanish context.

KEY WORDS:

Endogenous cycle; Goodwin; Nonlinear dynamics; Spanish economy; Growth.

ÍNDICE

1. CICLOS ECONÓMICOS Y SU MODELIZACIÓN.....	9
1.1. INTRODUCCIÓN.....	9
1.2. EL MODELO DE CRECIMIENTO CÍCLICO DE GOODWIN.....	10
2. MARCO TEÓRICO DEL MODELO	11
2.1. DEFINICIÓN DE VARIABLES.....	11
2.2. SUPUESTOS DEL MODELO	11
2.3. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO	12
2.4. ANÁLISIS DEL MODELO	14
3. APLICACIÓN A LA ECONOMÍA ESPAÑOLA (2002-2016)	19
3.1. RECOPIACIÓN Y TRATAMIENTO DE DATOS ESTADÍSTICOS.....	19
3.2. VALORES EMPÍRICOS PARA LAS VARIABLES DEL MODELO	21
3.3. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.....	21
3.4. ESTIMACIONES DEL MODELO VS VALORES EMPÍRICOS.....	22
3.4.1. <i>Dispersión en los valores de u y v observados.</i>	26
3.4.2. <i>Valores medios u^* y v^* constantes a largo plazo.</i>	26
3.4.3. <i>Correlación en los valores de u y v observados.</i>	27
3.5. ANÁLISIS ACERCA DE LOS SUPUESTOS DEL MODELO	28
3.5.1. <i>Economía de dos factores y Ley de Say</i>	29
3.5.2. <i>Parámetros constantes: Ratio capital/output (k), tasa de crecimiento de la productividad (α) y tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo (β)</i>	29
3.5.3. <i>Curva de Phillips clásica en términos reales (γ, ρ)</i>	32
4. RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES DEL ESTUDIO	35
5. BIBLIOGRAFÍA	37
6. ANEXO	39

CAPÍTULO 1

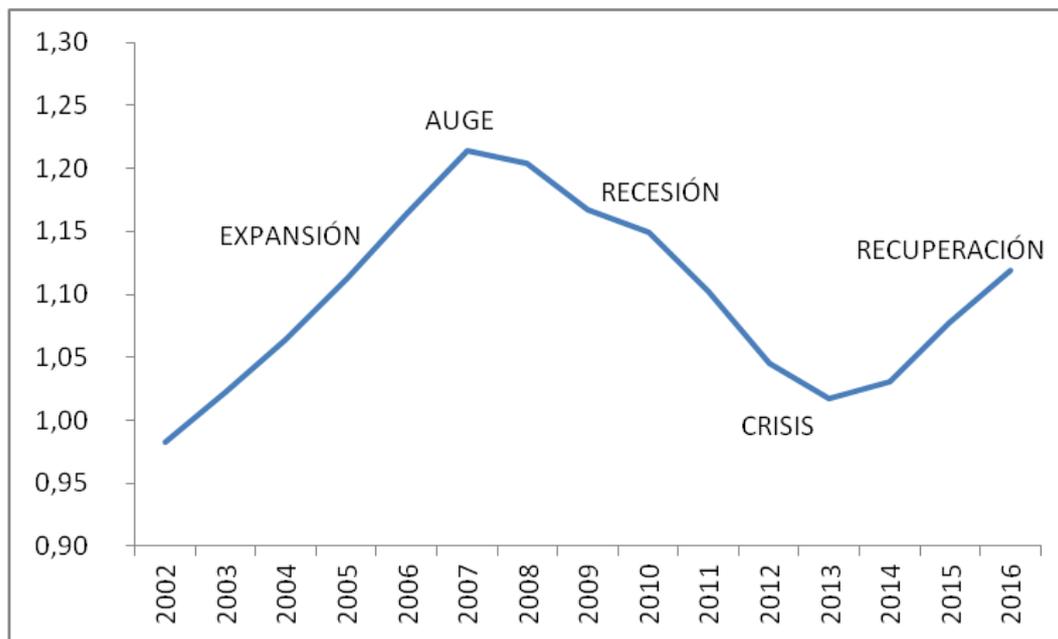
CICLOS ECONÓMICOS Y SU MODELIZACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

A raíz de la última crisis económica y social que se inició en los años 2007-2008, la idea de que la economía tal y como la entendemos hoy día a nivel macro sigue una dinámica cíclica, está más presente que nunca en el acervo social. No en vano, la experiencia muestra a través de la historia económica moderna dicho comportamiento que conduce periódicamente a las economías desde las recesiones a las expansiones y desde el mayor boom a la crisis más profunda una y otra vez. Es posible pensar por tanto que la ciclicidad debe ser tratada como una característica intrínseca al menos del sistema de producción capitalista tal y como es conocido.

Numerosos economistas han tratado de estudiar este fenómeno propio de las economías de mercado desde diferentes perspectivas, sin embargo, en esta ocasión será suficiente con tomar la idea básica de lo que de forma consensuada se considera un ciclo económico estándar. Este debe de reflejar las fluctuaciones de la actividad económica agregada, generalmente de un país, y para un período de tiempo determinado. En el mismo debe ser posible distinguir periodos de expansión, auge, recesión, crisis y recuperación para completar un ciclo. Un ejemplo de ello se puede ver en la Figura 1.1.

Figura 1.1. Ciclo económico descrito por el PIB a precios de mercado español entre 2002-2016 (ud: billones de euros, precios constantes, deflactados por IPC anual base 2016)



Fuente: Elaboración propia, datos INE.

En base al análisis previo, ¿tiene sentido plantear modelos macroeconómicos en los que las desviaciones de las principales macromagnitudes (renta, producción, empleo, etc.) son producidas solo y exclusivamente por factores “exógenos”? ¿Es cierto que la economía siempre se encuentra en un nivel de crecimiento potencial hasta que se enfrenta a factores distorsionantes (shocks externos, cambios técnicos, factores político-legales, culturales...)?

Parece difícil encontrar una respuesta ya que dependerá de si se consideran o no esos factores como parte del propio funcionamiento de la economía.

Desde un punto de vista crítico, intentar aislar esos factores de la economía es el resultado de tratarla como una ciencia independiente del resto y de la propia sociedad, situándola así donde pierde su razón de ser. Por otro lado, el economista Tönu Puu en *Nonlinear Economic Dynamics*¹ se pregunta si realmente un modelo es del todo dinámico cuando únicamente explica el progresivo deterioro del eterno equilibrio por una desviación introducida de manera exógena.

1.2. EL MODELO DE CRECIMIENTO CÍCLICO DE GOODWIN

El modelo de crecimiento cíclico de Richard Goodwin² es un modelo macroeconómico formado por ecuaciones diferenciales. A diferencia de la gran mayoría de los modelos utilizados en macroeconomía en los cuales las fluctuaciones económicas tienen su origen en shocks supuestamente exógenos, este modelo explica los ciclos económicos a partir de factores endógenos, apoyando sus bases en el modelo de Harrod-Domar y en la Curva de Phillips.

En este caso existe un comportamiento cíclico, el cual es producido por el choque de fuerzas antagónicas propio del sistema, o en última instancia, debido al conflicto distributivo capital-trabajo.

Otra particularidad es que utiliza un sistema no lineal. H.-W. Lorenz en su libro *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*³ reivindica la utilización de modelos dinámicos no lineales en economía afirmando que el mundo real es así, y a pesar de que, desafortunadamente, en ocasiones no sea posible resolverlos de manera exacta, sí es posible realizar un estudio cualitativo de su comportamiento.

Pero... ¿Es en realidad el comportamiento del modelo de crecimiento cíclico de Goodwin, con sus restrictivos supuestos y sus limitaciones, una buena aproximación a la dinámica de la economía real?

Para intentar responder a dicha pregunta se ha planteado un ajuste del mismo para el caso español en un periodo de 15 años (2002-2016), comparando los resultados derivados del modelo con las cifras reales y analizando algunos de los rasgos más característicos de su comportamiento. A pesar de tratarse de un objetivo ambicioso, se hallaron ciertas correspondencias con el comportamiento teórico de las variables, a la vez que se detectaron posibles deficiencias en el modelo.

¹ Puu T. (1991) *Nonlinear Economic Dynamics. In: Nonlinear Economic Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg (p. 2)

² Presentado por primera vez en Goodwin, R. M. (1967) *A Growth Cycle*, in C.H. Feinstein, editor, *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge University Press.

³ Lorenz, H.-W. (2002). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion (Lecture Notes in Mathematics)* (Second Ed.) (p. 26)

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO DEL MODELO

2.1. DEFINICIÓN DE VARIABLES

En primer lugar, y para comprender su planteamiento inicial, se muestra un cuadro que introduce la notación de las variables principales que intervienen en el modelo⁴ (Tabla 2.1).

Tabla 2.1. Notación de las variables

Producción	Y
Factor trabajo	L
Factor Capital	K
Nivel de salarios	w
Participación de los salarios	u
Fuerza (oferta) de trabajo ⁵	N
Tasa de empleo	v

2.2. SUPUESTOS DEL MODELO

- a. La productividad laboral denotada por 'a' es exógena, siguiendo la siguiente relación:

$$\frac{Y}{L} = a = a_0 e^{\alpha t}; \text{ con } \alpha > 0 \implies \frac{\dot{a}}{a} = \alpha; \dot{a} = \alpha a$$

- b. La fuerza de trabajo 'N' también es exógena y viene dada por:

$$N = N_0 e^{\beta t}; \text{ con } \beta > 0 \implies \frac{\dot{N}}{N} = \beta; \dot{N} = \beta N$$

- c. Los factores de producción son el capital y el trabajo, ambos homogéneos y sin especificar.

- d. Todas las cantidades se expresan en términos reales y netos.

- e. Los salarios se destinan al consumo y los beneficios del capital se transforman en inversión. Implícitamente esto supone la asunción de la ley de Say, a pesar del desequilibrio en el mercado de trabajo.

- f. El ratio capital/producción es constante:

$$\frac{K}{Y} = k$$

⁴ Posteriormente pueden aparecer nuevas variables en función de las ya especificadas en la tabla.

⁵ Nótese que la oferta de trabajo 'N' no tiene por qué coincidir con el trabajo utilizado 'L', es decir, se asume la existencia de desempleo.

g. El salario real varía con el nivel de empleo según la estructura de la clásica Curva de Phillips:

$$\frac{\dot{w}}{w} = f(v); \lim_{v \rightarrow 1} f(v) = \infty; \lim_{v \rightarrow 0} f(v) = w < 0; \frac{\partial f}{\partial v} > 0$$

2.3. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Del supuesto (a) se deduce que la participación de los salarios en la producción es:

$$u = \frac{wL}{Y} = \frac{w}{a} \quad (1)$$

Y por tanto la participación del capital:

$$1 - \frac{w}{a} \quad (2)$$

Así, la tasa de beneficio del capital es:

$$\frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)Y}{K} \quad (3)$$

Gracias a los supuestos planteados se verifica que:

$$\frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)Y}{K} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} \quad (4)$$

Por otro lado, tomando logaritmos y diferenciando respecto al tiempo la ecuación del primer supuesto (a):

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha \implies \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (5):

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - \alpha \quad (6)$$

Ahora se define la tasa de empleo como:

$$v = \frac{L}{N} \quad (7)$$

Luego si tomamos logaritmos y diferenciamos respecto al tiempo en (7):

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N} \quad (8)$$

Sustituyendo a partir de (6), del supuesto (b) y de (1) en la ecuación anterior:

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - \alpha - \beta = \frac{1 - u}{k} - (\alpha + \beta) = \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) - \frac{1}{k}u \quad (9)$$

Por otro lado, tomando una aproximación lineal de la Curva de Phillips propuesta en el supuesto (g) se tiene:

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v; \text{ con } \gamma, \rho > 0 \quad (10)$$

Si se coge (1), se le aplican logaritmos y se diferencia se obtiene:

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} \quad (11)$$

Y gracias a (5) se sabe que:

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha \quad (12)$$

Entonces, sustituyendo (10) en (12):

$$\frac{\dot{u}}{u} = -(\alpha + \gamma) + \rho v \quad (13)$$

Las ecuaciones (9) y (13) forman el siguiente sistema de ecuaciones dinámico expresado en tasas de variación para ambas variables:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}}{v} &= \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) - \frac{1}{k}u \\ \frac{\dot{u}}{u} &= -(\alpha + \gamma) + \rho v \end{aligned} \quad (14)$$

Por tanto, se planteará el sistema (14) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left\{ \left[\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right] - \frac{1}{k}u \right\} v \\ \dot{u} &= [-(\alpha + \gamma) + \rho v] u \end{aligned} \quad (15)$$

Nótese que se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineal. Para facilitar su tratamiento se renombrarán los parámetros del modelo de la siguiente manera:

$$\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) = a_1; \quad \frac{1}{k} = b_1; \quad (\alpha + \gamma) = a_2; \quad \rho = b_2$$

El sistema resultante (16) es idéntico al sistema dinámico compuesto por las ecuaciones de Lotka-Volterra, habitualmente utilizado en el estudio biológico de poblaciones en las que interactúan presas y depredadores⁶:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (a_1 - b_1 u) v \\ \dot{u} &= (-a_2 + b_2 v) u \end{aligned} \quad (16)$$

⁶ Una presentación del mismo se encuentra en Volterra, V. (1928). *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together*. ICES Journal of Marine Science.

2.4. ANÁLISIS DEL MODELO

A continuación, se analiza el estado estacionario del modelo y cuál puede ser el comportamiento del mismo. Para ello, en primer lugar se buscan los puntos de equilibrio del sistema, es decir, aquellos que anulan simultáneamente a \dot{v} y \dot{u} . Se hallan dos puntos de equilibrio:

$$E^0 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E^1 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2/b_2 \\ a_1/b_1 \end{pmatrix}$$

Adicionalmente, el sistema también tiene la familia de soluciones $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 e^{a_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 e^{a_2 t} \end{pmatrix}$, así que ambos ejes son órbitas del sistema, lo que implica que toda solución en (v, u) que empieza en el primer cuadrante ($v > 0; u > 0$) en el instante $t = t_0$ permanecerá ahí para todo tiempo futuro $t \geq t_0$ (Braun, 1990).

El sistema original es no lineal en la forma matricial $\dot{x} = AX + g(x)$, donde:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}; g(x) = \begin{pmatrix} -b_1 u v \\ b_2 v u \end{pmatrix}$$

Para su estudio, se linealiza en la forma $\dot{x} = J[f(E)]X + g(x)$, donde $J[f(E)]$ es la matriz Jacobiana del sistema original en un punto de equilibrio.

Por ello, se forma la matriz $J = \begin{pmatrix} \partial \dot{v} / \partial v & \partial \dot{v} / \partial u \\ \partial \dot{u} / \partial v & \partial \dot{u} / \partial u \end{pmatrix}$;

Para nuestro sistema, $J[f(x)] = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 u & -b_1 v \\ b_2 u & -a_2 + b_2 v \end{pmatrix}$

- Punto crítico $E^0 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La Jacobiana en este punto es $J[f(E^0)] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$, con autovalores a_1 y $-a_2$.

Asimismo, sus autovectores asociados son el $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Recordemos que:

$$\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) = a_1; \frac{1}{k} = b_1; (\alpha + \gamma) = a_2; \rho = b_2$$

Por tanto b_1, b_2 y a_2 son por definición siempre positivos. Además tiene sentido económico afirmar que en condiciones normales $(1/k) > (\alpha + \beta)$, luego a_1 también sería positivo. (Gandolfo, 1997)

En consecuencia en el punto E^0 existe un autovalor con parte real positiva y otro con parte real negativa, tratándose así de un punto hiperbólico al no tener ninguno parte real nula. Además, gracias al teorema de Hartman⁷ se sabe que se trata de un punto inestable, y en concreto, que su retrato fase refleja un punto de silla para un entorno cercano. Por los autovectores se deduce que en este punto de silla el eje u en sus valores positivos sí es estable, sin embargo, el eje v positivo es inestable.

⁷ Para más detalle véase Lynch, S. (2007). *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*®. Birkhäuser. (p. 54)

▪ Punto crítico $E^1 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2/b_2 \\ a_1/b_1 \end{pmatrix}$

En este segundo caso la Jacobiana es $J[f(E^1)] = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 b_1 / b_2 \\ a_1 b_2 / b_1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculando el determinante $|J[f(E^1)] - \lambda I|$, siendo I la matriz identidad 2×2 , se obtienen sus autovalores. Estos son:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{a_1} \sqrt{a_2}$$

Ambos son complejos y con parte real nula, por tanto, se trata de un punto no hiperbólico. A diferencia del caso anterior, no es posible aplicar el teorema de Hartman, por lo que no hay ninguna certeza de que su retrato fase se comporte como un centro estable tal y como lo haría en el sistema lineal.

Sin embargo, se puede obtener información útil acerca de las trayectorias en el plano fase tomando $u = f(v)$ (Shone, 2002).

En esta ocasión, se sigue el análisis por las curvas integrales. Partiendo del sistema no lineal (16), se halla:

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dt}{dv/dt} = \frac{(-a_2 + b_2 v) u}{(a_1 - b_1 u) v} = - \frac{(a_2 - b_2 v) u}{(a_1 - b_1 u) v} \tag{17}$$

En esta ecuación (17) es posible separar las variables, expresándose como:

$$\frac{a_1 - b_1 u}{u} \frac{du}{dv} = \frac{-a_2 + b_2 v}{v} \implies \left(\frac{a_1}{u} - b_1\right) du = \left(\frac{-a_2}{v} + b_2\right) dv \tag{18}$$

Integrando ambas partes en (18):

$$\int \left(\frac{a_1}{u} - b_1\right) du = \int \left(\frac{-a_2}{v} + b_2\right) dv$$

$$a_1 \ln(u) - b_1 u = -a_2 \ln(v) + b_2 v + A$$

$$a_1 \ln(u) + a_2 \ln(v) = b_1 u + b_2 v + A \tag{19}$$

siendo A una constante de integración.

Gracias a las propiedades de los logaritmos y la exponencial, la ecuación (19) también se expresa como:

$$u^{a_1} v^{a_2} = B e^{b_1 u + b_2 v}; \text{ donde } B \equiv e^A \tag{20}$$

Nótese que despejando la constante $B = u^{a_1} v^{a_2} / e^{b_1 u + b_2 v}$

Si llamamos a las funciones X_1 y X_2 :

$$X_1 = X_1(v) = v^{-a_2} e^{b_2 v}$$

$$X_2 = X_2(u) = u^{a_1} e^{-b_1 u} \tag{21}$$

De esta forma se ha logrado expresar una relación entre ambas variables del sistema igualando la función $X_2(u)$ a $X_1(v)$ por una constante arbitraria:

$$X_2 = BX_1 \quad (22)$$

En este sentido cada valor diferente de B ofrece la trayectoria del sistema en el retrato fase correspondiente a cada curva integral.

En el anexo se representa su retrato fase y otras características del sistema usando el software *Mathematica*, donde se muestra que el sistema sigue una dinámica cíclica.

También, cabe destacar que a partir de los valores de u es posible obtener las tasas de crecimiento de la producción y del stock de capital, multiplicando la participación de los capitalistas por $1/k$ (Ecs. [3] y [4]). De v se saca la tasa de crecimiento de los salarios, gracias a la relación de la Curva de Phillips (Ec. [10]).

En última instancia se da un ciclo en términos de empleo y tasas de variación de la producción. Que en la fase depresiva se alcance una caída de la producción en valores absolutos o simplemente se trate de una desaceleración en el ritmo de crecimiento dependerá de la intensidad de las fluctuaciones. Esto mismo le ocurrirá al salario real. (Gandolfo, 1997)

Se ha demostrado que una de las propiedades más importantes del modelo es su comportamiento cíclico, pero, como se ve a continuación, no es la única.

A largo plazo, los valores medios de u y v son independientes de las condiciones iniciales del sistema o de shocks externos.

Así, se puede probar que un shock externo en la economía no altera las características del ciclo sino simplemente se ve desplazado hasta otra curva integral con la misma forma de la anterior, a la que envuelve o por la que se ve envuelta. (Gandolfo, 1997)

Para demostrarlo el sistema (16) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(v)}{dt} &= a_1 - b_1 u \\ \frac{d \ln(u)}{dt} &= -a_2 + b_2 v \end{aligned} \quad (23)$$

Si ahora se integra (23) entre dos valores arbitrarios de t , por ejemplo t' y t'' , que corresponden con los valores v', v'', u', u'' de v y u queda:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{v''}{v'} \right) &= a_1(t'' - t) - b_1 \int_{t'}^{t''} u dt \\ \ln \left(\frac{u''}{u'} \right) &= -a_2(t'' - t) + b_2 \int_{t'}^{t''} v dt \end{aligned} \quad (24)$$

Nombrando T al periodo en el que oscila el ciclo y fijando los límites de integración en ese mismo periodo se cumpliría que $v' = v'', u' = u'', t'' - t' = T$.

Por tanto:

$$0 = a_1 T - b_1 \int_0^T u dt \quad (25)$$

$$0 = -a_2 T + b_2 \int_0^T v dt$$

Dividiendo entre 'T' las ecuaciones de (25) y reordenando términos, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T u dt &= \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{1}{T} \int_0^T v dt &= \frac{a_2}{b_2} \end{aligned} \quad (26)$$

Luego los valores promedio de u y v a lo largo de un ciclo completo son constantes y respectivamente iguales a (a_1/b_1) y (a_2/b_2) , es decir, las coordenadas del punto medio del centro. (Gandolfo, 1997)

Por último, es posible calcular la duración del ciclo tal y como lo hace Harvie⁸ a partir de la ecuación (27), con la notación aquí utilizada:

$$T = \frac{2\pi}{\left[(\alpha + \gamma) \left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) \right]^{1/2}} = \frac{2\pi}{(a_2 a_1)^{1/2}} \quad (27)$$

En el anexo es posible observar gráficamente el comportamiento teórico del modelo.

⁸ Harvie, D. (2000) *Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries*. Cambridge Journal of Economics 2000, 24, p. 349-376.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN A LA ECONOMÍA ESPAÑOLA (2002-2016)

3.1. RECOPIACIÓN Y TRATAMIENTO DE DATOS ESTADÍSTICOS

El primer paso para realizar una validación empírica del modelo expuesto es la recopilación de cifras y datos económicos relacionados con las principales magnitudes que intervienen en el mismo en el contexto español y en el periodo 2002-2016. Para ello, se utiliza como fuente principal la base de datos del Instituto Nacional de Estadística de España (INE).⁹

En la Tabla 3.1 se recogen las variables de partida que necesita el modelo y la correspondencia (en ocasiones artificial¹⁰) que se ha establecido con las series temporales recogidas a través de las fuentes estadísticas.

Tabla 3.1. Correspondencia establecida entre variables teóricas y estadísticas

Variable teórica	Aproximación estadística, datos España
Producción (Y)	PIB real a precios de mercado
Factor trabajo (L)	Trabajadores asalariados
Factor Capital (K)	Stock de capital neto real
Masa salarial ($wL=RA$)	Remuneración real de los asalariados
Oferta o Fuerza de trabajo (N)	Población activa

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se muestran los datos extraídos de las fuentes estadísticas para algunas de estas variables de partida (Tabla 3.2).

Tabla 3.2. Estadísticas sobre variables básicas de la economía española, valoradas en términos nominales (ud. millones de euros) + IPC medio anual base 2016

	PIB pm nominal	Stock capital neto nominal	Remuneración asalariados nominal	IPC base 2016
2002	749.288,00	2.034.000,00	360.911,00	76,261
2003	803.472,00	2.228.000,00	386.543,00	78,579
2004	861.420,00	2.471.000,00	411.567,00	80,967
2005	930.566,00	2.746.000,00	444.370,00	83,694
2006	1.007.974,00	3.047.000,00	481.540,00	86,637
2007	1.080.807,00	3.289.000,00	523.123,00	89,051
2008	1.116.225,00	3.466.000,00	560.517,00	92,68
2009	1.079.052,00	3.398.000,00	549.867,00	92,414
2010	1.080.935,00	3.413.000,00	542.334,00	94,077
2011	1.070.449,00	3.383.000,00	531.876,00	97,084
2012	1.039.815,00	3.280.000,00	500.118,00	99,458
2013	1.025.693,00	3.156.000,00	487.328,00	100,859

⁹ Todas las fuentes estadísticas están especificadas en Bibliografía.

¹⁰ Se toma una aproximación real a la definición de la variable teórica que difícilmente podrá ser definida de manera exacta por las estadísticas recogidas.

2014	1.037.820,00	3.146.000,00	493.690,00	100,707
2015	1.079.998,00 ¹¹	N/D	519.856,00	100,203
2016	1.118.522,00 ¹²	N/D	534.971,00	100

Fuente: Contabilidad Nacional Anual INE y base de datos Fundación BBVA.

Dado que el modelo trabaja en términos reales es necesario deflactar los anteriores valores monetarios, usando para ello el Índice de Precios al Consumo de la misma tabla. Como resultado se obtienen las variables correspondientes expresadas en los términos que trabaja el modelo (Tabla 3.3).

Tabla 3.3. Estadísticas sobre variables básicas de la economía española, valoradas en términos reales (ud. millones de euros)

	PIB pm real	Stock capital neto real	Remuneración asalariados real
2002	982.531,04	2.667.156,21	473.257,63
2003	1.022.502,20	2.835.363,14	491.916,42
2004	1.063.914,93	3.051.860,63	508.314,50
2005	1.111.867,04	3.280.999,83	530.946,07
2006	1.163.445,18	3.516.973,12	555.813,34
2007	1.213.694,40	3.693.389,18	587.442,03
2008	1.204.386,06	3.739.749,68	604.787,44
2009	1.167.628,28	3.676.932,07	595.004,00
2010	1.148.989,66	3.627.879,29	576.478,84
2011	1.102.600,84	3.484.611,26	547.851,35
2012	1.045.481,51	3.297.874,48	502.843,41
2013	1.016.957,34	3.129.120,85	483.177,51
2014	1.030.534,12	3.123.913,93	490.224,12
2015	1.077.810,05	-	518.802,83
2016	1.118.522,00	-	534.971,00

Fuente: Elaboración propia a partir de INE y Fundación BBVA.

Por último se presenta una tabla que recoge la población activa y los asalariados en miles de personas, al ser variables que forman parte del modelo (Tabla 3.4).

Tabla 3.4. Población asalariada y activa en España (ud. miles de personas)

	Asalariados	Activos
2002	14.840,10	18.961,23
2003	15.452,10	19.742,75
2004	16.090,50	20.375,78
2005	16.875,60	21.140,55
2006	17.701,60	21.779,98
2007	18.375,80	22.426,10
2008	18.451,10	23.065,55
2009	17.317,50	23.260,40
2010	17.048,40	23.364,60
2011	16.598,40	23.434,08

¹¹ Se trata de una estimación no definitiva que realiza el INE.

¹² Íbid.

2012	15.820,19	23.443,70
2013	15.340,60	23.190,15
2014	15.527,29	22.954,58
2015	16.006,34	22.922,03
2016	16.468,92	22.822,73

Fuente: Encuesta de Población Activa, INE.

3.2. VALORES EMPÍRICOS PARA LAS VARIABLES DEL MODELO

A partir de los anteriores datos ya es posible extraer el resto de variables y parámetros que intervienen en el modelo gracias a los supuestos y ecuaciones con las que se trabajó al definir el sistema en el capítulo dos. De esta forma se expone en una tabla los resultados de dichos cálculos para el resto de variables (Tabla 3.5).

Tabla 3.5. Participación de los salarios (u), tasa de empleo (v), y tasas de variación de: salarios (\dot{w}/w), producción (\dot{Y}/Y) y stock de capital (\dot{K}/K), en tantos por uno; productividad laboral (a) y salario medio (w), en euros por asalariado; ratio capital output (K/Y) sin ud.

	$u = \frac{RA}{Y}$	$v = \frac{L}{N}$	$a = \frac{Y}{L}$	$w = \frac{RA}{L}$	$\frac{\dot{w}}{w}$	$\frac{\dot{Y}}{Y}$	$\frac{\dot{K}}{K}$	K/Y
2002	0,4817	0,7827	66.208	31.890	-	-	-	2,7146
2003	0,4811	0,7827	66.172	31.835	-0,0017	0,0407	0,0631	2,7730
2004	0,4778	0,7897	66.121	31.591	-0,0077	0,0405	0,0764	2,8685
2005	0,4775	0,7983	65.886	31.462	-0,0041	0,0451	0,0751	2,9509
2006	0,4777	0,8127	65.725	31.399	-0,0020	0,0464	0,0719	3,0229
2007	0,4840	0,8194	66.049	31.968	0,0181	0,0432	0,0502	3,0431
2008	0,5022	0,7999	65.274	32.778	0,0253	-0,0077	0,0126	3,1051
2009	0,5096	0,7445	67.425	34.359	0,0482	-0,0305	-0,0168	3,1491
2010	0,5017	0,7297	67.396	33.814	-0,0158	-0,0160	-0,0133	3,1575
2011	0,4969	0,7083	66.428	33.006	-0,0239	-0,0404	-0,0395	3,1604
2012	0,4810	0,6748	66.085	31.785	-0,0370	-0,0518	-0,0536	3,1544
2013	0,4751	0,6615	66.292	31.497	-0,0091	-0,0273	-0,0512	3,0769
2014	0,4757	0,6764	66.369	31.572	0,0024	0,0134	-0,0017	3,0314
2015	0,4813	0,6983	67.336	32.412	0,0266	0,0459	-	-
2016	0,4783	0,7216	67.917	32.484	0,0022	0,0378	-	-
Valor medio	0,4854	0,7467	66.446	32.257	0,0015	0,0099	0,0144	3,0160

Fuente: Elaboración propia a partir de INE y Fundación BBVA.

3.3. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS

Para estimar los parámetros del modelo se seguirá el siguiente procedimiento:

- El modelo supone un ratio capital-output constante ' k '. Por tanto se tomará dicho nivel ' k ' como la media aritmética de los valores K/Y en el rango de datos disponible.

- También supone una tasa de crecimiento constante ‘ α ’ para la evolución de la productividad laboral (a). Como estimación de ‘ α ’ se utilizará la tasa de variación media anual acumulativa (en adelante TVMAA) de la productividad laboral obtenida en el periodo considerado.
- De igual manera supone una tasa de crecimiento constante ‘ β ’ para la fuerza de trabajo (N) que se calculará como la TVMAA de dicha variable en el periodo considerado.
- Los parámetros ‘ γ ’ y ‘ ρ ’ se obtendrán a partir de una regresión lineal que estime la Curva de Phillips considerada en el modelo teórico a partir de las observaciones de la tasa de variación del nivel salarial medio y la tasa de empleo.
- Por último se calculan los parámetros transformados:

$$\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) = a_1; \frac{1}{k} = b_1; (\alpha + \gamma) = a_2; \rho = b_2$$

Dada esta metodología, los valores experimentales para los parámetros estimados del modelo con precisión de cuatro decimales se muestran a continuación (Tabla 3.6).

Tabla 3.6. Parámetros estimados

\hat{k}	3,0160		
$\hat{\alpha}$	0,0018	\hat{a}_1	0,3164
$\hat{\beta}$	0,0133	\hat{b}_1	0,3316
$\hat{\gamma}$	0,0906	\hat{a}_2	0,0924
$\hat{\rho}$	0,1238	\hat{b}_2	0,1238

Fuente: Elaboración propia.

3.4. ESTIMACIONES DEL MODELO VS VALORES EMPÍRICOS

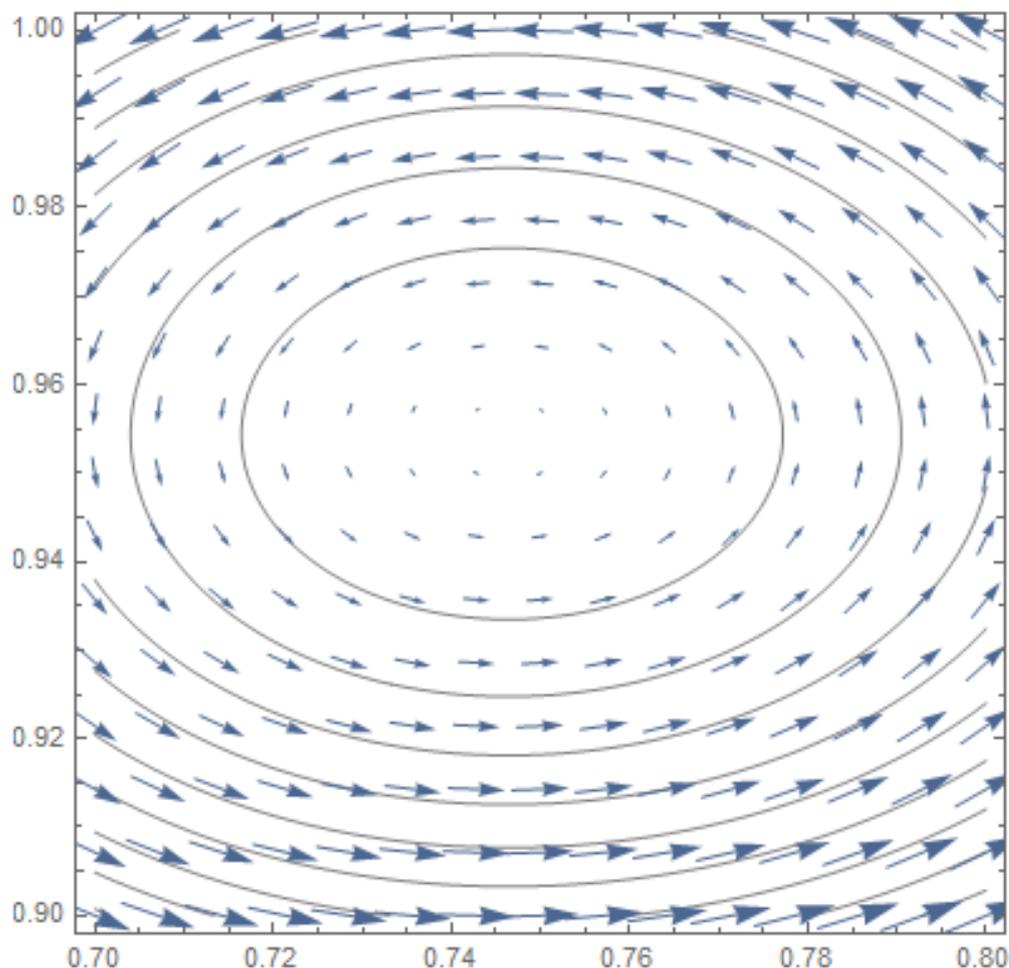
En la parte teórica se comprobó que al tratarse de un sistema dinámico no lineal, no se ha podido hallar una expresión para el modelo que determine los valores exactos de las variables endógenas a lo largo del tiempo o en otras palabras, la solución exacta del sistema. No obstante, sí fue posible obtener el comportamiento cualitativo del mismo representado en un plano fase, así como los valores medios a largo plazo.

Ahora se pretende representar el retrato fase teórico del modelo para u y v con los valores estimados para los parámetros y compararlo de forma cualitativa con el gráfico formado a partir de un diagrama de dispersión para sus valores empíricos observados.

La Figura 3.1 representa en *Mathematica*, mediante los métodos desarrollados en el anexo de este documento, el retrato fase teórico que estima el modelo para las variables u y v tomando los valores de los parámetros estimados para la economía española. Como era de esperar, se generan órbitas cerradas entorno al punto de equilibrio en el que las variables toman sus valores medios calculados. Adicionalmente, parece que la variable v debe presentar una mayor dispersión en sus datos.

Para mayor detalle en el análisis puramente teórico del comportamiento del modelo a partir de su retrato fase se recomienda ir al anexo del presente documento.

Figura 3.1. Retrato fase del modelo con los parámetros estimados (variable v en eje de abscisas, variable u en eje de ordenadas)



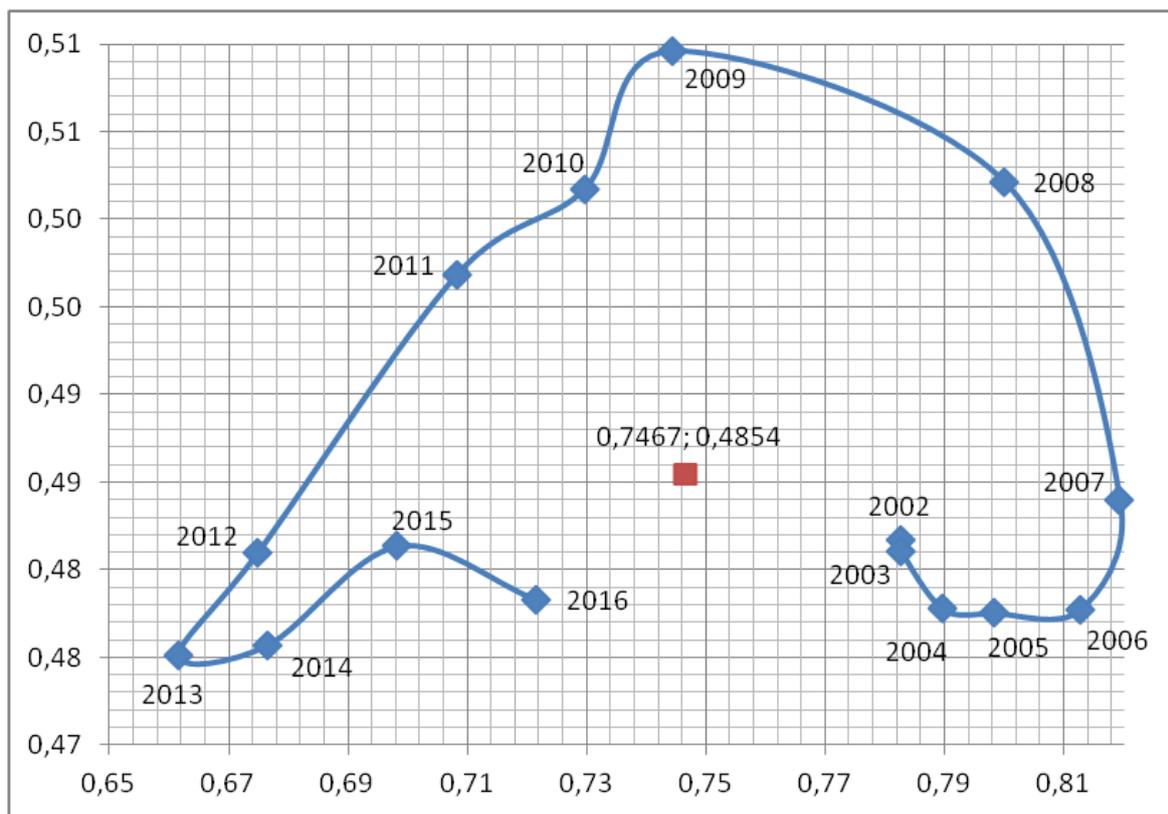
Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

Por otro lado, el resultado para los valores observados de dichas variables está en la Figura 3.2. En esta, no es posible observar una órbita cerrada perfecta como la que se dibuja en el modelo teórico (Figura 3.1), bien es cierto que su comportamiento se asemeja. En el caso real, el valor medio para v sí que es muy cercano al que predecía el modelo (entre 0,74 y 0,75), mientras que el valor de equilibrio de u observado es bastante menor al que generaba el modelo. Además, siguiendo la ordenación temporal de los pares de datos observados (v, u) se constata que al menos el recorrido es igual al del modelo teórico, girando en sentido contrario a las agujas del reloj.

Nótese también que los ejes (Figuras 3.1 y 3.2) están ajustados con el objetivo del estudio meramente cualitativo del comportamiento de las variables, y si estas de algún modo siguen en la realidad el esquema dibujado por el modelo teórico.

Como se ha visto gráficamente también cabe la posibilidad de comparar los valores medios para el equilibrio a largo plazo, por un lado de los valores estimados para los parámetros y de otro lado los mismos valores pero derivados de los datos estadísticos recogidos para la economía española. En la tabla 3.7 se muestra dicha comparación.

Figura 3.2. Diagrama de dispersión para la tasa de empleo y la participación de salarios en la producción observadas en la economía española (variable v en eje de abscisas, variable u en eje de ordenadas)



Fuente: Elaboración propia, datos tabla 3.5.

Tabla 3.7. Valores medios de equilibrio estimados para las variables del modelo y valores empíricos para la economía española (2002-2016)¹³.

	Estimaciones modelo	Valores empíricos	Error de estimación
u^*	0,9543	0,4854	0,4689
v^*	0,7464	0,7467	-0,0003
$(\dot{Y}/Y)^*$	0,0152	0,0099	0,0052
$(\dot{K}/K)^*$	0,0152	0,0144	0,0007
$(\dot{w}/w)^*$	0,0018	0,0015	0,0003
T	36,7417		

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 3.7 se puede ver que el valor de u^* estimado difiere bastante del observado, con un error importante. Parece que se trata de un error en la especificación del modelo, que no es adecuado para predecir el valor medio de esta variable, ya que en otros análisis acerca del modelo de Goodwin la sobreestimación del valor medio de u siempre aparece.¹⁴

Para el resto de variables endógenas (tasa de empleo y tasas de variación de: producción, stock de capital y salarios respectivamente) los valores medios estimados sí que son relativamente precisos en relación a los valores observados para España entre 2002 y 2016 (Tabla 3.7).

¹³ En algunas variables el periodo no es exactamente 2002-2016: En el cálculo de las tasas de variación se pierde el primer dato (2002) mientras que para el stock de capital K el rango de datos disponibles estaba limitado (2002-2014).

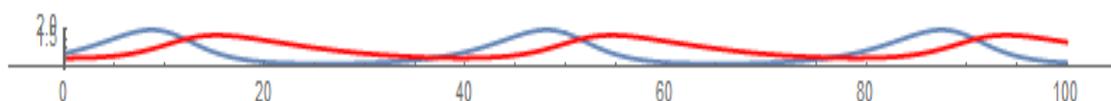
¹⁴ Véase por ejemplo Harvie (2000) para el caso de países OCDE ó Martín Moreno (2002) para Colombia.

Por su parte, la duración del período T estimada parece excesiva ya que más bien era de esperar una duración de entorno a 8-15 años por el comportamiento típico del modelo, o como mucho una duración de unos 16-24 años observando la tendencia de las variables en el caso español y su representación gráfica.

Extendiendo el análisis, si se parte de unos valores iniciales para las variables u y v se puede generar una gráfica en *Mathematica* que aproxime el comportamiento de la trayectoria temporal de ambas variables tal y como se explica en el anexo.

En este caso se utilizan los valores de los parámetros estimados y un periodo de 100 años. Además los valores iniciales seleccionados para las variables han sido $(v, u) = (0,72, 0,47)$

Figura 3.3. Comportamiento de las trayectorias de v (azul) y u (rojo) según el modelo

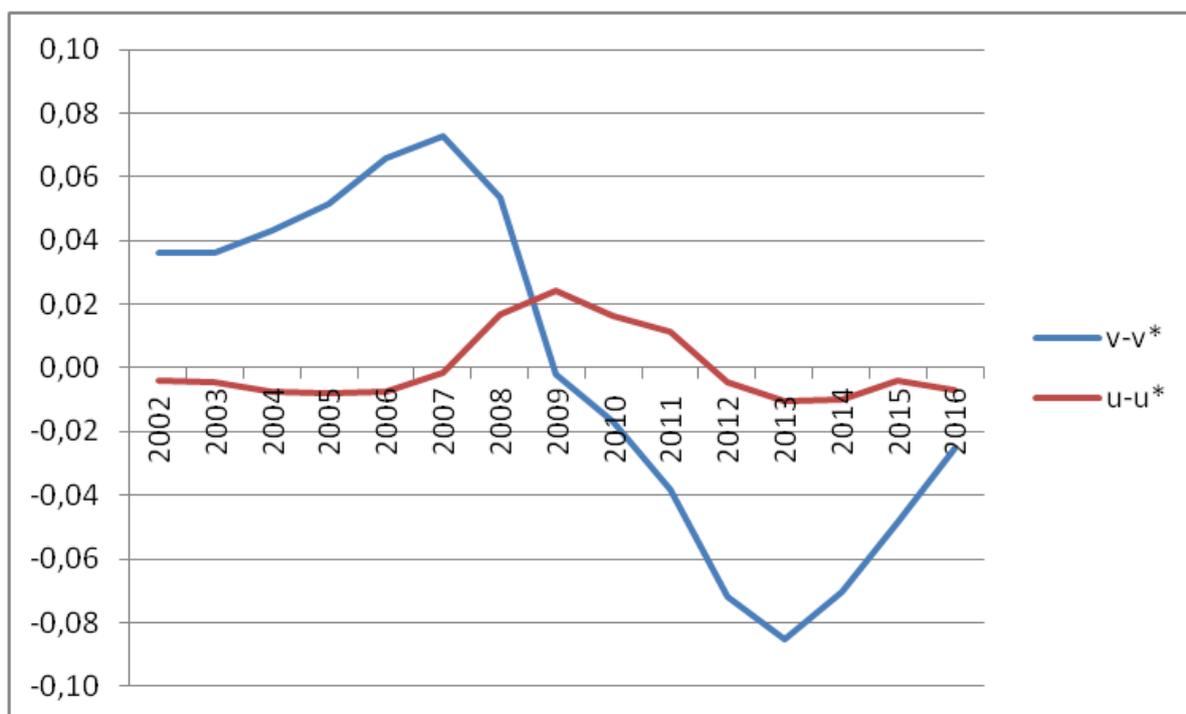


Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

En la Figura 3.3 se puede ver que ambas trayectorias teóricas son cíclicas y parece que la variable u imita a posteriori a v en sus oscilaciones.

Hay que tener en cuenta que los valores de las series observadas para las variables v y u tienen diferente media y desviación típica por lo que un gráfico temporal combinando dichas series no aporta ninguna información acerca de su relación. Para representar la gráfica temporal de las variables observadas se procede en primer lugar a transformar dichas variables restando a ambas series su valor medio, así se logra trasladar ambas series al eje de abscisas con un simple cambio de origen (Figura 3.4)

Figura 3.4. Series transformadas restándoles su valor medio (v en azul y u en rojo)



Fuente: Elaboración propia.

A partir de la Figura 3.4 no es fácil determinar la relación entre ambas variables aunque a simple vista se observan varias características que se resumen en los siguientes puntos.

3.4.1. Dispersión en los valores de u y v observados.

La variable v presenta una mayor dispersión en sus valores, lo que se puede observar de manera clara en la Figura 3.11. El coeficiente de variación de la serie original u es de 0,0231, mientras que el de v es de 0,0731. Esto mismo confirma la mayor dispersión de los valores de v a lo largo del ciclo.

En este aspecto parece que las observaciones y el modelo teórico coinciden al apuntar una mayor volatilidad de la tasa de empleo frente a la participación de los salarios a lo largo del ciclo.

3.4.2. Valores medios u^* y v^* constantes a largo plazo.

El modelo considera que a lo largo del ciclo completo el valor medio de ambas variables es estable en el valor de equilibrio estacionario. Para probarlo en las observaciones realizadas sería necesario contar con un rango de datos al menos equivalente a un ciclo completo (unos 36 años según se ha estimado), y no es el caso. A pesar de ello, con el rango disponible y de manera gráfica, la variable u parece que podría seguir una tendencia cíclica siendo estacionaria en media tal y como presume el modelo. En cambio, en la variable v no está tan clara esa estacionariedad en media, al menos teniendo en cuenta solo el periodo estudiado.

Para contrastar de manera sencilla la posible existencia de un componente tendencial en las series fuera de su carácter cíclico se realizará el contraste de Daniel para los valores de ambas series observadas, planteando la no existencia de componente tendencial como hipótesis nula.

Para realizar este contraste, en primer lugar, se ordenan por orden cronológico las 15 observaciones y se le da un valor ' t ' (del 1 al 15) asociado a cada valor de la serie: $t = 1$ para el valor de 2002, $t = 2$ para el de 2003, y así sucesivamente. A continuación se asocia un nuevo valor ' rt ' (del 1 al 15) a cada observación de la serie según una ordenación ascendente: al valor más pequeño $rt = 1$, al segundo más pequeño $rt = 2$, etc. Luego, se calcula el valor ' dt ' como la diferencia entre ' rt ' y ' t ' para cada observación.

Posteriormente, se halla la suma de los cuadrados de ' dt ', es decir, $\sum dt^2$. A partir de este valor se puede obtener el estadístico $T_s = 1 - \frac{6 \sum dt^2}{n(n^2-1)}$, con distribución Normal de media nula y varianza $1/(n - 1)$. Tipificando, se tiene el estadístico $Z = (\sqrt{n - 1}) T_s$, que sigue una distribución Normal estándar, donde el n^o de observaciones ' n ' es igual a 15 en este caso.

▪ **Variable u**

Los principales resultados del proceso anteriormente descrito para las observaciones de u se muestran en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8. Resultados del Contraste de Daniel para verificar la no existencia de tendencia en la serie u (H_0 : la serie u no tiene tendencia)

$\sum dt^2$	630
n	15
T_s	-0,12500
Z	-0,46771
p-value	0,63999

Fuente: Elaboración propia.

El p-valor es muy superior a los niveles de significación convencionales por lo que sí se sostiene la hipótesis nula. Se podría afirmar de esta forma que la participación de los salarios entre 2002 y 2016 no tuvo una tendencia definida más allá de las oscilaciones cíclicas y se mantuvo estable entorno a su valor estacionario, comportándose en ese sentido como predecía el modelo, aunque el valor medio que este predijo no corresponda con el real.

- *Variable v*

Se repite el proceso anterior, esta vez usando las observaciones de v , generando el siguiente resultado (Tabla 3.9).

Tabla 3.9. Resultados del Contraste de Daniel para verificar la no existencia de tendencia en la serie v (H_0 : la serie v no tiene tendencia)

$\sum dt^2$	966
n	15
Ts	-0,72500
Z	-2,71270
p-value	0,00667

Fuente: Elaboración propia.

Siguiendo el mismo criterio en este caso se puede ver que el p-valor está por debajo incluso del 1% de significatividad por lo que se rechaza que, al menos en el periodo considerado, la tendencia sea nula. Por el contrario, parece claro que la tendencia de la tasa de empleo en el período considerado es decreciente. Bien es cierto que dicho periodo no cierra el ciclo que estima el modelo teórico y es posible que tomando más años se aproxime una tendencia nula.

A favor de esta última idea se puede decir que en la Figura 3.4 parece que los últimos datos de la serie v tienden a crecer y en varios años podrían alcanzar los valores iniciales de 2002 por lo que a simple vista cabe alguna posibilidad de que realmente al completar un ciclo la tendencia de la tasa de empleo se anule, sin embargo esa idea no es más que una simple conjetura.

3.4.3. Correlación en los valores de u y v observados.

Es posible que la variable u imite a posteriori las oscilaciones de v tal y como indicaba el comportamiento teórico. Para comprobarlo, se estudiará los coeficientes de correlación entre la variable v y la variable u adelantada¹⁵, así como la significatividad de los mismos a través de sus p-valores asociados (Tabla 3.10).

La correlación entre v y las diferentes series temporales de u siguen cierta estructura, creciendo hasta alcanzar un máximo en el coeficiente v, u_{t+3} , y posteriormente decreciendo de manera cuasi-simétrica. Además, si se toma un nivel de significatividad estándar (5%), a partir de los p-valores solo es posible presentar como significativa la correlación entre v y u adelantada en 2, 3 y 4 períodos, siendo el coeficiente de correlación v, u_{t+3} el más significativo de todos.

Este comportamiento puede ser indicativo de que efectivamente la participación de los salarios en cierta medida imita con un desfase de aproximadamente 3 años las oscilaciones de la tasa de empleo, algo que se dejaba vislumbrar en el modelo teórico.

¹⁵ Se hace referencia a los valores de la misma serie u pero en diferente intervalo de tiempo. (Ej: u_{t+1} sería u entre 2003-2016; u_{t+2} sería u entre 2004-2016; y sucesivamente)

Tabla 3.10. Coeficientes de correlación de la serie v frente a la serie u en diferentes momentos temporales, y p-valores asociados a cada coeficiente.

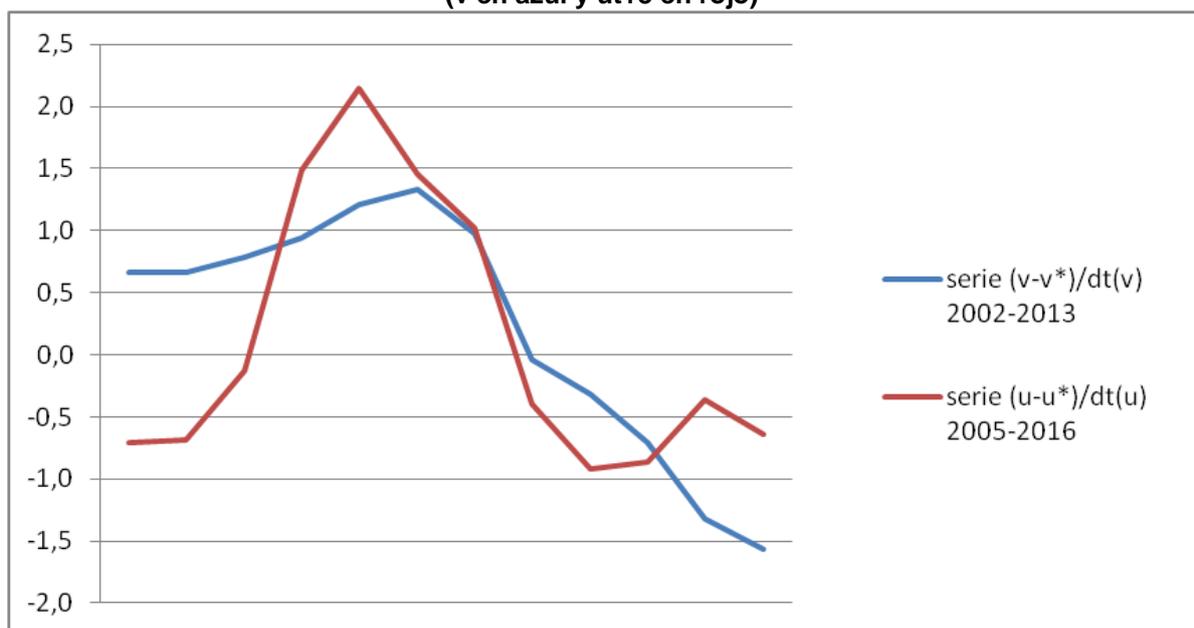
	v	p-value
u	0,0864	0,7588
u_{t+1}	0,3988	0,1542
u_{t+2}	0,5800	0,0345
u_{t+3}	0,6737	0,0138
u_{t+4}	0,6307	0,0329
u_{t+5}	0,4096	0,2328
u_{t+6}	0,0282	0,9422

Fuente: Elaboración propia, datos tabla 3.5.

Para ver una aproximación gráfica de dicha correlación directa se representa la serie v transformada (restando su media y dividiendo entre su desviación típica) y la serie u_{t+3} transformada de la misma forma (Figura 3.5).

Nótese que con dichas transformaciones no se altera la correlación entre ambas y es posible observarlas gráficamente al quedar con media nula y desviación típica igual a la unidad.

Figura 3.5. Series transformadas restándoles su valor medio y dividiendo la desviación típica (v en azul y u_{t+3} en rojo)



Fuente: Elaboración propia.

3.5. ANÁLISIS ACERCA DE LOS SUPUESTOS DEL MODELO

Antes de dar por concluido el análisis de este modelo aproximado a la economía española de los últimos años parece fundamental realizar un análisis que contraste el realismo de los supuestos, aunque no siempre sea algo habitual en el estudio de modelos económicos. Y es que es cierto que desde la raíces de la economía ha emergido una tendencia a plantear modelos abstractos que simplifican la realidad a cambio de poner en riesgo su propio realismo.

El propio Schumpeter¹⁶ ya advertía de los peligros de estas prácticas al extraer recomendaciones políticas, y lo denominaba como el “vicio ricardiano”, ya que esta era una de las principales críticas que se le atribuía a la metodología de David Ricardo.

Así, en los siguientes subapartados se pretende realizar un breve análisis que arroje luz acerca del realismo de los supuestos del modelo.

3.5.1. Economía de dos factores y Ley de Say

Parece difícil considerar solo dos factores productivos y por ende, solo dos tipos de rentas como supone el modelo con los factores capital y trabajo, que dan lugar a los beneficios del capital y a la masa salarial respectivamente. Sin embargo, estos factores son los más importantes dentro de la economía y así lo determina la suma de sus respectivas remuneraciones en el peso de la totalidad de rentas.

Por su parte, la célebre Ley de Say es considerada una de las piedras angulares de la economía clásica. Esta es habitualmente citada con la expresión “la oferta crea su propia demanda” de una manera un tanto impropia, al menos porque conduce a confusión y porque el propio Jean Baptiste Say la enunciaría en otras palabras en su *Traité d'économie politique*. Bien sería mejor entenderla como una ley de los mercados que imposibilita la insuficiencia de demanda agregada ya que el flujo circular de la renta es eso, circular, y siempre se cierra. Por ello, la simple existencia de oferta está generando demanda en la misma proporción, siendo la primera el factor determinante en la generación de riqueza y prosperidad.

Este supuesto ha sido aceptado por numerosos economistas a lo largo de los siglos a la vez que muy criticado por otros. Algunas de sus críticas más feroces corren a cargo de figuras de la talla de T. R. Malthus o J. M. Keynes. Y es que es cierto que esta llamada ley no puede ser cierta en una economía en la que el dinero juega un papel que va más allá de ser moneda de cambio. En las economías monetarias actuales el dinero se convierte en uno de los más importantes depósitos de valor, y es cuando este se mantiene ocioso cuando se quiebra el principio fundamental de la ley de Say.

A pesar de ello, el modelo de Goodwin asume esta ley renunciando a los desequilibrios oferta-demanda agregada como factores determinantes de los ciclos económicos y deja que sea el conflicto distributivo capital-trabajo el que produzca esa dinámica cíclica, ya que no extrapola la condición de equilibrio permanente al mercado de trabajo, abriendo paso a la existencia de desempleo.

En relación a este hecho, Martín Moreno en *El modelo de ciclo y crecimiento de Richard Goodwin. Una evaluación empírica para Colombia* (2002) apunta que la economista británica Joan Robinson, reprendió a Goodwin cuando en una comunicación informal le dijo: “tú has cometido el mismo error de Marx, no pudiste escapar de la ley de Say”.

3.5.2. Parámetros constantes: Ratio capital/output (k), tasa de crecimiento de la productividad (α) y tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo (β)

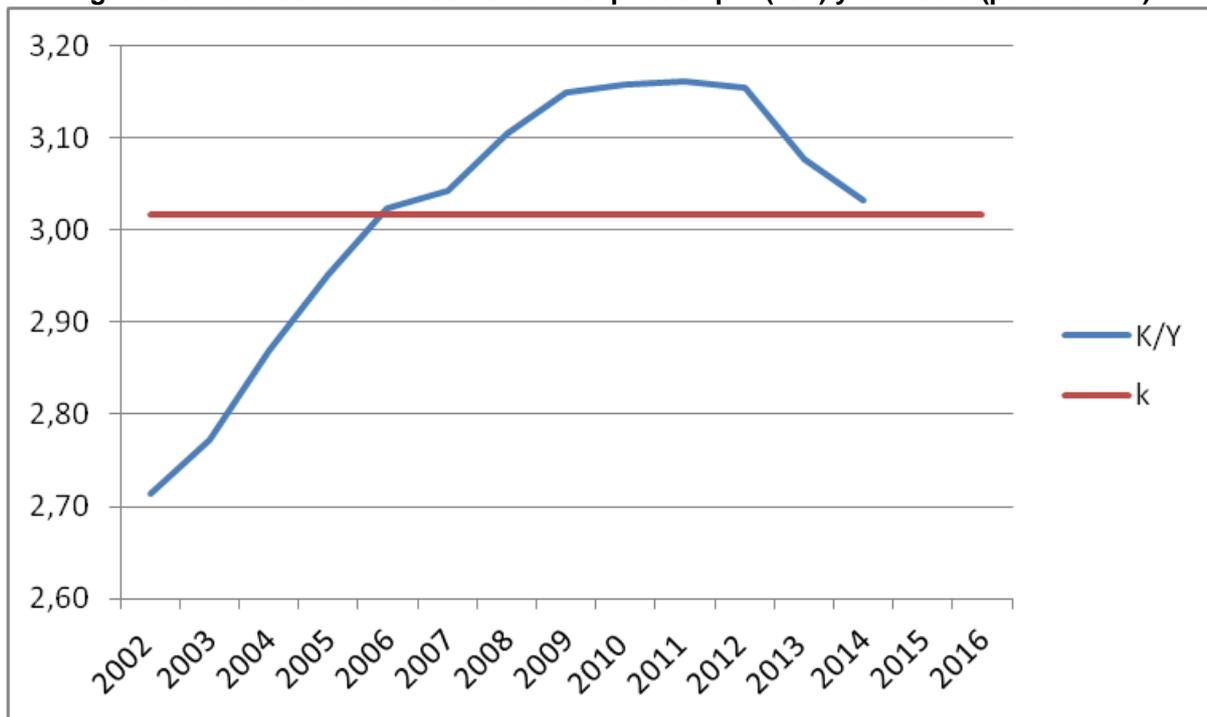
El modelo supone determinados valores constantes, aunque en la realidad no parecen serlo: ratio capital/output, tasa de crecimiento de la productividad y tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo.

Para observar en qué medida estos supuestos son o no aceptables se representan gráficamente los valores observados para cada una de las series, calculados a partir de las tablas de datos, junto a los valores constantes correspondientes estimados como sus

¹⁶ Schumpeter, J. (1955). *History of Economic Analysis*. London: Routledge.

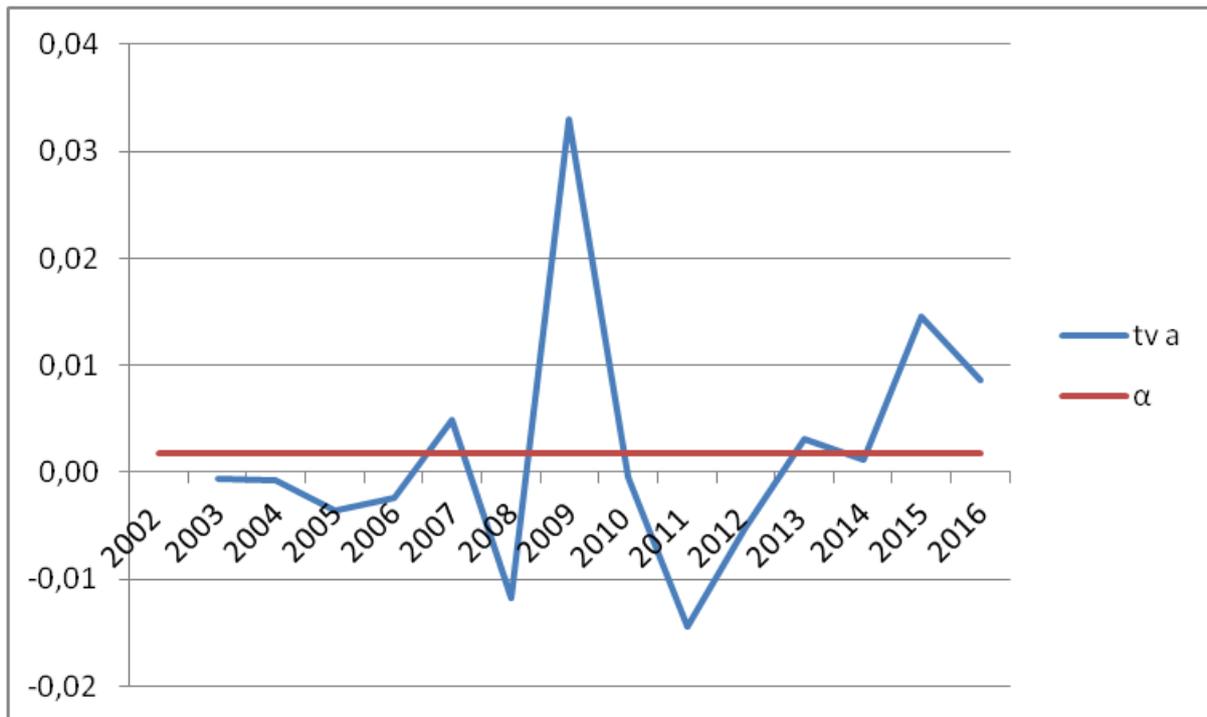
parámetros (Figuras 3.6, 3.7 y 3.8). De alguna manera esto permite ver qué error se comete al suponer estas cantidades fijas.

Figura 3.6. Valores observados del ratio capital/output (K/Y) y su media (parámetro k)



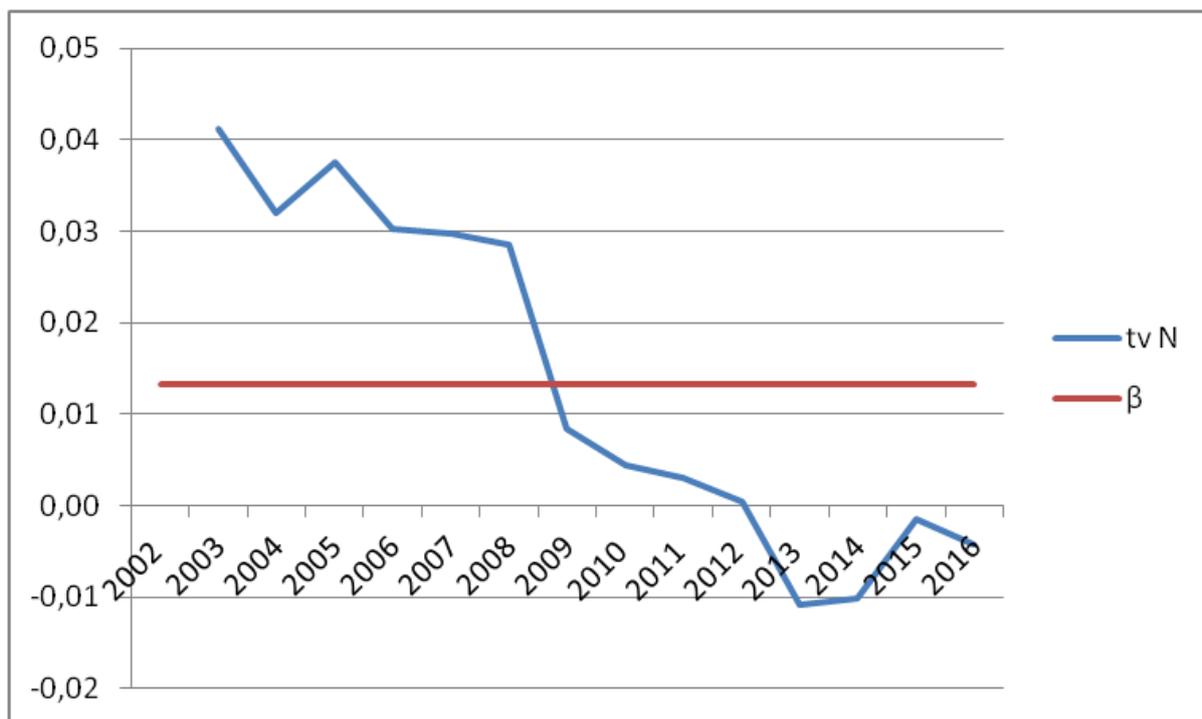
Fuente: Elaboración propia a partir de datos INE y FBBVA.

Figura 3.7. Valores observados de la tasa de variación de la productividad (tv a) y tasa de variación media anual acumulativa (parámetro α)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos INE y FBBVA.

Figura 3.8. Valores observados de la tasa de variación de la población activa (tv N) y tasa de variación media anual acumulativa (parámetro β)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos INE y FBBVA.

Observando dichas gráficas (Figuras 3.6, 3.7 y 3.8), en ninguno de los tres casos parece aceptable asumir la invariabilidad de sus valores en el tiempo. Bien es cierto que la amplitud de la escala puede hacer creer que los valores son más inestables de lo que realmente son. Por ello, en la Tabla 3.11 se han calculado las desviaciones típicas y los coeficientes de variación de las series observadas, así como algunos indicadores de bondad en base a los errores cometidos en el modelo por el hecho de considerar constantes estas series en la forma de los parámetros estimados. De esta manera se podrá proceder a extraer conclusiones más rigurosas.

Tabla 3.11. Indicadores calculados para ratio capital/output, tasa de crecimiento de la productividad y tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo; errores medios al tomar parámetros constantes

Serie original	Parámetro (k, α , β)	Desv. típica	Coef. de variación	Error Absoluto Medio	Error Absoluto Relativo Medio
K/Y	3,0160	0,1490	0,0494	0,1165	3,95%
\dot{a}/a	0,0018	0,0116	6,1534	0,0078	172,02%
\dot{N}/N	0,0133	0,0187	1,3853	0,0169	428,96%

Fuente: Elaboración propia.

En cualquier caso no parece asumible tomar un valor constante para ninguna de estas variables. Sin embargo, en caso de hacerlo, el error cometido solo sería relativamente aceptable para la fijación del ratio capital/producción.

De otra forma, con una tasa de crecimiento de la productividad y una tasa de crecimiento de la población constantes como las que asume el modelo los errores relativos se disparan, alejándose de los valores reales. Esto ocurre porque ambas variables están planteadas en tasas de variación, tomando valores cercanos a cero, lo que hace que el más mínimo error en su estimación sea relativamente grande. Además, estos valores tienen una dispersión mayor entorno a la media.

3.5.3. Curva de Phillips clásica en términos reales (γ, ρ)

A continuación, se estudia la validez de la Curva de Phillips lineal que asume el modelo y que se usó para estimar los parámetros ' γ ' y ' ρ ' en el apartado 3.3, en el que se explican los procedimientos para la estimación de los parámetros.

Tabla 3.12. Estimación lineal de la Curva de Phillips en términos reales: relación entre tasa de variación de los salarios reales y tasa empleo, España (2002-2016)

	ρ	$\gamma (-)$
Parámetros	0,1238	-0,0906
Errores típ.	0,1088	0,0811
R^2 , E. típ. est.	0,0975	0,0218

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 3.12 se muestra la estimación realizada para el supuesto de la Curva de Phillips. En ella se puede ver el valor de los parámetros estimados y sus errores típicos asociados, así como otros datos acerca de la estimación: el coeficiente de determinación R^2 que refleja en este caso un valor muy cercano a cero, y por tanto, a priori la regresión no es buena; y también el error típico estimado de la regresión.

La Figura 3.9 representa gráficamente la anterior estimación de la Curva de Phillips que relaciona de forma lineal la tasa de empleo con la tasa de variación de los salarios reales.

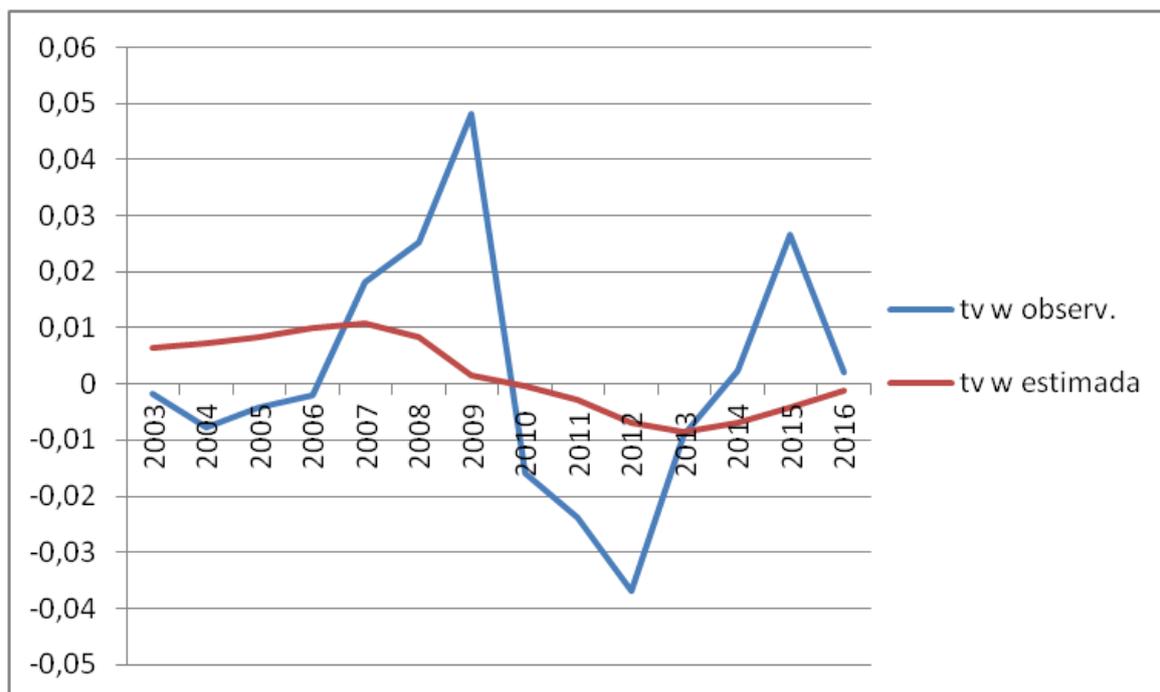
Figura 3.9. Estimación lineal de la Curva de Phillips en términos reales: relación entre tasa de variación de los salarios reales y tasa empleo, España (2002-2016)



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se puede ver la tasa de variación de los salarios que se estima a través de dicha Curva de Phillips frente a la variación observada de los mismos en la economía española (Figura 3.10). Aparentemente, la tasa de empleo no es capaz de explicar de forma precisa las variaciones de los salarios reales. Para una conclusión más rigurosa se procede a contrastar la validez de los dos parámetros y de la regresión conjunta, en la Tabla 3.13.

Figura 3.10. Tasa de variación de los salarios reales observada en España frente a estimada por la Curva de Phillips (período 2002-2016)



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3.13. Estadístico t de los parámetros de la Curva de Phillips estimada y F de la regresión global, y sus p-valores asociados

	Estadístico	p-value
t_{ρ}	1,1385	0,27402
$t_{\gamma(-)}$	-1,1165	0,28299
F	1,2962	0,27714

Fuente: Elaboración propia.

En ningún caso se rechaza la hipótesis de que el parámetro correspondiente ρ, γ ó ambos simultáneamente sean nulos siquiera a un nivel de significatividad del 10%. Este resultado indica que ni la regresión global ni sus parámetros individualmente son suficientemente significativos a un nivel relativamente aceptable, y por tanto, la Curva de Phillips estimada no se considera válida.

En resumen, se podría decir que la hipótesis de la Curva de Phillips lineal y en términos reales que introduce el modelo carece de fundamento estadístico, al menos en base a los valores observados de la economía española en el periodo estudiado.

Es probable que sea necesario utilizar otra estructura analítica más compleja que una simple recta para extraer una relación precisa entre la tasa de empleo y la tasa de crecimiento de los salarios reales, si es que verdaderamente existe tal relación. También es posible que, como planteaba el Nobel de economía R. Solow¹⁷, tenga más sentido una Curva de Phillips en términos nominales.

¹⁷ Solow R.M. (1990) *Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Ruminaton*. In: Velupillai K. (eds) *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics*. Palgrave Macmillan, London

CAPÍTULO 4

RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

Tras la breve introducción a los ciclos económicos endógenos y al modelo de crecimiento cíclico de Goodwin del primer capítulo, en el segundo se analizaron las características teóricas del modelo tratado, mientras que en el anexo se podía estudiar de una forma gráfica su comportamiento. Posteriormente, en el capítulo anterior, se tomaron datos económicos de fuentes estadísticas para la economía española y se extrajo la información necesaria para la aproximación del modelo al contexto español de los años 2002-2016. En este último punto, se han observado tanto similitudes entre el comportamiento teórico y los datos reales como determinadas deficiencias del modelo que más adelante se resumen.

El modelo teórico sigue la tesis que afirma que la economía capitalista se encuentra permanentemente oscilando en un ciclo en el que variables como la producción, el empleo, los salarios o los beneficios del capital fluctúan continuamente según dicha trayectoria. Por otra parte, no se debe olvidar que el modelo está planteado en tasas de variación, así, se admite la posibilidad de que una magnitud como la producción se encuentre en permanente crecimiento y sin embargo, su ritmo de crecimiento se acelere o decelere según dicho comportamiento cíclico.

Un buen resumen del mecanismo cíclico y endógeno del modelo es el que sigue:

Las fluctuaciones económicas en el modelo de Goodwin se derivan del conflicto distributivo entre los trabajadores y los capitalistas. Las contradicciones entre las dos clases sociales, “en parte complementarias, en parte hostiles”, se resuelven a espaldas de los actores. Cuando las variables distributivas (participaciones de salarios y ganancias en el producto) no corresponden a su nivel de equilibrio, la fuerza de negociación de los trabajadores durante el boom (alto nivel de empleo) o la implacable disciplina del mercado durante la recesión (desempleo rampante) determina el ritmo de crecimiento de los salarios, la tasa de ganancia y de crecimiento económico. Sin embargo, en el largo plazo, las participaciones de los ingresos de los asalariados y capitalistas permanecen constantes. (Moreno, 2002)

En relación a ello, el propio Goodwin sentenciaba en términos marxistas: *El aumento de la rentabilidad del capital contiene el germen de su propia autodestrucción en la medida en la que causa una vigorosa expansión en términos de producción y empleo, destruyendo así el ejército industrial de reserva y fortaleciendo el poder de negociación de los trabajadores. (Goodwin, 1967)*

El objetivo del estudio ha sido el de reproducir el modelo de crecimiento cíclico de Goodwin en la economía española del presente siglo, y estudiar posibles correspondencias entre los datos estadísticos analizados y el comportamiento teórico del modelo. A priori, eran de esperar numerosas imperfecciones, al tratarse de un modelo relativamente simple que intenta explicar una realidad tan compleja como los ciclos económicos. En este sentido, J. von Neumann¹⁸ afirmaba que a través de las matemáticas se podía conseguir una buena aproximación a la realidad, aunque nada más que eso, ya que esta es demasiado compleja.

En términos generales, los resultados de la estimación sobre los datos de la economía española en el período 2002-2016, determinan que a nivel cualitativo existe cierta correspondencia con el modelo.

¹⁸Von Neumann, J. (1947). *The mathematician*. In: *The works of the mind*. Edited by R. B. Heywood, University of Chicago Press, Chicago

Dicha correspondencia cualitativa se refleja en tres aspectos centrales:

1. Las variables tasa de empleo y participación salarial observadas dibujan un comportamiento similar al del retrato fase teórico, llegando casi a formar un ciclo cerrado en el mismo sentido cronológico.
2. Se observan similitudes entre las predicciones teóricas y los datos estadísticos en relación a la dispersión de ambas variables, de donde se deduce una mayor volatilidad de la tasa de empleo sobre la participación salarial.
3. Mediante las observaciones se verifica la correlación entre la tasa de empleo en un determinado periodo y la participación salarial en periodos posteriores, reproduciéndose así el efecto imitación teórico de la tendencia de la participación salarial sobre el empleo. Este efecto se traduce en que la evolución del empleo determinaría indirectamente la futura distribución del producto.

Por otra parte, en términos cuantitativos, no todas las estimaciones de los valores medios estacionarios para las variables del modelo coinciden con los generados en base a los datos estadísticos. Así, mientras las estimaciones de los valores medios para la tasa de empleo y las tasas de crecimiento de la producción, el stock de capital y los salarios toman valores muy próximos a los reales, no se da la misma situación para la participación de los salarios, que queda sobreestimada en exceso por el modelo, al igual que parece ocurrir con la duración del ciclo.

Adicionalmente, se ha planteado la necesidad de flexibilizar y ajustar las hipótesis del modelo, ya que la mayoría de ellas se muestran sin fundamento estadístico, al menos para el caso estudiado. En base al análisis realizado, ni la Curva de Phillips real, ni los parámetros que supone el modelo, se pueden considerar adecuados para reflejar dicha realidad.

De forma global, el modelo de crecimiento cíclico de Goodwin podría ser un interesante punto de partida para el análisis de los ciclos económicos endógenos, aunque precisa de modificaciones para adecuarse mejor a la realidad: desde la flexibilización de los supuestos, hasta la introducción de nuevas ecuaciones y variables. En este sentido han aparecido numerosos trabajos, entre ellos Desai (1973), Vercelli (1977), Falagán Mota (1995, 2002), Sordi (1999), etc.

A modo de advertencia sería conveniente no olvidar que a pesar del atractivo de sus resultados, el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra, el cual es equivalente al modelo tratado, no es estructuralmente estable¹⁹, lo que provoca que cualquier pequeña modificación en el planteamiento inicial del modelo pueda conducir a diferentes resultados.

¹⁹ Para información acerca de su estabilidad estructural véase Lynch, S. (2007). *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*®. Birkhäuser. (p. 69-73)

BIBLIOGRAFÍA

- Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. Versión traducida. Edición original en inglés, publicada por Springer.
- Desai, M. (1973). *Growth cycles and inflation in a model of the class struggle*. *Journal of Economic Theory*, 6(6), 527-545.
- Falagán Mota, J. (1995). *Consecuencias de la introducción de la teoría insider-outsider dentro del modelo de crecimiento cíclico de Goodwin*.
- Falagán Mota, J. (2002). *Análisis de una generalización del modelo de crecimiento cíclico de Goodwin*.
- Falagán Mota, J., Villamarín, C., & Outes Ruso, X. L. (2003). *Una aplicación del modelo de Goodwin-Vercelli a las economías de la OCDE*.
- Gandolfo, G. (1997). *Economic dynamics: study edition*. Springer Science & Business Media.
- Goodwin, R. M. (1967) *A Growth Cycle*, in C.H. Feinstein, editor, *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge University Press.
- Harvie, D. (2000) *Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries*. *Cambridge Journal of Economics* 2000, 24,349–376.
- Lorenz, H.-W. (2002). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion (Lecture Notes in Mathematics)* (Second Ed.).
- Lynch, S. (2007). *Dynamical Systems with Applications using Mathematica®*. Birkhäuser.
- Moreno, Á. M. (2002). *El modelo de ciclo y crecimiento de Richard Goodwin: una evaluación empírica para Colombia*. *Cuadernos de Economía*, 21(37), 13-31.
- Puu T. (1991) *Nonlinear Economic Dynamics*. In: *Nonlinear Economic Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg
- Schumpeter, J. (1955). *History of Economic Analysis*. London: Routledge.
- Shone, R. (2002). *Economic Dynamics: phase diagrams and their economic application*. (Second Edition). Cambridge University Press.
- Solow R.M. (1990) *Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Ruminaton*. In: Velupillai K. (eds) *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics*. Palgrave Macmillan, London
- Sordi, S. (1999). *Persistent and Irregular Growth Cycles when Workers Save: A Reformulation of Goodwin's Model Along Kaldorian-Pasinettian Lines*. Università degli studi di Siena, Dipartimento di economia politica.
- Velupillai, K. (1982). *Linear and Nonlinear Dynamics in economics: The Contributions of Richard Goodwin*. Economic Notes
- Vercelli, A. (1977), *The Phillips Dilemma: A new Suggested Approach*, Economic Notes, vol. 6: 14-74.
- Volterra, V. (1928). *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together*. *ICES Journal of Marine Science*.
- Von Neumann, J. (1947). *The mathematician*. In: *The works of the mind*. Edited by R. B. Heywood, University of Chicago Press, Chicago

FUENTES ESTADÍSTICAS

Instituto Nacional de Estadística, 04/04/2018

PIB precios de mercado y remuneración de asalariados (Contabilidad Nacional Anual)

http://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736165950&menu=resultados&idp=1254735576581

IPC base 2016 (Índice de Precios al Consumo, medias anuales, índice nacional general)

<http://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=22553&L=0>

Activos y asalariados (Encuesta de Población Activa, resultados anuales)

http://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736176918&menu=resultados&secc=1254736195128&idp=1254735976595

Base de datos Fundación BBVA, 04/04/2018

Stock de capital neto (total nacional)

https://www.fbbva.es/microsites/base-datos-stock-de-capital/fbbva_stock08_i31.html

ANEXO

Utilizando el software *Wolfram Mathematica v.11.1.1*, se quiere presentar gráficamente el retrato fase y otras características del sistema (16):

$$\begin{aligned}\dot{v} &= (a_1 - b_1 u) v \\ \dot{u} &= (-a_2 + b_2 v) u\end{aligned}$$

Como se vio en el segundo capítulo, de la ecuación (20) se obtiene que:

$$B = u^{a_1} v^{a_2} / e^{b_1 u + b_2 v}$$

Y sea $k[v, u]$ función que recoge diferentes valores de B .

Las variables v, u por definición están comprendidas entre 0 y 1 (salvo excepción²⁰), por tanto, se acotan en dicho intervalo.

Se seleccionan los siguientes valores para los parámetros, con el fin de obtener el centro dentro del intervalo de valores en los que se definen las variables:

$$a_1 = 1; b_1 = 2; a_2 = 1; b_2 = 2$$

Así, los valores promedio de las variables serán $a_1/b_1 = 1/2$ para u , y $a_2/b_2 = 1/2$ para v .

A continuación, se introducen los siguientes comandos en *Mathematica* (Figura A.1)

Figura A.1. Construcción del retrato fase para el sistema (16)

```
In[88]= k[v_, u_] := u^a1 v^a2 / e^(b1 u + b2 v) /. {a1 -> 1, b1 -> 2, a2 -> 1, b2 -> 2}

In[179]= g1 = ContourPlot[k[v, u], {v, 0, 1}, {u, 0, 1}, ContourShading -> False, PlotPoints -> 50];
|representación de contornos |sombreado de conto... |falso |número de puntos en la

In[180]= g2 = VectorPlot[{(1 - 2 u) v, -(1 - 2 v) u}, {v, 0, 1}, {u, 0, 1}];
|representación vectorial
```

Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

Ahora se pide que se muestren ambos gráficos generados para poder estudiar su retrato fase (Figura A.2).

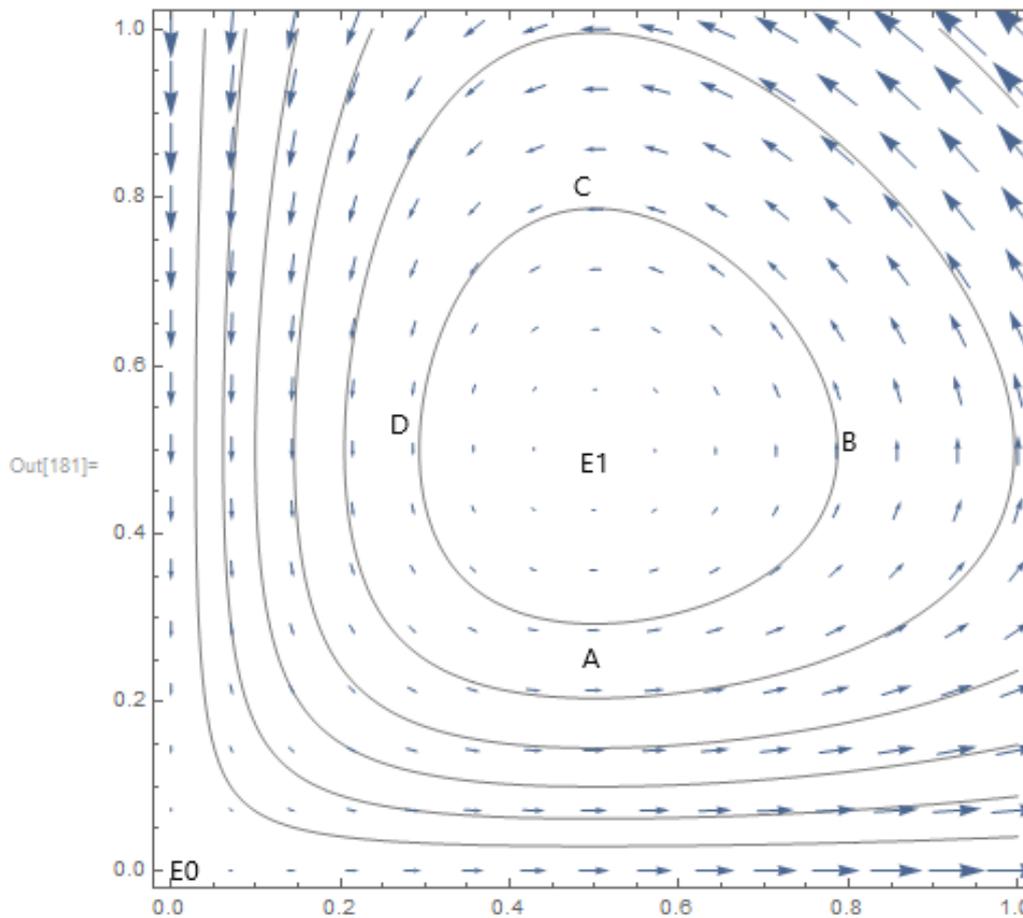
La Figura A.2 muestra el comportamiento cíclico del sistema que gira en sentido contrario a las agujas del reloj entorno al punto de equilibrio E^1 . En el eje de abscisas está representada la variable v , mientras que a la variable u le corresponde el eje de ordenadas. De esta forma, se tiene que la participación de los salarios en la renta es el tramo que va desde el origen hasta el punto que se determine en ordenadas, mientras que la del beneficio del capital va desde dicho punto hasta 1. Por otro lado, el valor en el eje de v determinaría el nivel de empleo de la economía. Además, en el análisis del capítulo dos se vio cómo era posible calcular el nivel de producción y salarios a partir de los valores de v, u .

Según esta lógica, si, por ejemplo, se parte de un nivel medio de empleo y mínimo de rentas salariales (punto A), se incentivaría la inversión y el crecimiento, haciendo aumentar tanto el empleo como las rentas salariales hasta llegar a un punto de máximo empleo y rentas salariales medias (punto B). En este último, el poder de negociación de los trabajadores empuja a un crecimiento superior de las rentas salariales, tanto es así, que llega a desincentivar el empleo moviendo a la economía hasta C, donde la tasa de empleo es media y las rentas salariales máximas. Ahora, la inversión y la producción se estancan, haciendo caer el empleo a su mínimo y empujando a las rentas salariales de nuevo al nivel medio (punto D). Por último, el empleo comienza a recuperarse a costa de las rentas salariales, completando el ciclo (punto A).

²⁰ Excepcionalmente podría darse $u > 1$ si los salarios (consumo) excedieran la producción total.

Figura A.2. Retrato fase del sistema (16), (v en abscisas, u en ordenadas)

```
In[181]:= Show[g1, g2]
|muestra
```



Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

A continuación se pretende observar el comportamiento cíclico de las variables en el tiempo.

En primer lugar, se introduce el modelo con las características ya especificadas y se seleccionan dos puntos iniciales para v, u . En este caso, y por motivos estéticos de cara a su representación gráfica, se han escogido los valores $v[0] = 0,5 ; u[0] = 0,01$. Además, el intervalo temporal se ha fijado en 50 uds.

Todos estos datos se introducen en *Mathematica* con el objetivo de encontrar una solución numérica que aproxime la trayectoria de las variables básicas del modelo (Figuras A.3, A.4 y A.5).

Figura A.3. Introducción del sistema (16) en *Mathematica* para hallar una solución numérica con las condiciones especificadas

```
In[108]:= m = 50;
```

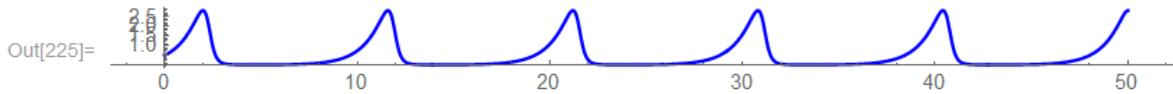
```
In[153]:= s = NDSolve[{v'[t] == v[t] (1 - 2 u[t]), u'[t] == -u[t] (1 - 2 v[t]), v[0] == 0.5, u[0] == 0.01}, {v, u}, {t, m}]
|resolvidor diferencial numérico
```

```
Out[153]:= {{v -> InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, Output: scalar], u -> InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, Output: scalar]}}
```

Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

Figura A.4. Trayectoria periódica de v frente al tiempo, con las condiciones especificadas

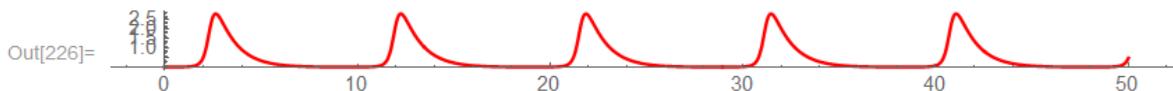
```
In[225]:= z1 = ParametricPlot[Evaluate[{t, v[t]} /. s], {t, 0, m}, PlotStyle -> Blue]
          |gráfico paramétrico |evalúa |estilo de repr... |azul
```



Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

Figura A.5. Trayectoria periódica de u frente al tiempo, con las condiciones especificadas

```
In[226]:= z2 = ParametricPlot[Evaluate[{t, u[t]} /. s], {t, 0, m}, PlotStyle -> Red]
          |gráfico paramétrico |evalúa |estilo de repr... |rojo
```



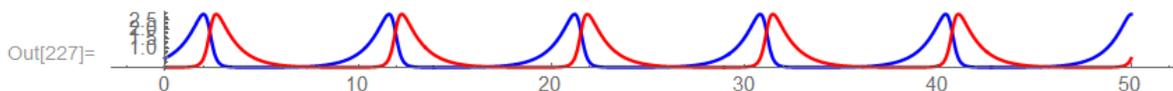
Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

Gracias a las Figuras A.4 y A.5 se puede comprobar que ambas variables siguen una trayectoria con oscilaciones periódicas. Para las condiciones que se han determinado, el ciclo completo parece tener una duración de entre 8 y 10 años (suponiendo que la ud. temporal es el año).

Si se muestran ambas en el mismo gráfico (Figura A.6):

Figura A.6. Trayectoria periódica de ambas variables frente al tiempo, con las condiciones especificadas (v en azul, u en rojo)

```
In[227]:= Show[z1, z2]
          |muestra
```



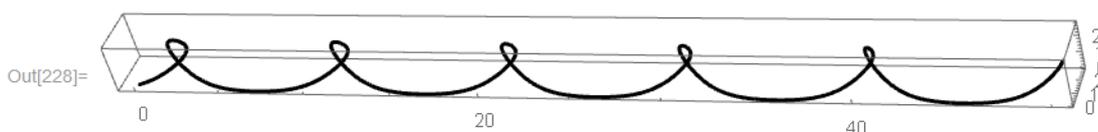
Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

En la Figura A.6 se observa un patrón por el cual la variable u imita a posteriori las oscilaciones de v . La interrelación entre ambas variables genera un comportamiento cíclico que impide alcanzar el punto de estado estacionario.

Por último si se observa esto mismo en una gráfica tridimensional de ambas variables y tiempo (Figura A.7):

Figura A.7. Trayectoria temporal del sistema en tres dimensiones, con las condiciones especificadas

```
In[228]:= z3 = ParametricPlot3D[Evaluate[{t, v[t], u[t]} /. s], {t, 0, m}, PlotStyle -> Black]
          |gráfico paramétrico 3D |evalúa |estilo de repr... |negro
```



Fuente: Elaboración propia en software Mathematica.

La Figura A.7 solo hace confirmar dicha trayectoria temporal cíclica en la dinámica del sistema económico.