Actas del XVII CEDYA - VII CMA, L. Ferragut & A. Santos eds.,
Univ. Salamanca (2001), 163–177

Efecto de la rugosidad en el deslizamiento de un fluido sobre una pared.

Jacques Simon[1] Juan Casado-Díaz[2] Enrique Fernández-Cara[2]

Abstract

Recordamos resultados y presentamos problemas abiertos acerca de la influencia del perfil y la rugosidad de un cuerpo sólido sobre su resistencia al arrastre hidrodinámico. Mostramos además que, asintóticamente, un fluido no puede deslizarse sobre una pared recubierta de asperezas minúsculas si éstas son demasiado numerosas : en tal caso, se adhiere a la pared.

1 Introducción

¿ Existe un perfil que minimiza la resistencia al arrastre de un cuerpo que se mueve en un fluido ? Caso de existir, ¿ cómo depende esta resistencia de la rugosidad, esto es, de variaciones del perfil del sólido que oscilan rápidamente ?

Estos problemas están abiertos y son de gran dificultad para fluidos turbulentos, debido en parte a la no-linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes y, en parte, a la dependencia no lineal respecto del dominio de la solución de una ecuación en derivadas parciales (que se da incluso cuando ésta es lineal).

Presentamos en este trabajo algunos resultados conocidos y varias cuestiones abiertas sobre este tema.

En primer lugar, examinaremos el problema de la minimización de la capacidad de un condensador eléctrico para ver qué se puede esperar cuando las ecuaciones son lineales y sencillas y, en consecuencia, qué cabe esperar en el caso de un flujo gobernado por las ecuaciones de Stokes o de Navier-Stokes para bajo número de Reynolds.

A continuación, recordaremos resultados relacionados con la minimización de la resistencia al arrastre para fluidos viscosos incompresibles en régimen laminar. También hablaremos del cálculo de la correspondiente "variación" respecto de las oscilaciones de la frontera. En este contexto, seremos capaces de presentar algunos problemas abiertos "razonables".

Después, indicaremos algunas de las dificultades que aparecen para flujos gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes con alto número de Reynolds. Éstas parecen estar relacionadas con el fenómeno de bifurcación de soluciones y, en último extremo, con la no-linealidad. Por ejemplo, es bien conocido que la aparición de minúsculas ranuras longitudinales sobre la pared hace disminuir notablemente la resistencia al arrastre experimentada por el fluido.

Finalmente, mostraremos que, asintóticamente, un fluido no puede deslizarse sobre una pared recubierta de asperezas demasiado numerosas sino que, en una situación como ésta, el fluido se adhiere a la pared. En efecto, la condición de contorno de deslizamiento, por sí sola, es más que suficiente para que, en el límite, todas las componentes de la velocidad se anulen sobre la pared.

2 Minimización de la energía eléctrica

Ciertos problemas de optimización de forma tienen un óptimo "natural", o "universal". El más conocido es el problema de superficie mínima de un cuerpo de volumen dado. El mínimo es alcanzado por una bola.

Por el contrario, no hay superficie máxima. Hay superficie máxima, "no natural", cuando se añade la restricción "artificial" de que la familia de cuerpos donde buscamos el máximo es compacta en un sentido adecuado.

Llamamos artificial una tal restricción porque no tiene un origen físico sino matemático ; se añade por razones técnicas, para que la demostración sea posible. Proceder de este modo no da la respuesta ideal al problema de partida, pero puede servir para cubrir una etapa en su resolución.

En los problemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales, también se encuentran mínimos de ambos tipos, naturales y artificiales. Un mínimo del primer tipo, universal, se encuentra cuando se minimiza la energía de un condensador eléctrico.

Más precisamente, sean Ω_0 y Ω_1 dos conjuntos acotados y simplemente conexos de $\mathbb{R}^2$, de fronteras Γ_0 y Γ_1 , respectivamente. Supongamos que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$. El potencial eléctrico (o potencial Newtoniano) del condensador $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$ es, por definición, la única solución $u = u_\Omega$ del problema

$$u \in H^1(\Omega), \quad \Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma_1} = 1, \quad u|_{\Gamma_0} = 0.$$

Para que estas condiciones de contorno se verifiquen en un sentido "fuerte" (por ejemplo, $u(x) = 1$ para casi todo $x \in \Gamma_1$), se necesita que las Γ_i sean suficientemente regulares. No obstante, el problema puede ser reescrito en forma débil para cualesquiera Γ_i . La capacidad eléctrica (o capacidad Newtoniana) asociada es

$$E(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2 \, dx.$$

En un notable trabajo [9], I.I. Daniljuk demostró que, fijados el contorno Γ_1 y el volumen v, existe un contorno Γ_0^{opt} que minimiza la capacidad, esto es, tal que

$$E(\Omega^{\mathrm{opt}}) \leq E(\Omega), \quad \forall \Omega, \ |\Omega| = v.$$

Además, mostró que el óptimo Γ_0^{opt} es muy regular. Obsérvese que, sin restricción sobre el volumen, la capacidad mínima sería cero, ya que ésta decrece cuando el dominio crece.

Cuando no se fija Γ_1 pero sí el volumen de Ω_1 , el mínimo es alcanzado por un abierto determinado por dos bolas concéntricas. Esto resulta de la propiedad que tiene la simetrización de Schwarz de reducir la norma L^2 del gradiente [13].

En 3D, la existencia de una forma óptima universal Ω^{opt}, con Γ_1 y v dados, no es conocida. Sólo se han obtenido formas óptimas imponiendo restricciones artificiales adecuadas, por ejemplo, cuando la curvatura de la frontera está acotada (independientemente del dominio) [15]. El método de Daniljuk reposa sobre propiedades “finas” de las funciones de variable compleja y, desgraciadamente, no puede ser generalizado al caso 3D.

Otro método, debido a V. Sverak [21], conduce también a una forma óptima en 2D, pero su extensión 3D de nuevo hace necesaria la introducción de restricciones artificiales [10]. Resultados similares se encuentran en [17].

Sería muy interesante encontrar un método que funcione en dimensión 3 o superior. Esto parece difícil, pero accesible.

A pesar de todo, puede tener gran interés práctico obtener resultados parciales en el caso de muchos problemas de optimización de forma que no tienen un mínimo universal. Por ejemplo, esto ocurre cuando se intenta maximizar la rigidez de una estructura de peso dado. No hay forma óptima, porque cada forma puede ser mejorada por otra más complicada (con más agujeros, nervaduras, ...). Sin embargo, ciertos algoritmos de optimización de forma de carácter topológico producen formas complejas con una rigidez bastante alta y aceptable en la práctica [1], [5]. Así, en lugar de una forma óptima, se puede buscar una forma “homogeneizada” óptima [22].

3 Minimización de la resistencia al arrastre

Sean de nuevo Ω_0 y Ω_1 dos abiertos acotados y simplemente conexos de $\mathbb{R}^2$, con $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$. Pongamos $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ y $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$. Se supone que Ω_0 es un “gran” abierto, que $\overline{\Omega}_1$ está ocupado por un sólido rígido y que las partículas de un fluido viscoso e incompresible en régimen estacionario de viscosidad cinemática ν ocupan el abierto $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$. En lo que sigue, L denotará una longitud característica de $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$, que permitirá identificar este abierto, salvo giros y traslaciones, en la familia de todos aquéllos que sean *semejantes* a él.

Dado un vector $g = (g_1, g_2)$ (la velocidad del cuerpo ocupado por Ω_1), la velocidad del fluido $u = (u_1, u_2)$ y su presión p satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes

$$-\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u|_{\Gamma_1} = g, \quad u|_{\Gamma_0} = 0. \tag{1}$$

Pongamos $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$ y $\mathrm{Re} = L|g|/\nu$ (el número de Reynolds del problema precedente). Cuando la cantidad adimensional Re es suficientemente pequeña, existe una única solución $u \in (H^1(\Omega))^2$ y $p \in L^2(\Omega)$ de (1) (p es única una vez normalizada, por ejemplo imponiendo $\int_\Omega p\,dx = 0$; si las Γ_i no son suficientemente regulares, las igualdades que aparecen en (1) pueden y deben ser reescritas en una forma débil).

La resistencia al arrastre experimentada por el fluido es

$$R(\Omega) = \int_{\Omega_0\setminus\overline{\Omega}_1} |\nabla u_\Omega|^2\,dx.$$

En [21], V. Sverak demostró que, fijados el dominio Ω_0 ocupado por el fluido cuando el sólido no está presente, el volumen v de Ω_1 y la velocidad g, con $|g|/\nu \leq c(\Gamma_0, v)$, existe un contorno Γ_1^{opt} que minimiza la resistencia $R(\Omega)$, esto es, tal que

$$R(\Omega^{\mathrm{opt}}) \leq R(\Omega), \quad \forall \Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1, \ |\Omega_1| = v.$$

En 3D, un perfil óptimo sólo ha sido obtenido imponiendo restricciones artificiales adicionales, por ejemplo cuando la curvatura de la frontera está acotada por una constante dada [15]. O bien, cuando una cierta medida de la "capacidad" de la frontera está acotada [10], [11], lo que permite extender a 3D el método de Sverak.

En estos trabajos, los resultados son similares a los que se conocen para un condensador. Esencialmente, esto se debe al carácter laminar del flujo, que resulta de la hipótesis de que Re sea pequeño. En efecto, queda así garantizado que el término no lineal $(u \cdot \nabla)u$ sea dominado por el término difusivo $-\nu\Delta u$. Entre otras cosas, esto implica que la solución (u, p) es única y depende "regularmente" de Ω_1 .

La obtención de un perfil óptimo 3D que minimiza la resistencia al arrastre en régimen laminar es de nuevo un problema abierto, del mismo nivel de dificultad que el problema de la minimización de la energía eléctrica de un condensador : difícil, pero accesible.

4 Variaciones respecto de oscilaciones de la frontera

A nivel práctico, se puede intentar para minimizar $R(\Omega)$ el uso de algoritmos de tipo gradiente. Por tanto, tiene sentido preguntarse por la existencia de un "gradiente" o una "variación" de $R(\Omega)$ respecto del dominio.

Cuando Re $= L|g|/\nu$ es pequeño, la función $\gamma \mapsto R(\Omega + \gamma)$ es indefinidamente derivable en un entorno de 0 en $W^{1,\infty}$ y su derivada es conocida [4], tanto en 2D como en 3D. Aquí, γ es un campo de vectores $W^{1,\infty}$ definido en todo $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y hemos denotado $\Omega + \gamma$ el conjunto

$$\Omega + \gamma = \{\, x + \gamma(x) : x \in \Omega \,\}.$$

Si $R'(\Omega; \cdot\,)$ designa la derivada de la aplicación precedente, tenemos

$$R(\Omega + \gamma) = R(\Omega) + R'(\Omega; \gamma) + o(\|\gamma\|_{W^{1,\infty}}).$$

En el caso del condensador eléctrico y también en muchas otras situaciones, se pueden probar resultados similares, ver por ejemplo [15], [17], [20].

Para analizar el efecto de la rugosidad de la pared sólida Γ_1 (esto es, de la presencia de asperezas) sobre la resistencia, estas variaciones no son convenientes, porque una variación infinitesimal $\epsilon\gamma$ representa asperezas cuya altura máxima va a cero con ϵ pero de anchura independiente de ϵ. Por el contrario, nos interesan asperezas de tipo "oscilaciones rápidas", con alturas y anchuras que tiendan juntas a cero : es más realista adoptar un punto de vista próximo al de la homogeneización.

Por simplicidad, consideremos el caso de una placa infinita periódica, es decir, un dominio del tipo

$$\mathcal{O} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < r_\epsilon(x') \},$$

donde $x' = (x_1, x_2)$ y $r_\epsilon = r_\epsilon(x')$ es una función oscilante (con períodos $\approx \epsilon$) que tiende a r_0 cuando $\epsilon \to 0$. Se admite que $r_0 = r_0(x')$ es periódica, de período (ℓ_1, ℓ_2) en la variable x', de tal modo que nos podemos restringir a considerar soluciones periódicas en x' en el dominio acotado

$$\Omega_\epsilon = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < \ell_1\,,\ 0 < x_2 < \ell_2\,,\ 0 < x_3 < r_\epsilon(x') \}. \tag{2}$$

La velocidad $u = (u_1, u_2, u_3)$ y la presión p satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes (1), donde Γ_0 y Γ_1 son respectivamente las fronteras superior y inferior de Ω_ϵ y verifican condiciones de periodicidad sobre las paredes laterales de Ω_ϵ.

Cuando

$$r_\epsilon(x') = r_0 + \epsilon\eta\Big(\frac{x'}{\epsilon}\Big), \tag{3}$$

donde $\eta = \eta(x')$ es periódica de período (ℓ_1, ℓ_2) y $1/\epsilon$ es un entero (para que haya un número entero de asperezas en Ω_ϵ), la solución es próxima a un flujo de Couette. Más precisamente, tenemos

$$u_\epsilon(x) = \Big(1 - \frac{x_3}{r_0}\Big)g + \epsilon\frac{x_3}{r_0}f_\epsilon + w_\epsilon(x), \tag{4}$$

para cierta $f_\epsilon = (f_{\epsilon 1}, f_{\epsilon 2}, 0)$ que no se conoce explícitamente y con un resto w_ϵ que tiende rápidamente a 0 con ϵ en el sentido siguiente: Para cada $r < r_0$, existen constantes c y c' tales que

$$|w_\epsilon(x)| \le c\exp\Big(-\frac{c'}{\epsilon}\Big) \qquad \forall x_3 < r$$

(véase [2]).

También se pueden probar resultados de este tipo en el caso del potencial eléctrico y de otros problemas similares, véase [7], [16], [18].

5 Más problemas abiertos

Para fluidos laminares, las tres cuestiones siguientes están abiertas y son de un nivel razonable de dificultad:

a) *Obtener la derivabilidad en 0 de la función $\epsilon \mapsto u_\epsilon$.* Esto es, obtener una fórmula análoga a (4), con f_ϵ independiente de ϵ. Realmente, bastaría probar que f_ϵ puede ser elegida de tal manera que posea un límite cuando $\epsilon \to 0$ (hay que "elegir" f_ϵ porque no es única: si f_ϵ verifica (4), entonces, para δ_ϵ suficientemente pequeño, $f_\epsilon + \delta_\epsilon$ también verifica esta igualdad con w_ϵ cambiada por $w'_\epsilon(x) = w_\epsilon(x) - \epsilon x_3\delta_\epsilon/r_0$).

b) *Obtener la derivabilidad en 0 de la función $\epsilon \mapsto R(u_\epsilon)$.* Esto es, obtener una aproximación de la resistencia al arrastre del tipo siguiente:

$$R(\Omega_\epsilon) = R(\Omega) + \epsilon R'(\Omega) + o(\epsilon).$$

c) *Extender* (4) *y las fórmulas que se pretende obtener en los apartados precedentes a dominios oscilantes sin períodos pequeños.* Por ejemplo, extender estos resultados al caso de una función r_ϵ como la que aparece en (3) con r_0 variable con x'. En tal caso, la solución (u_ϵ, p_ϵ) no tiene períodos que tienden a 0 con ϵ, lo que jugaba un papel esencial en la prueba de [2] ; sólo se sabe que la solución de las ecuaciones linealizadas, esto es, del problema de Stokes con condiciones de Fourier, tiene un límite (u_0, p_0) y que

$$|u_\epsilon(x) - u_0(x)| \leq c\sqrt{\epsilon}$$

para cada x fijado tal que $x_3 < r_0(x')$, véase [3]. La extensión al caso en que se impone una condición de Dirichlet es elemental, pero la extensión a la ecuación no lineal de Navier-Stokes no lo es.

6 El caso de un flujo turbulento

Desgraciadamente, la mayoría de los flujos reales (alrededor de un barco, un coche o un avión, cerca de un dique, en un motor, ...) no son laminares, sino turbulentos. Esto ocurre cuando el número de Reynolds del flujo considerado es grande. En la práctica, que el régimen sea turbulento significa que el campo de velocidades y la presión experimentan rápidas fluctuaciones en espacio y tiempo y la descripción del flujo se hace muy compleja.

En el caso de un flujo turbulento, las ecuaciones estacionarias de Navier–Stokes no tienen necesariamente solución única. Esto parece haber sido observado por primera vez para el problema de Reynolds (el flujo entre dos cilindros en rotación) por Velte [23]. Varias otras soluciones bifurcadas pueden ser obtenidas, ver [12], entre cilindros en rotación o entre placas en traslación.

Es importante notar que las soluciones bifurcadas (que se pueden observar experimentalmente en la realidad) no son soluciones de energía mínima, porque la solución de Couette (la que es radial entre cilindros o lineal entre placas) tiene la menor energía de todas. Esto es de nuevo consecuencia de que la simetrización de Schwarz minimiza la norma L^2 del gradiente. Además, para una alta velocidad de rotación o traslación, la solución física no es siempre estacionaria, aunque las datos lo sean.

En el caso del flujo entre dos placas, aparece un fenómeno probado por varias experiencias, ver [19] y su numerosa bibliografia, y por la simulación numérica [8] : añadiendo minúsculas ranuras longitudinales (de menos de 0.01 mm. de profundidad), la resistencia al arrastre puede ser disminuida en un porcentaje del orden del 1 % o incluso más. Estas ranuras fueron utilizadas por el yate *Stars and Stripes* en la America Cup ($\approx$ 1994). Son también utilizadas por los tiburones, desde hace millones de años [6].

Es posible que no haya un perfil óptimo, esto es, que la resistencia $R(\Omega_\epsilon)$ baje con el tamaño ϵ de las ranuras. En tal caso, la resistencia límite cuando $\epsilon \to 0$ sería inferior a la resistencia de la placa límite, que es el plano. Desde un punto de vista analítico, esto puede ser identificado como la semicontinuidad superior de la función $\epsilon \mapsto R(\Omega_\epsilon)$. No obstante, a la vista de la siguiente explicación, también cabe dentro de lo posible que haya un tamaño óptimo de ranura $\epsilon_0 \ll 1$.

Una explicación del fenómeno dada por G.E. Karniadakis es que los remolinos de tamaño próximo a ϵ no pueden aparecer entre las ranuras, debido al frotamiento sobre las paredes laterales de las ranuras, lo que limita la turbulencia. De esta forma, la reducción máxima de resistencia sería alcanzada por un tamaño de ranura próximo a la escala de Kolmogorov, que es la longitud característica de los más pequeños remolinos.

En cualquier caso, para minimizar la resistencia al arrastre, habría que minimizar la energía de la solución física, que no es necesariamente la solución con energía mínima, sino una solución bifurcada. Eso resulta muy difícil. De hecho, la propia existencia de una solución bifurcada no es conocida excepto para geometrías muy particulares, véase [12]. El cálculo de la variación respecto del dominio (o simplemente respecto del tamaño de las ranuras) en el caso más simple de cilindros con ranuras periódicas no es de momento posible, precisamente debido a la ausencia de resultados de bifurcación.

Así, la optimización de la resistencia al arrastre en condiciones realistas y el cálculo de su variación respecto del dominio están actualmente fuera de nuestro alcance.

7 Deslizamiento y rugosidad

Según el tipo de fluido y la magnitud de sus números característicos, suelen utilizarse distintas condiciones de contorno para completar las ecuaciones en derivadas parciales satisfechas por u y p.

Para fijar ideas, pensemos en un fluido viscoso, como el agua o el aire, que se mueve a gran velocidad en un dominio dado y "tropieza" con una pared en reposo. Las partículas del fluido que toman contacto con la pared se adhieren a ésta : su velocidad es cero (coincidirían con la de la pared si ésta se moviese). En estas condiciones, se genera una capa límite alrededor de la pared en la cual la velocidad varía muy rápidamente de un punto a otro próximo (desde valores próximos a la velocidad de la pared hasta valores de un orden de magnitud comparable al de las partículas situadas lejos de la pared).

Para evitar el cálculo del campo de velocidades en el interior de la capa límite, cuyo grosor es despreciable frente a las dimensiones del dominio, es aconsejable reemplazar la condición de adherencia por condiciones de deslizamiento con frotamiento adecuadas que modelan el comportamiento de las partículas en la capa. En el caso de una pared inmóvil, se trata de las condiciones siguientes :

$$u \cdot n = 0, \quad (\sigma \cdot n)_{\tan} + ku = 0.$$

Aquí, $n = n(x)$ es un vector unitario normal a la frontera en el punto x y dirigido hacia el exterior del dominio ocupado por el fluido, σ es el tensor de esfuerzos y $f_{\tan}$ es la componente tangencial del campo vectorial f, esto es, $f_{\tan} = f - (f \cdot n)\, n$.

La condición $u \cdot n = 0$ nos dice que el fluido no puede atravesar la pared ; la otra condición expresa que las fuerzas de frotamiento son proporcionales a la velocidad de deslizamiento, con un coeficiente k (que debe ser positivo). Este coeficiente depende del estado de la superficie (material, rugosidad, olas en el caso de la interfaz océano/atmósfera) y puede depender de la propia u. Para una recopilación de resultados conocidos, ver [14].

¿ Debemos usar condiciones de deslizamiento o condiciones de adherencia para el análisis de la rugosidad ? En otras palabras, cuando hay asperezas de tamaño ϵ y sub-asperezas de tamaño $\ll \epsilon$, ¿ qué coeficiente de frotamiento debemos tomar para modelar las sub-asperezas ?

De hecho da igual porque, en presencia de asperezas de tamaño $\ll 1$, la condición de deslizamiento $u \cdot n = 0$ equivale a la condición de adherencia $u = 0$.

Para justificar esta afirmación, sea R_ϵ el trozo oscilante de frontera

$$R_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ x_3 = r_\epsilon(x')\},$$

donde S es un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Aquí, la función r_ϵ está dada por

$$r_\epsilon(x') = r_0(x') + \epsilon\eta\Big(\frac{x'}{\epsilon}\Big),$$

donde $r_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{S})$, $r_0(x') \geq a > 0$ y $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ es periódica de período (ℓ_1, ℓ_2) en la variable $y' = x'/\epsilon$. Sea G_ϵ el abierto

$$G_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ 0 < x_3 < r_\epsilon(x')\}.$$

Supongamos que, para cada ϵ, tenemos $u_\epsilon \in (H^1(G_\epsilon))^3$ y

$$\int_{G_\epsilon} |\nabla u_\epsilon|^2 \, dx \leq b, \tag{5}$$

con b independiente de ϵ. Sea G_0 el abierto

$$G_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ 0 < x_3 < r_0(x')\}$$

y pongamos

$$R_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ x_3 = r_0(x')\}.$$

Supondremos también que existe una distribución u_0 en G_0 tal que, cuando $\epsilon \to 0$,

$$u_\epsilon \to u_0 \quad \text{en } (L^2(\omega_c))^3 \tag{6}$$

para cada $c > 0$, donde $\omega_c = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ 0 < x_3 < r_0(x') - c \,\}$. Finalmente, supondremos que η no posee ninguna dirección invariante, esto es,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2,\ \xi \neq 0, \text{ existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \eta(t\xi) \neq \eta(0). \tag{7}$$

Entonces se tiene el siguiente resultado, que sera probado en la sección 8 :

Teorema. *Si, para cada $\epsilon > 0$,*

$$u_\epsilon \cdot n_\epsilon = 0 \quad \textit{sobre } R_\epsilon\,, \tag{8}$$

entonces

$$u_0 = 0 \quad \textit{sobre } R_0\,.$$

Observaciones:

1) La traza de u_0 sobre R_0 está bien definida pues, debido a (5) y (6),

$$\int_{\omega_c} |\nabla u_0|^2 \, dx \leq b$$

para cada $c > 0$, lo que implica $\nabla u_0 \in (L^2(G_0))^3$. Observamos que, cuando (5) es satisfecho, (6) es equivalente a la convergencia en $(\mathcal{D}'(\omega_c))^3$.

2) Se puede probar un resultado completamente análogo en dimensión dos o en dimensión mayor. Por otra parte, es evidente que, para que la conclusión del teorema sea cierta, es suficiente que las hipótesis sean satisfechas por una sucesión de valores de ϵ que tienda a cero.

3) Si η tiene una dirección $\xi \in \mathbb{R}^2$ invariante, esto es, tal que $\eta(t\xi) = \eta(0)$ para cada t, el resultado no es cierto:

— Si η tiene una única dirección invariante ξ (el caso de una pared con ranuras), la demostración que sigue prueba que, necesariamente, $u_0 \cdot n = 0$ y $u_0 \cdot \xi^\perp = 0$ sobre R_0. Así, en este caso el fluido se desliza en la dirección de las ranuras pero no puede hacerlo en la dirección transversal.

— Si η tiene dos direcciones invariantes linealmente independientes, entonces η es constante y lo único que puede deducirse es que $u_0 \cdot n = 0$. En efecto, dado un campo u_0, todas las hipótesis son satisfechas por las $u_\epsilon(x) = u_0(x_1, x_2, x_3 - \epsilon\eta)$.

4) La hipótesis $\eta \in \mathcal{C}^2$ puede ser mejorada.

Como consecuencia de este resultado, podemos identificar en el límite la solución del problema estacionario de Navier-Stokes en el abierto Ω_ϵ que aparece en (2) con condiciones de deslizamiento con frotamiento sobre Γ_ϵ y sobre la pared plana

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < \ell_1 \,,\ 0 < x_2 < \ell_2 \,,\ x_3 = 0 \}$$

y con condiciones de periodicidad sobre la frontera lateral de Ω_ϵ.

En efecto, sea $(u_\epsilon \,, p_\epsilon)$ la solución periódica en x' del sistema

$$-\nu \Delta u_\epsilon + (u_\epsilon \cdot \nabla) u_\epsilon + \nabla p_\epsilon = 0, \quad \nabla \cdot u_\epsilon = 0 \quad \text{en } \Omega_\epsilon \,,$$

junto con las condiciones de contorno

$$u_\epsilon \cdot n_\epsilon = 0, \quad (\sigma_\epsilon \cdot n_\epsilon)_{\tan} + k u_\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_\epsilon$$

(n_ϵ es el vector normal unitario sobre Γ_ϵ y σ_ϵ es el tensor de esfuerzos asociado al par $(u_\epsilon \,, p_\epsilon)$) y

$$u_\epsilon \cdot n = 0, \quad (\sigma_\epsilon \cdot n)_{\tan} + k(u_\epsilon - g) = 0 \quad \text{sobre } P$$

(g es un vector de la forma $g = (g_1 \,, g_2 \,, 0)$).

Fijada una longitud característica L del abierto Ω_0, se puede demostrar que, cuando el correspondiente número de Reynolds $\mathrm{Re} = L|g|/\nu$ es suficientemente pequeño, para cada $\epsilon > 0$, existe una única solución $(u_\epsilon \,, p_\epsilon)$ del sistema precedente que, además, verifica

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon|^2 \, dx + \int_{\Omega_\epsilon} |u_\epsilon|^2 \, dx \leq b,$$

donde b es independiente de ϵ. También se puede demostrar que existe una función $u_0 \in (H^1(\Omega_0))^3$ tal que, al menos para una subsucesión de las u_ϵ, se tiene (5) para cada $c > 0$.

Como consecuencia del teorema precedente, tenemos que, si Re es suficientemente pequeño y η no posee direcciones invariantes, en realidad toda la sucesión $\{u_\epsilon\}$ converge a u_0 y, por otra parte, u_0 es, junto con alguna p_0, la única solución periódica en x' de las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω_0 completadas con las condiciones de contorno

$$u_0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0$$

y

$$u_0 \cdot n = 0, \quad (\sigma_0 \cdot n)_{\tan} + k(u_0 - g) = 0 \quad \text{sobre } P.$$

Sería interesante analizar en esta situación el comportamiento de la resistencia al arrastre $R(\Omega_\epsilon)$ cuando $\epsilon \to 0$ y, en particular, comparar los valores de $R(\Omega_\epsilon)$ para ϵ próximo a cero con la resistencia asociada a u_0. De nuevo, esto parece factible.

8 Demostración del teorema

En lo que sigue, c es un número positivo que puede depender de S, a, b, η y r_0, pero no de ϵ.

Primera reducción del problema. El problema se reduce al caso $r_0 \equiv 1$ usando el cambio de variables $x \mapsto \widehat{x} = (x_1, x_2, 1 + (x_3 - r_0(x'))/a)$ y restringiéndonos al subdominio donde $\widehat{x}_3 > 0$. Por tanto, supondremos en adelante que $r_0 \equiv 1$.

Sean $\xi \in \mathbb{R}^2$ y pongamos

$$\lambda(\xi) = \Big(-\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(\xi), -\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(\xi), 1\Big). \tag{9}$$

Debido a la periodicidad, η alcanza su cota superior en $\mathbb{R}^2$, digamos en el punto ξ^1. Entonces $\lambda(\xi^1) = (0, 0, 1)$.

Gracias a (7), existen dos puntos ξ^2 y ξ^3 tales que $\lambda(\xi^1)$, $\lambda(\xi^2)$ y $\lambda(\xi^3)$ son linealmente independientes. En efecto, si no fuera así, para cada ξ tendríamos $\lambda(\xi) = (c\alpha, c\beta, 1)$ con α y β fijos; en tal caso, también tendríamos que

$$\frac{d}{dt}\eta(t\beta, -t\alpha) = \beta\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(t\beta, -t\alpha) - \alpha\frac{\partial \eta}{\partial x_2}(t\beta, -t\alpha) = -c\beta\alpha + c\alpha\beta = 0,$$

lo que estaría en contradicción con (7). En consecuencia, bastará demostrar que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$u_0 \cdot \lambda(\xi) = 0 \quad \text{sobre } R_0 \tag{10}$$

(pues, eligiendo sucesivamente ξ igual a ξ^1, ξ^2 y ξ^3, obtendríamos $u_0 = 0$ sobre R_0).

Segunda reducción. En adelante, fijaremos $\xi \in \mathbb{R}^2$ y un compacto $K \subset S$ y demostraremos que

$$\int_K |u_0(x', 1) \cdot \gamma| \, dx' = 0, \tag{11}$$

donde γ es el vector unitario $\gamma = |\lambda(\xi)|^{-1}\lambda(\xi)$. De esta forma, quedará probado (10).

Es claro que la función $x_3 \mapsto \int_K |u_0(x', x_3) \cdot \gamma| \, dx'$ es continua. Por tanto, para demostrar (11), bastará comprobar que

$$\frac{1}{s}\int_s^{2s} \left(\int_K |u_0(x', 1-\sigma) \cdot \gamma| \, dx' \right) d\sigma = \omega(s), \tag{12}$$

donde $\omega(s) \to 0$ cuando $s \to 0$.

Prueba de (12). Sea $s \in (0, 1/2)$ y supongamos que $-\epsilon \inf \eta \leq s$. Dados $x' \in S$ y $\sigma \in [s, 2s]$, el punto $(x', 1-\sigma)$ pertenece a G_ϵ. Podemos escribir pues que

$$u_\epsilon(x', 1 + \epsilon\eta(x'/\epsilon)) - u_\epsilon(x', 1-\sigma) = \int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta) \, d\zeta$$

para casi todo $x' \in S$. Designemos $\nu_\epsilon(x')$ el vector normal unitario exterior a G_ϵ en el punto $(x', 1 + \epsilon\eta(x'/\epsilon)) \in R_\epsilon$. Tomando en la igualdad precedente productos escalares con $\nu_\epsilon(x')$ y teniendo en cuenta (8), obtenemos

$$0 - u_\epsilon(x', 1-\sigma) \cdot \nu_\epsilon(x') = \nu_\epsilon(x') \cdot \int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta) \, d\zeta.$$

Entonces

$$u_\epsilon(x', 1-\sigma) \cdot \gamma = u_\epsilon(x', 1-\sigma) \cdot (\gamma - \nu_\epsilon(x')) - \nu_\epsilon(x') \cdot \int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta) \, d\zeta. \tag{13}$$

Sea $\delta > 0$ otro pequeño parámetro y pongamos

$$\Lambda = [-\delta, +\delta]^2.$$

Como η es de clase $\mathcal{C}^2$ y $\gamma = \nu_1(\xi)$, existe $c = c_\eta$ tal que $|\gamma - \nu_1(y')| \leq c\delta$ para cada $y' \in \xi + \Lambda$. Debido a la periodicidad, lo mismo es cierto cuando $y' \in \xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \Lambda$, donde los m_i son enteros arbitrarios. Poniendo $y' = x'/\epsilon$, obtenemos :

$$|\gamma - \nu_\epsilon(x')| \leq c\delta, \quad \forall x' \in \epsilon(\xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \Lambda).$$

Para un tal x', (13) conduce a la desigualdad

$$|u_\epsilon(x', 1-\sigma) \cdot \gamma| = c\delta |u_\epsilon(x', 1-\sigma)| + \int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \Big| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta) \Big| \, d\zeta. \tag{14}$$

El compacto $\overline{S}$ puede ser recubierto por n trasladados $k + \Lambda$ del pequeño cuadrado Λ, con las componentes de k tales que $|k_i| \leq M$ y con $n \leq N/\delta^2$ (aquí, M y N sólo dependen de S). Obviamente, por traslación y homotecia, los $\epsilon(\xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + k + \Lambda)$ recubren $\mathbb{R}^2$ cuando los m_i son enteros arbitrarios y k toma sus n valores. Por otra parte, la variación de u_ϵ debida a la traslación ϵk vale

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x' + \epsilon k, 1-\sigma) - u_\epsilon(x', 1-\sigma) &= \int_0^\epsilon \frac{d}{de} \, u_\epsilon(x' + ek, 1-\sigma) \, de \\ &= \int_0^\epsilon k \cdot \nabla_{x'} u_\epsilon(x' + ek, 1-\sigma) \, de. \end{aligned}$$

Así, para casi todo $x' \in \epsilon(\xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \Lambda)$, tras multiplicar escalarmente por γ y usar (14), deducimos que

$$|u_\epsilon(x' + \epsilon k, 1 - \sigma) \cdot \gamma| \leq c\delta |u_\epsilon(x', 1-\sigma)| + \int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \Big|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta)\Big|\, d\zeta$$
$$+ M \int_0^\epsilon |\nabla_{x'} u_\epsilon(x' + ek, 1-\sigma)|\, de.$$

Integrando respecto de x' en $\epsilon(\xi+m_1\ell_1+m_2\ell_2+\Lambda)$ y respecto de σ en $[s, 2s]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_s^{2s}\int_{\epsilon(\xi+m_1\ell_1+m_2\ell_2+k+\Lambda)} |u_\epsilon(x', 1-\sigma)\cdot\gamma|\, dx'\, d\sigma \\
&\qquad\leq c\delta \int_s^{2s}\int_{\epsilon(\xi+m_1\ell_1+m_2\ell_2+\Lambda)} |u_\epsilon(x', 1-\sigma)|\, dx'\, d\sigma \\
&\qquad\quad+ \int_s^{2s}\int_{\epsilon(\xi+m_1\ell_1+m_2\ell_2+\Lambda)} \int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \Big|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta)\Big|\, d\zeta\, dx'\, d\sigma \\
&\qquad\quad+ M \int_0^\epsilon\int_s^{2s}\int_{\epsilon(\xi+m_1\ell_1+m_2\ell_2+\Lambda)} |\nabla_{x'} u_\epsilon(x'+ek, 1-\sigma)|\, dx'\, d\sigma\, de.
\end{aligned}$$

Sumando para los n valores de k y, para todos los m_1 y m_2 tales que $\epsilon(\xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + k + \Lambda) \subset S$ para cada k y dividiendo por s, resulta

$$\frac{1}{s}\int_s^{2s}\int_{S_\epsilon} |u_\epsilon(x', 1-\sigma)\cdot\gamma|\, dx'\, d\sigma \leq X_1 + X_2 + X_3\,, \tag{15}$$

donde

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{n}{s}\, c\delta \int_s^{2s}\int_{\Sigma_\epsilon} |u_\epsilon(x', 1-\sigma)|\, dx'\, d\sigma, \\
X_2 &= \frac{n}{s}\int_s^{2s}\int_{\Sigma_\epsilon}\int_{-\sigma}^{\epsilon\eta(x'/\epsilon)} \Big|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_3}(x', 1+\zeta)\Big|\, d\zeta\, dx'\, d\sigma, \\
X_3 &= \frac{n}{s} M \int_0^\epsilon\int_s^{2s}\int_{\Sigma_\epsilon} |\nabla_{x'} u_\epsilon(x'+ek, 1-\sigma)|\, dx'\, d\sigma\, de.
\end{aligned}$$

Aquí, S_ϵ es la unión finita, para los valores precedentes de k, m_1 y m_2 , de los conjuntos $\epsilon(\xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + k + \Lambda)$. Por otra parte, Σ_ϵ es la unión finita, para los valores precedentes de m_1 y m_2 , de los conjuntos $\epsilon(\xi + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \Lambda)$.

Es fácil comprobar que $|\Sigma_\epsilon| \leq c\delta^2/N$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
X_1 &\leq \frac{n}{s}\, c\delta (s|\Sigma_\epsilon|)^{5/6}\Big(\int_s^{2s}\int_{\Sigma_\epsilon} |u_\epsilon(x', 1-\sigma)|^6\, dx'\, d\sigma\Big)^{1/6} \\
&\leq c\frac{N}{\delta^2 s}\,\delta\,\Big(\frac{s\delta^2}{N}\Big)^{5/6}\Big(\int_{\omega_{2s}} |u_\epsilon|^6\Big)^{1/6} \\
&\leq c\frac{\delta^{2/3}}{s^{1/6}}\ .
\end{aligned}$$

Análogamente, observamos que

$$\begin{aligned}
X_2 &\leq c\frac{N}{\delta^2}\,(|\Sigma_\epsilon|(\epsilon+s))^{1/2} \\
&\leq c\frac{(\epsilon+s)^{1/2}}{\delta}
\end{aligned}$$

y

$$X_3 \leq c\frac{N}{\delta^2 s} M\epsilon \left(|\Sigma_\epsilon| s\right)^{1/2}$$
$$\leq c\frac{\epsilon}{\delta s^{1/2}} \, .$$

Fijado el compacto $K \subset S$, para ϵ suficientemente pequeño, tenemos $K \subset S_\epsilon$; en virtud de (15), resulta :

$$\frac{1}{s}\int_s^{2s}\int_K |u_\epsilon(x', 1-\sigma)\cdot\gamma|\, dx'\, d\sigma \leq c\left(\frac{\delta^{2/3}}{s^{1/6}} + \frac{(\epsilon+s)^{1/2}}{\delta} + \frac{\epsilon}{\delta s^{1/2}}\right).$$

Haciendo tender ϵ a cero y teniendo en cuenta (6), obtenemos que

$$\frac{1}{s}\int_s^{2s}\int_K |u_0(x', 1-\sigma)\cdot\gamma|\, dx'\, d\sigma \leq c\left(\frac{\delta^{2/3}}{s^{1/6}} + \frac{s^{1/2}}{\delta}\right).$$

Por ejemplo, tomando $\delta = s^{1/3}$, el segundo miembro vale $c(s^{1/18} + s^{1/6})$. Por tanto, hemos probado (12) con $\omega(s) = c(s^{1/18} + s^{1/6})$. Esto demuestra el teorema.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente realizado durante una estancia del primer autor en la Universidad de Sevilla, financiado por el Programa IBERDROLA (Ayuda a Profesores Visitantes). Los trabajos del segundo y tercer autor han sido respectivamente financiados en parte por la D.G.E.S. Proyectos PB98-1162 y PB98-1134.

Referencias

[1] G. Allaire, R.V. Kohn, Optimal design for minimal weight and compliance in plane stress using extremal microstructures, *Eur. J. Mech., A/solids*, **12**, 6 (1993), 639–878.

[2] Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine, J. Simon, Effect of rugosity on a flow governed by stationary Navier-Stokes equations, *Quart. Appl. Math.*, aparecerá (2001).

[3] Y. Amirat, B. Climent, E. Fernández-Cara, J. Simon, The Stokes equations with Fourier boundary conditions on a wall with asperities, *Math. Methods Appl. Sci.*, aparecerá (2001).

[4] J.A. Bello, E. Fernández-Cara, J. Lemoine, J. Simon, The differentiability of the drag with respect to the variations of a Lipschitz domain in a Navier-Stokes flow, *SIAM J. Control Optim.*, **35**, 2 (1997), 626–640.

[5] N. Bendsoe, C. Mota Soares, Eds., *Topology design of structures*, Nato ASI Series E, **227**, Kluwer, 1993.

[6] D.M. Bushnell, K.J. Moore, Drag reduction in nature, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **23** (1991), 65–79.

[7] G.A. Chechkin, A. Friedman, A.L. Piatniski, The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary, *J. Math. Anal. Appl.*, **231** (1999), 213–234.

[8] D.C. Chu, G.E. Karniadakis, A direct numerical simulation of laminar and turbulent flow over riblet-mounted surfaces *J. Fluid Mech.*, **250** (1993), 1–42.

[9] I.I. Daniljuk, Théorème d'existence dans un problème non linéaire aux limites libres, *Ukrainian Math. J.*, **20**, 1 (1968), 25.

[10] A. Henrot. Continuity with respect to the domain for the laplacian : a survey. *Control and Cybernetics*, **23**, 3 (1994), 427–443.

[11] A. Henrot, M. Pierre. *Optimisation de forme*, Mathématiques et Applications, Springer, aparecerá.

[12] P. Chossat, G. Iooss, *The Couette-Taylor problem*, Springer, 1994.

[13] E.H. Lieb, Existence and uniqueness of the minimizing solution of the Choquard's nonlinear equation, *Studies Appl. Math.*, **57** (1977), 93–105.

[14] A. Mikelić, Recent developments in multiscal problems coming from fluid mechanics, Publicaciones del Laboratoire d'Analyse Numérique (Université Lyon 1), 2001. Aparecerá en *Trends in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag.

[15] F. Murat, J. Simon, *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*, Publicaciones del Laboratoire d'Analyse Numérique (Université Paris 6), 1974.

[16] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, G.A. Yosifian, *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, North-Holland, 1992.

[17] O. Pironneau, *Optimal shape design*, Springer-Verlag, 1984.

[18] E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory,* Lectures Notes in Physics no. 127, Spriger-Verlag, 1980.

[19] A.M. Savill, T.V. Truong, I.L. Ryhming, Turbulent drag reduction by passive means: a review and report on the First European Drag Reduction Meeting, *J. Méca. Théor. Appl.*, **7** (1988), 353–378.

[20] J. Simon, Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **2**, 7–8 (1980), 649–687.

[21] V. Sverak, On optimal shape design, *J. Math. Pures Appl.*, **72** (1993), 537–551.

[22] L. Tartar, *An Introduction to the homogenization method in optimal design*, http://www.math.cmu.edu/cna/publications.html.

[23] Velte, Stabilitäts und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylor problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **22** (1966), 1–14.

1 CNRS. Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 2), 63177 Aubière cedex, France.

2 Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla, España.