CONSIDERACIONES EN TORNO A LA REPRESENTACIÓN DE LO INVISIBLE: EL MÉTODO DE MONGE EN CUATRO DIMENSIONES

CONSIDERATIONS REGARDING THE REPRESENTATION OF THE INVISIBLE: MONGE'S METHOD IN FOUR DIMENSIONS

Andrés Martín Pastor, José Mª Gentil Baldrich

doi: 10.4995/ega.2019.11551

La representación gráfica del espacio tetradimensional, entre el siglo XIX y XX, merece un lugar destacado en la historia del pensamiento gráfico. Al igual que ocurrió en el desarrollo de la perspectiva renacentista, el estudio de los poliedros –y politopos– por unos pocos "matemáticos de la representación" fue unido a la codificación de novedosas formas de representar. La voluntad de definir nuevas formas de ver y representar la cuarta dimensión trascendió a todas las esferas de las manifestaciones estéticas. Aportaremos relevantes testimonios sobre la evolución de estos primeros sistemas gráficos tetradimensionales. Una última contribución se recoge en la Tesis de Alfredo Llorens Herrero [1], que supone la ampliación del Sistema Diédrico en una dimensión extra.

PALABRAS CLAVE: CUARTA DIMENSIÓN. VISUALIZACIÓN 4D. PERSPECTIVA. GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

The graphic representation of four-dimensional space, between the nineteenth and twentieth centuries, deserves a prominent place in the history of graphic thinking. As happened in the development of the Renaissance perspective, the study of polyhedra and polytopes by a few 'graphic mathematicians' was linked to the codification of new ways of representation. The desire to define new ways of seeing and representing the fourth dimension transcended all the spheres of aesthetic manifestations. We provide relevant testimonies regarding the evolution of the four-dimensional graphic systems. A final contribution based on Alfredo Llorens Herrero's Thesis [1] *is also included, which involves the amplification of the Dihedral System or Monge's method through the inclusion of an extra dimension.*

KEYWORDS: FOURTH DIMENSION. 4D VISUALIZATION. PERSPECTIVE. DESCRIPTIVE GEOMETRY

La perspectiva cónica –en tanto que construcción teórica de una visión del mundo– nunca se pudo desprender de una cierta componente esotérica. No hay otra forma de considerar la pretensión de representar algo sobrenatural que antes nadie había hecho, el infinito, fijándolo gráficamente en un punto concreto. Pero esto –en contra de la opinión de Panofsky (1927)– fue definido por los matemáticos, no por los pintores, que se limitaron a algo más natural pero más trascendente para su arte: la fijación del punto desde donde hay que mirar y de lo que ya se ha escrito **2**. El episodio que trataremos tiene también algo de sobrenatural, que ni fue ajeno a ciertas corrientes esotéricas, ni al arte de vanguardia de la época: la representación de lo invisible.

Poliedros y politopos

Piero della Francesca fue uno de los primeros en investigar los cuerpos poliédricos a través de su sistema de puesta en perspectiva **3** que, como Alberto Durero, también se sirvió del recurso de la doble proyección. Luca Pacioli en *La divina Proportione* (1509), mitificó una supuesta proporción cuyas cualidades permitían la construcción exacta del pentágono, el icosaedro y el dodecaedro, identificando a éste con una quintaesencia sobrenatural ya recogida por Platón. Su libro se acompañó de unos poliedros, dibujados por Leonardo **4** (Fig. 1). Ya desde el nacimiento y desarrollo de ese nuevo sistema gráfico perspectivo estuvo unido al estudio de los poliedros y a las ideas místicas.

Lo confirma Johannes Kepler **5**, tanto en el *Mysterium Cosmographicum* (1596) como en *Harmonices Mundi* (1619), donde planteó unas relaciones poliédricas y esotéricas de la armonía celeste. Esa obsesión poliédrica está presente en todos los tratados pespectivos del XVI y XVII. Durero, Barbaro, Sirigatti, Marolois, Niceron, Dubreuil, , y muchos autores de la historia de la representación gráfica, con personalísimas interpretaciones, como Wentzel Jamnitzer y su anónimo intérprete español de 1688 (Fig. 2) **6**. No es de extrañar que en la representación de la invisible cuarta dimensión, se haya igualmente utilizado el aura que envolvía a los poliedros, transformados ahora en cuatro dimensiones o “politopos”.

Sobre las formas objetivas o “simbólicas” de representar

En el siglo XX, la relación entre la perspectiva y las “formas simbólicas” de representar una “cuarta dimensión” (extracorpórea, temporal) de los artistas (cubismo, suprematismo,), no escapó a Erwin Panofsky, que interpretó *La perspectiva como* (una) *forma simbólica* (más). Nuevamente surgía el antiguo debate entre “visión y representación”, un problema ahora más complejo al incorporarse una supuesta realidad no visible. El peculiar pope ortodoxo Pavel Florensky (h. 1924) puso sus esfuerzos en comprender la representación de lo invisible, lo extracorpóreo y “espiritual” no como tema exclusivo de las vanguardias artísticas, sino como el argumento místico de las manifestaciones “antiperspectivas” medievales.

Desde finales del siglo XIX existió una cierta cultura científica, y literaria sobre la cuarta dimensión –estudiada por especialistas **7**– que rápidamente sirvió como argumento inspirador a otras teorías entre

The conical perspective, as a theoretical construction of a vision of the world, could never be detached from a certain esoteric component. There is no other way to consider the pretension of representing something supernatural that had never been before, the infinite, by fixing it graphically at a specific point. But this, in contradiction with Panofsky’s opinion (1927), was defined by mathematicians, not by painters, who limited themselves to something more natural yet more transcendent for their art: the fixation of the point from which to look **2**. The episode dealt with here also holds of the supernatural, which is not alien to certain esoteric currents or to the vanguard art of its period: the representation of the invisible.

Polyhedrons and polytopes

Piero della Francesca was one of the first to investigate the polyhedral bodies through his system of perspective **3** and, like Albrecht Dürer, also used the resource of double projection. Luca Pacioli in *La divina proportione* (1509) mythologized a supposed proportion whose qualities allowed the exact construction of the pentagon, the icosahedron and the dodecahedron, by identifying it with a supernatural quintessence already shown by Plato. A number of polyhedra, drawn by Leonardo **4** (Fig. 1), accompanied his book. Ever since the emergence and the development of this new perspective graphic system, it has always been linked to the study of polyhedra to mystical ideas.

This was confirmed by Johannes Kepler **5**, in his *Mysterium Cosmographicum* (1596) and in his *Harmonices Mundi* (1619), where he proposed polyhedral and esoteric relations for the celestial harmony. This polyhedral obsession is also present in all the sixteenth and seventeenth perspective treatises: Dürer, Barbaro, Sirigatti, Marolois, Niceron, Dubreuil and many other authors who belong in graphic representation history, with a lot of very personal interpretations, such as those by Wentzel Jamnitzer and his anonymous Spanish interpreter **6** of 1688 (Fig. 2). It is no wonder that, in the representation of the invisible fourth dimension, the aura that enveloped the polyhedra was also used, now transformed into four dimensions or ‘polytopes’.

On the objective or ‘symbolic’ ways of representation

In the twentieth century, the relationship between perspective and the ‘symbolic forms’ of representing a ‘fourth dimension’ (extracorporeal, temporal, etc.) of artists (cubism, suprematism, etc.), did not escape analysis by Erwin Panofsky (1927), who interpreted *The perspective as* (another) *symbolic form*. Again, the old debate between ‘vision and representation’ arose, now a more complex issue, caused by the incorporation of a supposed invisible reality. The peculiar orthodox priest, Pavel Florensky (1924), strove to understand the representation of the invisible, the extracorporeal and ‘spiritual’, not as a subject exclusive to the artistic vanguards, but as the mystical argument of the medieval ‘antiperspective’ manifestations.
From the end of the nineteenth century, there was a certain scientific and literary culture about the fourth dimension, which had been studied by specialists **7**, that soon served as an inspiring argument for philosophical and spiritualist theories. Several characters are worth mentioning, who, with more or less scientific rigor, used Theosophy as the best promoter of their ideas. Authors close to the field of scientific dissemination, such as Charles Howard Hinton **8** and Piotr Ouskpensky, or those, halfway between illuminated prophet and architects, such as Rudolf Steiner **9** and Claude Bragdon, wrote about the fourth dimension influenced by this ideology. Others important personalities include Arturo Soria y Mata **10** in Spain, Almada Negreiros **11** in Portugal, Joaquín Torres García **12** in Uruguay, and Xull Solar in Argentina, among many others who were in contact with the artistic vanguards and the theosophical movement, and became promoters of new philosophical ideas in their own countries.
Despite the numerous studies into the influence of the ‘fourth dimension’ and the ‘non-Euclidean geometries’ on the development of the vanguards of the twentieth century, many questions remain unanswered **13** (Fig. 3).

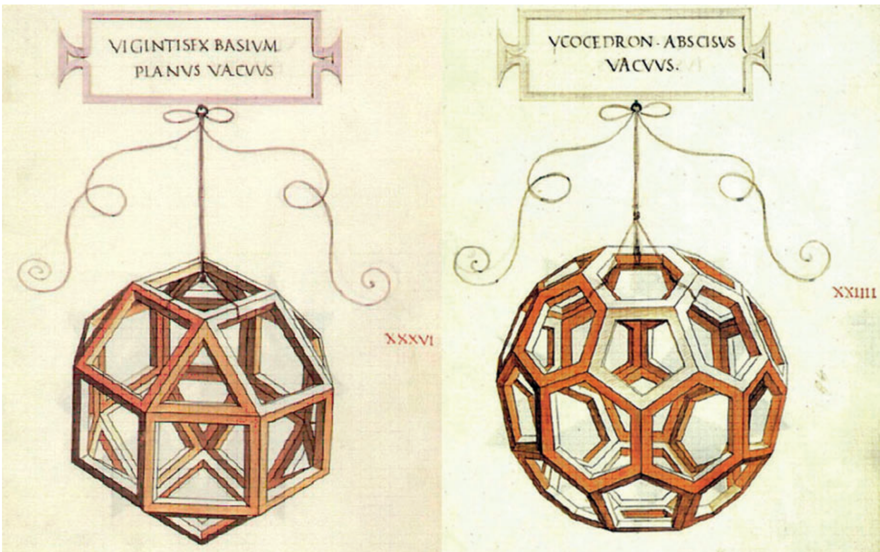
Mathematicians of the objective representation

The mathematicians involved on the study of the fourth dimension form an extensive group who tackled this issue in a synthetic and analytical way **14**. Many discovered the geometric properties of bodies and developed

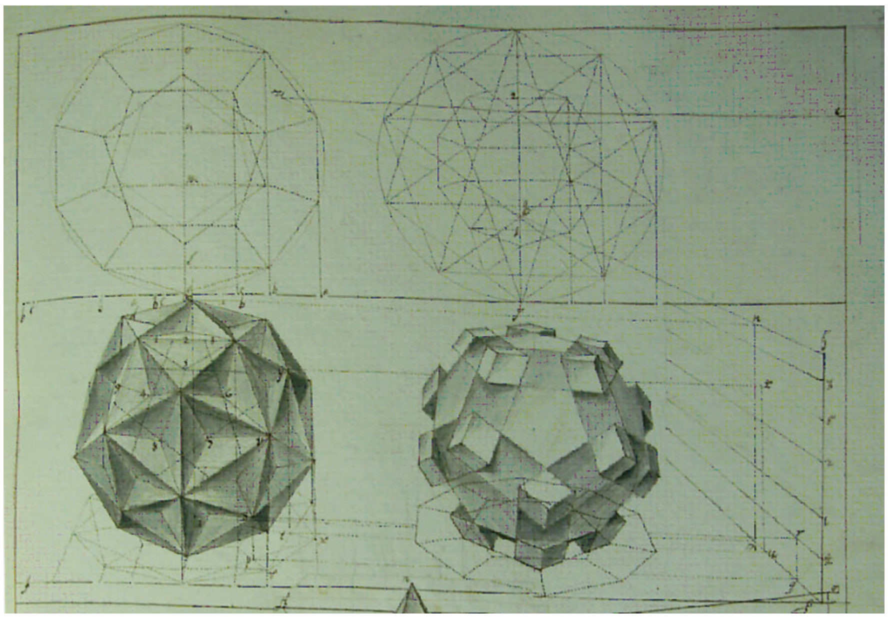
lo filosófico y lo espiritista. Son destacables algunos personajes que, con más o menos rigor científico, utilizaron la Teosofía como la mejor impulsora de sus ideas. Autores del ámbito matemático-divulgativo como Charles Howard Hinton **8** y Piotr Ouskpensky o, a medio camino entre iluminados y arquitectos, como Rudolf Steiner **9** y Claude Bragdon, escribieron sobre la cuarta dimensión influidos por dicha ideología. Otros personajes más cercanos fueron Arturo Soria y Mata en España **10**, Almada Negreiros en Portugal **11**, Joaquín Torres García**12** en Uruguay, Xull Solar en Argentina, y otros muchos que contactaron con las vanguardias artísticas y el movimiento teosófico, siendo promotores de nuevas ideas filosóficas en sus países.

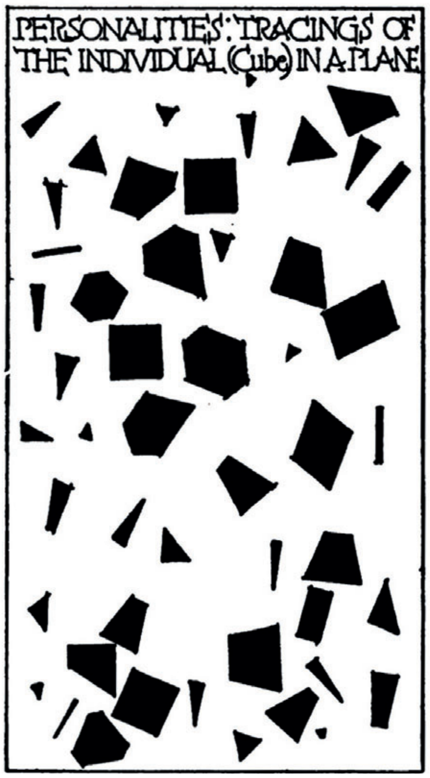
1. Dibujos de Leonardo para *La divina Proportione*, de Luca PACIOLI (1509)
2. ANÓNIMO (1688). *Artes excelenças dela perspectiba, a maestro P. Gomez de Alcuña*, 1688. Fundación Casa de Medina Sidonia. Mss. 1332. fol.70r

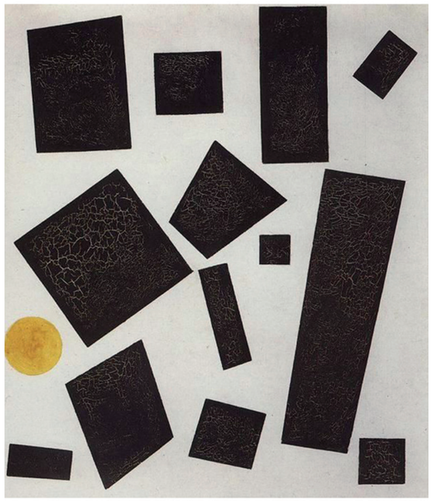
1. Leonardo’s drawings for *La divina Proportione*, by Luca PACIOLI (1509)
2. ANONYMOUS (1688). *Artes excelenças dela perspectiba, a maestro P. Gomez de Alcuña*, 1688. Casa de Medina Sidonia Foundation. Mss. 1332. fol.70r



1


2





3

3. Relación entre las ilustraciones *A Primer of Higher Space* (BRAGDON 1913 pp. 65) y las obras de Kazimir Malevich: Mapa, 1915, and *composición Suprematista*, 1915

3 Relationship between the illustrations in the book *A Primer of Higher Space* (BRAGDON 1913 pp. 65) and the work of Kazimir Malevich: Map, 1915, and *Suprematist composition*, 1915

Pese a los estudios sobre la influencia de la "cuarta dimensión" y las "geometrías noeuclídianas" en el desarrollo de las vanguardias del siglo XX aún nos quedan muchos interrogantes (Fig. 3) **13**.

Los matemáticos de la representación objetiva

Los matemáticos volcados en la cuarta dimensión forman un grupo muy extenso que abordaron el problema de forma sintética y analítica **14**. Muchos descubrieron las propiedades geométricas de los cuerpos desarrollando teoremas de geometría multidimensional. Otros se dedicaron al estudio de las geometrías no euclidianas. Hay que recordar que la cuarta dimensión –puramente espacial– encaja dentro del espacio euclídeo **15**, a diferencia de una cuarta dimensión espacio-temporal, que está vinculada a la teoría de la relatividad; ajena a nuestro estudio.

El pintor Tony Robbin (2008) ha hecho un estudio de los primeros gráficos tetradimensionales. Los artífices fueron unos pocos matemáticos: Washington Irvin Stringham, Victor Schlegel, Thomas Proctor Hall y Alice Boole **16**. Otro grupo destacado lo forma Pieter Hendrik Schoute, el poco conocido Salomon Levi van Oss y el mal entendido Esprit Jouffret, pioneros en la búsqueda de un sistema gráfico completo, labor que ya había relacionado con la Geometría Descriptiva Giuseppe Veronese **17**.

Stringham (1880) fue el primero en publicar figuras de poliedros en cuatro dimensiones (Fig.4). Desde este momento el esfuerzo por representar el hiperespacio estará vinculado con el descubrimiento de los politopos y sus características geométricas. Dos años después, Victor Schlegel (1882) publica un artículo sobre geometría proyectiva inspirado en los textos de Stringham. En él se representan por primera vez hiperfiguras a través de proyecciones cónicas (Fig. 5). Schoute (1894), después de deducir las coordenadas de los vértices de los politopos, publicó

multidimensional geometry theorems. Others devoted themselves to the study of non-Euclidean geometries. We must remember that the purely spatial fourth dimension fits within the Euclidean space **15**, unlike a fourth spatio-temporal dimension, which is linked to the theory of relativity, which lies outside the scope of this study.
The painter Tony Robbin (2008) carried out a study of the first four-dimensional graphics. The orchestrators were a handful of mathematicians: Washington Irvin Stringham, Victor Schlegel, Thomas Proctor Hall, and Alice Boole **16**. Another noteworthy group was formed by Pieter Hendrik Schoute, the little-known Salomon Levi van Oss, and the misunderstood Esprit Jouffret; these, pioneers were in the search of a complete graphic system, work that Giuseppe Veronese already had related with Descriptive Geometry **17**.
Stringham (1880) was the first to publish polyhedra figures in four dimensions (Fig. 4). From that moment onwards, the effort to represent hyperspace would be connected to the discovery of polytopes and their geometric characteristics. Two years later, Victor Schlegel (1882) published an article about projective geometry inspired by the texts of Stringham, in which, hyperfigures were represented for the first time through conical projections (Fig. 5). Schoute (1894), after having deduced the coordinates of the polytopes vertices, published an important article where, an accurate and detailed representation of these bodies was

4. Ilustraciones del artículo de W.I. STRINGHAM (1880, pp.15-16)
5. Proyección cónica del hipercubo. Vemos los cuatro puntos de fuga paras las cuatro familias de rectas perpendiculares entres sí que lo determinan. V. SCHLEGEL. (1882, pp.195)

4. Illustrations of W.I. STRINGHAM (1880, pp. 15-16)
5. Conic projection of the hypercube. The four vanishing points for the four families of perpendicular lines can be observed. V. SCHLEGEL. (1882, pp.195)

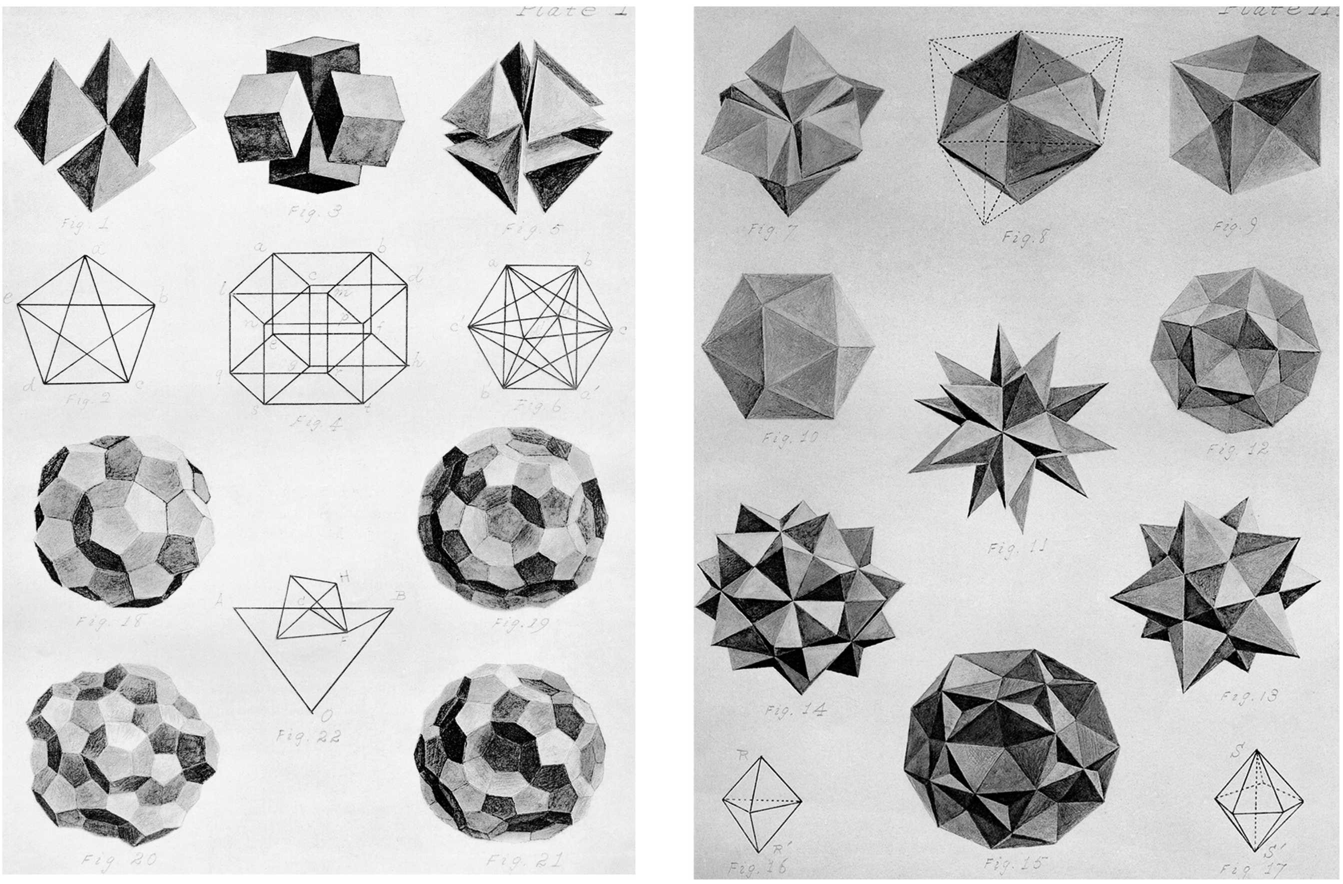
created for the first time. He managed this by using the three-dimensional projections or sections of the hyperfigure, thereby creating an image that deserves to compare with the Renaissance mazzochios (Fig. 6. a-b)
Nevertheless, a representation system cannot be reduced to a single projection or section. A true system aspires to become a codified graphic model, that is capable of establishing a biunivocal and reversible correspondence between a spatial reality –in this case four-dimensional– and its image or representation. The first published text with an encoded graphic system, was an article by Salomon Levi van Oss, published in 1899.
We now find ourselves, for the first time, faced with a graphical system of four plane projections all of which are related to each other, which enables the representation of any point in the four-dimensional space, using the four coordinates x1, x2, x3, x4 (Fig. 7). The four coordinate axes were 'placed' (not projected) on the plane in the form of a cross,

un importante artículo donde se realiza la primera representación exacta y minuciosa de estos cuerpos. Lo hizo mediante proyecciones tridimensionales o secciones de la hiperfigura dando lugar a una imagen que no podemos dejar de comparar con los *mazzochios* renacentistas (Fig. 6 a-b).

Pero un sistema de representación no puede reducirse a una única proyección o sección. Un verdadero sistema aspira a ser un modelo gráfico, codificado, capaz de establecer una correspondencia biunívoca y reversible entre una realidad espacial –en este caso tetradimensional– y su imagen o representación plana. El primer texto publicado donde sí se empleó un sistema gráfico codificado fue un artículo de Salomon Levi van Oss, publicado en 1899.

Nos encontramos aquí, por primera vez, ante un sistema gráfico de cuatro proyecciones planas relacionadas entre sí, que posibilitaba la representación de cualquier punto del espacio tetradimensional mediante sus cuatro coordenadas x1, x2, x3, x4 (Fig. 7). Los cuatro ejes de coordenadas estaban 'colocados' (no proyectados) en el plano en forma de cruz. De tal forma que, conocidas previamente las cuatro coordenadas de los vértices de la hiperfigura, ésta se podía fácilmente representar mediante cuatro vistas.

El avance respecto a la proyección axonométrica de Schoute (1894) era que, una vez colocadas las cuatro proyecciones planas, el



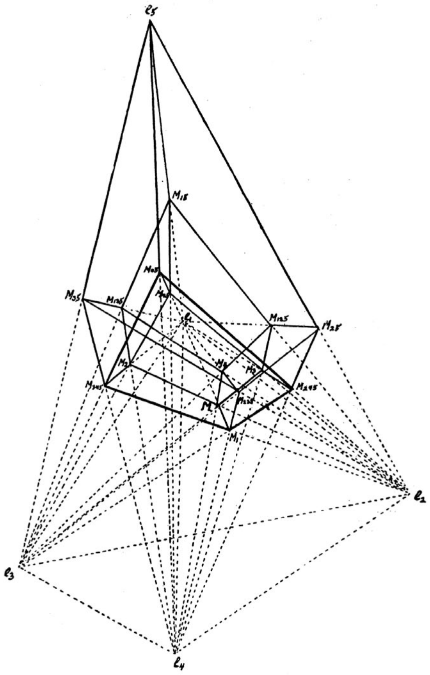
4

sistema proporcionaba unas reglas gráficas que permitían realizar ciertos movimientos y recalcular las proyecciones en las cuatro vistas desde un punto de vista puramente gráfico. Entre 1902 y 1906 se publicaron los textos más importantes sobre la codificación gráfica del hiperespacio por los citados Schoute y Jouffret.

Ambos emplearon –cada uno a su manera– un sistema de las cuatro proyecciones ortogonales relacionadas entre sí para definir el espacio tetradimensional.

Schoute, en su tratado de 1902, *Geometría de las dimensiones superiores*, completaría el desarrollo del sistema en su totalidad, realizando una Geometría Descriptiva tetradimensional (Fig. 8). Esta obra –muy poco estudiada– representa el mayor esfuerzo realizado hasta entonces en la representación del espacio de cuatro dimensiones. Su tratado de 1905, de igual nombre, subtitulado '*Los politopos*', es básicamente un texto matemático con poca riqueza gráfica donde se muestran estos cuerpos como simples esquemas, o mediante axonometrías sin ejes de proyección.

El tratado de Jouffret de 1903, *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions*, supuso la prueba de la correcta operatividad de sistema gráfico de las cuatro proyecciones y también de sus limitaciones. En su primera parte (Fig. 9) vemos una propuesta de varias formas de representación, unas copiadas de Schoute (1894) y otras reinterpretaciones de Schlegel. Sin embargo, en el capítulo de poliedros **18** retomó el sistema de las cuatro proyecciones planas (Fig. 10) **19**. En su segundo tratado (1906), *Mélange de géométrie à quatre dimensions*, deduce nuevas posiciones de algunos politopos demostrando mayor libertad y entendimiento en el uso del sistema gráfico.



5

El método de las cuatro proyecciones y su relación con el Sistema Tetratriédrico

El escaso éxito del sistema de cuatro proyecciones planas pudo deberse a que no era un sistema operativo para controlar todas las transformaciones necesarias en el hiperespacio sino tan solo alguna de ellas. A ese respecto, el 'Sistema Tetratriédrico' –desarrollado por Llorens (2016)– nos aporta una valiosa interpretación. Atendiendo a la figuras 11a y 11b – donde se comparan las ilustraciones de Jouffret y Llorens– el sistema de las cuatro proyecciones planas puede interpretarse como dos sistemas diédricos separados que definen dos proyecciones 3D relacionadas entre sí.

En la figura 11a de Jouffret vemos una representación del hipercubo a partir de sus cuatro proyec-

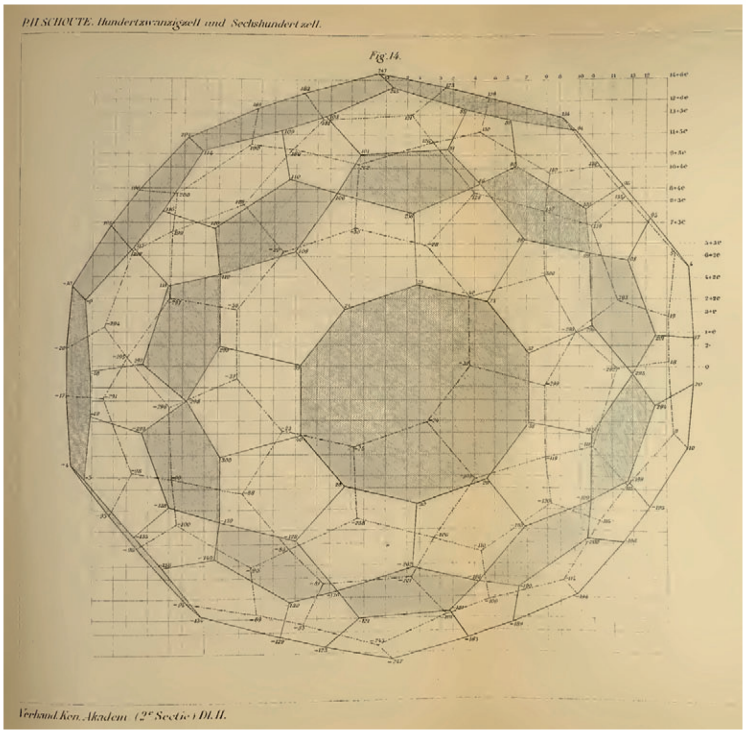
in such way that, if the four coordinates of the vertices from the hyperfigure are known, then this hyperfigure could easily be represented by means of the four views.
The advance with respect to the axonometric projection made by Schoute (1894) was that once the four planar projections were in place, the system would then provide graphic rules that allowed certain movements and the graphical recalculation of the projections into the four views. Between 1902 and 1906, the most important texts on the graphic coding of hyperspace were published by the aforementioned Schoute and Jouffret. Both these mathematicians used –each in his own way– a system of the four orthogonal projections to define four-dimensional space.
Schoute, in his treatise of 1902, *Geometry of the superior dimensions*, would complete his system, and create a four-dimensional Descriptive Geometry (Fig. 8). This work, largely forgotten by today's experts represents the greatest effort ever made in the representation of four-dimensional space. His treatise of 1905, with the same name, but subtitled *The polytopes*, is fundamentally, a mathematical text with little graphic richness where these bodies are shown by simple sketches or by means of axonometries without projection axes.
The Treatise of Jouffret of 1903, *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions*, (*Elementary four-dimensional geometry treatise*), provided proof of the correct operation of the graphic system of four projections and also of its limitations. In the first part (Fig. 9), there is a proposal of several forms of representation, some copied from Schoute (1894), and other reinterpretations of Schlegel. However, in the chapter of polyhedra **18**, he returned to the system of the four planar projections **19** (Fig. 10). In his second treatise (1906), *Mélange de géométrie à quatre dimensions* (*Mixture of four-dimensional geometry*), he deduces new positions of certain polytopes, and demonstrates a greater understanding in the use of the graphic system.

The four-projection method and its relation with the Tetratrihedral

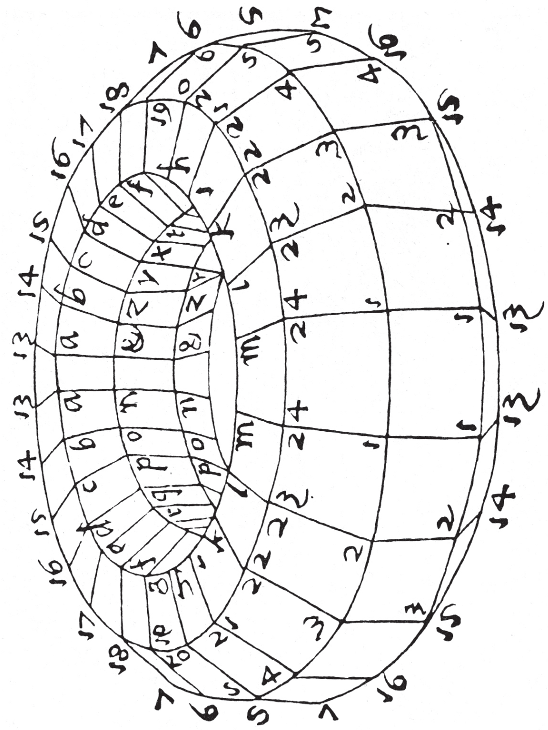
The little success of the system of four planar projections could be due to the fact that it was a system that allowed the control of certain rigid transformations in the hyperspace but not

6a. Proyección vertical del 120 Cell en la dirección de una segunda línea transversal “eje y”). P.H. SCHOUTE (1894b, Pl. V)
6b. Daniele Barbaro, *La pratica della perspettiva*, (1569), Mazzochio

6a. Vertical projection of the 120Cell in the direction of a second transverse line ‘y-axis’). P. H. SCHOUTE (1894b, Pl.V)
6b. Daniele Barbaro, *La pratica della perspettiva*, (1569), Mazzochio



6a



6b

all of these transformations. In this respect, the Tetratrihedral System, –developed by Llorens (2016)– provides a valid interpretation. Considering Figures 11a and 11b –where the illustrations of Jouffret and Llorens are compared– the system of the four planar projections can be interpreted as two separate dihedral systems that define two inter-related 3D projections. Figure 11a, by Jouffret, provides a representation of the hypercube based on its four planar projections. In Figure 11b, by Llorens, a three-dimensional representation is given of the double dihedral system of the aforementioned figure: a black planar volume defined by A-B views, and a blue raised volume defined by C-D views. In this scenario, each three-dimensional shape would not be a ‘real’ 3D object, but instead the projections of the invisible four-dimensional object. The only ‘real’ elements would be the intersections of the lines, planes and only ‘real’ elements would be the intersections of the lines, planes and hyperplanes with the ‘spaces’ where these entities are projected. These intersections with the ‘projection hyperplanes’ –in Llorens’s notation– are not shown in Figure 11b.
We confirm that the graphical model coincides with the Tetratrihedral system of Llorens (2016,

ciones planas. En la figura 11b de Llorens vemos una representación tridimensional del doble sistema diédrico de la figura anterior: un volumen planta de color negro definido por la vista A y la vista B y un volumen alzado de color azul definido por la vista C y la vista D. En este escenario cada forma tridimensional no sería un objeto 3D ‘real’, sino las proyecciones del objeto tetradimensional invisible. Los únicos elementos ‘reales’ serían las trazas o intersecciones de rectas, planos e hiperplanos con los hiperplanos de proyección, y que en la figura no se manifiestan.

Comprobamos que el modelo gráfico coincide con el sistema tetratriédrico de Llorens (2016, p.264). Sin embargo, debemos hacer una notable apreciación: el Sistema Tetratriédrico opera exclusivamente con proyecciones tridimensionales, mientras que el sistema usado por van Oss, Schoute y Jouffret, proyectaba en el plano dichas entidades, que ya eran proyecciones en sí mismas. Se trabaja entonces con proyecciones de proyecciones, alejándose en dos dimensiones de la realidad tetradimensional que se quiere definir. Esto hace que el sistema de las cuatro proyecciones planas se vuelva prácticamente ingobernable gráficamente, siendo una barrera procedimental insuperable.

A modo de conclusiones

Hemos visto cómo la irrupción de la representación de la cuarta dimensión nos sitúa, de nuevo, ante el conflicto entre visión y representación. La representación de lo invisible tuvo más influencia de la que pudiéramos suponer en amplias capas sociales de los siglos XIX y XX y, aunque se moviera entre una visión espiritista y su estricto control geométrico,

7. Representaciones del 5Cell, 8Cell y 16Cell en el sistema de cuatro proyecciones planas. Van OSS (1899, Tafel I)

7. Representations of the 5Cell, 8Cell and 16Cell in the system of four planar projections. Van OSS (1899, Tablet I)

subyugó a amplias capas científicas, artísticas o meramente crédulas de teorías esotéricas.

Podemos ver que los primeros esquemas gráficos tetradimensionales surgen de la necesidad de representar objetivamente los politopos de cuatro dimensiones. Estos primeros testimonios gráficos lo encontramos en autores poco conocidos como S. L. van Oss, o malinterpretados como Schoute y Jouffret. Recientemente, Llorens (2016) ha demostrado que es posible la extrapolación gráfica del sistema de Monge a una dimensión superior, siendo una herramienta de análisis gráfico apropiada para dichos textos. ■

Esta investigación ha sido financiada por las ayudas de internacionalización al IUACC del VI Plan Propio de Investigación y Transferencia de la Universidad de Sevilla

Notas

1 / Alfredo Llorens Herrero: *La representación gráfica del espacio tetradimensional euclídeo. La ampliación del método diédrico a cuatro dimensiones*, noviembre 2016, Universidad de Sevilla, con sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

2 / GENTIL BALDRICH (2013)

3 / Piero escribió *De prospectiva pingendi*; *Trattato d'abaco y Libellus de quinque corporibus regularibus*. En el *Libellus* estudió los poliedros y la tercera parte de *La divina Proportione* de Pacioli es su traducción italiana.

4 / Leonardo de Vinci dibujó estos poliedros de forma independiente (cód. Atlántico Fol. 735, 272v, b).

5 / KEPLER, Johannes, *Mysterium Cosmographicum*, Tubinga, George Gruppenbach, 1596, completamente esotérico; *Harmonices Mundi*, Linz, Johannes Plancus, 1619, más contenido y donde representó por primera vez los trece sólidos arquimedianos, Libro II, pp. 62-64.

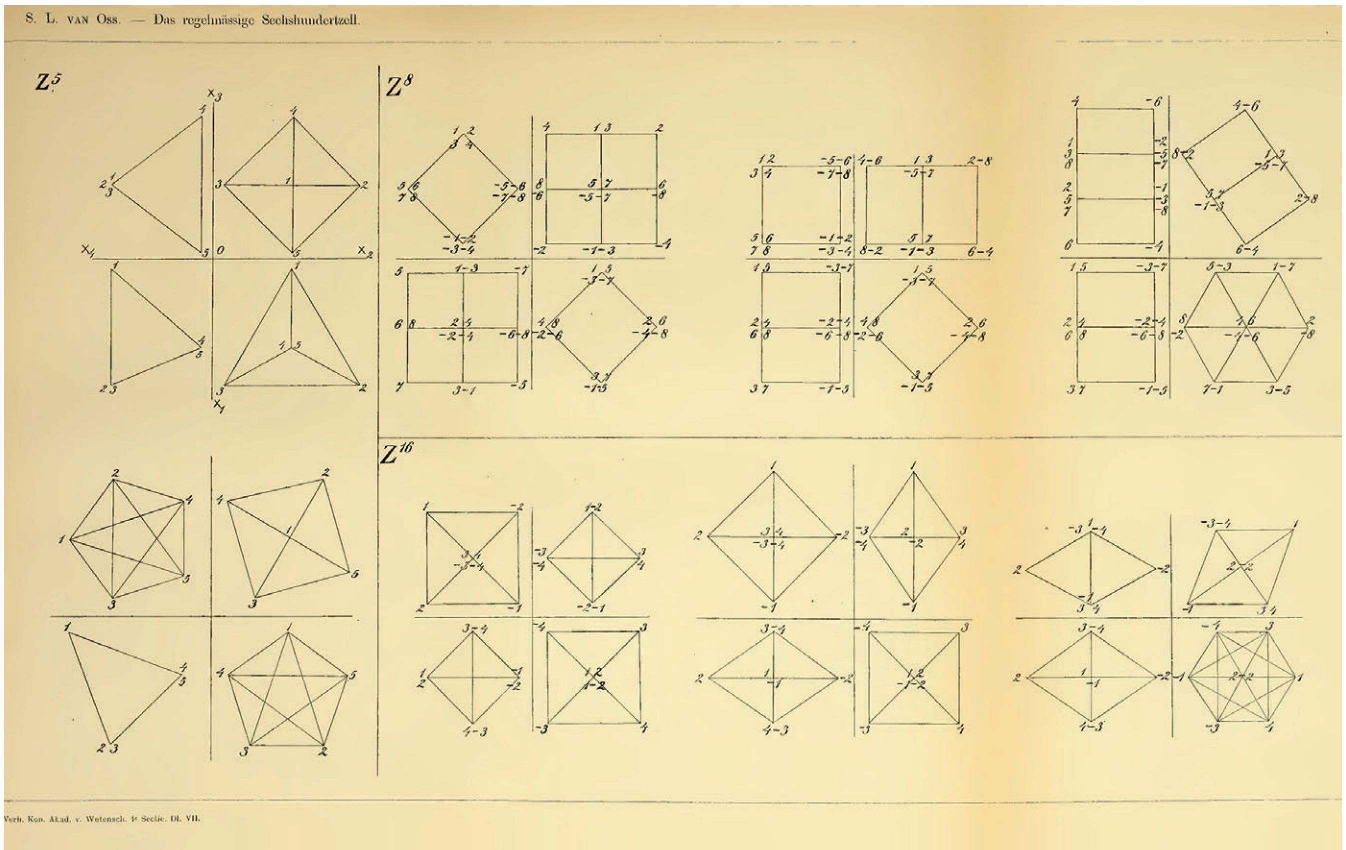
6 / GENTIL BALDRICH et al. (2015)

7 / Las relaciones entre las matemáticas, la filosofía de la ciencia, , la literatura, el cine, y los movimientos espirituales como la Teosofía, las 'geometrías no-euclidianas' y la 'cuarta dimensión' forman un complejo entramado cultural a principio siglo xx. Una reciente aproximación a este tema lo encontramos en LAWRENCE

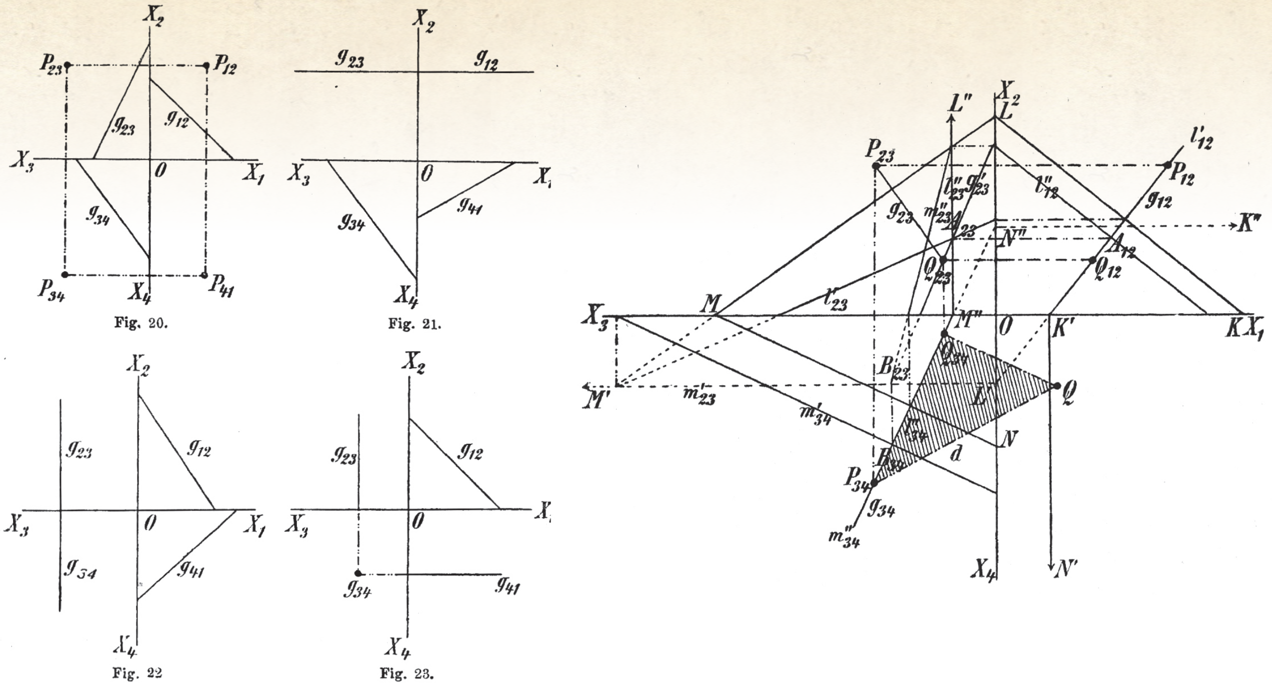
p.264). However, it must be borne in mind that the Tetratrihedral System operates exclusively with three-dimensional forms, whereas the system used by van Oss, Schoute and Jouffret, projected these entities in the plane, and these entities were already projections themselves. Therefore, projections of projections are used, which moves away in two dimensions from the four-dimensional reality that we wish to define. This makes the system of the four planar projections virtually ungovernable in a graphical sense, since it constitutes an insurmountable procedural barrier.

By way of conclusions

We have observed how the irruption of the representation of the fourth dimension places us, yet again, face-to-face with the old conflict between vision and representation. The representation of the invisible had more influence than could be assumed in broad social layers of the nineteenth and twentieth centuries and, although it moved between



7



8

a spiritualistic vision and its strict geometric control, it subjugated broad scientific, artistic or merely credulous layers of esoteric theories.

It can be observed that the first four-dimensional graphic schemata arise from the need to objectively represent the four-dimensional polytopes. These first graphic testimonies are found in work by little-known authors, such as S. L. van Oss, or are misinterpreted, as Schoute and Jouffret. Recently, Llorens (2016) has shown that the graphic extrapolation of the Monge system to a higher dimension is in fact possible, and that it constitutes an appropriate tool for the graphic analysis of these texts. ■

This research has been financed by the internationalization aid to the IUACC of the VI Plan of Research and Transfer of the University of Seville.

Notes

1 / Alfredo Llorens Herrero: *The graphic representation of Euclidean four-dimensional space. The expansion of the dihedral method to four dimensions*, November 2016, Universidad de Sevilla.

2 / This theme has been studied in detail in GENTIL BALDRICH (2013).

3 / Piero wrote *De prospective pingendi*, *Trattato d'abaco* and *Libellus de quinque corporibus regularibus*. In the *Libellus, he* studied the polyhedra and the third part of *La divina Proportione* of Pacioli is its Italian translation.

4 / Leonardo de Vinci drew these polyhedra independently (Atlantic Code, Fol. 735, 272v, b).

5 / KEPLER, Johannes, *Mysterium Cosmographicum*, Tübingen, George Gruppenbach, 1596, completely esoteric; *Harmonices Mundi*, Linz, Johannes Plancus, 1619, provides more content and is where he represented the thirteen Archimedean solids for the first time, Book II, pp. 62-64.

(2015). Otras en CAJORI (1926), GIBBONS (1981), HENDERSON (1983)

8 / C. Howard Hinton, matemático, escritor de ciencia ficción, y conocido simpatizante de la Teosofía. Sus ilustraciones de 1904 servirán de inspiración a BRAGDON (1913).

9 / Rudolf Steiner, arquitecto y líder del movimiento antroposófico, es autor de los *Goethearum*, edificios de marcado carácter esotérico erigidos a la gloria de Goethe y, según LAWRENCE (2015, p.509), elaborados según sus teorías sobre la cuarta dimensión, escritos recogidos en BOOTH (2001).

10 / Arturo Soria y Mata, personaje importante en la teosofía española, fue autor del disparatado *Origen poliédrico de las Especies*. Madrid, 1894. Ha sido estudiado por CABEZAS GELABERT (2010). Publicó entre 1897 y 1902 sobre el tema en *Sophia, Revista Teosófica de Orientalismo y Ocultismo*. En la citada revista aparece un artículo titulado "El espíritu y el espacio. La cuarta Dimensión" por Liévin-Luis Revel, Sophia, año XIX (1911), n 1, pp. 345-353.

11 / José Sobral de Almada Negreiros es escritor, teórico y pintor cubista, su *Manifiesto Anti-Dantas*, 1916, aborda sucintamente estos temas. A este pintor le debemos el célebre retrato cubista de Fernando Pessoa, quien escribió *Arte da Quarta Dimensão*, y con quien colaboró en la revista *Orpheu*.

12 / Torres García, relacionado con Kandinsky y Mondrian, recopiló varios estudios teosóficos *Père Soleil*, París, 1931.

13 / Destacamos la relación de ciertas imágenes del texto de BRAGDON (1913) con la obra de Kasimir Malevich estudiado por LUECKING (2010). Y la relación entre el primer tratado de JOUFFRET (1903) con la obra de Marcel Duchamp o Pablo Picasso, estudiado por HENDERSON (1983, p.265).

14 / HALSTED (1897) y SOMMERVILLE (1911) da una lista de 1.832 referencias de contribuciones a este tema.

15 / VERONESE (1891, pp.455-502) Libro I. *Lo spazio Euclideo a quattro dimensioni*.

16 / POLO-BLANCO (2008)

17 / Tiene una publicación en 1882 con tres gráficos titulada "Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni", primer germen de un sistema gráfico del hiperespacio (VERONESE, 1882). Cfr. FREGUGLIA (2001)

18 / Jouffret cita a Stringhan, Schlegel, van OSS (1895, 1899) y SCHOUTE (1894) entre otros. Tan solo cita a un español, Zoel García de Galdeano (1846-1924), *Las modernas generalizaciones expresadas por el álgebra simbólica las geometrias noEuclideas: y el concepto de hiper-espacio*. Madrid, 1896. El ejemplar de JOUFFRET (1903) existente en la Universidad de Zaragoza procede de la biblioteca de García de Galdeano.

19 / Jouffret llama al sistema gráfico de las cuatro proyecciones planas "*Épure de Géométrie descriptive à quatre dimensions*" JOUFFRET (1906, p.17)

Referencias

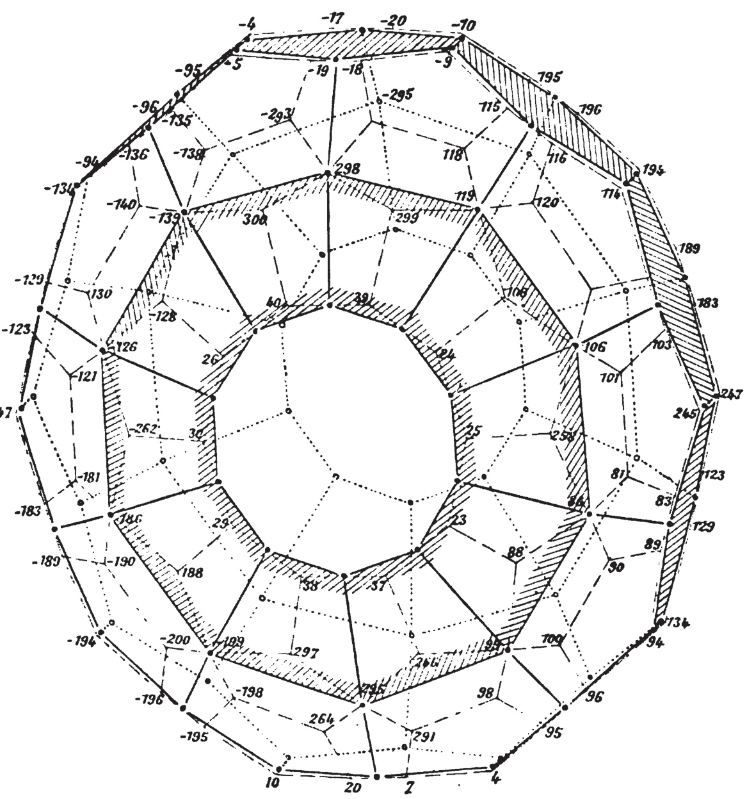
- BOOTH, David (2001). "Introduction", en: Rudolf Steiner, *The Fourth Dimension. Sacred Geometry, Alchemy and Mathematics*. Massachusetts: Anthroposophic Press.
- BRAGDON, Claude Fayette (1913). *A Primer of Higher Space. The fourth dimension*. Nueva York: Manas Press, Rochester.
- CABEZAS GELABERT, Lino (2010): "El origen poliédrico de las especies de Arturo Soria y Mata: Ciencia, Pitagorismo y pensamiento estético", en: *Arte y geometría*, Granada: Universidad de Granada, pp. 15-48.
- CAJORI, Florian (1926). Origins of Fourth Dimension Concepts. *The American Mathematical Monthly*, 33:8, pp. 397–406.
- FLORENSKY, Pavel, *Obratnaia perspektiva*, 1921-1924. (trad. *La perspectiva invertida*. Madrid: Siruela, 2005)
- FREGUGLIA, Paolo (2001). "Sulle origini della geometria descrittiva quadridimensionale", en: *Matematica e architettura. Me-*

8. Sistema de cuatro proyecciones planas desarrollado por Schoute (1902, p.90, p.112)
9. Axonometría copiada de Schote, en JOUFFRET (1903, pp.177) 'Sección del hecatonicosaedroide a un espacio central perpendicular a la tercera diagonal'
10. Sistema de Cuatro proyecciones. JOUFFRET (1903, pp.119)

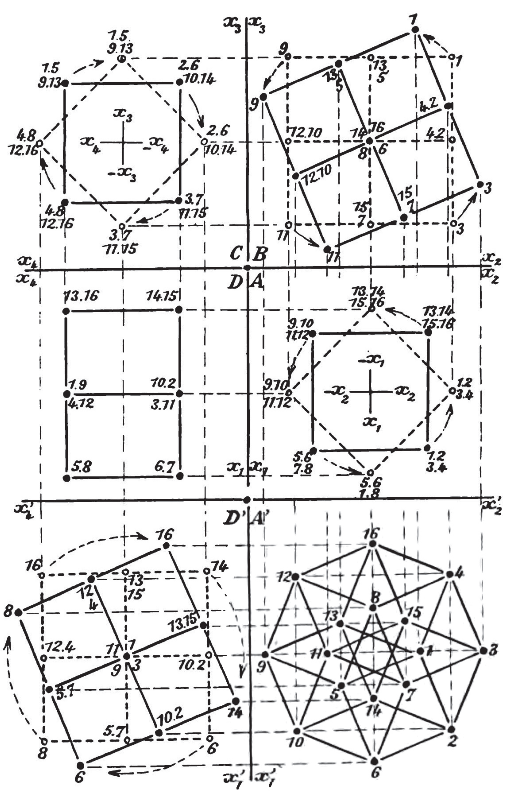
8. System of four planar projections developed by Schoute (1902, p.90, p.112)
9. Axonometry copied from Schote, in JOUFFRET (1903, pp.177) 'Section of the hecatonicosaedroid to a central space perpendicular to the third diagonal'
10. Four- projections system. JOUFFRET (1903, pp.119)

todi analitici, metodi geometrici e rappresentazioni in architettura. Florencia: Alinea Editrice, pp. 91-94.
– GENTIL BALDRICH, José María, MARTÍN-PASTOR, Andrés (2015). Poliedra as form of geometric knowledge: The Spanish Jamnitzer or the fourth book of "Artes Exçelençias dela Perspectiba". *EGA*, n. 25, pp. 56-65. [doi:10.4995/ega.2015.3677].
– GENTIL BALDRICH, José María (2013). La prospettiva: 'un buco nella tavoletta'. *Disegnare idee immagini*, 46, pp. 22-29.
– GIBBONS, T.H. (1981). Cubism and 'The Fourth Dimension' in the context of the late nineteenth-century and early twentieth-century revival of occult idealism. *J. Warburg Courtauld Inst*. 44, pp. 130–147.
– HALSTED, G. (1897). Bibliography of hyperspace and non-euclidean geometry. *American Journal of Mathematics* 1, pp. 261–276.
– HENDERSON, Linda Dalrymple (1983). *The fourth dimension and non-euclidean geometry in modern art*. Princeton: Princeton University Press.
– HINTON, Charle Howard (1912). *The Fourth Dimension*, Londres: Georges Allen. Original en: *Harper's Monthly Magazine*, julio de 1904.
– JOUFFRET, Esprit Pascal (1903). *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions* Paris: Gauthier-Villars.
(1906) *Mélange de géométrie à quatre dimensions*. Paris: Gauthier-Villars.
– LAWRENCE, Snezana (2015). Life, Architecture, Mathematics, and the Fourth Dimension. *Nexus Network Journal*, 17, pp. 587–604. [doi: 10.1007/S00004-014-0221-9].
– LUECKING, Stephen (2010). A man and his square: Kasimir Malevich and the visualization of the fourth dimensión. *Journal of Mathematics and the Arts*, 4:2, pp. 87-100. [doi: 10.1080/17513471003744395]
– LLORENS-HERRERO, Alfredo (2016). *La representación gráfica del espacio tetradimensional euclídeo. La ampliación*

6 / See GENTIL BALDRICH and MARTIN-PASTOR (2015).
7 / The relationships between mathematics, philosophy of science, literature, cinema, and spiritual movements such as Theosophy, the 'non-Euclidean geometries' and the 'fourth dimension' form a complex cultural framework at the beginning of the twentieth century. A recent approach to this topic is found in LAWRENCE (2015). Others in CAJORI (1926), GIBBONS (1981), HENDERSON (1983).
8 / C. Howard Hinton, mathematician, science fiction writer, and well-known sympathizer of Theosophy. His illustrations of 1904 would later inspire BRAGDON (1913).
9 / Rudolf Steiner, architect and leader of the anthroposophical movement, is the author of the *Goethearum*, buildings of marked esoteric character erected to the glory of Goethe and, according to LAWRENCE (2015, p.509), created in accordance with his theories on the fourth dimension, whose writings are collected in BOOTH (2001).
10 / Arturo Soria y Mata, an important figure in Spanish theosophy, was the author of the nonsensical *Polyhedral Origin of the Species*. Madrid, 1894. It has been studied by CABEZAS GELABERT (2010). Soria y Mata published on the subject between 1897 and 1902 in *Sophia, Theosophical Journal of Orientalism and Occultism*. In the aforementioned journal, an article appears entitled "The spirit and space. The Fourth Dimension" by Liévin-Luis Revel, *Sophia*, XIX (1911), n 1, pp. 345-353.
11 / José Sobral de Almada Negreiros is a writer, theoretician and cubist painter; his *Manifesto Anti-Dantas*, 1916, succinctly addresses these issues. This



9



10

painter is credited with the famous cubist portrait of Fernando Pessoa, who wrote *A Arte da Quarta Dimensão*, and with whom Sobral de Almada Negreiros collaborated in the *Orpheu Journal*.

12 / Torres García, related to Kandinsky and Mondrian, compiled several theosophical studies in *Père Soleil*, Paris, 1931.

13 / It is worth pointing out the relationship of certain images of the text of BRAGDON (1913) with the work of Kasimir Malevich as studied by LUECKING (2010). The relationship between the first treatise of JOUFFRET (1903) with the work of Marcel Duchamp or Pablo Picasso, is studied by HENDERSON (1983, p.265).

14 / HALSTED (1897) and SOMMERVILLE (1911) provide a list of 1,832 references of contributions to this subject.

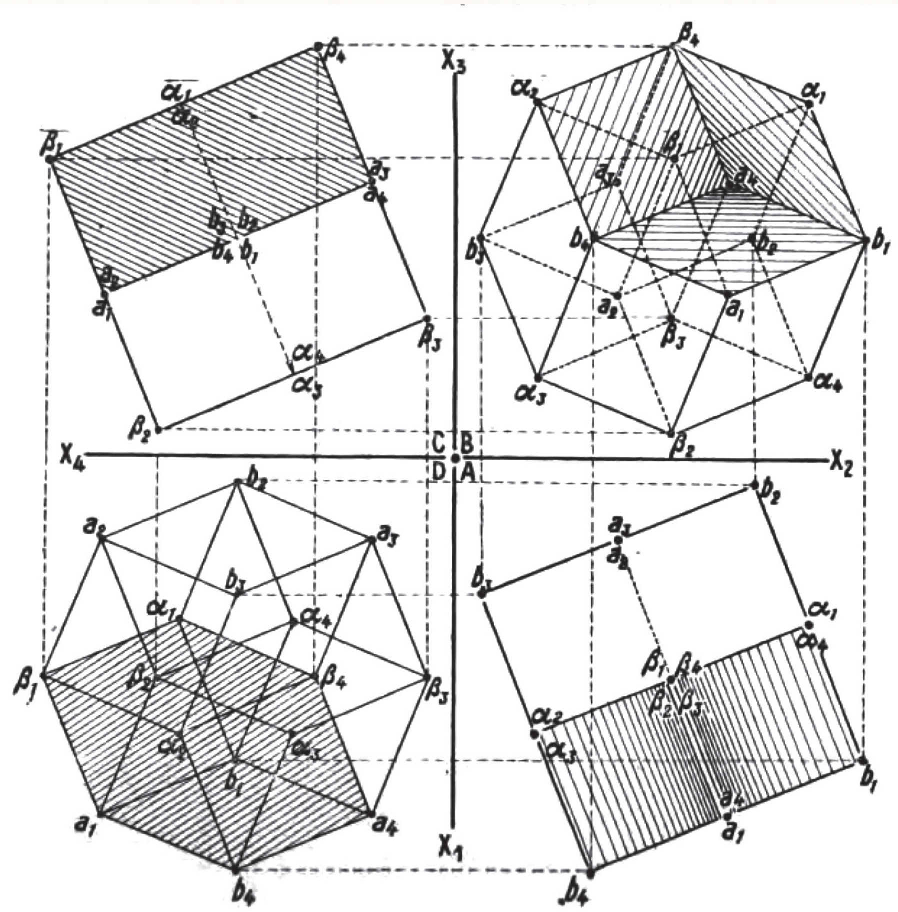
15 / VERONESE (1891, pp.455-502) *Libro I. Lo spazio Euclideo a quattro dimensioni.*

16 / POLO-BLANCO (2008)

17 / Giuseppe Veronese had a publication in 1882 with three graphs entitled "Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni", the first seedling of a graphical system of hyperspace (VERONESE, 1882) Cfr. FREGUGLIA (2001)

18 / Jouffret quotes Stringhan, Schlegel, van OSS (1895, 1899) and SCHOUTE (1894), among others. He also quotes a Spaniard, Zoel García de Galdeano, *Las modernas generalizaciones expresadas por el álgebra simbólica las geometrias no-Euclideas y el concepto de hiper-espacio (The modern generalizations expressed by the symbolic algebra, the non-Euclidean geometries, and the concept of hyper-space*), Madrid, 1896.

19 / Jouffret calls the graphic system of the four planar projections "*Épure de Géométrie descriptive à quatre dimensions*", JOUFFRET (1906, p.17).



11a

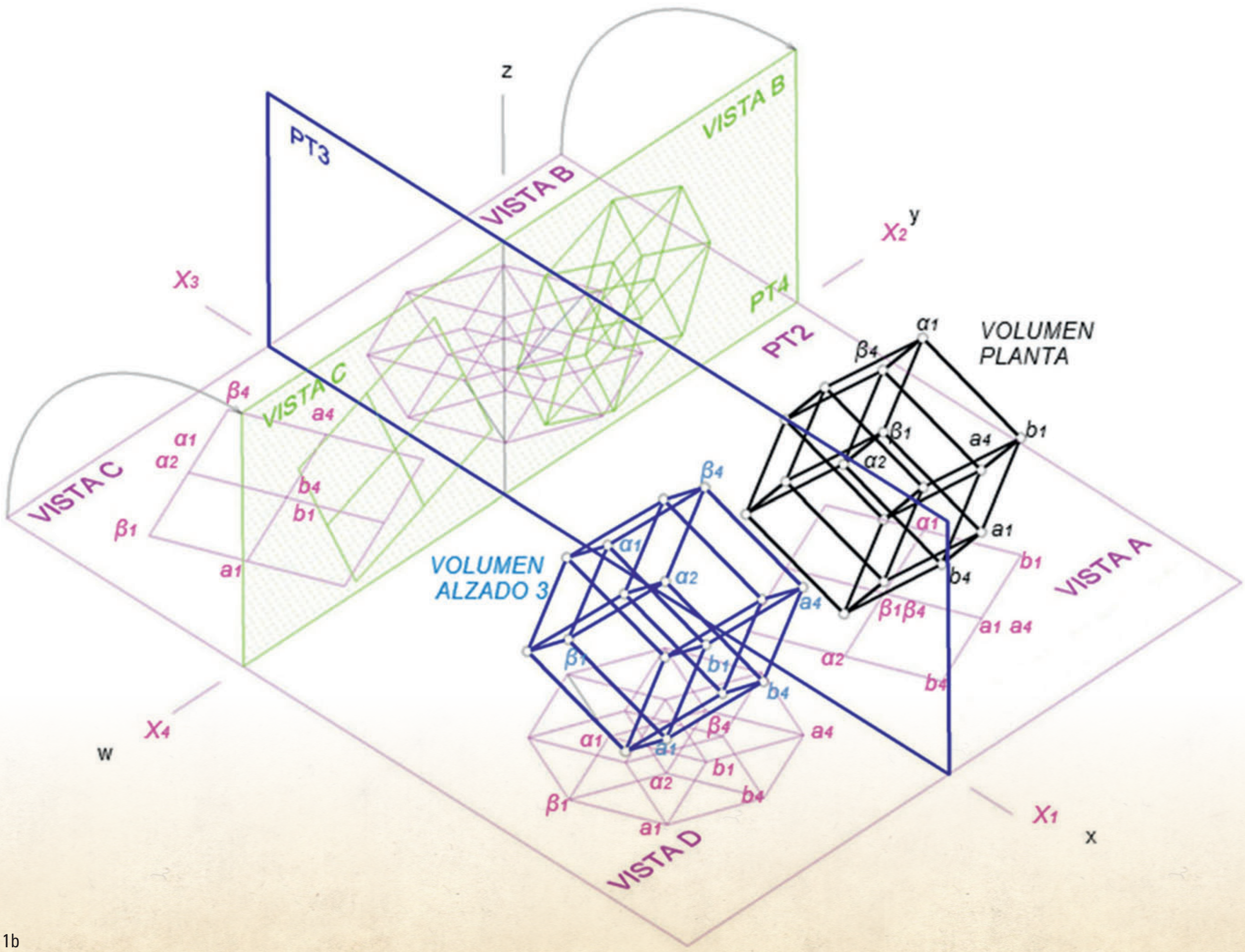
References

- BOOTH, David (2001). "Introduction", in: Rudolf Steiner, *The Fourth Dimension. Sacred Geometry, Alchemy and Mathematics.* Massachusetts: Anthroposophic Press.
- BRAGDON, Claude Fayette (1913). *A Primer of Higher Space. The fourth dimension.* Nueva York: Manas Press, Rochester.
- CABEZAS GELABERT, Lino (2010): "El origen poliédrico de las especies de Arturo Soria y Mata: Ciencia, Pitagorismo y pensamiento estético", in: *Arte y geometría*, Granada: Universidad de Granada, pp. 15-48.
- CAJORI, Florian (1926). Origins of Fourth Dimension Concepts. *The American Mathematical Monthly,* 33:8, pp. 397–406.
- FLORENSKY, Pavel, *Obratnaia perspektiva*, 1921-1924. (trad. *La perspectiva invertida.* Madrid: Siruela, 2005)
- FREGUGLIA, Paolo (2001). "Sulle origini della geometria descrittiva quadridimensionale", in: *Matematica e architettura. Metodi analitici, metodi geometrici e rappresentazioni in architettura.* Florencia: Alinea Editrice, pp. 91-94.
- GENTIL BALDRICH, José María, MARTÍN-PASTOR, Andrés (2015). Poliedra as form of geometric knowledge: The Spanish Jamnitzer or the fourth book of 'Artes Exçelençias dela Perspectiba'. *EGA*, n. 25, pp. 56-65. [doi:10.4995/ega.2015.3677].
- GENTIL BALDRICH, José María (2013). La prospettiva: 'un buco nella tavoletta'. *Disegnare idee del método diédrico a cuatro dimensione*. Tesis doctoral inédita, Universidad de Sevilla. Disponible a texto completo en: https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/52367
- PANOFSKY, Edwin (1927). *Die Perspektive als «Symbolische Form»*. Leipzig-Berlin: Teubner (trad. *La perspectiva como forma simbólica*. Barcelona: Tusquet, 2003)
- POLO-BLANCO, Irene (2008). Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimensión. *Historia Mathemática*, 35, pp. 123-139. [doi:10.1016/j.hm.2007.10.008]
- ROBBIN, Tony (2006). *Shadows of Reality*. New Haven: Yale University Press.
- SCHLEGEL, Victor (1882). Quelques théorèmes de géométrie à n dimensión. *Bulletin de la S.M.F.* T. 10, pp. 172-207.
- SCHOUTE, Pieter Hendrik (1894). Regelmässige Schnitte und Projektionen des Vierund zwanzigzelles im vierdimensionalen Räume. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.* 1, (4). Amsterdam: Müller.
(1902). *Mehrdimensionale Geometrie: Die-Linearen Räume*. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung.
(1905). *Mehrdimensionale Geometrie: Die Polytope*. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung.
- SOMMERVILLE, Duncan M. Y. (1911). *Bibliography of Non-Euclidean Geometry, Including the Theory of Parallels' the Foundations of Geometry, and Space of n Dimensions*. Londres: Harrison & Sons.
- STRINGHAM, Washington Irvin (1880). Regular Figures in n-Dimensional Space. *American Journal of Mathematics*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-14.
- VAN OSS, Salomon Levi (1899). Das regalmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 7, (1). Amsterdam: Müller.
- VERONESE, Giuseppe (1882). Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (5), 8, pp. 987-1024.

11a. Sistema de cuatro proyecciones planas. 8Cell. JOUFFRET (1906, pp.28)
11b. Interpretación espacial Sistema Tetratriédrico. LLORENS (2016)

11a. System of four planar projections. 8Cell. JOUFFRET (1906, pp. 28)
11b. Spatial interpretation. Tetratrihedral system. LLORENS (2016)

immagini, 46, pp. 22-29.
– GIBBONS, T.H. (1981). Cubism and 'The Fourth Dimension' in the context of the late nineteenth-century and early twentieth-century revival of occult idealism. *J. Warburg Courtauld Inst.* 44, pp. 130–147.
– HALSTED, G. (1897). Bibliography of hyperspace and non-euclidean geometry. *American Journal of Mathematics* 1, pp. 261–276.
– HENDERSON, Linda Dalrymple (1983). *The fourth dimension and non-euclidean geometry in modern art.* Princeton: Princeton University Press.
– HINTON, Charle Howard (1912). *The Fourth Dimension*, Londres: Georges Allen. Original in: *Harper's Monthly Magazine,* julio de 1904.
– JOUFFRET, Esprit Pascal (1903). *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions* Paris: Gauthier-Villars. (1906) *Mélange de géométrie à quatre dimensions.* Paris: Gauthier-Villars.
– LAWRENCE, Snezana (2015). Life, Architecture, Mathematics, and the Fourth Dimension. *Nexus Network Journal,* 17, pp. 587–604. [doi: 10.1007/S00004-014-0221-9].
– LUECKING, Stephen (2010). A man and his square: Kasimir Malevich and the visualization of the fourth dimensión. *Journal of Mathematics and the Arts,* 4:2, pp. 87-100. [doi: 10.1080/17513471003744395]
– LLORENS-HERRERO, Alfredo (2016). *La representación gráfica del espacio tetradimensional euclídeo. La ampliación del método diédrico a cuatro dimensione.* Unpublished doctoral thesis, Universidad de Sevilla. Available in full text in: https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/52367
– PANOFSKY, Edwin (1927). *Die Perspektive als «Symbolische Form».* Leipzig-Berlin: Teubner (trad. *La perspectiva como forma simbólica.* Barcelona: Tusquet, 2003)
– POLO-BLANCO, Irene (2008). Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimensión. *Historia Mathemática,* 35, pp. 123-139. [doi:10.1016/j.hm.2007.10.008]
– ROBBIN, Tony (2006). *Shadows of Reality.* New Haven: Yale University Press.
– SCHLEGEL, Victor (1882). Quelques théorèmes de géométrie à n dimensión. *Bulletin de la S.M.F.* T. 10, pp. 172-207.
– SCHOUTE, Pieter Hendrik (1894). Regelmässige Schnitte und Projektionen des Vierund zwanzigzelles im vierdimensionalen Räume. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.* 1, (4). Amsterdam: Müller. (1902). *Mehrdimensionale Geometrie: DieLinearen Räume.* Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung. (1905). *Mehrdimensionale Geometrie: Die Polytope.* Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung.
– SOMMERVILLE, Duncan M. Y. (1911). *Bibliography of Non-Euclidean Geometry, Including the Theory of Parallels' the Foundations of Geometry, and Space of n Dimensions.* Londres: Harrison & Sons.
– STRINGHAM, Washington Irvin (1880). Regular Figures in n-Dimensional Space. *American Journal of Mathematics*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-14.
– VAN OSS, Salomon Levi (1899). Das regalmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam,* 7, (1). Amsterdam: Müller.
– VERONESE, Giuseppe (1882). Sulla Geometria Descrittiva a quattro dimensioni. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti,* (5), 8, pp. 987-1024.



11b