

Anchura de un convexo en la esfera

F.J. Cobos J.C. Dana C.I. Grima A. Márquez

Dpto. de Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla
e-mail: {cobos,dana,grima,almar}@cica.es

Resumen

Se generaliza el concepto de anchura de un conjunto en el plano a la superficie de la esfera, dando condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto convexo sobre la superficie de la esfera puede pasar a través de un intervalo esférico mediante movimientos rígidos sobre dicha superficie.

Palabras clave: Anchura, esfera, movimientos rígidos, conjuntos convexos.

1 Introducción

La *anchura* de un conjunto finito de puntos, en el plano, viene dada por la mínima distancia entre dos rectas paralelas soporte del conjunto [8]. Este concepto, así como la computación de la anchura de un conjunto finito de puntos tiene aplicaciones en muchos campos, como pueden ser la robótica (o más específicamente en el estudio de movimientos que eviten colisiones [18]), en aproximación poligonal de curvas (ver [9], [10] y [11]), etc.

Además, la anchura de un conjunto es conocida en Investigación Operativa como un problema de *localización minimax*, en el que buscamos la recta (la bisectriz de las rectas soporte que dan la anchura) que minimiza la mayor de sus distancias a cualquier punto del conjunto.

La definición de anchura de un conjunto finito de puntos en el plano puede ser extendida a espacios Euclídeos de dimensión superior a dos. De esta forma, si consideramos un conjunto finito de puntos P en el espacio \mathbf{R}^d , su anchura está definida como la mínima distancia entre dos hiperplanos soportes de P [8].

Dado que la anchura de un conjunto finito de puntos en el plano es la misma que la de su envolvente convexa [8], muchos autores han estudiado la anchura de polígonos convexos, ya que éstos son conjuntos sencillos y tienen muchas aplicaciones en reconocimiento de formas [1], procesamiento de imágenes [14] y troquelado industrial (ver [5], [16] y [6]). Para polígonos convexos y desde el punto de vista computacional, usando técnicas de rotating caliper [15] o transformaciones geométricas [3] es posible resolver el problema de la anchura de dichos polígonos en tiempo y espacio lineales.

Veremos que la técnica del rotating caliper puede ser usada para calcular la anchura de un conjunto en superficies no planas como es la esfera. El estudio de la anchura en dichas superficies está motivado por problemas de planificación de movimientos [13], y más concretamente en movimientos de brazos articulados de robots ya que, como es conocido, en la mayoría de los casos, la trayectoria de dichos brazos y los puntos accesibles por ellos no están, en general, en el plano sino en superficies no planas. De ahí el interés del estudio del concepto de anchura de un convexo en superficies no planas. En este trabajo estudiamos el problema sobre la esfera.

G. Strang [17] probó que la anchura de un convexo en el plano es equivalente al concepto de *puerta* de dicho conjunto. La puerta de un conjunto es el mínimo intervalo cerrado a través del cual puede pasar el conjunto, mediante una familia continua de movimientos rígidos (traslaciones combinadas con rotaciones). Sin embargo, en dimensión tres este resultado no es cierto y H. Stark ha construido conjuntos convexos que pueden pasar a través de una puerta, cuadrada o circular, aunque ninguna de sus proyecciones cabe por dicha puerta (ver [17]). Veremos que, respecto a este problema, el comportamiento en la esfera es exactamente el mismo que en el plano.

El propósito de este trabajo es tratar de generalizar estos conceptos para conjuntos convexos sobre la superficie de la esfera y, por otra parte, dar condiciones necesarias y suficientes para que estos conjuntos puedan pasar a través de un intervalo esférico mediante movimientos rígidos sobre esta superficie y las relaciones existentes entre los conceptos definidos más arriba. Estas condiciones nos van a permitir diseñar un algoritmo que resuelva el problema de determinar la anchura de un convexo en dicha superficie.

Dado que en nuestras generalizaciones usaremos el concepto de conjunto convexo sobre la esfera, diremos, como en [12], que un conjunto C sobre la esfera es convexo si dados dos puntos cualesquiera de C , el mínimo arco de geodésica que los une está contenido en C .

La longitud angular del arco de geodésica que une los puntos P y Q sobre la esfera es el ángulo que forman los radios que unen el centro de la esfera con los puntos P y Q respectivamente. Obsérvese que ningún conjunto convexo sobre la esfera contiene arcos de geodésicas con longitud angular mayor que $\frac{\pi}{2}$.

2 Anchura en la esfera

Antes de intentar generalizar el concepto de anchura de un conjunto finito en el plano a la esfera, si queremos dar un tratamiento similar a esta idea, debemos examinar algunas definiciones alternativas a las consideradas en el plano, sin olvidar que debemos preservar aquellas propiedades que intentamos extender a la esfera. Por ello, en primer lugar, podemos reemplazar la idea de

rectas soporte de un conjunto por el de geodésicas de soporte de un conjunto o, como estudiaremos la esfera, meridianos (círculos máximos de la esfera) soporte de un conjunto. En este sentido, si se tiene un conjunto convexo C sobre la esfera, llamaremos *meridianos de soporte de C* a los meridianos que intersecan a C y dejan al conjunto en una semiesfera. Llamaremos *huso de soporte de C* a la región que, conteniendo a C , está delimitada por dos meridianos soporte. Así como, en la esfera, dos meridianos diferentes se intersecan en dos puntos (polos) que definen un único círculo máximo denominado ecuador, un huso de soporte define un arco ecuatorial.

De acuerdo con estas definiciones, podemos decir que, dado un conjunto convexo C sobre la esfera, la *anchura meridiana $\mathcal{M}(C)$* de C es la mínima longitud de todos los arcos ecuatoriales asociados a husos de soporte de C .

La principal diferencia entre esta definición y la definición de anchura en el plano es que, en el plano, dos rectas paralelas de soporte tienen intersección vacía, mientras que en la esfera, dos meridianos soporte tienen dos puntos en común. Si queremos preservar la propiedad de que los arcos de soporte de un conjunto convexo tengan intersección vacía, al igual que ocurre en el plano, debemos dar otra definición. Dado un conjunto convexo C sobre la esfera, llamaremos *paralelos soporte de C* a aquellos paralelos (círculos sobre la esfera) que intersecan a C y dejan al conjunto en un casquete, donde un casquete es cada una de las partes en que un paralelo divide a la esfera. Si usamos la idea de par de paralelos soporte, conservamos el concepto de paralelismo existente en el plano (en el sentido de intersección vacía) pero obsérvese que, en la esfera, los paralelos no son geodésicas.

De acuerdo con la definición anterior, podemos decir que dado un conjunto convexo C sobre la esfera, la *anchura tropical $\mathcal{T}(C)$* de C es la menor distancia entre todos los posibles pares de paralelos de soporte de C equidistantes de un círculo máximo. Obsérvese que esta definición de anchura tropical de un conjunto en la esfera puede ser usada, como en el plano, en Investigación Operativa como un problema de localización minimax, en el que buscamos el círculo máximo (el ecuador de los paralelos de soporte que dan la anchura tropical) que hace mínima la mayor de sus distancias a los puntos del conjunto.

Por otra parte, y siguiendo el artículo de Strang [17] en el que prueba

que la anchura de un conjunto convexo en el plano es la menor longitud de un intervalo cerrado a través del cual puede pasar dicho conjunto mediante una familia continua de movimientos rígidos, podemos dar otra definición de anchura en la esfera como sigue: dado un conjunto convexo C sobre la esfera, la *puerta* $\mathcal{D}(C)$ de C es la menor longitud de todos los posibles arcos cerrados de meridiano por los que puede pasar el conjunto C mediante una familia de movimientos rígidos (traslaciones combinadas con rotaciones) en la esfera.

G. Strang prueba que la anchura de un conjunto convexo, en el plano, coincide con la puerta. Pero, como ya apuntábamos en la introducción, esto no es cierto en dimensión tres (ver [17]). Por ello, es interesante preguntarse si el comportamiento de la esfera, en este punto, es similar al del plano o al del espacio tridimensional.

En la esfera, tenemos las siguientes propiedades:

Lema 1. *Para cualquier conjunto convexo sobre la esfera se verifica que*

$$\mathcal{D}(C) \leq \mathcal{T}(C).$$

Demostración: Basta con considerar el arco de meridiano ortogonal y contenido entre los paralelos que definen $\mathcal{T}(C)$. La longitud de este arco es mayor o igual que $\mathcal{D}(C)$ y, obviamente, menor o igual que $\mathcal{T}(C)$. ■

Lema 2. *Si C es un conjunto convexo sobre la esfera*

$$\mathcal{T}(C) \leq \mathcal{M}(C).$$

Demostración: Sea \mathcal{M} el huso que determina la anchura meridiana $\mathcal{M}(C)$ del conjunto. Este huso está definido por arcos de meridianos que intersecan a C en dos puntos P y Q . Consideremos los paralelos tangentes a C en los puntos P y Q . La distancia \mathcal{T}^* entre estos paralelos es igual a $\mathcal{M}(C)$, por lo que $\mathcal{T}(C) \leq \mathcal{T}^* = \mathcal{M}(C)$. ■

Por tanto, $\mathcal{D}(C) \leq \mathcal{T}(C) \leq \mathcal{M}(C)$. El siguiente teorema nos dice que, al igual que ocurre en el plano, estos tres números coinciden en la esfera.

Teorema 3. *Un conjunto convexo C sobre la esfera puede atravesar un arco de meridiano de longitud $\mathcal{D}(C)$ si, y sólo si, $\mathcal{M}(C) \leq \mathcal{D}(C)$.*

Demostración:

Si $\mathcal{M}(C) \leq \mathcal{D}(C)$ y dado que C está contenido en el huso cuyo arco ecuatorial tiene longitud $\mathcal{M}(C)$, obviamente C puede pasar a través de dicho arco ecuatorial mediante movimientos rígidos.

Para probar el recíproco, asumamos en primer lugar que la frontera ∂C de C es suave, es decir, en cualquier punto de ella existe una única tangente a la esfera, y ésta varía de forma continua a lo largo de ∂C . Sea I un arco de meridiano de longitud $\mathcal{D}(C)$ y denotemos por S a la superficie esférica. Como C puede pasar a través de I , es posible definir una composición continua de movimientos $M : [0, 1] \rightarrow S$ donde $M(0)$ es la situación de C antes de comenzar a pasar a través de I y $M(1)$ su situación después de haberlo atravesado.

Para cualquier $t \in [0, 1]$, podemos definir dos aplicaciones $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$ y $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$ como sigue: $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son las longitudes angulares entre los puntos P_1 y P y los puntos P_2 y P respectivamente, donde P_1 y P_2 son las intersecciones de ∂C con el arco I , y P es la intersección entre las tangentes a C en los puntos P_1 y P_2 (ver Figura 1).

La aplicación $f_1 + f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ es continua con $f_1(0) + f_2(0) = 0$ y $f_1(1) + f_2(1) = 2\pi$, por lo que existe $t^* \in [0, 1]$ tal que $f_1(t^*) + f_2(t^*) = \pi$.

Si $f_1(t^*) = f_2(t^*) = \frac{\pi}{2}$, entonces el arco de meridiano que define $\mathcal{M}(C)$ está contenido en I , por lo que $\mathcal{M}(C) \leq \mathcal{D}(C)$. Por otra parte, $f_1(t^*) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - f_2(t^*)$. Supuesto $f_1(t^*) > \frac{\pi}{2}$ se verifica que $f_2(t^*) < \frac{\pi}{2}$, por lo que la situación es similar a la de la Figura 2.

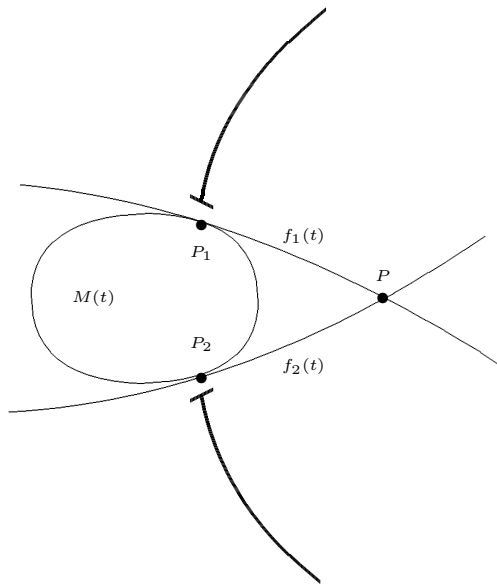
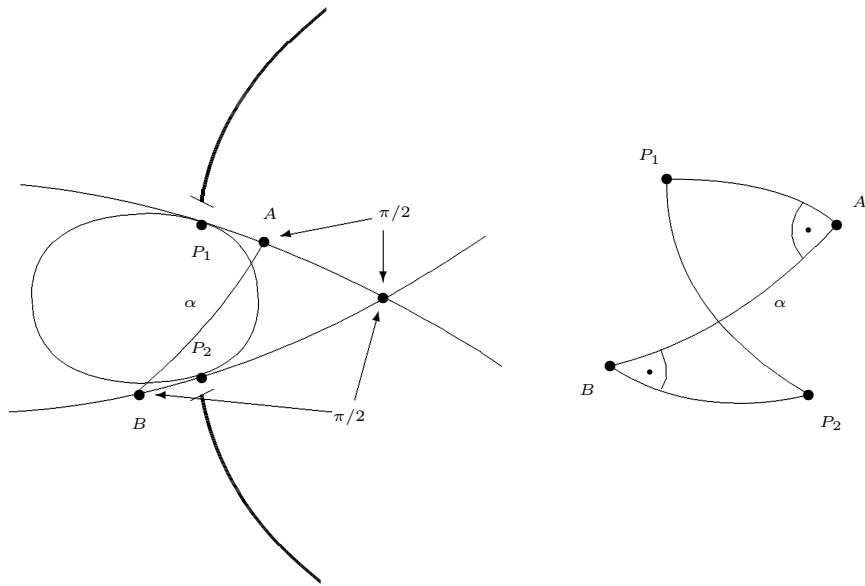


Figura 1



α es el arco ecuatorial del huso.

Figura 2

Como los ángulos en el arco ecuatorial son de noventa grados, la longitud del arco de meridiano que une P_1 y P_2 es mayor o igual que la longitud del arco ecuatorial. Por tanto $\mathcal{M}(C) \leq \mathcal{D}(C)$.

Sólo nos queda verificar el resultado para un conjunto convexo C cuando ∂C no es suave. Para ello construimos una sucesión (C_n) de subconjuntos convexos de C de frontera suave y convergente a C . Como C puede pasar a través de I , también pueden hacerlo los C_n y su anchura meridiana debe verificar que $\mathcal{M}(C_n) < \mathcal{D}(C)$. Por tanto, $\mathcal{M}(C) \leq \mathcal{D}(C)$, lo que prueba el teorema. ■

Así pues, las tres definiciones de anchura consideradas coinciden y podemos hablar de anchura de un conjunto convexo.

Como consecuencia inmediata del Teorema 3 se tiene:

Corolario 4. *El mínimo arco ecuatorial de un conjunto convexo C está contenido en C .*

3 Algoritmo de la anchura sobre la esfera

Recordando que la anchura de un polígono convexo, en el plano, es la mínima distancia entre rectas soporte paralelas definidas por las parejas antipodales vértice-arista (a cada par antipodal vértice-arista le asociamos el huso definido por el meridiano m_a que contiene a la arista y el que conteniendo al vértice define, junto a m_a un huso cuyo arco ecuatorial contiene al vértice).

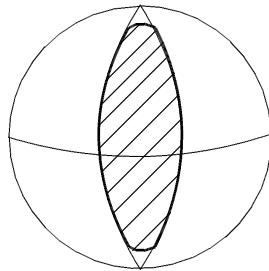


Figura 3

En la esfera esto no es cierto, pudiendo alcanzarse en un par antipodal arista-arista como prueba la Figura 3, pero se tiene que

Lema 5. *La anchura de un polígono convexo es la mínima distancia entre meridianos soporte definidos por los pares antipodales vértice-arista o arista-arista.*

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Corolario 4. ■

En todo caso, el Lema 5 nos dice que es posible adaptar el algoritmo del *rotating caliper* para encontrar la anchura de un polígono convexo C (el número de eventos es lineal). De este modo, podemos dar el siguiente algoritmo

WIDTH(C)

- 1.- Encontrar una pareja vértice-arista antipodal inicial.
- 2.- Si el huso asociado a la pareja vértice-arista contiene a C , computar su arco ecuatorial, en caso contrario computar el arco ecuatorial del par arista-arista asociado al par vértice-arista original (este par arista-arista está definido por el par vértice-arista considerando la arista incidente con el vértice que no está contenido en el huso).
- 3.- Usar la técnica del *rotating caliper* para generar todos los pares como en los pasos 1 y 2.
- 4.- Computar el mínimo obtenido en los pasos anteriores.

Es inmediato comprobar el siguiente resultado

Teorema 6. *El algoritmo WIDTH(C) computa la anchura de un polígono convexo C sobre la esfera en tiempo lineal óptimo.*

Referencias

- [1] S.G. AKL Y G.T. TOUSSAINT. *Efficient convex hull algorithms for pattern recognition applications*. Proc. 4th. Int. Joint Conf. on Pattern Recognition (Kyoto, Japan). 1978, pp. 483–487.
- [2] J.C. DANA, C.I. GRIMA Y A. MÁRQUEZ. *Convex hull in non-planar surfaces*. 13th European Workshop on Computational Geometry (CG'97). University of Wuerzburg, Germany. 1997.
- [3] K.Q. BROWN. *Geometric transform for fast geometric algorithms*. Dep. Comput. Sci., Carnegie–Mellon Univ. 1979.
- [4] L. DANZER, G. GRUNBAUM Y V.L. KLEE. *Helly's theorem and its relatives*. Proc. Symp. Pure Math. VII, American Mathematical Society, 1963.
- [5] H. FREEMAN. *Computer processing of line-drawing images*. Comput. Surveys (1974), no. 6, pp. 57–97.
- [6] H. FREEMAN Y R. SHAPIRA. *Determining the minimum-area encasing rectangle for an arbitrary closed curve*. Comm. ACM. **18** (1975), no. 7, pp. 409–413.
- [7] H. HOPF Y W. RINOW. *Über den Begriff der vollständigen differential-geometrischen Fläche*. Math. Ann. (1931), no. 63, pp. 209–225.
- [8] M.E. HOULE Y G.T. TOUSSAINT. *Computing the width of a set*. IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol. 10, no. 5, 1988, pp. 761–765.
- [9] K. ICHIDA Y T. KIYONO. *Segmentation of plane curves*. Trans. Elec. Commun. Eng., Japan, vol. 58–D, 1975, pp. 689–696.
- [10] H. IMAI Y M. IRI. *Polygonal approximation of a curve: Formulations and solution algorithms*. Computational Morphology. Amsterdam, The Netherlands: North–Holland, to be published.

- [11] Y. KUROZUMI Y W.A. DAVIS. *Polygonal approximation by the minimax method*. Comput. Graphics Image Processing, vol. 19, 1982, pp. 248–264.
- [12] K. MENGER. *Urtersuchungen über allgemeine Metrik*. Math. Ann. (1928), no. 100, pp. 75–163.
- [13] J. O’ROURKE. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [14] A. ROSENFELD. *Picture processing by computers*. Academic Press, NY. 1969.
- [15] M.I. SHAMOS. *Computational Geometry*. Ph. D. dissertation, Yale Univ. 1978.
- [16] J. SKLANSKY. *Measuring concavity on a rectangular mosaic*. IEEE Trans. Comp. C (1972), no. 21, pp. 1355–1364.
- [17] G. STRANG. *The width of a chair*. The American Mathematical Monthly, vol. 89, no. 8, 1982 pp. 529–534.
- [18] G.T. TOUSSAINT. *Movable separability of sets*, in Computational Geometry, Ed., Godfried T. Toussaint, Elsevier Science Publishers B.V. (North–Holland), 1985, pp. 335–375.