UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

HIPERCICLICIDAD DE OPERADORES SHIFTS. ALGUNOS PROBLEMAS RELACIONADOS.

Memoria presentada por
José Antonio Prado Bassas
para optar al grado de
Licenciado en Matemáticas.

Vº Bº
de la Directora

Fdo. Mª del Carmen Calderón Moreno
Profesora asociada del Dpto. Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla
Doctora en Matemáticas

Sevilla, Enero de 2001

Contents

Introducción

En 1929 C. D. Birkhoff [Bir] probó la existencia de una función entera $g(z)$ cuyo conjunto de trasladadas $\{g(z+a) : a \in \mathbb{C}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$. Posteriormente, en 1952, MacLane [McL] construyó una función entera cuya sucesión de derivadas aproxima uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ a cualquier otra función entera. Estos dos teoremas, ya clásicos, se consideran el punto de partida de una línea de investigación dentro del Análisis: la Hiperciclicidad, que en las últimas décadas, y gracias a técnicas de Análisis Funcional, ha adquirido una identidad propia. Dado un espacio topológico X, una aplicación continua $T : X \longrightarrow X$ se dice hipercíclica si existe un elemento $x \in X$ tal que su órbita $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en X. Es evidente que un elemento $x \in X$ es hipercíclico para T si y sólo si no existe ningún subconjunto propio de X cerrado e invariante por T que contenga a x. Por tanto el estudio de la hiperciclicidad está directamente relacionado con la existencia de subconjuntos cerrados e invariantes.

En 1969, S. Rolewicz [Rol] abordó el problema de la existencia de operadores hipercíclicos (aunque sin utilizar la notación ni la nomenclatura actual) en los espacios ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y c_0, planteando como problema el estudio de la existencia de operadores hipercíclicos en cualquier espacio de Banach. Desde entonces han sido muchos los autores que han estudiado esta cuestión, resuelta de manera positiva, muy recientemente, por Bernal [Ber] y Ansari [An2] de manera independiente. En el mismo trabajo, Rolewicz planteaba otra importante cuestión, la hiperciclicidad de los operadores del tipo Shift. Estos dos aspectos han supuesto la base de muchas investigaciones sobre hiperciclicidad, alguno de los cuales recogeremos en esta Memoria.

Por otra parte en 1987 R. M. Gethner y H. J. Shapiro [GeS] y C. Kitai [Kit] ofrecen, por primera vez, un criterio bastante útil que nos permite asegurar la hiperciclicidad de operadores. Este Criterio de Hiperciclicidad ha sido generalizado posteriormente por estos y otros autores (ver por ejemplo [GE1], [GoS], [An2], [Ber]).

En esta Memoria pretendemos recopilar algunos de los resultados obtenidos dentro de estas dos líneas de trabajo, relacionándolos con otros problemas importantes dentro de la Hiperciclicidad. Sin embargo, no sólo se trata de un trabajo de recopilación de datos, sino que se ha pretendido unificar las distintas notaciones utilizadas por los autores, adaptando, en determinados casos, las demostraciones originales y completando y/o mejorando en otros las pruebas no recogidas en los diversos artículos.

Para que esta Memoria sea autocontenida y con el fin de facilitar la comprensión de las pruebas, recordamos en el Capítulo 1 algunos resultados clásicos sobre Análisis Funcional y Teoría de Operadores que se utilizarán posteriormente. Además, en su última Sección introducimos las definiciones iniciales sobre hiperciclicidad, así como consecuencias inmediatas que de ellas se deducen. De este modo establecemos un primer contacto con el concepto central de esta Memoria.

En el Capítulo 2 recogemos algunos resultados de Rolewicz [Rol] en los cuales se nos presenta un primer ejemplo de operador hipercíclico sobre los espacios de Banach clásicos ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, y c_0. Aparece por primera vez un operador del tipo (weighted) backward shift que serán el eje principal de los Capítulos sucesivos. Posteriormente hacemos una breve incursión en el estudio de condiciones suficientes y/o necesarias sobre un espacio topológico X para la existencia de operadores hipercíclicos en él. Veremos que el espacio debe ser separable y de dimensión infinita, siendo estas condiciones suficientes en el caso en que X sea un espacio de Banach o de Fréchet.

En el Capítulo 3 incluimos uno de los primeros criterios suficientes sobre hiperciclicidad que se obtuvieron [GeS], para lo que se recurre a resultados clásicos de Análisis Funcional como es el Teorema de Baire. Asimismo, aprovechamos este criterio para obtener, de manera directa, los teoremas, clásicos en hiperciclicidad, de Birkhoff y MacLane. En la misma línea estudiaremos algunas aplicaciones de este criterio a la Teoría de Operadores, como es la hiperciclicidad de operadores backward shift en espacios de Hilbert de tipo Bergman [GeS].

En el Capítulo 4 recogemos algunos resultados [Sa2] que caracterizan la hiperciclicidad de los operadores bilaterales weighted backward (y forward) shifts sobre espacios de Hilbert, así como de los operadores backward shifts unilaterales. Veremos que en el caso forward la hiperciclicidad nunca es posible. Veremos cómo, gracias a estos resultados sobre operadores unilaterales, se puede cerrar el estudio de la hiperciclicidad en espacios de Hilbert de tipo Bergman, el cual fue abordado anteriormente por Gethner y Shapiro [GeS] (ver Capítulo 3) y completado por H. Salas [Sa2]. Asimismo, definiremos el concepto de suma directa de dos operadores y estudiaremos la relación entre la hiperciclicidad del operador suma directa y los operadores sumandos, deteniéndonos con especial interés en el caso de los operadores de desplazamiento. Finalmente concluiremos el Capítulo estudiando el concepto de multihiperciclicidad y su relación con el de hiperciclicidad.

Por último, en el Capítulo 5, abordaremos el estudio de la hiperciclicidad de operadores bilaterales weighted shifts en el espacio de Fréchet de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$. Aprovecharemos para ello algunos de los resultados recogidos en el Capítulo 3, en particular el Criterio de Hiperciclicidad, y en el Capítulo 4, en particular la caracterización de la hiperciclicidad de operadores bilateral weighted shifts.

Chapter 1

Preliminares

A lo largo de las primeras Secciones de este Capítulo recogeremos algunos resultados clásicos dentro de la Teoría de Espacios y el Análisis Funcional, con vistas a incluir en este trabajo todos los conceptos necesarios para la comprensión de los Capítulos posteriores. Hemos de decir que las demostraciones se pueden consultar en [Ru1], [Ru2] y [Brb] entre otros. En la última Sección introduciremos los conceptos de hiperciclicidad y universalidad, sobre los que se basan las investigaciones posteriores, además deduciremos algunas observaciones sobre hiperciclicidad que permiten un primer acercamiento a esta teoría.

1.1 Algunos espacios de Banach clásicos.

En primer lugar, en esta Sección, vamos a recordar algunos espacios clásicos de Banach que aparecerán en resultados posteriores, así como alguna de las propiedades que verifican. Denotaremos por $\mathbb{K}$ al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, o de forma más abreviada $\mathcal{C}(X)$, al espacio de las funciones continuas de X en $\mathbb{K}$. En particular, si $X = [0,1]$, tenemos

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K} \,:\, f \text{ es continua}\}.$$

Para cada $f \in \mathcal{C}[0,1]$, definimos la norma infinito de f como:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}.$$

Proposición 1.1.1 *La aplicación $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathcal{C}[0,1]$; y $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach separable.*

Denotamos por c_0 al espacio de las sucesiones de escalares convergentes a cero, es decir,

$$c_0 \;=\; \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ definimos la norma infinito de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|x_n| \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 1.1.2 *La aplicación $\|\cdot\|_\infty$ define una norma en c_0; y el par $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach separable.*

Para cada $p \in [1, +\infty)$, se define el espacio ℓ_p como el conjunto de sucesiones p-sumables, es decir,

$$\ell_p \;=\; \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, se define la norma-$p$ de x como

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Proposición 1.1.3 *La aplicación* $\| \cdot \|_p : \ell_p \longrightarrow [0, +\infty)$ *es una norma en* ℓ_p*; y el par* $(\ell_p, \| \cdot \|_p)$ *es un espacio de Banach separable.*

Por último sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, +\infty)$. Consideramos el espacio

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \;=\; \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \,:\, f \text{ es medible y } \int |f|^p d\mu < \infty\},$$

y sea $\mathcal{N} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \,:\, f \text{ es medible y } f = 0 \text{ c.p.d. } \Omega\}$. Entonces definimos el espacio $L^p(\Omega)$ como $\mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$.

En particular, si $\Omega = [0, 1]$ y μ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, tenemos que $L^p[0, 1]$ es el espacio de las clases de funciones f tales que

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty.$$

Sea $f \in L^p[0, 1]$. Se define la norma-p de f como

$$\|f\|_p \;=\; \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Proposición 1.1.4 *Sea* $p \in [1, +\infty)$. *La aplicación* $\| \cdot \|_p : L^p[0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$ *es una norma en* $L^p[0, 1]$*; y el par* $(L^p[0, 1], \| \cdot \|_p)$ *es un espacio de Banach separable.*

Definición 1.1.1 *Sea* X *el espacio* ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ *o bien el espacio* c_0. *Definimos el operador backward shift* B *sobre* X *por*

$$B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \;=\; (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$$

1.2 El Teorema de Baire.

Antes de enunciar este teorema clásico en Análisis Funcional damos algunas definiciones necesarias. Dado X un espacio topológico y A un subconjunto de X, denotaremos por $\overline{A}$ al cierre de A y por $int(A)$ al interior de A.

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X.*

1. *Se dice que el conjunto A es* raro *o* diseminado *si $int(\overline{A}) = \emptyset$.*
2. *Se dice que A es de* $1^{\underline{a}}$ categoría *(respecto de la topología de X), si es unión numerable de conjuntos raros; o equivalentemente, si existe una sucesión de conjuntos $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cerrados de interior vacío de manera que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.*
3. *Se dice que A es de* $2^{\underline{a}}$ categoría*, si no es de $1^{\underline{a}}$ categoría.*
4. *Se dice que A es* residual*, si su complementario es de $1^{\underline{a}}$ categoría.*
5. *Se dice que X es un* espacio de Baire*, si todo abierto no vacío de X es de $2^{\underline{a}}$ categoría en X.*

Proposición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico. X es un espacio de Baire si y sólo si para cualquier sucesión $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos densos en X, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X.*

Teorema 1.2.2 (Teorema de Baire) *Sea X un espacio topológico. Si X es un espacio métrico completo, entonces X es un espacio de Baire.*

1.3 Espacios vectoriales topológicos y F-espacios.

Definición 1.3.1 *Un* espacio vectorial topológico *es un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, en el que hay definida una topología tal que:*

1. *La aplición suma, definida por*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

   es continua.

2. *La aplicacióm producto por un escalar, definida por*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda \cdot y \end{array}$$

   es continua.

Definición 1.3.2 *Sea X un espacio vectorial y sea d una distancia en X. Se dice que d es* invariante por traslaciones*, si para cualesquiera elementos $x, y, a \in X$ se verifica que $d(x, y) = d(x + a, y + a)$.*

Definición 1.3.3 *Un espacio vectorial topológico X es un* F-espacio*, si existe una distancia d invariante por traslaciones cuya topología asociada es la topología de X y para la que X es completo.*

1.4 Espacios de Fréchet

Definición 1.4.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una* seminorma *en X es una aplicación $p : X \to [0, +\infty)$ de forma que, para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene* *(a)* $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $\mathcal{F} = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas definidas en X. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada subconjunto finito F de I denotamos

$$V_{F,\varepsilon} \; = \; \{x \in X \, : \, p_i(x) < \varepsilon \text{ para todo } i \in F\}.$$

Teorema 1.4.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{F} = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas sobre X. Entonces existe una única topología en X que lo convierte en espacio vectorial topológico y para la que la familia $\{V_{F,\varepsilon} : \varepsilon > 0, \; F \subset I \text{ finito}\}$ es una base de entornos de 0.*

A esta topología se la llama topología generada por la familia de seminormas $\{p_i\}_{i \in I}$.

Proposición 1.4.2 *Sea $\mathcal{F} = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas sobre un espacio vectorial X. Entonces, la topología generada por $\mathcal{F}$ es de Hausdorff si y sólo si la familia es separante, es decir, para todo $x \in X \setminus \{0\}$ existe $i \in I$ tal que $p_i(x) \neq 0$.*

Definición 1.4.2 *Un* espacio localmente convexo *es un espacio vectorial topológico que es Hausdorff y tal que el* 0 *posee una base de entornos formada por conjuntos convexos.*

Teorema 1.4.3 *Sea X un espacio localmente convexo. Son equivalentes:*

(a) *X es metrizable.*

(b) El 0 *tiene una base de entornos numerable.*

(c) De toda familia de seminormas que genera la topología de X*, puede extraerse una subfamilia numerable que sigue generando la misma topología.*

(d) Existe una familia numerable de seminormas en X *que genera la topología de* X*.*

Además, si se dan estas condiciones, existe una distancia invariante por traslaciones que genera la topología de X*.*

Definición 1.4.3 *Un* espacio de Fréchet *es un F-espacio que es localmente convexo; es decir, un espacio localmente convexo cuya distancia invariante por traslaciones genera una topología para la que* X *es completo.*

1.5 Espacios de Hilbert.

En esta Sección veremos las definiciones y las propiedades más importantes, que usaremos en Capítulos posteriores, sobre los espacios de Hilbert, así como la particularización de algunos ejemplos con los que también trabajaremos.

Definición 1.5.1 *Sea* H *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*, un* producto escalar *en* H *es una aplicación que a cada par de elementos* $x, y \in H$ *le asocia un escalar* $\langle x, y\rangle$ *de forma que*

(a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$*, para todo* $x, y \in H$*.*

(b) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$*, para todo* $x, y, z \in H$ *y cualesquiera* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*.*

(c) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in H$*.*

(d) $\langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$*.*

Se dice entonces que H es un espacio prehilbertiano *con producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposición 1.5.1 *Sea H un espacio prehilbertiano. La aplicación que a cada elemento $x \in H$ le hace corresponder el número real y positivo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define una norma sobre H que se denomina norma asociada a H.*

Definición 1.5.2 *Un* espacio de Hilbert *H es un espacio prehilbertiano que es completo para la norma asociada a H.*

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial; denotamos por $span(A)$ al subespacio vectorial generado por A, es decir, el menor subespacio vectorial que contiene a A. Se tiene que

$$span(A) \;=\; \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,:\, n \in \mathbb{N},\, x_k \in A,\, \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si A es un subconjunto de un espacio normado, denotaremos por $\overline{span}(A)$ al subespacio vectorial cerrado generado por A, es decir, el menor subespacio vectorial cerrado que contiene a A. Se tiene que $\overline{span}(A)$ coincide con con la clausura de $span(A)$; es decir, $\overline{span}(A) = \overline{span(A)}$.

Definición 1.5.3 *Dos elementos x e y de un espacio de Hilbert H se dicen* ortogonales *si $\langle x, y \rangle = 0$. (En realidad basta con que H sea prehilbertiano).*

Definición 1.5.4 *Un conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ en un espacio de Hilbert (basta, de nuevo, con prehilbertiano) es un* sistema ortogonal *si sus elementos son no nulos y dos a dos ortogonales; es decir, si $x_i \neq 0$ para cada $i \in I$ y $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Si además todos los elementos del sistema tienen norma uno, se dirá que el sistema es* ortonormal.

Teorema 1.5.2 *Sea H un espacio de Hilbert y $(x_i)_{i\in I}$ un sistema ortonormal en H. Son equivalentes:*

(a) $(x_i)_{i\in I}$ es un sistema ortonormal maximal: el único elemento $x \in H$ que es ortogonal a todos los elementos del sistema es $x = 0$.

(b) $(x_i)_{i\in I}$ es completo: $H = \overline{span}\{x_i \,:\, i \in I\}$.

(b) $(x_i)_{i\in I}$ es una base de H: para todo $x \in H$ se tiene que $x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle x_i$.

(d) Para todo $x, y \in H$ se tiene que $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle \overline{\langle y, x_i\rangle}$.

(e) (Identidad de Parseval). Para todo $x \in H$ se tiene que $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2$.

Ejemplos 1.5.3 Sea I un conjunto, denotamos por $\ell_2(I)$ al espacio formado por las familias $x = \{x_i\}_{i\in I}$ de escalares tales que

$$\sum_{i\in I} |x_i|^2 \;<\; \infty.$$

Si para cada $x = \{x_i\}_{i\in I}$ y cada $y = \{y_i\}_{i\in I}$ definimos su producto escalar como

$$\langle x, y\rangle \;=\; \sum_{i\in I} x_i \overline{y_i},$$

entonces $\ell_2(I)$ se convierte en un espacio de Hilbert. Para cada $i \in I$ denotamos por e_i al elemento de $\ell_2(I)$ definido por

$$e_i = \{x_{ij}\}_{j\in I}, \qquad \text{donde} \qquad x_{i,j} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}.$$

Entonces el sistema $\{e_i \,:\, i \in I\}$ forma una base ortonormal del espacio $\ell_2(I)$.

En particular, si $I = \mathbb{N}$ o si $I = \mathbb{Z}$, tenemos el espacio de las sucesiones unilaterales o bilaterales de cuadrado sumable respectivamente, es decir,

$$\ell_2(\mathbb{N}) \;=\; \ell_2 \;=\; \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

y

$$\ell_2(\mathbb{Z}) \;=\; \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,:\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Proposición 1.5.4 *Todo espacio de Hilbert tiene una base. Más aún, todas las bases de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal.*

Definición 1.5.5 *Al cardinal de una base de un espacio de Hilbert H lo llamaremos* dimensión hilbertiana *de H. En el caso de dimensión finita, la dimensión hilbertiana coincide con la dimensión lineal de H.*

Proposición 1.5.5 *Dos espacios de Hilbert son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión hilbertiana. Más aún, si I es un conjunto cuyo cardinal coincide con la dimensión hilbertiana de un espacio de Hilbert X, entonces X es isomorfo a $\ell_2(I)$.*

Proposición 1.5.6 *Un espacio de Hilbert H es separable si y sólo si tiene una base, a lo sumo, numerable.*

Corolario 1.5.7 *Todo espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable es isomorfo a ℓ_2.*

Sean X e Y dos espacios normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Si $X = Y$, entonces denotaremos simplemente $\mathcal{L}(X)$.

Proposición 1.5.8 $\mathcal{L}(X,Y)$ *es un espacio vectorial que se convierte en espacio normado si definimos la norma de operadores* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *como*

$$\|T\| \;=\; \min\{M \geq 0 \,:\, \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in H\} \;=$$

$$\sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| \leq 1\} \;=\; \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,:\, x \neq 0\right\}.$$

Proposición 1.5.9 *Sean* H_1 *y* H_2 *dos espacios de Hilbert, y* $T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$. *Entonces existe un único operador* $T^* \in \mathcal{L}(H_2,H_1)$ *tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \qquad \text{para todo } x \in H_1 \text{ y todo } y \in H_2.$$

A tal operador se le llama operador adjunto *de* T.

Nota 1.5.10 *Sean* H_1 *y* H_2 *dos espacios de Hilbert, y* $T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$. *Entonces es claro que la operación "tomar adjunto" es involutiva, es decir,* $T^{**} = (T^*)^* = T$.

Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal. Se define el operador *forward shift* T (resp. *backward shift* S) como como aquél que verifica $Te_n = e_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (resp. $Se_{n+1} = e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $Se_1 = 0$). Si existe una sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que se verifica $Te_n = a_{n+1}e_{n+1}$ (resp. $Se_{n+1} = a_ne_n$) se dice que T (resp. S) es un operador *weighted forward* (resp. *backward) shift* con sucesión de pesos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En particular, si $X = \ell_2(\mathbb{N})$ el operador T (resp. S) se denomina unilateral forward (resp. backward) shift. Ahora bien, si $X = \ell_2(\mathbb{Z})$ definimos el operador *bilateral* forward shift (resp. backward shift) como aquél que verifica $Te_n = e_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $Te_n = e_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$).

Proposición 1.5.11 *Sea H un espacio de Hilbert separable y T un operador weighted backward (resp. forward) shift. Entonces el operador T^* es un operador weighted forward (resp. backward) shift.*

Demostración. Por la Nota 1.5.10 basta probar el caso en que T es un operador weighted forward shift con sucesión de pesos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sean $x, y \in H$ y sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n \qquad \text{e} \qquad y = \sum_{m=1}^{\infty} \langle y, e_m\rangle e_m.$$

Pero por la linealidad y continuidad de T y del producto escalar, y por la definición de operador weighted forward shift

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle a_{n+1}e_{n+1}, y\rangle =$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_m\rangle} a_{n+1} \langle e_{n+1}, e_m\rangle =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_{m-1}\rangle \overline{\langle y, e_m\rangle} a_m =$$

$$\left\langle x, \sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_m} \langle y, e_m\rangle e_{m-1} \right\rangle.$$

Luego, por la unicidad del operador adjunto,

$$T^*y = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_m} \langle y, e_m\rangle e_{m-1} \qquad \text{para cada } y \in H.$$

En particular para $y = e_{n+1}$

$$T^* e_{n+1} = \overline{a_{n+1}} e_n$$

de donde T^* es el operador weighted backward shift con sucesión de pesos $\{b_n = \overline{a_{n+1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$. •

1.6 Conceptos generales sobre hiperciclicidad.

En los siguientes Capítulos vamos a estudiar la hiperciclicidad de operadores siempre definidos entre, al menos, espacios de Fréchet. En general este concepto, y el más general de universalidad, se pueden dar para espacios topológicos cualesquiera.

Definición 1.6.1 *Sean X e Y dos espacios topológicos y sea $\{T_n : X \to Y\}_{n\geq 0}$ una sucesión de aplicaciones continuas. Se dice que un elemento $x \in X$ es* universal *respecto de la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ si su órbita*

$$\mathcal{O}(\{T_n\} : x) = \{T_0x, T_1x, \dots, T_nx, \dots\}$$

es densa en Y. En tal caso se dice que $\{T_n\}$ es una sucesión universal. *Denotaremos por $\mathcal{U}(\{T_n\})$ al subconjunto de elementos de X que son universales respecto de $\{T_n\}$.*

Elijamos en particular $X = Y$ y $\{T_n\}$ la sucesión de iteradas de una sola aplicación continua $T : X \to X$, es decir, $T_0 = T^0 = Id$, $T_1 = T$, $T_2 = T^2 = T \circ T$ y en general para cada $n \in \mathbb{N}$ $T_n = T^n = T \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ T$. En estas condiciones, si la órbita $\mathcal{O}(T : x) = \{T^n x : n \geq 0\}$ de un elemento $x \in X$, es densa en X se dice que x es hipercíclico *respecto de T y la* aplicación T *se dice* hipercíclica. *El conjunto de elementos hipercíclicos respecto de T lo notaremos por $\mathcal{U}(T)$.*

Nota 1.6.1 *Observemos que para que una sucesión de aplicaciones de un espacio topológico X en otro espacio topológico Y sea universal, es necesario que el espacio de llegada Y sea separable.*

A lo largo de este trabajo nos vamos a centrar en resultados de hiperciclicidad y por tanto consideraremos el caso en que tengamos una sola aplicación T (y sus iteradas) sobre un espacio topológico X separable.

El primer resultado elemental que damos nos garantiza que, con unas condiciones mínimas sobre X, la existencia de un solo elemento T-hipercíclico implica la de todo un conjunto denso de elementos hipercíclicos para T.

Lema 1.6.2 *Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados. Entonces cada subconjunto finito de X tiene interior vacío.*

Demostración. Como X no tiene puntos aislados, tiene, al menos, dos puntos; y por ser T_1, cada subconjunto unitario $\{x\}$ es cerrado y de interior vacío, luego cada subconjunto finito también es cerrado.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un subconjunto finito F de X de interior no vacío. Tenemos que $int(F)$ es abierto, finito (luego cerrado) y posee, al menos, dos puntos. Escogemos un subconjunto B abierto, no vacío y minimal de $int(F)$. Entonces B tiene, al menos, dos puntos a y b. Por ser X T_1, existe un abierto U de X tal que $a \in U$ y $b \notin U$. Sea $C = B \cap U$. Entonces C es un subconjunto abierto no vacío de $int(F)$ y es un subconjunto propio de B, lo que contradice la elección del conjunto B. •

Teorema 1.6.3 *Sea X un espacio topológico T_1, separable sin puntos aislados. Si una aplicación $T : X \to X$ es hipercíclica, entonces el conjunto $\mathcal{U}(T)$ de elementos hipercíclicos respecto de T es denso en X.*

Demostración. Por hipótesis, existe un elemento $x \in \mathcal{U}(T)$ y por lo tanto $\mathcal{O}(T : x)$ es densa en X. Pero para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\mathcal{O}(T : T^m x) \ = \ \mathcal{O}(T : x) \setminus F$$

donde $F = \{x, Tx, \cdots, T^{m-1}x\}$. Entonces $int(F)$ es vacío por el Lema 1.6.2, así que $\mathcal{O}(T : T^m x)$ es densa en X y, en consecuencia, cada elemento $T^m x$ de la órbita de x es hipercíclico respecto de T. Así $\mathcal{O}(T : x) \subset \mathcal{U}(T)$ y $\mathcal{U}(T)$ es denso en X. •

Nota 1.6.4 *Observemos que este resultado no es cierto para sucesiones de aplicaciones continuas* $T_n : X \to X$. En efecto, sea X un espacio de Hilbert bidimensional, sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de X y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n \in X$ un elemento ortogonal a x_n y de norma n. Definamos ahora la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores lineales sobre X dada por

$$T_n(ae_1 + be_2) \ = \ ax_n + by_n \quad (a, b \in \mathbb{K}).$$

Entonces cada elemento de la forma ae_1 con $a \neq 0$ es universal para $\{T_n\}$, pero cualquier otro elemento $ae_1 + be_2$ con $b \neq 0$ verifica

$$\|T_n(ae_1 + be_2)\| \ \geq \ |b|\|y_n\| \ = \ |b|n,$$

luego no es universal. En consecuencia $\mathcal{U}(\{T_n\}) = \{ae_1 : a \neq 0\}$ y por tanto no es denso en X.

El siguiente resultado nos muestra una condición necesaria muy sencilla para que se dé la hiperciclicidad de un operador T en un espacio normado X.

Teorema 1.6.5 *Sea T un operador lineal y continuo sobre un espacio normado X. Si T es hipercíclico, entonces $\|T\| > 1$.*

Demostración. Supongamos que $\|T\| \leq 1$. Entonces $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ para cada $x \in X$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$ se tiene que $\|T^n x\| \leq \|x\|$. Por lo tanto la órbita de cada elemento x está acotada, y por consiguiente no puede haber ningún elemento hipercíclico respecto de T. •

Durante los últimos años muchos autores han estudiado los operadores hipercíclicos sobre espacios de Hilbert y espacios de Banach. Para cualquier consulta sobre estos resultados referimos al lector interesado al excelente survey sobre el tema realizado por K. G. Grosse-Erdmann [GE2].

Chapter 2

Hiperciclicidad en espacios de Banach

Sea X un espacio normado y T un operador lineal y continuo de X en sí mismo. Recordemos que la órbita de un elemento x de X respecto del operador T es el conjunto

$$\mathcal{O}(T : x) = \{T^n x \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

En 1969 Rolewicz, basándose en resultados de L. S. Pontryagin [Pon] adelantó que si X es un espacio de dimensión finita y $x \in X$, las imágenes de sus iteradas por T tan sólo verifican las siguientes tres posibilidades autoexcluyentes:

(1) $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = +\infty$.

(3) El cierre de $\mathcal{O}(T : x)$ es compacto y $0 \notin \overline{\mathcal{O}(T : x)}$.

De donde se deduce fácilmente que la órbita de un elemento x de X nunca puede ser densa en X y por tanto T no será un operador hipercíclico. Más adelante, en la Sección 2, ofreceremos una demostración algebraica de este hecho, en sí mismo bastante intuitivo, debida a C. Kitai [Kit, Theorem 1.2].

Lo anterior concluye el estudio de la hiperciclicidad en espacios de dimensión finita. Ahora bien, en el caso infinito-dimensional no ocurre así; como vamos a mostrar en la siguiente Sección, dado $X = \ell_p$ ó c_0 podemos encontrar que, para ciertos operadores T y para ciertos elementos $x \in X$, la órbita $\mathcal{O}(T : x)$ es densa en la totalidad del espacio, es decir, T será hipercíclico en X.

Por último, dedicaremos la Sección 2 al estudio de la existencia de operadores hipercíclicos en un espacio de Banach X general. Aunque los resultados que enunciaremos no son indispensables en lo que constituye nuestra principal línea en este trabajo: el estudio de la hiperciclicidad de operadores weighted shifts, consideramos que su inclusión facilita la comprensión de la importancia de dichos operadores en la teoría de la hiperciclicidad.

2.1 Un ejemplo de operador hipercíclico en espacios de Banach

En 1969 Rolewicz [Rol, Theorem 1] proporcionó el primer ejemplo de operador hipercíclico entre espacios de Banach. Su resultado, ya clásico, nos muestra que ciertos múltiplos del operador backward shift B, son hipercíclicos.

Teorema 2.1.1 *Sea X el espacio ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, o bien el espacio c_0; y sea B el operador backward shift en X. Entonces para cada número real $a > 1$, el operador $T = aB$ es hipercíclico en X.*

Demostración. Sea X el espacio ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o el espacio c_0. Tenemos que demostrar que existe un elemento $x_0 \in X$ tal que

$$\{T^n x_0 \,:\, n \in \mathbb{N}\} \text{ es denso en } X. \tag{1}$$

Recordemos que el operador backward shift B viene dado por

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) \;=\; (x_2, x_3, \ldots).$$

Sea R el operador forward shift definido, para cada $(x_1, x_2, \ldots) \in X$, como

$$R(x_1, x_2, \ldots) \;=\; (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Se tiene que para cada $(x_1, x_2, \ldots) \in X$,

$$B \circ R(x_1, x_2, \ldots) \;=\; B(0, x_1, x_2, \ldots) \;=\; (x_1, x_2, \ldots),$$

y por tanto $B \circ R = Id$ en X.

Denotemos por $\mathcal{L}(X)$ el espacio de los operadores lineales y continuos en X, y por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ la norma usual en $\mathcal{L}(X)$. Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ sea $e_n = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)$.

Si $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$, entonces

$$\|B(x_1, x_2, \ldots)\|_p^p \;=\; \|(x_2, x_3, \ldots)\|_p^p \;=\; \sum_{j=2}^{\infty} |x_j|^p \;\leq$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \;=\; \|(x_1, x_2, \ldots)\|_p^p.$$

En particular, si $x = e_2$,

$$\|B(e_2)\|_p^p \;=\; \|e_1\|_p^p \;=\; 1 \;=\; \|e_2\|_p^p.$$

La igualdad se alcanza y por tanto $\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_p)} \;=\; 1$.

Si $X = c_0$, entonces

$$\|B(x_1, x_2, \ldots)\|_\infty \;=\; \sup\{|x_j| \,:\, j \geq 2\} \;\leq$$

$$\sup\{|x_j| \,:\, j \geq 1\} \;=\; \|(x_1, x_2, \ldots)\|_\infty.$$

En particular, si $x = e_2$,

$$\|B(e_2)\|_\infty \;=\; \|e_1\|_\infty \;=\; 1 \;=\; \|e_2\|_\infty.$$

De nuevo se consigue la igualdad y con ello $\|B\|_{\mathcal{L}(c_0)} \;=\; 1$.

Análogamente podemos obtener que $\|R\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$. Basta observar que la igualdad se alcanza en $x = e_1$, ya que $R(e_1) = e_2$.

Fijemos ahora un número real $a > 1$ y consideremos los operadores

$$T = aB \qquad \text{y} \qquad S = \frac{1}{a}R.$$

Entonces

$$T \circ S \;=\; Id \qquad \text{en } X \tag{2}$$

y

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = a \qquad \text{y} \qquad \|S\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{a}. \tag{3}$$

Comencemos la construcción del elemento x_0. A partir de ahora, $\|\cdot\|$ denotará la norma en el espacio X.

Sea $G = \{x^n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de X, tal que para cualquier elemento $x^n = (x^n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, todas sus coordenadas x^n_j salvo, a lo sumo, una cantidad finita de ellas son nulas; por ejemplo,

$$G \;=\; \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j e_j \;:\; n \in \mathbb{N},\; q_j \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Denotemos por $k(n)$ al mayor índice j tal que la coordenada x^n_j de x^n no es nula.

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene, por (3), que

$$\|S^m x^n\| \;\leq\; \|S\|^m_{\mathcal{L}(X)} \|x^n\| \;=\; \frac{\|x^n\|}{a^m} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Y por ser $a > 1$,

$$\|S^m x^n\| \;\longrightarrow\; 0 \qquad (m \to \infty).$$

Así pues, es posible construir una sucesión creciente $\{r(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturales tales que

$$\max\{k(i) \;:\; 1 \leq i \leq n\} < r(n), \tag{4}$$

y

$$\|S^{r(n)}(x^n)\| < \frac{1}{2^n}. \tag{5}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$p(n) :=\; \sum_{i=1}^{n} r(i). \tag{6}$$

Llamemos x_0 al "elemento" de X dado por

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} S^{p(n)} x^n. \tag{7}$$

En primer lugar, dicho elemento está realmente en X, ya que para cada $n > 1$, $p(n) = p(n-1) + r(n)$ y, por (3) y (5),

$$\|S^{p(n)}x^n\| \ \leq \ \|S\|^{p(n-1)} \|S^{r(n)}x^n\| \ < \ \frac{1}{a^{p(n-1)}} \cdot \frac{1}{2^n} \ < \ \frac{1}{2^n}.$$

Si $n = 1$, directamente por (5), tenemos $\|S^{p(1)}x^1\| < 1/2$. De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S^{p(n)}x^n\| \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Veamos ya que x_0 es el elemento buscado. Observemos que si

$$x^m \ = \ (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_{k(m)}^m, 0, \ldots)$$

entonces

$$Tx^m \ = \ (x_2^m, \ldots, x_{k(m)}^m, 0, \ldots),$$

y aplicando T $k(m)$ veces, obtenemos

$$T^{k(m)}x^m = 0 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

En particular, dado que T es lineal,

$$T^i x^m \ = \ 0 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ y todo } i \geq k(m). \tag{8}$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Por (2),

$$T^{p(n)}x_0 \ = \ \sum_{m=1}^{\infty} T^{p(n)} S^{p(m)} x^m \ =$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} T^{p(n)} S^{p(m)} x^m \ + \ T^{p(n)} S^{p(n)} x^n \ + \ \sum_{m=n+1}^{\infty} T^{p(n)} S^{p(m)} x^m \ =$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} T^{p(n)-p(m)} x^m \ + \ x^n \ + \ \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)} x^m.$$

Si $1 \leq m \leq n-1$, entonces, por (1), $p(n)-p(m) = \sum_{k=m+1}^{n} r(k) \geq r(m) \geq k(m)$, y por (8)

$$T^{p(n)}x_0 \;=\; x^n \;+\; \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m.$$

Ahora bien, por (5) y por ser $a > 1$,

$$\left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m \right\| \;\leq\; \sum_{m=n+1}^{\infty} \|S^{p(m)-p(n)}x^m\| \;\leq$$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \|S^{p(m-1)-p(n)}\| \cdot \|S^{r(m)}x^m\| \;=\; \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{p(m-1)-p(n)}}\|S^{r(m)}x^m\| \;\leq$$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \|S^{r(m)}x^m\| \;\leq\; \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \;=\; \frac{1}{2^n}.$$

Luego

$$\|T^{p(n)}x_0 - x^n\| \;\leq\; \frac{1}{2^n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Por último, sea x un elemento fijo pero arbitrario de X. Por ser $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en X, dado un número positivo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Entonces, por (9) y la desigualdad triangular,

$$\|T^{p(n)}x_0 - x\| \;\leq\; \|T^{p(n)}x_0 - x^n\| \;+\; \|x^n - x\| < \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así la órbita de x_0 es densa en X y tenemos (1). •

Notas 2.1.2

1. *El Teorema 2.1.1 se puede enunciar para cualquier número complejo a con módulo $|a| > 1$. Además, el resultado es óptimo, ya que el Teorema 1.6.5 nos asegura que el operador B, con $|a| \leq 1$, no es hipercíclico.*

2. *Observemos que en la prueba del Teorema 2.1.1, el hecho de usar el cuerpo de los escalares reales o complejos es superfluo.*

3. *En la misma línea, podemos asimismo reemplazar el cuerpo de los escalares por un espacio de Banach separable arbitrario, es decir, podemos probar el Teorema 2.1.1 para los espacios $\ell_p(X)$ $(1 \le p < \infty)$ y $c_0(X)$ de todas las sucesiones $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de un espacio de Banach separable X, tales que*

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X^p\right)^{1/p} < +\infty \quad (\textit{resp.}\ \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = 0);$$

   con la topología definida por la norma $\|x\|$ (resp. $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X$) y donde por $\|\cdot\|_X$, entendemos la norma en el espacio X. Tendremos, pues, el siguiente Teorema.

Teorema 2.1.3 *Sea Y un espacio de Banach separable; y sea X o bien el espacio $\ell_p(Y)$, con $1 \le p < \infty$, o bien el espacio $c_0(Y)$. Sea B el operador backward shift en X. Entonces para cada número real $a > 1$, el operador $T = aB$ es hipercíclico en X.*

Corolario 2.1.4 *Para cualquier número real $a > 1$ y en cualquiera de los siguientes espacios*

$$\mathcal{C}[0,1] \ \ \textit{ó} \ \ L^p[0,1] \ \ \textit{con} \ \ 1 \le p < +\infty,$$

existe un operador T, de norma a, *y un elemento x_0, tales que x_0 es T-hipercíclico.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.3 es suficiente probar que $\mathcal{C}[0,1]$ (resp. $L^p[0,1]$) es isomorfo a un subespacio de $c_0(\mathcal{C}[0,1])$ (resp. de $\ell_p(L^p[0,1])$).

Sea

$$\begin{array}{rccc} J_0: & \mathcal{C}[0,1] & \longrightarrow & c_0(\mathcal{C}[0,1]) \\ & f & \longmapsto & J_0(f) = \left(\frac{1}{n} f\right)_{n=1}^{\infty}, \end{array}$$

y sea

$$\begin{array}{rccc} J_p : & L^p[0,1] & \longrightarrow & \ell_p(L^p[0,1]) \\ & f & \longmapsto & J_p(f) = \left(\frac{1}{2^{n/p}} f\right)_{n=1}^{\infty}. \end{array}$$

Es trivial que ambas aplicaciones están bien definidas y son lineales. Veamos que, en realidad, son isomorfismos. Sea $f \in \mathcal{C}[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} \|J_0(f)\| &= \sup\left\{ \left\| \frac{1}{n} f \right\|_{\mathcal{C}[0,1]} : n \in \mathbb{N} \right\} = \\ & \sup\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cdot \|f\|_{\mathcal{C}[0,1]} = \|f\|_{\mathcal{C}[0,1]}. \end{aligned}$$

Análogamente, dada $f \in L^p[0,1]$,

$$\|J_p(f)\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^{n/p}} f \right\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_p^p = \|f\|_p^p.$$

De donde J_0 y J_p son continuas y verifican que

$$\|J_0\| = 1 = \|J_p\|.$$

•

2.2 Hiperciclicidad en espacios de dimensión infinita

Como ya comentamos en la introducción de este Capítulo, en un espacio de Banach de dimensión finita es imposible encontrar un operador hipercíclico. Este resultado, enunciado inicialmente por Rolewicz [Rol] en la forma expuesta en la introducción, ha sido reobtenido por diversos autores, como por ejemplo Kitai [Kit, Theorem 1.2], K. C. Chan y J. H. Shapiro [ChS, pp. 1445-1446] y J. Bès [Bes, Lemma 2]. De entre estas diversas demostraciones incluimos, a continuación, la prueba algebraica debida a Kitai, que posiblemente sea la más sencilla de todas las que se conocen.

Teorema 2.2.1 *Sobre un espacio de Banach X de dimensión finita, no existen operadores hipercíclicos.*

Demostración. Supongamos que T es un operador hipercíclico sobre X, y que $dim(X) = n \in \mathbb{N}$. Existe una base de X con respecto a la cual T tiene una matriz triangular superior $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Llamemos $a = a_{nn}$. Entonces para cada entero positivo $k \geq 0$, el elemento que ocupa el lugar (n, n) de la matriz A^k es a^k.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ de X que es hipercíclico respecto de T. Entonces el conjunto $\{a^k x_n : k \geq 0\}$ tiene que ser denso en $\mathbb{C}$, lo que es claramente imposible. •

Una segunda condición para que un espacio topológico admita operadores hipercíclicos es, trivialmente, la separabilidad de dicho espacio. En 1969 Rolewicz [Rol, Problem 1] planteó la siguiente cuestión.

> *Si X es un espacio de Banach separable y de dimensión infinita, ¿existe algún operador en X que sea hipercíclico?*

Observemos que Rolewicz estudió el caso en que $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ o c_0, recogido en la Sección anterior. En particular, si consideramos $X = \ell_2$, por el Corolario 1.5.7 tendremos que el problema anterior ya estaría resuelto para espacios de Hilbert separables y de dimensión infinita.

El problema en espacios de Banach ha permanecido abierto hasta hace muy pocos años. A finales de los 90, S. I. Ansari [An2] y L. Bernal [Ber] proporcionaron, de manera independiente, una respuesta afirmativa.

Teorema 2.2.2 *En todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita existe un operador hipercíclico.*

Aunque no daremos las demostraciones, hemos de decir que se inspiran en un resultado anterior de Salas [Sa2] sobre hiperciclicidad de operadores shifts sobre ℓ_2, el cual será la base del Capítulo 4. En particular, la prueba de Ansari permite extender el resultado a clases más amplias de espacios vectoriales topológicos. De hecho, ella muestra que cualquier espacio de Fréchet con un sistema biortogonal equicontinuo admite un operador hipercíclico [An2, Theorem 1(c)]. En 1998 J. Bonet y A. Peris [BoP] consiguieron eliminar esta última restricción.

Teorema 2.2.3 *Todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite un operador hipercíclico.*

Por último digamos que sigue abierto el problema de la existencia de operadores hipercíclicos en espacios más generales como F-espacios separables y de dimensión infinita.

Chapter 3

Hiperciclicidad en espacios de Hilbert

En la primera Sección de este Capítulo vamos a ofrecer una condición suficiente que nos garantice la hiperciclicidad de un operador T (Teorema 3.1.6). La prueba de este resultado principal está basada en el Teorema de Baire (Teorema 1.2.2), y nos proporcionará todo un conjunto G_δ-denso de elementos hipercíclicos. Sin embargo esto no nos resultará sorprendente, ya que en la Proposición 3.1.1 veremos que si un operador T posee un elemento hipercíclico, entonces posee un conjunto G_δ-denso de ellos.

El Teorema 3.1.6 permite unificar, extender y completar diversos resultados de la literatura clásica de funciones y de la Teoría de Operadores. En particular deduciremos a partir de él los dos primeros resultados conocidos sobre universalidad: el teorema de Birkhoff [Bir] *Existen funciones enteras f cuyas trasladadas aproximan uniformemente en compactos cualquier función entera, es decir, tales que el conjunto $\{\tau_a f \,:\, a \in \mathbb{C}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, donde* $\tau_a f(z) = f(z+a)$ $(z \in \mathbb{C})$; y el teorema de MacLane [McL, Theorem 7] *Existe una función entera f cuya sucesión de derivadas $\{f^{(n)} \,:\, n \geq 0\}$ es densa en* $H(\mathbb{C})$. En definitiva, estos teoremas aseguran la hiperciclicidad en el espacio de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$ del operador traslación τ_a y del operador derivada D definido para cada $f \in H(\mathbb{C})$ como $Df(z) = f'(z)$.

En la siguiente Sección del Capítulo, incluiremos aplicaciones a la Teoría de Operadores. Definiremos los operadores backward shift sobre ciertos espacios de Hilbert y apoyándonos en el Teorema 3.1.6, daremos condiciones necesarias y suficientes que caracterizarán su hiperciclicidad.

Por último, en la Sección cuarta introducimos uno de los problemas clásicos dentro de la hiperciclicidad. Problema que tiene su origen en el Teorema 3.1.6 y que volveremos a encontrar en el Capítulo 4.

3.1 Condiciones suficientes de hiperciclicidad.

A lo largo de toda la Sección, X será un F-espacio separable, y T un operador lineal y continuo de X en sí mismo; la separabilidad viene impuesta como condición necesaria para que pueda hablarse de hiperciclicidad. Recordemos que para un F-espacio X, la topología viene dada por una distancia invariante por traslaciones d. Para cualquier $x \in X$, cualquier $y \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, notaremos $\|x\| = d(x, 0)$ y $B(y, \varepsilon) = \{x \in X : \|y - x\| < \varepsilon\}$.

Definición 3.1.1 *Sea X un F-espacio. Para cada elemento $y \in X$, cada número natural $N \in \mathbb{N}$ y cada número positivo $\varepsilon > 0$, denotaremos por $F(y, N, \varepsilon)$ al conjunto*

$$F(y, N, \varepsilon) = \{x \in X : \|T^n x - y\| < \varepsilon \textit{ para algún } n \geq N\}.$$

Lema 3.1.1 *Para cada elemento $y \in X$, cada número natural $N \in \mathbb{N}$ y cada número positivo $\varepsilon > 0$, el conjunto $F(y, N, \varepsilon)$ es abierto.*

Demostración. Por la continuidad de la aplicación T basta probar que

$$F(y, N, \varepsilon) = \bigcup_{n \geq N} T^{-n} \left(B(y, \varepsilon) \right),$$

donde por T^{-n} se entiende la aplicación inversa T^{-1} compuesta n veces. La igualdad es inmediata por la siguiente cadena de equivalencias:

$$x \in F(y, N, \varepsilon) \Longleftrightarrow \text{existe } n \geq N \text{ tal que } \|T^n x - y\| < \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$\text{existe } n \geq N \text{ tal que } T^n x \in B(y, \varepsilon) \Longleftrightarrow$$

$$\text{existe } n \geq N \text{ tal que } x \in T^{-n}(B(y, \varepsilon)) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{n \geq N} T^{-n}(B(y, \varepsilon)).$$

•

Proposición 3.1.2 *Si un operador T posee un elemento hipercíclico, entonces tiene un conjunto G_δ-denso de elementos hipercíclicos.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de elementos hipercíclicos para T. En primer lugar observemos que, por el Teorema 1.6.3, si $\mathcal{U}$ es no vacío, entonces es denso en X y además

$$\{T^n x \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Por otra parte, dado que X es separable, existe un conjunto denso y numerable en X. Fijamos $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión densa en X.

Veamos que $\mathcal{U}$ se puede expresar como una intersección numerable de abiertos $F(y, N, \varepsilon)$. En concreto

$$\mathcal{U} = \bigcap_{j,N,k \in \mathbb{N}} F(y_j, N, 1/k). \tag{2}$$

Sea x un elemento de $\mathcal{U}$. Por (1) sabemos que para todo $N \in \mathbb{N}$, $T^N x$ es hipercíclico para T, de donde para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^m(T^N x) - y_j\| < \frac{1}{k},$$

o lo que es igual, $x \in F(y_j, N, 1/k)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{U} \subset \bigcap_{j,N,k \in \mathbb{N}} F(y_j, N, 1/k).$$

Sea ahora $x \in \bigcap_{j,N,k\in\mathbb{N}} F(y_j, N, 1/k)$. Hay que demostrar que la órbita de x es densa en X, es decir:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ y dado } y \in X, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|T^n x - y\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Fijamos $\varepsilon > 0$ e $y \in X$. Por ser la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ densa, existe un número natural m de modo que

$$\|y - y_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero $x \in \bigcap_{j,N,k\in\mathbb{N}} F(y_j, N, 1/k)$, luego para cualquier terna de números naturales j, N, k se tiene que

$$\|T^n x - y_j\| < \frac{1}{k} \qquad \text{para algún } n \geq N.$$

Tomando en particular $j = m$ y k tal que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, obtenemos

$$\|T^n x - y_m\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Y usando (3),(4) y la desigualdad triangular, nos queda que

$$\|T^n x - y\| \leq \|T^n x - y_m\| + \|y_m - y\| < \varepsilon,$$

lo que demuestra que $\bigcap_{j,N,k\in\mathbb{N}} F(y_j, N, 1/k) \subset \mathcal{U}$, con ello tenemos (2) y la prueba concluye. •

Nota 3.1.3 *Este resultado tan sólo es válido si hablamos de hiperciclicidad. En el caso de tener una sucesión de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ el razonamiento falla, pues en la prueba juega un papel fundamental el hecho de que la composición sea una operación interna en la familia $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Una consecuencia curiosa de la Proposición 3.1.2 y del Teorema de Baire es la siguiente.

Corolario 3.1.4 *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales y continuos. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un elemento T_n-hipercíclico, entonces existe un elemento T_n-hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $\mathcal{U}_n$ el conjunto de elementos hipercíclicos para T_n. Por hipótesis, cada $\mathcal{U}_n$ es no vacío, luego por la Proposición 3.1.1 cada $\mathcal{U}_n$ es un conjunto G_δ-denso en X. Así, el Teorema de Baire nos garantiza que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ es denso y, en particular, no vacío, es decir, existe un elemento $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$, y por tanto x es un elemento T_n-hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$. •

Nota 3.1.5 *Teniendo en cuenta este resultado y los teoremas de MacLane y Birkhoff, podemos encontrar una función entera hipercíclica respecto del operador traslación y del operador diferenciación a la vez.*

Pasemos a demostrar a continuación el resultado principal de esta Sección, el cual nos proporcionará condiciones suficientes para la hiperciclicidad de un operador T. Este resultado fue dado, de manera independiente, por Gethner y Shapiro en [GeS, Theorem 2.2] y por Kitai en [Kit, Theorem 1.4]. En ambos casos su enunciado y demostración se inspira en el resultado de Rolewicz (Teorema 2.1.1) visto en el Capítulo anterior.

Teorema 3.1.6 *Sea X un F-espacio separable y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo. Supongamos que existe un subconjunto denso $\mathcal{D}$ de X y una aplicación $S : X \to X$, tales que:*

(a) $T \circ S = Id$ *en* X.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \|S^n x\| = 0$ *para todo* $x \in \mathcal{D}$.

Entonces el conjunto $\mathcal{U} := \mathcal{U}(T)$ es no vacío.

Demostración. En la demostración de la Proposición 3.1.2 hemos visto que $\mathcal{U}$ puede expresarse como una intersección numerable de conjuntos abiertos $F(y, N, \varepsilon)$. Así, por el Teorema de Baire, es suficiente probar que para cada $y \in X$, $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $F(y, N, \varepsilon)$ es denso en X.

Fijamos $y \in X$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $z \in X$ y $\delta > 0$. Tenemos que probar que

$$F(y, N, \varepsilon) \cap B(z, \delta) \neq \emptyset,$$

es decir, existe $x \in X$ tal que

$$\|T^n x - y\| < \varepsilon \qquad \text{para algún } n \geq N \tag{1}$$

y

$$\|x - z\| < \delta. \tag{2}$$

Como $\mathcal{D}$ es denso en X, existen unos elementos $y_0, z_0 \in \mathcal{D}$ tales que

$$\|z - z_0\| < \frac{\delta}{2} \qquad y \qquad \|y - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la hipótesis (b), tenemos que T^n y S^n convergen puntualmente a 0 en $\mathcal{D}$, luego existe $n \geq N$ tal que se verifican, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:

$$\|T^n z_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\|S^n y_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Consideremos $x = S^n y_0 + z_0$. Se verifica que:

$$\begin{aligned} \|x - z\| \;&\leq\; \|x - z_0\| + \|z_0 - z\| \;= \\ \|S^n y_0\| + \|z_0 - z\| \;&<\; \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \;=\; \delta, \end{aligned}$$

por tanto x cumple (2).

Además, por la hipótesis (a), es inmediato que para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T^n \circ S^n = Id$ en X, y por la linealidad del operador T y la desigualdad triangular

$$\|T^n x - y\| \;=\; \|T^n \circ S^n y_0 + T^n z_0 - y\| \;=$$

$$\|y_0 - y + T^n z_0\| \leq$$
$$\|y_0 - y\| + \|T^n z_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así $x \in X$ cumple (1) y (2), y con ello $F(y, N, \varepsilon)$ es denso en X. •

Nota 3.1.7 *Observemos que en realidad, hemos demostrado algo más fuerte que la hiperciclicidad del operador T. La prueba nos muestra que para cualquier sucesión $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente a $+\infty$, existe todo un conjunto G_δ-denso de elementos $x \in X$ tales que $\{T^{n_j}x \ : \ j \geq 0\}$ es denso en X, o lo que es igual, se tiene que T es* hereditariamente hipercíclico *para $\{n_j\}$.*

De hecho, un razonamiento parecido puede seguirse para obtener el siguiente criterio suficiente de universalidad, análogo al del Teorema 3.1.6.

Teorema 3.1.8 *Sea X un F-espacio y sea $\mathcal{D}$ un subconjunto denso de X y $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales y continuos en X tales que $T_n \to 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada $n \geq 0$ el operador T_n posee un inverso a la derecha S_n y que $S_n \to 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en $\mathcal{D}$. Entonces existe un conjunto G_δ de elementos $x \in X$ tales que $\{T_n x \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.*

Ya comentamos anteriormente (Nota 3.1.5) que pueden conseguirse funciones universales en el sentido de Birkhoff y de MacLane al mismo tiempo. Veamos ahora cómo podemos deducir estos dos primeros resultados sobre universalidad a partir del Teorema 3.1.6.

Corolario 3.1.9 (Teorema de Birkhoff) *Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ existe un conjunto G_δ-denso de funciones enteras f, tales que el conjunto de sus trasladadas $\{f(z + n\alpha) \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.*

Demostración. Vamos a aplicar el Teorema 3.1.6 con $X = H(\mathbb{C})$, T el operador traslación por α $(Tf(z) = f(z + \alpha)$ para cada $f \in H(\mathbb{C}))$ y S el operador traslación por $-\alpha$. El problema consiste en encontrar un conjunto denso en $H(\mathbb{C})$ tal que las sucesivas potencias de T y S converjan puntualmente a cero en él. Para ello, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que α es real. Entonces, para cada par de números enteros $k > 0$ y $m \geq 0$, definimos la función entera $f_{m,k}$ como

$$f_{m,k}(z) \ = \ z^m \cdot \left[\frac{\sin(z/k)}{(z/k)}\right]^{m+1} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Si fijamos m, se comprueba fácilmente que

$$f_{m,k}(z) \to z^m \quad (k \to \infty)$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$. También se verifica que:

$$T^n f_{m,k} \ = \ (z+n\alpha)^m \left[\frac{\sin\left(\frac{z+n\alpha}{k}\right)}{\frac{z+n\alpha}{k}}\right]^{m+1} \quad \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \text{ en } H(\mathbb{C})$$

y

$$S^n f_{m,k} \ = \ (z-n\alpha)^m \left[\frac{\sin\left(\frac{z-n\alpha}{k}\right)}{\frac{z-n\alpha}{k}}\right]^{m+1} \quad \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \text{ en } H(\mathbb{C}).$$

Y por tanto $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converjen puntualmente a cero en el subespacio vectorial $\mathcal{D}$ generado por todas las funciones $\{f_{m,k} \ : \ k > 0, \ m \geq 0\}$. Finalmente, $\mathcal{D}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, ya que por (1) cualquier polinomio está en el cierre de $\mathcal{D}$ y los polinomios son densos en $H(\mathbb{C})$. •

Corolario 3.1.10 (Teorema de MacLane) *Existe un conjunto G_δ-denso de funciones enteras f tales que el conjunto de todas sus derivadas $\{f^{(n)} \ : \ n \geq 0\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.*

Demostración. Las hipótesis del Teorema 3.1.6 se satisfacen para $X = H(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los polinomios, T el operador diferencial y S el operador integración definido como

$$Sf(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt \quad (f \in H(\mathbb{C}), \ z \in \mathbb{C}),$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ es fijo y la integral está tomada a lo largo de cualquier arco rectificable que une z_0 y z. Es claro que $T \circ S = Id$ en $H(\mathbb{C})$, y que si $p(z)$ es un polinomio, entonces $T^n p = 0$ para todo $n >$ grado(p). Por último $S^n p \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ en $H(\mathbb{C})$, ya que

$$S^n\left((z-z_0)^m\right) = \frac{m!(z-z_0)^{m+n}}{(m+n)!} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$. •

3.2 Un ejemplo de operador hipercíclico en espacios de Hilbert.

Definición 3.2.1 *Sea $\beta = \{\beta(k)\,;\, k \geq 0\}$ una sucesión decreciente de números positivos tales que*

$$\sigma := \sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+1)} \,:\, k \geq 0\right\} < +\infty.$$

Llamaremos $H^2(\beta)$ al espacio de las funciones analíticas en el disco unidad $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k$, para las que

$$\|f\|_\beta^2 := \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \cdot \beta(k)^2 < +\infty.$$

Nota 3.2.1 *Si dotamos al espacio $H^2(\beta)$ del producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=o}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}\beta(k)^2$$

se convierte en un espacio de Hilbert cuya norma asociada es $\|\cdot\|_\beta$.

En esta Sección vamos a estudiar la hiperciclicidad del operador backward shift B definido sobre el espacio $H^2(\beta)$ como sigue. Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \in$

$H^2(\beta)$, entonces B se define como

$$Bf(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k+1)z^k.$$

Notaremos por $\|\cdot\|$ a la norma usual en $\mathcal{L}(H^2(\beta))$.

Proposición 3.2.2 *Sea B el operador backward shift sobre el espacio de Hilbert $H^2(\beta)$. Entonces B está bien definido y es un operador lineal y continuo. Además, si*

$$\sigma :=\; \sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+1)} \;:\; k \geq 0\right\}$$

entonces $\|B\| = \sigma$.

Demostración. Es evidente que si B está bien definido entonces es lineal. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^k \in H^2(\beta)$, entonces

$$\|Bf\|_\beta^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k+1)|^2\beta(k)^2 \;=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k+1)|^2\beta(k+1)^2 \cdot \frac{\beta(k)^2}{\beta(k+1)^2} \;\leq$$

$$\sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\beta(k)^2 \;\leq\; \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\beta(k)^2 \;=\; \sigma^2\|f\|_\beta^2.$$

De donde se sigue que B está bien definido, es continuo y $\|B\| \leq \sigma$.

Por otra parte, tomando $f_n(z) = z^{n+1}$ se tiene que $\|f_n\|_\beta = \beta(n+1)^2$ y $\|Bf_n\|_\beta = \|z^n\|_\beta = \beta(n)$. Así,

$$\|B\| \;\geq\; \sup\left\{\frac{\|Bf_n\|_\beta}{\|f_n\|_\beta} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \;=$$

$$\sup\left\{\frac{\beta(n)}{\beta(n+1)} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \;=\; \sigma,$$

lo que nos asegura que $\|B\| = \sigma$. •

El siguiente teorema nos proporcionará una condición necesaria y suficiente para la hiperciclicidad del operador B sobre $H^2(\beta)$. Dicha condición tan sólo dependerá de la sucesión β.

Teorema 3.2.3 *Sea $\beta = \{\beta(k)\,;\, k \geq 0\}$ una sucesión decreciente de números positivos tales que*

$$\sigma := \sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+1)} \;:\; k \geq 0\right\} \;<\; +\infty.$$

Entonces, $H^2(\beta)$ posee elementos hipercíclicos para el operador backward shift B si y sólo si $\lim_{k\to\infty} \beta(k) = 0$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\beta(k)$ no tiende a 0. Entonces

$$\delta := \inf\{\beta(k) \;:\; k \geq 0\} \;>\; 0. \tag{1}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, es fácil comprobar que para cada $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \in H^2(\beta)$,

$$B^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k+n) z^k.$$

Así,

$$\|B^n f\|_\beta^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k+n)|^2 \beta(k)^2 \;=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k+n)|^2 \beta(k+n)^2 \cdot \frac{\beta(k)^2}{\beta(k+n)^2} \;\leq$$

$$\left(\sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \;:\; k \geq 0\right\}\right)^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \beta(k)^2 \;\leq$$

$$\left(\sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \;:\; k \geq 0\right\}\right)^2 \|f\|_\beta^2$$

Por otra parte, para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $f_k(z) = z^{k+n}$. Entonces $B^n f_k(z) = z^k$, de donde

$$\|B^n\| \;\geq\; \sup\left\{\frac{\|B^n f_k\|_\beta}{\|f_k\|_\beta} \;:\; k \geq 0\right\} \;=\; \sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \;:\; k \geq 0\right\}.$$

Así pues, obtenemos que

$$\|B^n\| = \sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \ : \ k \geq 0\right\} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Pero por ser $\beta(k)$ decreciente y por (1), para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \ \leq \frac{\beta(0)}{\delta} \qquad \text{para todo } k \geq 0.$$

Luego,

$$\|B^n\| \ \leq \ \frac{\beta(0)}{\delta}.$$

Por tanto, la órbita de cualquier función $f(z) \in H^2(\beta)$, $\{B^n f \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado. En consecuencia ninguna función de $H^2(\beta)$ puede ser B-hipercíclica, pues de otro modo tendríamos un conjunto denso y acotado dentro de un Hilbert, de lo que se deduce que el espacio total sería acotado, y el único Hilbert acotado es el espacio trivial.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\beta(k)$ tiende a 0. Veamos que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.1.6. Para ello definimos el operador forward shift U sobre $H^2(\beta)$ de la siguiente forma: Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^k \in H^2(\beta)$, entonces

$$Uf(z) : = \ \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^{k+1}.$$

Tenemos que probar que existe un subconjunto $\mathcal{D}$ de $H^2(\beta)$ denso, tal que:

$$B \text{ converge puntualmente a 0 en } \mathcal{D}, \tag{3}$$

$$U \text{ converge puntualmente a 0 en } \mathcal{D}, \tag{4}$$

$$B \circ U \ = \ Id \text{ en } H^2(\beta). \tag{5}$$

Tomemos como $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los polinomios. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^k \in H^2(\beta)$. Consideremos la siguiente sucesión de polinomios

$$f_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k)z^k \qquad (N \geq 1).$$

Como $f - f_N = \sum_{k=N}^{\infty} \hat{f}(k) z^k$, se tiene que

$$\|f - f_N\|_\beta^2 \;=\; \sum_{k=N}^{\infty} \hat{f}(k)^2 \beta(k)^2.$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)^2 \beta(k)^2 \;=\; \|f\|_\beta^2 \;<\; +\infty,$$

y con ello

$$\lim_{N \to \infty} \|f - f_N\|_\beta^2 \;=\; 0.$$

Por tanto tenemos probada la densidad del conjunto $\mathcal{D}$ en $H^2(\beta)$.

En segundo lugar, el operador U es claramente lineal. Veamos que también es continuo. Dada $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \in H^2(\beta)$,

$$\|Uf\|_\beta^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \beta(k+1)^2 \;=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \beta(k)^2 \cdot \frac{\beta(k+1)^2}{\beta(k)^2} \;\leq$$

$$\left(\sup \left\{ \frac{\beta(k+1)}{\beta(k)} \;:\; k \geq 0 \right\} \right)^2 \|f\|_\beta^2.$$

Por otra parte, si para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $f_k(z) = z^k$, entonces $Uf_k = z^{k+1}$; y de manera análoga al cálculo de $\|B^n\|$, obtenemos que

$$\|U\| \;=\; \sup \left\{ \frac{\beta(k+1)}{\beta(k)} \;:\; k \geq 0 \right\}.$$

Dado que la sucesión $\{\beta(k)\}_{k \geq 0}$ es decreciente, podemos asegurar que $\|U\| \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se comprueba fácilmente que $U^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^{k+n}$, y por tanto

$$\|U^n f\|_\beta^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \beta(k+n)^2.$$

Si f es un polinomio, entonces la suma anterior es finita y, puesto que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} \beta(k+n) = 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|U^n f\|_\beta = 0,$$

lo que nos lleva a (4).

En tercer lugar, si f es un polinomio, entonces existe algún número $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{f}(k) = 0$ para todo $k \geq k_0$. De donde es inmediato que

$$B^n f \;=\; 0 \qquad \text{para todo } n \geq k_0,$$

es decir, conseguimos (3).

Por último, si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \in H^2(\beta)$,

$$(B \circ U)\,(f(z)) \;=\; B\left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^{k+1}\right) \;=$$

$$B\left(0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k-1) z^k\right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \;=\; f(z).$$

En consecuencia, también tenemos (5).

Por (3), (4) y (5) basta aplicar el Teorema 3.1.6 para obtener la hiperciclicidad del operador backward shift B en $H^2(\beta)$. •

Nota 3.2.4 *Podríamos generalizar una de las implicaciones de este último resultado (aquélla en la que no es necesaria la monotonía de la sucesión) al caso de series bilaterales.*

Sea $\beta = \{\beta(k) \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ *una sucesión bilateral de números positivos tal que:*

(1) $\sigma_1 := \sup\left\{\dfrac{\beta(k+1)}{\beta(k)} \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} < +\infty$

(2) $\sigma_2 := \sup\left\{\dfrac{\beta(k)}{\beta(k+1)} \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} < +\infty$

Sea $L^2(\beta)$, el correspondiente espacio de las series formales de Laurent. Redefinamos adecuada y naturalmente los operadores forward shift y backward shift sobre el espacio $L^2(\beta)$. Sea $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)z^k \in L^2(\beta)$, entonces

$$Bf(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k+1)z^k$$

y

$$Uf(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)z^{k+1}.$$

Se comprueba fácilmente, mediante un cálculo análogo al realizado en el Teorema 3.2.2, que estos operadores son lineales y continuos y que

$$\|B\|_{L^2(\beta)} = \sigma_2$$

y

$$\|U\|_{L^2(\beta)} = \sigma_1.$$

En estas condiciones, aplicando el Teorema 3.1.6 como se ha hecho en la demostración del Teorema 3.2.3, se prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.2.5 *Sea $\beta = \{\beta(k); k \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión bilateral de números positivos tal que:*

(a) $\sigma_1 := \sup \left\{ \dfrac{\beta(k+1)}{\beta(k)} \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\} < +\infty.$

(b) $\sigma_2 := \sup \left\{ \dfrac{\beta(k)}{\beta(k+1)} \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\} < +\infty.$

Entonces si $\lim_{k \to +\infty} \beta(k) = 0$ (resp. $\lim_{k \to -\infty} \beta(k) = 0$), $L^2(\beta)$ posee elementos hipercíclicos respecto del operador backward shift B (resp. forward shift U).

3.3 El criterio de Hiperciclicidad.

Diversos autores (ver, por ejemplo, [GE1], [GoS], [An2], [Ber]) han ido mejorando el resultado de Gethner y Shapiro y de Kitai enunciado como Teorema 3.1.6, aunque siempre manteniendo una base común. Enunciamos a continuación la forma más débil de este criterio debida a Bès y Peris [BeP].

Teorema 3.3.1 (Criterio de Hiperciclicidad) *Sea X un F-espacio separable y T un operador lineal y continuo en X. Supongamos que existen dos subconjuntos densos X_0 e Y_0 en X, una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos y aplicaciones (que pueden ser no lineales y discontinuas) $S_{n_k} : Y_0 \longrightarrow X$ tales que:*

(i) $T^{n_k} \longrightarrow 0$ *puntualmente en* X_0.

(ii) $S_{n_k} \longrightarrow 0$ *puntualmente en* Y_0.

(iii) $T^{n_k} \circ S_{n_k} \longrightarrow Id_{Y_0}$ *puntualmente en* Y_0.

Entonces T es hipercíclico.

Si un operador T cumple las hipótesis del teorema anterior, se dice que satisface el criterio de hiperciclicidad (para $\{n_k\}$).

Trivialmente se tiene que si T cumple el Criterio de Hiperciclicidad, entonces T es hipercíclico. En cuanto al recíproco, podemos asegurar lo siguiente. En 1991 Salas [Sa1, Remark 2(b)] y D. A. Herrero [He1] han proporcionado ejemplos de operadores en espacios de Hilbert que son hipercíclicos pero que no satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad para la sucesión completa, es decir, $n_k = k$. Sin embargo, no se conocen ejemplos para el Criterio de Hiperciclicidad en su forma general.

En 1999 Bès y Peris [BeP] plantean el siguiente problema.

> *Si T es un operador hipercíclico sobre un espacio de Hilbert (o sobre un espacio de Banach), ¿satisface T el Criterio de Hiperciclicidad?*

En el mismo trabajo [BeP, Theorem 2.14] consiguen probar que la respuesta es afirmativa para operadores sobre espacios de Fréchet que sean caóticos, es decir, hipercíclicos y con un conjunto denso de puntos periódicos. Además relacionan dicha cuestión con otro problema clásico en hiperciclicidad y del cual hablaremos en el Capítulo siguiente.

Chapter 4

Hiperciclicidad de operadores weighted shifts en espacios de Hilbert

En el Capítulo anterior hemos estudiado un criterio suficiente sobre hiperciclicidad de un operador T debido a Gethner y Shapiro, y como consecuencia hemos deducido los clásicos teoremas de Birkhoff y MacLane. Gracias a este criterio también se obtenían condiciones suficientes para la hiperciclicidad de operadores backward shift entre espacios de Hilbert de tipo "Bergman". En este Capítulo veremos cómo se puede cerrar de manera positiva el resultado de Gethner y Shapiro para weighted backward shifts. De hecho, esto no será más que una consecuencia del estudio de la hiperciclicidad de dichos operadores en espacios de Hilbert generales. Dicho estudio será relacionado (Secciones 3 y 4) con algunos problemas clásicos en hiperciclicidad.

A partir de ahora vamos a trabajar con espacios de Hilbert separables y de dimensión infinita. Recordemos que, en el marco de la hiperciclicidad, estas últimas condiciones son mínimas.

4.1 Resultados preliminares.

Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert separables y de dimensión infinita. Se define la suma directa de ambos espacios, y la notaremos por $H = H_1 \oplus H_2$, como

$$H = H_1 \oplus H_2 := \{(x_1, x_2) : x_j \in H_j \quad j = 1, 2\}.$$

Es fácil comprobar que este nuevo espacio es de Hilbert si lo dotamos de la siguiente norma

$$\|(x_1, x_2)\|_H = (\|x_1\|_{H_1} + \|x_2\|_{H_2})^{1/2}.$$

Análogamente, si tenemos dos operadores $T_j : H_j \longrightarrow H_j$ con $j = 1, 2$, se define la suma directa de ambos, y la notaremos por $T = T_1 \oplus T_2$, como

$$\begin{array}{rccc} T = T_1 \oplus T_2 : & H_1 \oplus H_2 & \longrightarrow & H_1 \oplus H_2 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (T_1x_1, T_2x_2). \end{array}$$

Claramente la continuidad y linealidad de T_1 y T_2 se transmiten a $T_1 \oplus T_2$. Así, $T_1 \oplus T_2$ es un operador en $H_1 \oplus H_2$. Trasladándonos al marco de la hiperciclicidad, la primera pregunta que nos surge es si existe alguna relación entre la hiperciclicidad de T_1, T_2 y $T_1 \oplus T_2$. Como nos muestra la siguiente proposición, se tiene que la hiperciclicidad de $T_1 \oplus T_2$ implica la de T_1 y T_2.

Proposición 4.1.1 *Si $x = (x_1, x_2)$ es un elemento hipercíclico para el operador $T = T_1 \oplus T_2$, entonces cada elemento x_j, con $j = 1, 2$, es T_j-hipercíclico.*

Demostración. Sea $j = 1, 2$. Vamos a probar que la órbita de x_j respecto de T_j es densa en H_j, es decir, dado $y_j \in H_j$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural N_j, tal que $\|T_j^{N_j} x_j - y_j\|_{H_j} < \varepsilon$.

Sea $y_1 \in H_1$, $y_2 \in H_2$ y $\varepsilon > 0$. Como x es hipercíclico para T y $T^k x = (T_1^k x_1, T_2^k x_2)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|(T_1^N x_1, T_2^N x_2) - (y_1, y_2)\|_H < \varepsilon,$$

y teniendo en cuenta la definición de norma en H,

$$\|T_j^N x_j - y_j\|_{H_j} < \varepsilon \qquad j = 1, 2.$$

Así, x_1 y x_2 son T_1 y T_2-hipercíclicos respectivamente. •

Sin embargo el recíproco no es cierto en general. En 1991, Salas [Sa1] proporcionó un ejemplo de un operador T tal que tanto él como su adjunto T^* son hipercíclicos. Además, a partir de un resultado no publicado de Deddens (ver [HeW]) se tiene que su suma $T \oplus T^*$ no es hipercíclica. Es claro que, de esta manera, se consiguen dos operadores T_1 y T_2 hipercíclicos con $T_1 \oplus T_2$ no hipercíclico y $T_1 \neq T_2$. En 1992 Herrero [He2] plantea, entre otros, el siguiente problema.

Si T es hipercíclico, ¿es $T \oplus T$ hipercíclico?

En 1995, Salas [Sa2] resuelve afirmativamente esta cuestión para el caso de los operadores bilateral forward and backward weighted shifts y los operadores unilateral weighted backward shifts. Recogemos sus resultados en la Sección siguiente.

4.2 Weighted Shifts.

Recordemos en primer lugar que sobre el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{Z})$, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es su base canónica, se dice que un operador T es del tipo bilateral weighted forward shift (o más brevemente bilateral weighted shift) si verifica $Te_n = a_n e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde la sucesión de pesos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto acotado de $\mathbb{C}$. Observemos también que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los pesos son reales y positivos.

El primer teorema es básico para el desarrollo resto de la Sección, ya que nos caracterizará la hiperciclicidad de dichos operadores. Dado un operador T bilateral weighted shift que es hipercíclico, podemos obtener condiciones sobre los pesos con sólo observar la acción de las potencias de T sobre el subespacio generado por $\{e_k : a \leq k \leq b\}$. Por otro lado, si las condiciones sobre los pesos se satisfacen, se pueden obtener elementos hipercíclicos construyéndolos "pieza a pieza". Damos primero un resultado auxiliar.

Lema 4.2.1 *Sea T un operador bilateral weighted shift. Si dados $\varepsilon > 0$, $q \in \mathbb{N}$ y dos vectores*

$$g, h \in span\{e_j : |j| \leq q\}$$

existe un número $n \in \mathbb{N}$ y un vector

$$u \in span\{e_j : |j| \leq q+n\}$$

tales que:

(i) $\|u\| < \varepsilon$,

(ii) $\|T^n u - g\| < \varepsilon$,

(iii) $\|T^n h\| < \varepsilon$,

entonces el operador T es hipercíclico.

Demostración. Vamos a construir un vector f que sea hipercíclico para T.

Veamos, en primer lugar, que $\|T\| > 1$. Supongamos que $\|T\| \leq 1$; entonces para n suficientemente grande tenemos, por (i) y (ii),

$$\varepsilon > \|T^n u - g\| \geq |\|T^n u\| - \|g\|| \geq \|g\| - \|T^n u\| \geq$$

$$\|g\| - \|T\|^n \|u\| > \|g\| - \|T\|^n \cdot \varepsilon$$

Luego $\|g\| < \varepsilon\,(1 + \|T\|^n) \leq 2\varepsilon$, y esto es válido para cualquier $\varepsilon > 0$. Así, $\|g\| = 0$, lo que lleva a contradicción, y por tanto debe ser $\|T\| > 1$.

Sea $G = \left\{ g_k = \sum_{|j| \leq k} \langle g_k, e_j \rangle e_j : k \in \mathbb{N} \right\}$ un subconjunto denso de $\ell_2(\mathbb{Z})$ (por ejemplo, aquellos elementos de $\ell_2(\mathbb{Z})$ con una cantidad finita de coeficientes no nulos y racionales).

Vamos a encontrar f de la forma

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

donde $\lim\limits_{k\to\infty} \|T^{n_k} f_k - g_k\| = 0$ y $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente a especificar.

Procedamos por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$.

Sea $n_1 = 0 \quad y \quad f_1 = g_1$.

Supongamos que para $1 \leq j \leq k$ tenemos elegidos los números n_j, tales que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, y los vectores

$$f_j \in span\{e_i \,:\, |i| \leq 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_j\}. \tag{1}$$

Apliquemos la hipótesis del lema con los siguientes valores:

$$\varepsilon = M^{-n_k} \cdot 2^{-k-1} \qquad \text{donde } M = \|T\|,$$

$$g = g_{k+1}$$

y

$$h = f_1 + \cdots + f_k.$$

Es evidente por (1), que $h \in span\{e_j \,:\, |j| \leq 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k\}$; y como la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, también se tiene que

$$g = g_{k+1} \in span\{e_j \,:\, |j| \leq k+1\} \subseteq span\{e_j \,:\, |j| \leq 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k\}.$$

Elegimos, pues, $q = 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Obtenemos, de esta forma, un número $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (con $n > n_k$) y un vector $u \in span\{e_j\,;\, |j| \leq q+n\}$. Tomamos $n_{k+1} = n$ y $f_{k+1} = u$. De la tesis del lema se sigue que

$$\|f_{k+1}\| \;<\; M^{-n_k} \cdot 2^{-k-1}, \tag{2}$$

$$\|T^{n_{k+1}} f_{k+1} - g_{k+1}\| \;<\; M^{-n_k} \cdot 2^{-k-1} \tag{3}$$

y

$$\left\| T^{n_{k+1}} \left(\sum_{j=1}^{k} f_j \right) \right\| \;<\; M^{-n_k} \cdot 2^{-k-1}. \tag{4}$$

Veamos, por último, que $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es hipercíclico. Como el conjunto G es denso en H, basta probar que

$$\lim_{k\to\infty} \|T^{n_k} f - g_k\| \; = \; 0. \tag{5}$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Por ser $M = \|T\| > 1$ y por (2), (3) y (4) se tiene que

$$\left\| T^{n_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) - g_k \right\| \; \leq$$

$$\left\| T^{n_k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j \right) \right\| + \|T^{n_k} f_k - g_k\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|T^{n_k} f_j\| \; \leq$$

$$M^{-n_{k-1}} 2^{-k} + M^{-n_{k-1}} 2^{-k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} M^{n_k} \|f_j\| \; \leq$$

$$M^{-n_{k-1}} 2^{-k+1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} M^{n_k - n_{j-1}} 2^{-j} \; \leq$$

$$2^{-k+1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \; = \; 2^{-k+1} + 2^{-k} \; \leq \; 2^{-k+2}.$$

Luego tenemos (5) y con ello la demostración del Lema. •

Teorema 4.2.2 *Sea T un operador bilateral (forward) weighted shift con sucesión de pesos positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces T es hipercíclico si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $q \in \mathbb{N}$ existe un número natural $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que para todo $|j| \leq q$ se verifica*

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j} < \varepsilon \qquad y \qquad \prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > 1/\varepsilon.$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que T es hipercíclico y sea $\mathcal{U}$ el conjunto de elementos hipercíclicos para T. Por el Teorema 1.6.3 sabemos que $\mathcal{U}$ es un conjunto denso. Fijemos $\varepsilon > 0$, $q \in \mathbb{N}$. Sea $\delta \in (0,1)$ tal que $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$. Entonces existe un elemento x de $\mathcal{U}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{|j|\leq q} e_j \right\| \; < \; \delta. \tag{1}$$

Pero si $x \in \mathcal{U}$, también $T^{2q+1}x \in \mathcal{U}$. Así, podemos encontrar un número $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, con $n > 2q$, de forma que

$$\left\| T^n x - \sum_{|j|\le q} e_j \right\| < \delta. \tag{2}$$

Por (1), y trabajando en término de los coeficientes de x obtenemos

$$\delta^2 > \left\| x - \sum_{|j|\le q} e_j \right\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle x, e_j\rangle e_j - \sum_{|j|\le q} e_j \right\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{|j|\le q} \left(\langle x, e_j\rangle - 1\right) e_j + \sum_{|j|>q} \langle x, e_j\rangle \right\|^2 =$$

$$\sum_{|j|\le q} |\langle x, e_j\rangle - 1|^2 + \sum_{|j|>q} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Luego si $|j| \le q$,

$$||\langle x, e_j\rangle| - 1| \le |\langle x, e_j\rangle - 1| < \delta.$$

De donde

$$|\langle x, e_j\rangle| > 1 - \delta \qquad (|j| \le q).$$

Además, también tenemos

$$|\langle x, e_j\rangle| < \delta \qquad (|j| > q).$$

Por otra parte, como podemos escribir $x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle x, e_j\rangle e_j$, por la linealidad y continuidad de T llegamos a que

$$Tx = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \langle x, e_j\rangle e_{j+1},$$

y después de aplicar n veces el operador T

$$T^n x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} \right) \langle x, e_j\rangle e_{j+n}.$$

Fijemos j con $|j| \leq q$. En general, si $|k| \leq q$, por ser $n > 2q$ se tiene que $q < n - q \leq n + k$, luego $|n + k| > q$. Así, por (2) obtenemos

$$\delta^2 \ > \ \left\| T^n x - \sum_{|k| \leq q} e_k \right\|^2 \ =$$

$$\left\| \sum_{|k| \leq q} \left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{k+s} \right) \langle x, e_k \rangle \cdot e_{k+n} + \sum_{|k|>q} \left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{k+s} \right) \langle x, e_k \rangle \cdot e_{k+n} - \sum_{|k| \leq q} e_k \right\|^2 \ \geq$$

$$\sum_{|k| \leq q} \left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{k+s} \right)^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 \ \geq$$

$$\left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

Por tanto, si $|j| \leq q$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} \ < \ \frac{\delta}{|\langle x, e_j \rangle|} \ < \ \frac{\delta}{1 - \delta}. \tag{3}$$

Veamos que también se cumple la otra desigualdad. Observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{e_{j-n}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es también una base de H, luego podemos escribir $x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle x, e_{j-n} \rangle e_{j-n}$ y análogamente se tiene

$$T^n x \ = \ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} \right) \langle x, e_{j-n} \rangle e_j.$$

De nuevo por (2)

$$\delta^2 \ > \ \left\| T^n x - \sum_{|j| \leq q} e_j \right\|^2 \ =$$

$$\left\| \sum_{|j| \leq q} \left[\left(\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} \right) \langle x, e_{j-n} \rangle - 1 \right] e_j + \sum_{|j|>q} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} \right) \langle x, e_{j-n} \rangle \cdot e_j \right\|^2 \ \geq$$

$$\sum_{|j| \leq q} \left| \left(\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} \right) \langle x, e_{j-n} \rangle - 1 \right|^2.$$

Por consiguiente si $|j| \leq q$ se tiene que

$$\left| \left(\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} \right) \langle x, e_{j-n} \rangle - 1 \right| \; < \; \delta.$$

Pero si $|j| \leq q$, como $n > 2q$, se cumple $j - n \leq q - n < -q$ y por tanto $|j - n| > q$. Así $|\langle x, e_{j-n} \rangle| < \delta$ y

$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} \; > \; \frac{1-\delta}{|\langle x, e_{j-n} \rangle|} \; > \; \frac{1-\delta}{\delta} \qquad (|j| \leq q). \tag{4}$$

Por último, como $0 < \dfrac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$, por (3) y (4) tenemos

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j} < \varepsilon \qquad y \qquad \prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > 1/\varepsilon \qquad \text{para } |j| \leq q.$$

Veamos el recíproco. Supongamos, pues, que se da la siguiente condición: Dado $\delta > 0$ y $q \in \mathbb{N}$ existe un número $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que para todo $|j| \leq q$ se verifica

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j} < \delta$$

y

$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > 1/\delta.$$

Para obtener la hiperciclicidad del operador T sabemos, por el Lema 4.2.1, que basta probar que para cualquier $\varepsilon > 0$, $q \in \mathbb{N}$ y $g, h \in span\{e_j \,:\, |j| \leq q\}$ existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un vector $u \in span\{e_j \,:\, |j| \leq q + n\}$ tales que

(i) $\|u\| \; < \; \varepsilon$,

(ii) $\|T^n u - g\| \; < \; \varepsilon$,

(iii) $\|T^n h\| \; < \; \varepsilon$.

Fijamos $\varepsilon > 0$, $q \in \mathbb{N}$ y $g, h \in span\{e_j : |j| \leq q\}$. Observamos que si $f = \sum_{|j|\leq q} \langle f, e_j\rangle e_j$, entonces $T^n f = \sum_{|j|\leq q} \left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j}\right) \langle f, e_j\rangle e_{j+n}$, y por tanto

$$\|T^n f\| = \left[\sum_{|j|\leq q} \left(\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j}\right)^2 |\langle f, e_j\rangle|^2\right]^{1/2} \leq$$

$$\max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} a_{j+k} : |j| \leq q\right\} \left(\sum_{|j|\leq q} |\langle f, e_j\rangle|^2\right)^{1/2} =$$

$$\max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} a_{j+k} : |j| \leq q\right\} \|f\|.$$

Así pues,

$$\|T^n f\| \leq \max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} a_{j+k} : |j| \leq q\right\} \|f\| \tag{5}$$

para todo $f \in span\{e_j : |j| \leq q\}$.

Consideremos ahora el operador T^{-1} definido sobre H como

$$T^{-1} e_n = \frac{1}{a_{n-1}} e_{n-1} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Notaremos por T^{-n} al operador T^{-1} compuesto n veces consigo mismo. Este operador es, evidentemente, lineal, aunque ya no tiene por qué ser acotado.

En estas condiciones, análogamente al caso del operador T^n, dado un vector f de la forma $f = \sum_{|j|\leq q} \langle f, e_j\rangle e_j$, se tiene que

$$\|T^{-n} f\| \leq \max\left\{\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j-k}\right)^{-1} : |j| \leq q\right\} \|f\|. \tag{6}$$

Aplicamos la hipótesis tomando $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\max\{\|g\|, \|h\|\} + 1}$ y $q \in \mathbb{N}$. Entonces existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2q$ tal que para todo $|j| \leq q$ se verifica

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j} < \delta \qquad y \qquad \prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > 1/\delta. \tag{7}$$

Considerando $u = T^{-n}g$, es claro que $u \in span\{e_j : |j| \leq q+n\}$. Veamos que las tres condiciones de la hipótesis del Lema 4.2.1 se satisfacen.

La condición (ii) se tiene trivialmente por la elección de u. Por (6) y (7),

$$\|u\| = \|T^{-n}g\| \leq \delta\|g\| < \varepsilon$$

y por tanto tenemos (i). Por último, para obtener (iii), basta considerar en (5) $f = h$. Así,

$$\|T^n h\| \leq \delta\|h\| < \varepsilon.$$

Por tanto, en virtud del Lema 4.2.1, T es hipercíclico; lo que concluye la demostración del Teorema. •

Notas 4.2.3

1. *Del mismo modo que se consigue caracterizar la hiperciclicidad de los operadores bilateral weighted (forward) shifts, podemos caracterizar la hiperciclicidad de los operadores bilateral weighted backward shifts. Basta observar que existe una equivalencia unitaria con los bilateral weighted (forward) shifts. De hecho, en el caso de un operador bilateral weighted backward shift con pesos* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$*, la condición necesaria y suficiente que obtenemos para su hiperciclicidad es la del Teorema 4.2.2 suponiendo que los pesos son* $\{a_{-k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$*, es decir, cambia el orden de las desigualdades.*

2. *Aunque el Teorema 4.2.2 está enunciado tan sólo en el marco del espacio* $\ell_2(\mathbb{Z})$*, siguiendo de este modo la prueba original dada por Salas en 1995 (ver [Sa2, Theorem 2.1]), es claro que el proceso utilizado sigue siendo válido si consideramos los espacios* $\ell_p(\mathbb{Z})$ $(1 \leq p < \infty)$ *ó* $c_0(\mathbb{Z})$.

Con vistas a mantener una simetría entre los enunciados y gracias a las observaciones anteriores, podemos reescribir el Teorema 4.2.2 como sigue.

Teorema 4.2.4 *Sea T un operador bilateral weighted forward shift (resp. backward) sobre $\ell_p(\mathbb{Z})$ $\quad(1 \leq p < \infty)$ ó $c_0(\mathbb{Z})$. Entonces T es hipercíclico si y sólo si existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos tal que para todo $j \in \mathbb{Z}$*

$$\prod_{n=1}^{n_k} a_{j+n} \longrightarrow 0 \ (resp. \quad \infty) \quad (k \to \infty)$$

y

$$\prod_{n=1}^{n_k} a_{j-n} \longrightarrow \infty \ (resp. \quad 0) \quad (k \to \infty).$$

Corolario 4.2.5 *Existe un operador hipercíclico T cuyo adjunto T^* es también un operador hipercíclico.*

Demostración. Se sabe (ver Proposición 1.5.11 y Nota 4.2.3) que si T es un operador backward (resp. forward) weighted shift, su adjunto T^* es un operador forward (resp. backward) weighted shift. Así basta construir una sucesión $\{a_k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ de modo que $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{b_k = a_{-k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfagan las condiciones del Teorema 4.2.4. •

Como comentamos en la Sección anterior, el resultado expuesto en este último corolario ya fue obtenido por el propio Salas en 1991 (ver [Sa1]). El operador T proporcionado entonces como ejemplo era un operador de desplazamiento en el sentido de que casi existía una sucesión de pesos positivos, en concreto, $a_n = a_{-n}$ salvo en una sucesión creciente (y muy rápidamente) $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Observemos que estos ejemplos no son mejorables hasta completar la sucesión simétrica para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que ningún operador bilateral weighted shift hipercíclico puede tener pesos simétricos.

Corolario 4.2.6 *Si T es un operador bilateral weighted shift tal que su sucesión de pesos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es simétrica, es decir, $a_n = a_{-n}$, entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. Veamos el caso en que T es un operador bilateral weighted forward shift. El caso backward es análogo. Supongamos que $\varepsilon > 0$ es tal que $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} < \varepsilon$ y $a_{-1} \cdots a_{-n} > 1/\varepsilon$, es decir, tal que se tengan las dos desigualdades del Teorema 4.2.2 para $j = 0$. Entonces, como $a_k = a_{-k}$, se tiene que

$$\|T\| \geq a_n = \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_1}{a_{n-1} \cdots a_1} = \frac{a_{-n} \cdots a_{-1}}{a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \cdot a_0 > \frac{a_0}{\varepsilon^2}.$$

Luego $\varepsilon^2 > \dfrac{a_0}{\|T\|}$ y no puede ser arbitrariamente pequeño. Así por el Teorema 4.2.2, T no puede ser hipercíclico. •

Los argumentos seguidos para probar el Teorema 4.2.2, se pueden adaptar al caso de una suma directa de un número finito de operadores bilateral weighted shift no necesariamente iguales. Veamos el caso forward.

Teorema 4.2.7 *Sea $m \in \mathbb{N}$, y sean T_i con $1 \leq i \leq m$ operadores bilateral weighted (forward) shifts (en $\ell_2(\mathbb{Z})$) de modo que $T_i e_n = a_{n,i} e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces el operador suma directa $T = \bigoplus_{i=1}^{m} T_i$ es hipercíclico si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $q \in \mathbb{N}$ existe un número $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para todo $|j| \leq q$ se tiene que*

$$\max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} a_{j+k,i} \;:\; 1 \leq i \leq m\right\} < \varepsilon$$

y

$$\min\left\{\prod_{k=1}^{n} a_{j-k,i} \;:\; 1 \leq i \leq m\right\} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demostración. Por simplicidad de notación supondremos que $m = 2$.

Supongamos primero que $T = T_1 \oplus T_2$ es hipercíclico. Fijamos $q \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Consideramos $\delta > 0$ tal que $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$. Del mismo modo que en la demostración del Teorema 4.2.2, podemos encontrar un elemento $x = (x_1, x_2) \in H_1 \oplus H_2$ hipercíclico respecto de T tal que,

$$\left\| x - \left(\sum_{|j| \leq q} e_j, \sum_{|k| \leq q} e_k \right) \right\| \;<\; \delta.$$

Y teniendo en cuenta que $\|(y_1, y_2)\| = \sqrt{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2}$ llegaríamos a que:

(1)

$$\text{Si } i = 1,2 \qquad \begin{cases} |\langle x_i, e_j\rangle| > 1-\delta & \text{si } |j| \leq q \\ |\langle x_i, e_j\rangle| & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(2) Existe un número suficientemente grande $n \in \mathbb{N}$, con $n > 2q$, tal que

$$\left\| T^n x - \left(\sum_{|j|\leq q} e_j, \sum_{|k|\leq q} e_k \right) \right\| < \delta.$$

Basta ahora operar igual que en el Teorema 4.2.2 para obtener que, para $i = 1,2$ y $|j| \leq q$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s,i} < \frac{\delta}{|\langle x_i, e_j\rangle|}$$

y

$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s,i} > \frac{1-\delta}{|\langle x_i, e_{j-n}\rangle|}.$$

Y usando las desigualdades de (1) conseguimos

$$\max\left\{ \prod_{k=0}^{n-1} a_{j+k,i} \,:\, i = 1,2 \right\} < \varepsilon$$

y

$$\min\left\{ \prod_{k=1}^{n} a_{j-k,i} \,:\, i = 1,2 \right\} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Para ver el recíproco, debemos probar un lema equivalente al Lema 4.2.1. Lo enunciamos para el caso general, aunque veremos la demostración para $m = 2$.

Lema 4.2.8 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $T = \bigoplus_{i=1}^{m} T_i$ con T_i, $1 \leq i \leq m$, operadores bilateral weighted (forward) shift (en $\ell_2(\mathbb{Z})$). Si para cada $\varepsilon > 0$, cada $q \in \mathbb{N}$ y cada dos vectores*

$$g, h \in span\{(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) \,:\, |j_1|, \ldots, |j_m| \leq q\}$$

existe un número $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande y existe un vector*

$$u \;\in\; span\{(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) \,:\, |j_1|, \dots, |j_m| \leq n + q\}$$

de manera que:

(i) $\|u\| \;<\; \varepsilon,$

(ii) $\|T^n u - g\| \;<\; \varepsilon,$

(iii) $\|T^n h\| \;<\; \varepsilon,$

entonces T *es hipercíclico.*

Demostración. En primer lugar, sea $G = \{(g_j, g_k) \;:\; j,k \in \mathbb{N}\}$ donde $\left\{g_j = \sum_{|s|\leq j} \langle g_j, e_s\rangle e_s \;:\; j \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en $\ell_2(\mathbb{Z})$. Se puede conseguir una enumeración de los elementos de G, $\{G_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, de forma que $G_n \in span\{(e_j, e_k) \,:\, |j|, |k| \leq n\}$. Por ejemplo, basta considerar:

$$\begin{array}{lll} G_1 = (g_1, g_1) & & \\ G_2 = (g_1, g_2) & G_3 = (g_2, g_1) & \\ G_4 = (g_1, g_3) & G_5 = (g_2, g_2) & G_6 = (g_3, g_1) \\ \dots & & \end{array}$$

es decir, ordenamos en primer lugar los pares según la suma de sus subíndices, y dentro de los que suman igual ordenamos según el subíndice de la primera componente del par.

Hacemos ahora una construcción análoga a la realizada en el Lema 4.2.1, es decir, buscamos un vector $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|T^{n_k} f_k - G_k\| \;=\; 0$, donde $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente a elegir.

De nuevo las condiciones (i) y (iii) implican que $\|T\| > 1$.

Procedamos por inducción sobre k. Tomamos $n_1 = 0$ *y* $f_1 = G_1$ y suponemos construidos $n_1, \dots, n_k$ y $f_1, \dots, f_k$ tales que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y $f_j \in span\{(e_s, e_t) \,:\, |s|, |t| \leq 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_j\}$.

Sean:

$$\varepsilon = M^{-n_k} 2^{-k-1} \qquad \text{donde } M = \|T\| > 1,$$

$$q = 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

$$g = G_{k+1} \in span\{(e_s, e_t) \,:\, |s|, |t| \le k+1\}$$

y

$$h \;=\; f_1 + \cdots + f_k \;\in\; span\{(e_s, e_t) \,:\, |s|, |t| \le 2 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k\}.$$

Es claro que $g, h \in span\{(e_s, e_t) \,:\, |s|, |t| \le q\}$. Así obtenemos un número $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (con $n > n_k$) y un vector $u \in span\{(e_s, e_t) \,:\, |s|, |t| \le q + n\}$ cumpliendo (i), (ii) y (iii). Basta tomar ahora $n_{k+1} = n$ y $f_{k+1} = u$.

Razonando como en la demostración del Lema 4.2.1, se sigue que el vector

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

de nuevo construido "pieza a pieza", es hipercíclico para T. •

Para completar la demostración del Teorema 4.2.7, basta aplicar el Lema 4.2.8 de manera completamente análoga a como se hizo en la demostración del caso $m = 1$ (Teorema 4.2.2). Simplemente tendremos que tener en cuenta que para

$$g = (g_1, g_2) = \left(\sum_{|j| \le q} \langle g_1, e_j \rangle e_j,\; \sum_{|k| \le q} \langle g_2, e_k \rangle e_k \right) \in span\left\{(e_j, e_k) \,:\, |j|, |k| \le q\right\},$$

ahora se verifica

$$\|T^n g\| \;\le\; \max\left\{ \prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s,i} \,:\, |j| \le q,\; i = 1, 2 \right\} \|g\|.$$

Con esto concluimos la demostración. •

Nota 4.2.9 *Resaltamos que para obtener el caso $m = 2$ ha sido fundamental dar una ordenación de G. En general, para el caso $m \geq 2$ hay que dar una ordenación de $G = \{(g_{j_1}, \ldots, g_{j_m}) : j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{N}\}$ tal que*

$$G_n \in span\,\{(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) : |j_1|, \ldots, |j_m| \leq n\}.$$

Una tal ordenación está también implícitamente considerada en el caso $m = 1$.

Observemos que con este último resultado podemos proporcionar muchos ejemplos de operadores T y S distintos entre sí e hipercíclicos tales que su suma $T \oplus S$ no es hipercíclica.

Corolario 4.2.10 *Existen operadores hipercíclicos S y T tales que $S \oplus T$ no es hipercíclico.*

Demostración. Elegimos dos sucesiones $\{a_k : k \in \mathbb{Z}\}$ y $\{b_k : k \in \mathbb{Z}\}$, de forma que cada una de ellas satisfaga la condición del Teorema 4.2.2, pero no verifiquen juntas la condición del Teorema 4.2.7. En particular, podemos construir $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de manera que $\max\left\{\prod_{k=0}^{s} a_k, \prod_{k=0}^{s} b_k\right\} > 1$ para cualquier número natural $s \in \mathbb{N}$. En estas condiciones, si S y T son los correspondientes operadores weighted shifts, basta aplicar el Teorema 4.2.7 para obtener el resultado. $\bullet$

4.3 Unilateral Backward Weighted Shifts.

En esta Sección pretendemos obtener la versión unilateral del Teorema 4.2.7. Recordemos que un operador unilateral weighted backward shift T se define como $Te_n = a_n e_{n-1}$ si $n > 0$ y por $Te_0 = 0$ si $n = 0$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es la base canónica de $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$. De nuevo podemos suponer que los pesos son positivos.

Antes de continuar debemos comentar que, así como el estudio de la hiperciclicidad de los operadores unilaterales backward weighted shift ha sido y sigue siendo de gran interés de cara a la resolución de problemas más generales, el caso de los operadores unilaterales forward weighted shifts puede ser cerrado rápidamente.

Proposición 4.3.1 *Un operador unilateral weighted forward shift (en $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$) nunca es hipercíclico.*

Demostración. Sea T el operador sobre $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$ definido por $Te_n = a_n e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Este operador, lineal y continuo, es el que llamamos weighted forward shift. Sea x un elemento arbitrario de $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$, x puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Por tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifica, por la linealidad y continuidad de T,

$$T^m x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{s=0}^{m-1} a_{k+s} \right) \langle x, e_k \rangle e_{k+m}.$$

Así, fijado un número natural $n \in \mathbb{N}$, para cada $m \geq n$, $T^m x$ es de la forma

$$T^m x = \sum_{k \geq m} \alpha_k e_k,$$

de donde la proyección ortogonal de la órbita de x sobre $span\{e_k : k < n\}$ posee, a lo sumo, n elementos.

Ahora bien, supongamos que x es T-hipercíclico y llamemos $M = span\{e_k : k < n\}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y todo $y \in M$ existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|T^m x - y\| < \varepsilon$. Y considerando las proyecciones ortogonales sobre M y $M^\perp$, obtenemos

$$\|proy_M(T^m x) - y\| \leq \|T^m x - y\| < \varepsilon.$$

Por tanto se verifica que la proyección ortogonal de la órbita de x es densa en M, pero ya vimos que esta proyección posee a lo sumo n elementos, luego no puede ser densa en M. De donde T no puede ser hipercíclico. •

Proposición 4.3.2 *Sea T un operador hipercíclico en un espacio de Hilbert H. Supongamos que B es un subespacio de H que es invariante por el adjunto T^* de T. Entonces la compresión de T a B es hipercíclica en H.*

Demostración. Recordemos que dado un espacio de Hilbert H y un subespacio B de él, la compresión de un operador T en H a B se define como la restricción del operador PTP a B, donde P es la proyección ortogonal en B.

Supongamos que B es invariante por T^*. Sea $x \in B^{\perp}$. Tenemos que para todo $b \in B$

$$\langle Tx, b\rangle \;=\; \langle x, T^*b\rangle \;=\; 0.$$

Luego $Tx \in B^{\perp}$ y $B^{\perp}$ es invariante por T. En otras palabras

$$PT(I-P) \;\equiv\; 0$$

y

$$(I-P)T(I-P) \;\equiv\; T(I-P).$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$T^n \;=\; (PTP)^n + \sum_{k=1}^{n}((I-P)T)^k(PT)^{n-k}P + ((I-P)T(I-P))^n.$$

Veámoslo por inducción en n.

Caso $n = 1$:

$$PTP + (I-P)TP + (I-P)T(I-P) \;=$$

$$=\; TP + T(I-P) \;=\; T(P + I - P) \;=\; T$$

Supongamos el caso n. Veamos $n+1$. Se tiene

- $(PTP)^{n+1} \;=\; PT(PTP)^n \qquad$ (porque $P^2 = P$).
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}((I-P)T)^k(PT)^{n+1-k}P =$

  $\displaystyle(I-P)T(PT)^nP + \sum_{k=2}^{n+1}((I-P)T)^k(PT)^{n+1-k}P =$

$$\sum_{k=1}^{n}((I-P)T)^{k+1}(PT)^{n-k}P+(I-P)T(PT)^{n}P=$$

$$(I-P)T\left(\sum_{k=1}^{n}((I-P)T)^{k}(PT)^{n-k}P\right)+(I-P)T(PT)^{n}P.$$

- $((I-P)T(I-P))^{n+1} \;=\; (I-P)T((I-P)T(I-P))^{n}.$

Por otra parte, en la fórmula de inducción es claro que de los tres sumandos, el primero siempre da un elemento de B y los otros dos dan un elemento de $B^{\perp}$. Luego por la linealidad y por ser $B^{\perp}$ invariante por T, se cumple

$$T^{n+1} \;=\; T\left((PTP)^{n}+\sum_{k=1}^{n}((I-P)T)^{k}(PT)^{n-k}P+((I-P)T(I-P))^{n}\right) \;=$$

$$PT(PTP)^{n}+(I-P)T(PTP)^{n}+$$

$$+(I-P)T\left(\sum_{k=1}^{n}((I-P)T)^{k}(PT)^{n-k}P\right)+(I-P)T((I-P)T(I-P))^{n}.$$

Basta observar ahora los tres puntos anteriores para obtener trivialmente el caso $n+1$. Es más, según la observación hecha antes, obtenemos que $PT^{n}=(PTP)^{n}$.

Fijemos $x\in H$ y $b\in B$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|T^{n}x-b\| \;&=\; \|PT^{n}x+(I-P)T^{n}x-b\| \;=\\ &\left(\|PT^{n}x-b\|^{2}+\|(I-P)T^{n}x\|^{2}\right)^{1/2} \;\geq\\ &\|(PTP)^{n}x-b\| \;=\; \|(PTP)^{n}Px-b\|.\end{aligned}$$

En particular si u es un elemento hipercíclico para T, obtenemos que Pu es un elemento hipercíclico para PTP en B. •

Teorema 4.3.3 *Sea T un operador unilateral weighted backward shift con sucesión de pesos positivos $\{a_n \,:\, n\geq 0\}$. Entonces T es hipercíclico si y sólo si*

$$\sup\left\{\prod_{s=1}^{n}a_s \,:\, n\in\mathbb{N}\right\} \;=\; \infty.$$

Demostración. Consideremos S el operador bilateral weighted shift sobre $\ell_2(\mathbb{Z})$ cuyos pesos son

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Trivialmente se tiene

(a) T es la compresión a $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$ de S.

(b) Para todo $j \in \mathbb{Z}$, salvo constantes que no afectan al límite, podemos escribir

$$\prod_{s=1}^{n} b_{j-s} = \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{2} = 2^{-n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

(c) Para todo $j \in \mathbb{Z}$ y, de nuevo, salvo ciertas constantes que no influyen, tenemos que existe una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\prod_{s=1}^{n_k} b_{s+j} = \prod_{s=1}^{n_k} a_{n+j} \longrightarrow \infty \quad (k \to \infty).$$

Basta aplicar ahora el Teorema 4.2.4 y la Proposición 4.3.2 para concluir la demostración. •

Nota 4.3.4 *Del mismo modo se podría haber enunciado*

"Sean T_i, $i = 1, \cdots, m$ operadores unilateral (backward) weighted shifts con sucesiones de pesos positivos $\{a_{n,i} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\bigoplus_{i=1}^{m} T_i$ es hipercíclico si y sólo si

$$\sup\left\{\min\left\{\prod_{s=1}^{n} a_{s,i} : 1 \leq i \leq m\right\} : n \in \mathbb{N}\right\} = \infty."$$

Para terminar con la Sección damos una aplicación del Teorema 4.3.3 a los espacios de Hilbert de tipo Bergman dados en el Capítulo anterior. Sea $\beta = \{\beta(k) : k \geq 0\}$ una sucesión de números positivos tal que

$$\sup\left\{\frac{\beta(k)}{\beta(k+1)} : k \geq 0\right\} < \infty.$$

Ahora no vamos a exigir ninguna monotonía a la sucesión β. Recordemos que por $H^2(\beta)$ entendíamos el espacio de las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k$, tales que

$$\|f\|_\beta^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \beta(k)^2 \;<\; \infty.$$

Recordemos también, que el operador backward shift B se definía para cada $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \in H^2(\beta)$ como,

$$Bf(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k+1) z^k.$$

Además este operador es lineal, ya que los "pesos" $\frac{\beta(k)}{\beta(k+1)}$, están acotados.

En estas condiciones tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3.5 *Sea B un operador (weighted) backward shift como el anterior. Entonces B es hipercíclico si y sólo si $\liminf_{k\to\infty} \beta(k) = 0$.*

Demostración. Es fácil comprobar que $\{z^k\}_{k\geq 0}$ es una base ortogonal de $H^2(\beta)$, por lo tanto $\left\{e_k = \frac{z^k}{\beta(k)}\right\}_{k\geq 0}$ es una base ortonormal. Así,

$$Be_k = B\left(\frac{z^k}{\beta(k)}\right) = \frac{z^{k+1}}{\beta(k)} = \frac{\beta(k+1)}{\beta(k)} \cdot e_{k+1}$$

de donde B es un realidad un operador unilateral weighted backward shift cuya sucesión de pesos es $\left\{a_k = \frac{\beta(k+1)}{\beta(k)}\right\}_{k\geq 0}$. Aplicando ahora el Teorema 4.3.3 y teniendo en cuenta que $\prod_{s=1}^{n} a_s = \dfrac{\beta(n+1)}{\beta(1)}$, obtenemos la caracterización de la hiperciclicidad de B. •

Con este último Corolario, Salas [Sa2, Corollary 9] generaliza a cualquier sucesión β el Teorema 3.2.3 dado en el Capítulo anterior y que recogía un resultado de Gethner y Shapiro [GeS, Theorem 4.1]. Recordemos que en aquel caso, la sucesión β era decreciente.

Por último comentamos que con el estudio general de estos espacios $H^2(\beta)$ hemos resuelto la hiperciclicidad de estos operadores weighted backward shift en ciertos espacios de Hilbert clásicos. Si $\beta(k) \equiv 1$ entonces se tiene el espacio de Hardy para $p = 2$:

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{D}) &= \left\{ f(z) \in H(\mathbb{D}) \,:\, \sup \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \,:\, 0 < r < 1 \right\} < \infty \right\} \\ &= \left\{ f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \,:\, \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Si $\beta(k) = (k+1)^{-1/2}$ se obtiene el espacio de Bergman para $p = 2$

$$\begin{aligned} A^2(\mathbb{D}) &= \left\{ f(z) \in H(\mathbb{D}) \,:\, \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi} < \infty \right\} \\ &= \left\{ f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \,:\, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j+1} < \infty \right\}; \end{aligned}$$

donde $dA(z)$ es la medida (de superficie) de Lebesgue en el disco unidad $\mathbb{D}$. Por último, si $\beta(k) = (k+1)^{1/2}$ se consigue el espacio de Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ f(z) \in H(\mathbb{D}) \,:\, \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi} < \infty \right\} \\ &= \left\{ f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \,:\, \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 (j+1) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Para un estudio más profundo de las propiedades de estos espacios ver por ejemplo [CMC].

4.4 Resultados finales.

En la segunda Sección de este Capítulo dejamos planteada la siguiente cuestión.

Si T es hipercíclico, ¿es $T \oplus T$ hipercíclico?

Los resultados dados en las dos Secciones anteriores permitieron a Salas [Sa2, Corollary 2.10] dar una respuesta afirmativa cuando T es un operador shift.

Teorema 4.4.1 *Sea T un operador weighted shift hipercíclico. Entonces $T \oplus T \oplus \cdots \oplus T$ es también hipercíclico.*

Demostración. Al sumar siempre el mismo operador, es inmediato que las condiciones que nos dan los Teoremas 4.2.4 y 4.2.7, en el caso bilateral, y el Teorema 4.3.3 y la Nota 4.3.4, en el caso unilateral, coinciden, de donde se sigue, trivialmente, el resultado. •

Por otra parte, la respuesta al problema general es claramente positiva si T satisface el Criterio de Hiperciclicidad (Capítulo 3, Sección 3) porque en el espacio suma directa, la convergencia puntual se traduce en convergencia coordenada a coordenada. De hecho, en 1999 Bés y Peris [BeP, Theorem 2.3] prueban que dicha condición es necesaria.

Teorema 4.4.2 *Sea T un operador lineal y continuo sobre un F-espacio separable X. Entonces son equivalentes:*

(i) El operador $T \oplus T$ es hipercíclico (en $X \oplus X$).

(ii) T satisface el Criterio de Hiperciclicidad.

(iii) T es hereditariamente hipercíclico respecto de cierta sucesión $\{n_k\}$.

Este resultado muestra que el problema anteriormente planteado es equivalente a preguntarse si todo operador hipercíclico es hereditariamente hipercíclico respecto de alguna sucesión $\{n_k\}$.

En 1992, Herrero [He2] (ver también [Sa2]) propuso otro problema interesante. Se puede generalizar el concepto de hiperciclicidad exigiendo tan sólo que exista una cantidad finita de elementos cuyas órbitas unidas formen un subconjunto denso.

Definición 4.4.1 *Un operador lineal y continuo T sobre un espacio vectorial topológico X se dice* multihipercíclico *si existen elementos $x_1, \ldots, x_m$ en X tales que el conjunto $\{T^n x_j \,:\, n \geq 0,\ 1 \leq j \leq m\}$ es denso en X.*

Claramente la hiperciclicidad implica la multihiperciclicidad. Es más, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 4.4.3 *Sea T un operador hipercíclico en un espacio vectorial topológico X. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, el operador T^m es multihipercíclico en X.*

Demostración. Sea x un elemento T-hipercíclico. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Para cada $j = 1, \ldots, m$ consideramos

$$x_j \;=\; T^{j-1}x.$$

Entonces,

$$\{T^{mn} x_j \,:\, n \geq 0,\ j = 1, \ldots, m\} \;=\; \{T^n x \,:\, n \geq 0\}$$

y por tanto el conjunto es denso y T^m es multihipercíclico. •

En 1992 Herrero [He2, Conjecture 1] conjeturó que en espacios de Hilbert la multihiperciclicidad implica la hiperciclicidad. En concreto:

> *Sea $T : H \to H$ un operador sobre un espacio de Hilbert H tal que existe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset H$ cumpliendo que $\{T^n x_j \,:\, n \geq 0,\ j = 1, \ldots, m\}$ es denso en H. ¿Es T hipercíclico? ¿Es algún elemento x_j T-hipercíclico?*

Este problema ha sido estudiado por diversos autores (ver [GE2, Problem 4], [Mil], [MiM], [Sa2]). En concreto en 1995 [Sa2, Corollary 2.11] proporcionó una respuesta positiva para los operadores weighted shifts.

Proposición 4.4.4 *Si T es un operador weighted shift multihipercíclico, entonces T es hipercíclico.*

Demostración. Probaremos tan sólo el caso bilateral. Sean $x_1, \ldots, x_k$ elementos de H tales que $\bigcup_{i=1}^{k} \{T^n x_i \,:\, n \geq 0\}$ es densa en $\ell_2(\mathbb{Z})$. Entonces existe un elemento x_i (sin pérdida de generalidad podemos suponer que es x_1), y dos sucesiones $\{n_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ y $\{q_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\|T^{n_s} x_1 - \sum_{|j|<q_s} e_j\| \ < \ \frac{1}{2^s}.$$

Argumentando como se hizo en la demostración del Teorema 4.2.2, se obtiene que los pesos de T satisfacen las condiciones suficientes de hiperciclicidad. •

En 1995, Ansari [An1, Theorem 1] (ver también [An2, Note 3] y [Bou]) probó que si T es un operador hipercíclico en un espacio de Hilbert H, entonces T^n es hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$. Es más, T y T^n poseen los mismos elementos hipercíclicos. Según esto, los elementos x_i elegidos en la demostración de la Proposición 4.4.4 son en realidad elementos T^n-hipercíclicos.

Muy recientemente, en 2000, Peris [Per] y Costakis [Cos] han proporcionado, de manera independiente, una respuesta afirmativa a la conjetura de Herrero para operadores definidos sobre espacios localmente convexos. El problema sigue abierto para espacios topológicos generales.

Chapter 5

Hiperciclicidad de operadores weighted shifts en espacios de Fréchet

En los Capítulos anteriores hemos estudiado la hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento definidos sobre espacios de Hilbert. En este Capítulo vamos a ofrecer el primer ejemplo conocido sobre hiperciclicidad de un operador weighted shift sobre un espacio de Fréchet. Dicho ejemplo se debe a V. Mathew [Mat] y fue proporcionado en 1994.

Antes de continuar debemos comentar que en estos últimos años se han producido algunos avances en este marco. En 1999 F. Martínez y A. Peris [MaP] extienden los resultados de Salas vistos en el Capítulo 4 (Teoremas 4.2.2 y 4.2.7) a espacios de Köthe.

Definición 5.0.2 *Una matriz infinita $A = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$ se dice que es una matriz de Köthe si para todo $j, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$; y para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un natural $k \in \mathbb{N}$ con $a_{j,k} > 0$. Para $1 \leq p < \infty$, se definen los espacios* *escalonados de Köthe como sigue*

$$\lambda_p(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \|x\|_k := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j a_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad \textit{para cada } k \in \mathbb{N} \right\},$$

para $p = \infty$ *y* $p = 0$

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \|x\|_k := \sup\{|x_j| a_{j,k} \,:\, j \in \mathbb{N}\} < \infty, \quad \textit{para cada } k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\lambda_0(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \lim_{j \to \infty} x_j a_{j,k} = 0, \quad \textit{para cada } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

y son espacios de Fréchet al dotarlos de las seminormas $\{\|\cdot\|_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *(en el caso* $p = 0$ *se consideran las mismas seminormas que en el caso* $p = \infty$*).*

En 1991, K-G.Grosse-Erdman [GE3] da una extensión de los resultados de Salas a sucesiones de espacios de Fréchet en los cuales la base canónica $\{e_n\}$ forma una base de Schauder.

5.1 Un espacio de Fréchet.

Consideremos el espacio $H(\mathbb{C})$ de las funciones enteras. Se sabe que dicho espacio dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos es un espacio métrico completo. Sin embargo, como veremos a continuación, no es ésta la única topología que convierte a $H(\mathbb{C})$ en un espacio de Fréchet.

Es conocido que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$ define una función entera si y sólo si

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = 0,$$

diciéndose, en tal caso que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión entera.

Obviamente, por la unicidad del desarrollo en series de potencias de una función entera, podemos expresar el espacio $H(\mathbb{C})$ indistintamente en términos de funciones o en términos de sucesiones enteras.

En 1948, V. Ganapathy Iyer proporcionó (ver [Gan]) la siguiente definición.

Definición 5.1.1 *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *y* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *dos funciones enteras. Entonces definimos* $d(f,g)$ *como*

$$d(f,g) = \sup\left\{|a_0 - b_0|,\ |a_n - b_n|^{1/n} \ :\ n \geq 1\right\}. \tag{1}$$

En el mismo artículo, Ganapathy Iyer probó que realmente d define una métrica en el conjunto de las funciones enteras. Es más, $H(\mathbb{C})$ con esta métrica es un espacio métrico completo y separable; y la topología generada en $H(\mathbb{C})$ por d es equivalente a la topología usual en $H(\mathbb{C})$, es decir, la topología de la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C}$ (ver [Gan, Theorems 1-3]). A lo largo de todo este Capítulo supondremos que $H(\mathbb{C})$ está dotado de la topología inducida por la métrica (1).

Del mismo modo que en el marco de los espacios de Hilbert surgen de manera natural los operadores weighted shifts, también va a ocurrir lo mismo en $H(\mathbb{C})$. Veamos cómo.

Definición 5.1.2 *Se define el operador backward shift* B *sobre* $H(\mathbb{C})$ *como*

$$\begin{array}{cccc} B: & H(\mathbb{C}) & \longrightarrow & H(\mathbb{C}) \\ & f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n & \longmapsto & Bf(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}. \end{array}$$

Es claro que B está bien definido y es lineal y continuo. Ahora bien, si queremos que el operador de desplazamiento B también asigne unos ciertos pesos $\omega_n \in \mathbb{C}$, tendremos que imponer alguna condición que nos asegure que $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n z^{n-1}$ sea siempre una función entera.

Teorema 5.1.1 *Sea* $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos tales que*

$$M := \sup\left\{|\omega_n|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Para cada función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C})$ *definimos:*

$$Bf(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n z^{n-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n+1} a_{n+1} z^n,$$

es decir $B(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = (\omega_1 a_1, \omega_2 a_2, \ldots, \omega_n a_n, \ldots)$*. Entonces* B *está bien definido y es lineal y continuo en* $H(\mathbb{C})$*. A dicho operador* B *sobre* $H(\mathbb{C})$ *se le llama weighted backward shift con pesos* $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C})$. Entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ y

$$|\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n} \;\le\; M^{\frac{n+1}{n}} |a_{n+1}|^{1/n} \qquad (\text{para cada } n \ge 0).$$

Así, $Bf(z) \in H(\mathbb{C})$. Trivialmente B es lineal. Veamos la continuidad de B. Recordemos que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C})$, entonces

$$\|f\| \;=\; d(f, 0) \;=\; \sup\{|a_0|, |a_n|^{1/n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $Bf(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n+1} a_{n+1} \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} |\omega_{n+1} a_{n+1}| = 0.$$

Luego existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\omega_{n+1} a_{n+1}| < 1 \qquad (\text{para cada } n \ge n_0),$$

y por tanto

$$|\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n} \le |\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n+1} \qquad (\text{para cada } n \ge n_0).$$

Así, existe una constante $C > 0$ de forma que

$$|\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n} \le C \cdot |\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n+1} \quad (\text{para cada } n \ge 0).$$

De donde,

$$\|f\| \;=\; \sup\Big\{|\omega_1 a_1|, |\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n} \,:\, n \in \mathbb{N}\Big\} \;\le$$

$$C \cdot \sup \left\{ |\omega_1 a_1|, |\omega_{n+1} a_{n+1}|^{1/n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \ \leq$$
$$C \cdot M \cdot \sup \left\{ |a_1|, |a_{n+1}|^{1/n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \ \leq$$
$$M \cdot C \cdot sup \left\{ |a_0|, |a_n|^{1/n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \ = \ M \cdot C \cdot \|f\|.$$

Luego B es continuo y concluye la demostración. •

Nota 5.1.2 *Análogamente, si* $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *con* $\sup \left\{ |\omega_n|^{1/n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$, *se define el operador weighted forward shift* S *con pesos* $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *sobre* $H(\mathbb{C})$ *como*

$$Sf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n+1} a_n z^{n+1},$$

es decir, $S(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (0, w_1 a_0, w_2 a_1, \ldots, w_{n+1} a_n, \ldots)$. *Entonces* S *está bien definido y es lineal y continuo.*

5.2 Hiperciclicidad de operadores weighted shifts en el espacio de las funciones enteras.

Una vez introducida la topología de $H(\mathbb{C})$ y los operadores B y S, estamos en condiciones de estudiar la hiperciclicidad de dichos operadores. El resultado que veremos a continuación fue dado en 1994 por Mathew [Mat, Theorem 2.2].

Teorema 5.2.1 *Sea* $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos no nulos cumpliendo las dos siguientes condiciones*

(i) $\lim_{n \to +\infty} \omega_n = \infty$.

(ii) $\omega = \sup \left\{ |\omega_n|^{1/n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} < +\infty$.

Entonces el operador weighted backward shift B *con pesos* $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es hipercíclico.*

Demostración. Para obtener la hiperciclicidad de B vamos a aplicar el criterio suficiente dado en el Teorema 3.1.6. Consideremos $\mathcal{D}$ el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales. Entonces $\mathcal{D}$ es denso en $H(\mathbb{C})$ (ver [Gan, Theorem 1]). Tenemos que demostrar que

(a) B^n converge puntualmente a cero en $\mathcal{D}$ $(n \to \infty)$.

(b) Existe un operador $S : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ tal que $B \circ S \; = \; Id$ en $H(\mathbb{C})$.

(c) S^n converge puntualmente a cero en $\mathcal{D}$ $(n \to \infty)$.

Es trivial que, si $p(z)$ es un polinomio, entonces $B^n p = 0$ para todo $n >$ grado$(p(z))$. Así tenemos (a).

Como $\omega_n \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$, la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{|\omega_n|}\right)^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, y podemos considerar S el operador weighted forward shift con pesos $\left\{\frac{1}{\omega_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con ello obtenemos trivialmente la condición (b).

Por último veamos (c). Fijamos $p(z) \in \mathcal{D}$. Entonces existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m} c_k z^k.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que

$$S^n p(z) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{\omega_{k+1}\cdots w_{k+n}} z^{k+n}.$$

Luego

$$\|S^n p\| \;=\; \sup\left\{(a_{n,k})^{\frac{1}{n+k}} \;:\; 0 \le k \le m\right\},$$

donde

$$a_{n,k} := \;\frac{|c_k|}{|w_{k+1}\cdots w_{k+n}|} \quad (0 \le k \le m).$$

Se tiene que $a_{n,k} \ge 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k = 0, \ldots, m$. Más aún,

$$c_k = 0 \Longleftrightarrow a_{n,k} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, si $k \in \{0, \ldots, m\}$ es tal que $c_k = 0$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n,k})^{\frac{1}{n+k}} \;=\; \lim_{n\to\infty} 0 \;=\; 0,$$

y si es tal que $c_k \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\omega_{k+1+n}|} \;=\; 0,$$

porque $\lim_{n\to\infty} \omega_n \;=\; \infty$. Ahora bien, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}} \;=\; \lim_{n\to\infty} (a_{n,k})^{\frac{1}{n+k}}$ (ver [Ru3, Theorem 3.37]) y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n,k})^{\frac{1}{n+k}} \;=\; 0 \qquad \text{para todo } k = 0, \ldots, m,$$

y por (1),

$$\|S^n p\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Con ello tenemos (c) y como observamos anteriormente, por el Teorema 3.1.6, el operador B posee elementos hipercíclicos. •

Bibliography

[An1] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-383.

[An2] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), 384-390.

[Brb] S. K. Berberian, *Introducción al espacio de Hilbert*, Teide, Barcelona 1970.

[Ber] L. Bernal-González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1003-1010.

[Bes] J. P. Bés, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1801-1804.

[BeP] J. P. Bés y A. Peris, *Hereditarily Hypercyclic Operators*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 94-112.

[Bir] G. D. Birkhoff, *Dèmonstration d'un théorème elementaire sur les fonctions entieres*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[BoP] J. Bonet and A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 587-595.

[Bou] P. S. Bourdon, *The second iterate of a map with dense orbit*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1577-1581.

[Bre] H. Brézis, *Analyse fonctionelle*, Masson, París 1983.

[ChS] K. C. Chan and J. H. Shapiro, *The cyclic behaviour of translator operators on Hilbert spaces of entires functions*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 1421-1449.

[Cos] G. Costakis, *On a conjecture of D. Herrero concerning hypercyclic operators*, C. R. Acad. Sci. Paris **330** (2000), 179-182.

[CMC] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, CRC Press, New York, 1995.

[Gan] V. Ganapathy Iyer, *On the space of integral functions*, J. Indian Math. Soc. **12** (1948), 13-30.

[GeS] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281-288.

[GoS] G. Godofroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229-269.

[GE1] K. G. Grosse-Erdmann, *Holomorphe Monster und Universelle Funktionen*, Milt. Math. Sem. Giessen **176** (1987).

[GE2] K. G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345-381.

[GE3] K. G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, Studia Math. **139** (2000), 47-68.

[He1] D. A. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179-190.

[He2] D. A. Herrero, *Hypercyclic operator and chaos*, J. Operator Theory **28** (1992), 93-103.

[HeW] D. A. Herrero and W. R. Wogen, *On the multiplicity of* $T \oplus T \oplus \cdots \oplus T$, Rocky Mountain J. Math **20** (1990), 445-466.

[Kit] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, Univ. of Toronto, 1982.

[MaP] F. Martínez and A. Peris, *Hypercyclic and chaotic backward shift operators on Köthe echelon spaces*, prepublicación.

[Mat] V. Mathew, *A note on hypercyclic operators on the space of entire sequences*, Indian J. Pure Appl. Math. **25** (1994), 1181-1184.

[McL] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72-87.

[Mil] V. G. Miller, *Remarks on finitely hypercyclic and finitely supercyclic operators*, Integr. Equ. Oper. Theory **29** (1997), 110-115.

[MiM] T. L. Miller and V. G. Miller, *Local spectral theory and orbits of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1029-1037.

[Per] A. Peris, *Multi-hypercyclic operators are hypercyclic*, Math. Z. (en prensa).

[Pon] L. S. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach Science Publishers Inc. New York, London, Paris 1966.

[Rol] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17-22.

[Ru1] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York 1973.

[Ru2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1974.

[Ru3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York 1976.

[Sa1] H. Salas, *An hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 765-770.

[Sa2] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.