Procedimiento de solución compromiso para la agregación de información parcial sobre pesos.

Contreras Rubio, Ignacio
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e H.E.
Universidad Pablo de Olavide

Mármol Conde, Amparo M.
Departamento de Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En el presente trabajo proponemos un procedimiento interactivo para problemas de decisión en grupo con múltiples criterios. El procedimiento está especialmente indicado para aquellas situaciones en las que cada decisor ofrece información sobre la importancia relativa de los criterios de manera imprecisa. La información parcial sobre los pesos que deben asignarse a los criterios es transformada en información ordinal sobre las alternativas, determinando para cada una de ellas, un rango de valores que representa las posibles posiciones que ocuparía en una ordenación de alternativas. A partir de dichos intervalos, se determina una solución compromiso mediante modelos basados en distancia. El procedimiento incorpora, para refinar los resultados obtenidos, una etapa interactiva en cada paso.

***Palabras claves*:**
Decisión en grupo; información parcial; solución compromiso.

***Clasificación JEL (Journal Economic Literature)*:**
C61, D71.

***Área temática*:** Programación matemática.

1. INTRODUCCIÓN

La complejidad del actual contexto socioeconómico hace que, frecuentemente, un único decisor no pueda tomar en consideración todos los aspectos relevantes del problema. Por ello, las organizaciones recurren cada vez más a comités o grupos de expertos para el proceso de toma de decisiones. Sin embargo, pasar de uno a varios agentes decisores supone una mayor complejidad en tanto ha de considerarse diferentes estructuras de preferencia de cada uno de ellos.

Son muchos los trabajos en la literatura que tratan procedimientos de agregación de preferencias. Desde el trabajo original de Borda en 1778 (Borda, 1778), se ha realizado un amplio trabajo en este campo. Muchos de estos problemas de toma de decisión han de realizarse, además, sobre la base de diferentes criterios o atributos. En este caso, las preferencias u opiniones de los agentes decisores sobre la importancia que cada uno de dichos criterios ha de tener en la decisión final será un elemento determinante del resultado final.

En general, a los problemas de decisión en grupo con múltiples criterios pueden aplicarse dos grandes grupos de procedimientos: procedimientos basados en el grupo y procedimientos individuales (Matsatsinis, 2001). Los primeros, buscan determinar una solución por la vía de la negociación y la discusión. En tal caso, la solución final solo será posible si los individuos son capaces de alcanzar un consenso en sus opiniones. Una vez que se ha alcanzado el consenso, el grupo actúa como un único individuo con único perfil de preferencias. El segundo grupo aplica procedimientos de decisión multicriterio a las preferencias de cada decisor individualmente consideradas para, en una segunda etapa, agregar los resultados obtenidos a través de modelos matemáticos o mediante procedimientos de negociación.

En El analisis que se hace en este trabajo puede considerarse en este segundo grupo. Uno de los procedimientos más estudiados en la literatura es aquel en el que se representan las preferencias de grupo mediante funciones aditivas, esto es, la evaluación de cada alternativa se obtiene como una suma ponderada de la evaluación respecto a cada uno de los criterios. Las ventajas de este tipo de procedimientos pueden verse en Keeney y Raifa (1976). Algunos trabajos relevantes con funciones aditivas son, entre otros, Dyer y Sarin (1979) o Keeney y Kirkwood (1975).

En algunos procedimientos propuestos recientemente incorporan la posibilidad de trabajar con información incompleta o imprecisa. Véase, por ejemplo, Contreras et al. (2005) donde se propone un tipo de índices con elección flexible de pesos o Wang et al. (2005) en el que se propone un procedimiento de agregación basado en el cálculo de intervalos de valores para las alternativas. Este supuesto de información parcial ha sido aplicado con frecuencia en el contexto de la decisión multicriterio. Los modelos que permiten imprecisión en la determinación de los parámetros permiten abordar problemas complejos desde una perspectiva más realista dado que en muchas ocasiones los agentes decisores no se sienten cómodos o no son capaces de determinar de manera precisa los parámetros del modelo. El modelo que se propone en este trabajo se encuadra dentro de este grupo de modelos con información incompleta. En particular consideraremos el caso en el que los agentes decisores expresan sus preferencias sobre la importancia relativa o ponderación de los criterios a través de inecuaciones lineales.

Las razones por las que los agentes decisores (DMs) ofrecen solo información incompleta son variadas. Weber (1987) apunta la premura en el tiempo, el carácter intangible de algunos criterios o limitaciones en la capacidad de atención de los DMs. En tales casos, el proceso de decisión en grupo se beneficia de la posibilidad de manejar este tipo de información. Para los DMs no solo es más sencillo la expresión de sus preferencias sino que además se evitan situaciones prematuras de bloqueo en la búsqueda del consenso o lo que es equivalente, es más sencillo alcanzar acuerdos con este tipo de información que con valores precisos para los parámetros.

Los procedimientos de decisión en grupo con información parcial pueden agruparse, de manera genérica en tres categorías[1]. En primer lugar, aquellos procedimientos basados en comparaciones por pares de las alternativas, como Bana e Costa (1986) y Dias y Clímaco (2005). Estos procedimientos buscan obtener resultados individuales para, en una segunda etapa, agregarlos en la búsqueda de una solución de grupo. La segunda categoría de procedimientos contiene a aquellos que buscan ponderar las preferencias de los DMs como, por ejemplo, Kim y Ahn (1997), Kim et al. (1999) o Salo (1995). La última categoría comprende a aquellos procedimientos que buscan determinar un vector compromiso (minimizando el desacuerdo entre los individuos) con el que obtener un valor agregado para las alternativas. En este grupo se encuadran, entre otros, Valadares Tavares (2004) o Contreras y Mármol (2007).

En el presente trabajo proponemos un procedimiento que debe encuadrarse en la segunda categoría aunque la parte final del mismo consiste en la determinación de una solución de mínimo desacuerdo entre los DMs. El procediendo está especialmente indicado en aquellas situaciones en la que los agentes no tienen información sobre las preferencias de los otros miembros del grupo. En tal situación proponemos un procedimiento interactivo en el que, en un primer paso, se obtiene una evaluación individual de cada alternativa mediante la aplicación de una función de valor aditiva con la información parcial proporcionada por cada decisor. Como resultado de esta primera etapa, se determina para cada alternativa un rango de posiciones que dicha alternativa puede ocupar en el ranking inducido por las preferencias de cada agente. Finalmente, se determina una solución compromiso con la aplicación de un modelo basado en el propuesto por González-Pachón y Romero (2001).

---

[1] Una revisión más detallada de este tipo de procedimientos puede consultarse en Dias y Clímaco (2005).

El resto del trabajo se estructura de la siguiente forma. La siguiente sección describe el problema de decisión con múltiples criterios que vamos a tratar. La Sección 3 se dedica al estudio del modelo de decisión en grupo, incluyendo algunas propiedades en el contexto de la decisión en grupo. La Sección 4 contiene un ejemplo que ilustra el procedimiento mientras que en la Sección 5 se recogen algunas conclusiones del trabajo.

2. PROCEDIMIENTO DE DECISIÓN EN GRUPO

Consideremos un problema de decisión en grupo con múltiples criterios en el que se han evaluado M alternativas con respecto a N criterios y en el que se van a consideran las preferencias de K agentes decisores o miembros de un grupo. Las evaluaciones de cada alternativa con respecto a cada criterio se consideran objetivas (y comunes para todos los agentes) y se representan por la matriz $A \in \Re_{N \times M}$. Los elementos de dicha matriz se denotan por a_{ij} y reprendan el valor asignado a la alternativa x_j con respecto al criterio i.

Cada decisor ofrece cierta información sobre sus preferencias respecto a la importancia relativa de cada criterio. En particular, consideramos que dichas preferencias están expresadas mediante conjuntos de información parcial sobre los pesos que denotamos por $\Phi^k \subseteq \Re_N$, con $k=1,\ldots K$.

El conjunto de información parcial de cada agente consiste en aquellos vectores de ponderaciones o pesos para los criterios que dicho agente considera razonable. Por convenio, consideramos que dichos vectores están normalizados de manera que sus componentes suman la unidad. Las preferencias de los agentes se expresan mediante relaciones lineales de las componentes de dichos vectores, por lo que los conjuntos Φ^k son poliédricos descritos por restricciones lineales de los pesos.

El objetivo final del procedimiento es obtener una evaluación global de las alternativas que tenga en cuenta las preferencias de todos los agentes decisores. El procedimiento que proponemos consta de dos fases diferenciadas. En primer lugar, estudiamos las posibles ordenaciones o ranking de alternativas que pueden inducirse con cada conjunto Φ^k individualmente considerado. En segundo lugar, se busca obtener una solución de consenso a partir de los resultados individuales de cada decisor.

2.1. Evaluaciones individuales de las alternativas

El primer paso consiste, por tanto, en estudiar las posibles ordenaciones que se inducen de cada conjunto Φ^k. Adoptamos una función de valor aditiva para evaluar a cada alternativa, esto es, los valores que cada alternativa obtiene respecto a cada criterio son ponderados para determinar un único valor. La valoración de la alternativa x_h con las preferencias del decisor k viene dada por

$$V^k(x_h) = \sum_{i=1}^{N} w_i^k a_{ih}$$

donde $w^k \subseteq \Phi^k$ es el vector de ponderaciones que representa las preferencias del agente k. Cualquier valoración con un vector del conjunto Φ^k es considerado aceptable por el decisor. De esta función agregada puede derivarse una relación de preferencia entre alternativas. Se dirá que x_j domina estrictamente a x_h con la estructura de preferencias del decisor k, y se denotará $x_j P^V x_h$, si $V^k(x_j) > V^k(x_h)\ \forall w^k \in \Phi^k$. Consideramos que dos alternativas son indiferentes, $x_j I^V x_h$, si $V^k(x_j) = V^k(x_h)\ \forall w^k \in \Phi^k$. Puede comprobarse que las relaciones de preferencia estrica e indiferencia P^V e I^V definen un orden parcial sobre el conjunto de alternativas X.

Como consecuencia de operar con información incompleta, son varios los rankings de alternativas que pueden inducirse. Representamos cada alternativa con el rango de valores que puede ocupar en las ordenaciones de alternativas asumiendo, por convenio, que el valor 1 se asigna a la mejor posición y M a la peor valorada.

La mejor posición de la alternativa x_h con las preferencias del decisor k se obtiene como resultado del siguiente problema lineal,

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{M} \delta_{hj}^k \\ s.a. & \sum_{i=1}^{N} w_i^k a_{ih} - \sum_{i=1}^{N} w_i^k a_{ij} + \delta_{hj}^k B \geq 0 \quad \forall j \\ & w^k \in \Phi^k \\ & \delta_{hj}^k \in \{0,1\} \end{array} \tag{1}$$

donde B número suficientemente grande. El modelo (1) determina el número mínimo de alternativas que domina a x_l con los vectores contenidos en el conjunto de información del decisor k. Cada valor óptimo de δ_{hj}^k distinto de cero representa una desigualdad que no puede darse. Por l_h^k representamos el valor mínimo del rango de posiciones para la alternativa x_h con las preferencias del agente k.

De manera análoga, la peor posición para x_h es determinada resolviendo el modelo:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{M} \gamma_{hj}^k \\ s.a. & \sum_{i=1}^{N} w_i^k a_{ij} - \sum_{i=1}^{N} w_i^k a_{ih} + \gamma_{hj}^k B \geq 0 \quad \forall j \\ & w^k \in \Phi^k \\ & \gamma_{hj}^k \in \{0,1\} \end{array} \tag{2}$$

La peor posición para x_h, se obtiene como $u_h^k = M - \sum \gamma_{hj}^k$. Ambos valores se determinan en las situaciones más extremas, esto es, el intervalo generado, que denotamos por $R_h^k = [l_h^k, u_h^k]$, contiene cualquier posible valor para la alternativa evaluada.

A partir de estos rangos pueden definirse otro par de relaciones binarias para representar relaciones de preferencia entre alternativas P^I *e* I^I, definidas de la forma $x_h P^I x_j$ si y solo si $u_h^k < l_j^k$ y $x_h I^I x_j$ cuando se tiene simultáneamente que. $u_h^k = u_j^k$ y que $l_h^k = l_j^k$.

Es interesante estudiar las relaciones entre ambos pares de relaciones binarias. Es obvio que pasando de la primera representación de preferencias a la segunda se pierde cierta información, que se traduce en que algunas preferencias entre alternativas que se dan con la relación P^V se convierten en alternativas incomparables (Q^I) cuando se representan las alternativas con rangos de valores. Algunas relaciones son las siguientes,

$$\begin{array}{lcl} x_i P^I x_j & \Rightarrow & x_i P^V x_j \\ x_i P^V x_j & \Rightarrow & no\left(x_j P^I x_i\right) \\ x_i I^V x_j & \Leftrightarrow & x_i I^I x_j \\ x_i Q^V x_j & \Rightarrow & no\left(x_i P^I x_j\right) \end{array} \tag{3}$$

La ventaja de representar las preferencias en esta segunda forma es la mayor comodidad para los agentes decisores. Es más factible establecer un procedimiento interactivo en el que se modifican posiciones en una ordenación de alternativas que modificar el conjunto de ponderaciones. Obviamente, el considerar las ordenaciones completas del conjunto de alternativas y no las relaciones dos a dos con la función de valor implica, no obstante, que aparezcan relaciones de incomparabilidad entre alternativas.

2.2. Fase interactiva para los resultados individuales

Una vez obtenidos los rangos de posiciones con los que se identifica a cada alternativa se propone una etapa interactiva para refinar dicha información. La amplitud de dichos intervalos es una medida de la imprecisión de las preferencias individuales de cada decisor. Puede demostrarse que si el decisor k propone un nuevo conjunto de información $\Phi'^k \subseteq \Phi^k$, el intervalo generado verifica que $R'^k_h \subseteq R_h^k$. Este resultado refleja la relación directa entre la dimensión del conjunto de información parcial y la amplitud de dichos intervalos. Es interesante destacar que aun cuando el conjunto de información contiene un único vector de pesos la amplitud de los intervalos no tiene que ser necesariamente igual a cero por la particular forma en la que se han tratado los empates entre alternativas.

Obviamente, si los agentes decisores pueden aceptar los rangos de valores calculados en la primera etapa, la etapa interactiva concluye y se procede con le siguiente paso. No obstante, algún decisor puede contar con cierta información adicional que quiere incorporar a sus resultados para refinarlos. Consideramos dos tipos de modificaciones. En primer lugar, modificaciones del conjunto de información sobre los pesos, bien incorporando nuevas restricciones al conjunto inicial bien modificando dicho conjunto. En este primer caso han de recalcularse los rangos para las alternativas que induce el nuevo conjunto de información.

En segundo lugar, consideramos la posibilidad de que el decisor desee añadir información sobre el orden que deben guardar las alternativas. En esta segunda situación, incluimos restricciones que recoja dicha preferencia por pares entre alternativas comprobando, antes de recalcular los rangos, que dichas relaciones son compatibles con los conjuntos de información sobre los pesos.

El procedimiento interactivo continúa hasta que todos los agentes decisores aceptan los rangos para las alternativas.

3. PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN COMPROMISO

Consideremos el problema de decisión en el que la información inicial sobre pesos ha sido transformada en rangos de posiciones ordinales para las alternativas. El objetivo de la siguiente etapa del procedimiento propuesto es obtener una ordenación única para el conjunto de alternativas tal que minimice el desacuerdo entre los agentes decisores.

Para el caso en que los agentes decisores ofrecen sus preferencias en forma de un único ranking de alternativas son varios los modelos existentes en la literatura. Véase, por ejemplo, Cook y Seiford (1978), Cook y Seiford (1982), Cook et al. (1996), y más recientemente, González-Pachón y Romero (1999) que proponen un modelo para determinar soluciones compromiso con la aplicación de programación por metas.

Para el contexto en el que los agentes decisores ofrecen intervalos de posiciones para cada alternativa González-Pachón y Romero (2001) proponen un modelo que extiende la aplicación de los modelos basados en programación por metas a este caso.

La solución que se busca es aquel ranking de alternativas, $R=(R_1,\ldots,R_M)$ que minimiza el desacuerdo de los agentes medido como agregación de desacuerdos individuales.

Si R_j^k representa la posición que la alternativa x_j ocupa en las preferencias del decisor k, la medida de desacuerdo del agente k respecto a la posición de dicha alternativa se obtiene como

$$d(R_j, R_j^k) = \begin{cases} l_j^k - R_j & si \quad R_j < l_j^k \\ 0 & si \quad l_j^k \le R_j \le u_j^k \\ R_j - u_j^k & si \quad R_j \ge u_j^k \end{cases} \tag{4}$$

Solo en el caso en que R_j no esté contenido en el intervalo R_j^k existe desacuerdo por parte del decisor, esto es, si $l_j^k \leq R_j \leq u_j^k$ el decisor estará de acuerdo con la solución adoptada. En otro caso, $d(R_j, R_j^k)$ medirá el desacuerdo del agente k con respecto a la alternativa x_j

La solución que buscamos en una ordenación del conjunto de alternativas en el que, por convenio se asigna el valor 1 a la alternativa mejor valorada. Para determinarlo minimizamos el desacuerdo sobre el siguiente conjunto factible

$$\begin{aligned} & 1 \leq R_j \leq M, \forall j \\ & \sum_{j=1}^{M} R_j = \frac{M(M+1)}{2} \\ & R_j \in Z^+, \forall j \end{aligned} \tag{5}$$

Para la resolución de dicho problema puede utilizarse la metodología de programación por metas. Definiendo las variables de desviación n_j^k, p_j^k, t_j^k y v_j^k tales que

$$\begin{cases} R_j - l_j^k + n_j^k - p_j^k = 0, & \forall j, k \\ R_j - u_j^k + t_j^k - v_j^k = 0 & \forall j, k \\ n_j^k, p_j^k, t_j^k, v_j^k \geq 0 & \forall j, k \end{cases} \tag{6}$$

Considerando la métrica l_1, el desacuerdo total del agente k, d^k, puede determinarse como la suma de desacuerdos para las M alternativas.

$$d^k = \sum_{j=1}^{M} \left(n_j^k + v_j^k \right) \tag{7}$$

Si se considera la métrica l_∞, d^k viene dado por la mayor desviación respecto a las M alternativas, esto es

$$d^k = \max_{j=1,\dots,M} \left(n_j^k + v_j^k \right) \tag{8}$$

Para determinar la solución compromiso, podemos tomar dos posibles interpretaciones para el concepto de consenso entre los miembros del grupo. En primer lugar puede buscarse aquella solución que minimiza el desacuerdo total de los agentes decisores (solución minisum). Alternativamente, aquella solución que minimiza el desacuerdo de aquel decisor más alejado de la solución adoptada finalmente (solución mínimax). Combinando las dos métricas consideradas y los dos conceptos de consenso mencionados pueden construirse cuatro modelos que se resumen a continuación.

Métrica	Minisum	Minimax
l_1	$\begin{array}{ll} min & \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M}(n_j^k + v_j^k) \\ s.t. & (5)-(6) \end{array}$	$\begin{array}{ll} min & D \\ s.t. & D - \sum_{j=1}^{M}(n_j^k + v_j^k) \geq 0 \quad \forall k \\ & (5)-(6) \end{array}$
l_∞	$\begin{array}{lll} min & \sum_{k=1}^{K} D_k & \\ s.t. & D_k - (n_j^k + v_j^k) \geq 0 & \forall j,k \\ & D_k \geq 0 & \forall k \\ & (5)-(6) & \end{array}$	$\begin{array}{ll} min & D \\ s.t. & D - (n_j^k + v_j^k) \geq 0 \quad \forall j,k \\ & (5)-(6) \end{array}$

En los anteriores modelos no existe ninguna condición que asegure que la solución obtenida será un ranking completo de alternativas. Para evitar la aparición de empates en la solución final puede incluirse el siguiente conjunto de restricciones a los modelos propuestos,

$$\begin{array}{ll} R_j - h \cdot t_{jh} \geq 0, & \forall h, j = 1,\ldots,M \\ \sum_{h=1}^{M} t_{jh} = 1 & \forall j = 1,\ldots,M \\ \sum_{j=1}^{M} t_{jh} = 1 & \forall h = 1,\ldots,M \\ t_{hj} \in \{0,1\} & \forall h, j \end{array} \tag{10}$$

3.1. Discriminando entre soluciones múltiples

Las soluciones obtenidas de los modelos anteriores son, frecuentemente, no únicas. Esto puede dar lugar a dificultades en la representación de las preferencias del grupo. Supone, además, un problema para determinar cuál de las soluciones debe seleccionarse.

Consideremos el siguiente ejemplo en el que las preferencias de tres agentes decisores con respecto a tres alternativas se representan por rangos de posiciones,

	x_1	x_2	x_3
DM 1	[1,3]	[1,2]	[2,3]
DM 2	[3,3]	[1,2]	[1,2]
DM 3	[2,3]	[2,3]	[1,3]

Determinando la solución de mínimo desacuerdo total utilizando la métrica l_1 se tiene que el valor óptimo de desacuerdo es igual a una unidad. Sin embargo la solución no es única, tanto $R=(3,1,2)$ como $R=(3,2,1)$ minimizan el desacuerdo total si no se permiten empates y $R=(2,2,2)$ si se aceptan empates entre alternativas. Inicialmente no hay ninguna razón que permita discriminar entre las tres posibles soluciones por lo que se hace necesario incluir algún procedimiento que permita salvar esta dificultad.

Sea $\hat{D}$ el valor mínimo de desacuerdo obtenido con la resolución del modelo. El siguiente procedimiento para discriminar entre soluciones óptimas propone evaluar a cada alternativa con la mejor posición que puede ocupar para ese nivel de desacuerdo óptimo obtenido.

Si se considera la métrica l_1 y la solución mínisum, para determinar esta posición resolvemos el siguiente modelo[2]

$$
\begin{array}{lll}
\min & R_h & \\
s.a. & \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M}\left(n_j^k + v_j^k\right) \le \hat{D} & \\
 & R_j - l_j^k + n_j^k - p_j^k = 0 & \forall j,k \\
 & R_j - u_j^k + t_j^k - v_j^k = 0 & \forall j,k \\
 & 1 \le R_j \le M & \forall j \\
 & \sum_{j=1}^{M} R_j = \dfrac{M(M+1)}{2} & \\
 & n_j^k, p_j^k, t_j^k, v_j^k & \forall j,k \\
 & R_j \in Z^+ &
\end{array}
\qquad (11)
$$

Las alternativas se ordenan en función de los valores óptimos obtenidos en el modelo anterior. En tal caso, dos o más alternativas pueden alcanzar la misma valoración y resultarían empatadas en la solución final en tanto no existe información adicional que permita discriminar entre ellas.

El procedimiento concluye con otra fase interactiva que refina la solución final. Este es un buen momento para romper, si se desea, los empates generados por el procedimiento adicional propuesto, bien incorporando cierta información adicional bien mediante un proceso de negociación entre los agentes.

A continuación se resumen algunas de las principales propiedades que verifica el procedimiento propuesto en el contexto de modelos de decisión en grupo. Cualquier procedimiento de agregación de preferencias debe verificar ciertas propiedades en el contexto de procedimientos de elección social. Factibilidad, anonimato, monotonía, neutralidad y no dictadura son propiedades que se justifican directamente de la construcción del modelo. Esto es, siempre puede determinarse una solución, todos los miembros del grupo son tratados de manera igualitaria y no existe un decisor que sea capaz de imponer sus preferencias en la determinación del consenso. Un estudio más detallado de las propiedades puede verse en González-Pachón y Romero (1999) and Yu (1985).

Junto a las anteriores, puede probarse que el procedimiento propuesto verifica las propiedades de unicidad, que garantiza que la solución obtenida es única y que se deriva de la última parte del procedimiento en el que cada alternativa es valorada con la mejor posición posible y de unanimidad o eficiencia paretiana débil, también derivada de la selección de la mejor solución de entre las posibles para cada alternativa individualmente considerada.

4. EJEMPLO

En la presente sección se ilustra el procedimiento con un ejemplo. Consideremos un problema de decisión en el que tres agentes decisores desean ordenar diez alternativas que han sido evaluadas respecto a cinco criterios. En la siguiente tabla se recogen los valores normalizados de cada alternativa con respecto a cada criterio.

Altern.	Crit. 1	Crit. 2	Crit. 3	Crit. 4	Crit. 5
x_1	0.298	0.056	0.024	0.074	0.041
x_2	0.106	0.096	0.017	0.095	0.272
x_3	0.059	0.056	0.155	0.101	0.088
x_4	0.037	0.101	0.224	0.081	0.097
x_5	0.016	0.022	0.079	0.108	0.198
x_6	0.027	0.079	0.231	0.061	0.032
x_7	0.138	0.096	0.117	0.074	0.069
x_8	0.128	0.185	0.021	0.162	0.078
x_9	0.096	0.129	0.076	0.142	0.041
x_{10}	0.096	0.180	0.055	0.101	0.083

Consideramos que los criterios están medidos en una escala común y que los agentes proporcionan cierta información parcial sobre la importancia relativa de cada criterio. El agente 1 considera que los criterios están ordenados de manera decreciente siendo, además, la importancia del criterio 1 no inferior al 25% de la importancia total. Si denotamos por $\Lambda^+ = \left\{ w \in \Re_5, \sum_k w_k = 1, w_k \geq 0 \right\}$, el conjunto de información de este agente puede escribirse como $\Phi^1 = \{ w \in \Lambda^+, w_i \geq w_{i+1}, i = 1, \ldots, 4; w_1 \geq 0.25 \}$.

Los conjuntos de los dos agentes restantes son de la forma,

$$\Phi^2 = \{ w \in \Lambda^+, w_i \geq w_{i+1}, i = 1,...,4; w_5 \geq 0.15 \}$$
$$\Phi^3 = \left\{ w \in \Lambda^+, w_3 \geq \sum_{i \neq 3} w_i \right\}$$

La primera etapa del procedimiento consiste en la determinación de los rangos de posiciones para cada alternativa y para cada una de las tres estructuras de preferencias consideradas. Los resultados obtenidos para cada alternativa y para cada decisor se resumen en la siguiente tabla.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
DM 1	[1,3]	[1,4]	[8,8]	[3,7]	[10,10]	[9,9]	[4,6]	[1,3]	[6,7]	[4,6]
DM 2	[6,10]	[1,3]	[4,9]	[1,7]	[2,10]	[5,10]	[5,9]	[2,6]	[5,9]	[4,9]
DM 3	[1,10]	[2,10]	[3,5]	[1,2]	[3,10]	[1,4]	[3,6]	[6,10]	[4,9]	[3,10]

El procedimiento continúa con una fase interactiva con los agentes decisores. En este punto, se presentan los resultados obtenidos y se les cuestiona sobre ellos. En caso de que alguno considere que puede añadir cierta información a los conjuntos iniciales se recalcularán los rangos.

Consideramos dos posibilidades para la incorporación de información adicional. Modificaciones en el conjunto de información, incluyendo nuevas restricciones adicionales sobre los pesos o modificando las iniciales, e incluir preferencias entre pares de alternativas. Nos centramos en esta segunda opción en tanto la primera conlleva recalcular los valores de los rangos para las alternativas y parece más lógico que si el decisor cuente con información adicional, ésta tenga un formato distinto al ya presentado y más sencillo de expresar, como son las relaciones de preferencia sobre las alternativas.

Consideremos, por ejemplo, los resultados del segundo decisor. Es claro que la alternativa x_2 está por encima de x_3 en cualquiera de los rankings que consideremos (véase como $u_2^2 < l_3^2$). Esto es, el conjunto de preferencias sobre los criterios hace que x_2 domine a x_3 en cualquier caso.

No obstante estas relaciones de preferencia no son siempre tan claras. Consideremos los rangos del decisor 3 para las alternativa x_7 ([3,6]) y x_9 ([4,9]). No es obvio cuál de las dos alternativas es dominante. Es este caso, si el decisor desea imponer que una de las dos alternativas debe estar siempre por encima de la otra es necesario, en primer lugar, comprobar si la relación es posible y, en segundo lugar, recalcular los rangos imponiendo la nueva restricción. En este caso particular, si se incluyese esta nueva condición no se produce cambio alguno en los valores de los rangos, lo que indica que esta preferencia entre ambas alternativas ya se verifica sin necesidad de restricción adicional.

Una vez que todos los agentes decisores están conformes con los rangos obtenidos el siguiente paso es determinar una solución compromiso. Consideramos los modelos minisum con la métrica l_1 y mínimax con l_∞ y los resultados obtenidos son 16 unidades para el primero de 7 unidades para el segundo.

Es fácil comprobar como las soluciones obtenidas en ambos casos no son únicas por lo que se hace necesario aplicar el procedimiento adicional que permite refinar la solución obtenida. En la siguiente tabla se resumen los rankings obtenidos cuando se determina la mejor solución para cada alternativa en la solución minisum (izda) y mínimax (dcha).

Rank of	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	**3**	5	6	3	5	6	3	6	3	5
x_2	2	**1**	1	2	2	1	1	1	1	2
x_3	8	8	**8**	8	8	8	8	8	8	8
x_4	1	2	2	**1**	1	2	2	2	2	1
x_5	10	10	10	10	**10**	10	10	10	10	10
x_6	9	9	9	9	9	**9**	9	9	9	9
x_7	5	6	5	6	6	5	**5**	5	5	6
x_8	4	3	3	5	3	3	6	**3**	6	3
x_9	7	7	7	7	7	7	7	7	**7**	7
x_{10}	6	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**

Rank of	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	**3**	5	3	3	3	3	3	4	6	6
x_2	2	**1**	2	2	4	2	1	2	2	2
x_3	7	6	**5**	5	6	8	8	5	8	8
x_4	1	2	1	**1**	1	1	5	1	1	5
x_5	10	10	9	10	**8**	10	9	10	10	10
x_6	6	7	7	7	7	**6**	7	7	7	7
x_7	9	8	6	4	2	5	**2**	6	9	9
x_8	5	3	4	6	5	4	6	**3**	5	3
x_9	8	9	10	8	10	7	10	8	**4**	4
x_{10}	4	4	8	9	9	9	4	9	3	**1**

En cada columna se recoge el ranking obtenido cuando se optimiza la posición de la alternativa que se indica. En la diagonal principal, se encuentra la mejor situación posible de dicha alternativa y la posición que se utilizará para determinar la solución final del grupo.

Es interesante ver cómo varían los rankings de una alternativa a otra, véase por ejemplo la alternativas x_{10} cuya posición puede variar desde la tercera a la séptima posición. Todas estas ordenaciones minimizan el desacuerdo pero cambian la valoración final que recibiría la alternativa. Las posiciones asignadas a las alternativas, y por consiguiente la ordenación final de grupo, se representa a continuación (de nuevo solución minisum a la izquierda y mínimax a la derecha). Como puede verse, algunas alternativas empatan en la valoración final recibida.

$$\begin{bmatrix} x_2, x_4 \\ x_8, x_1 \\ x_{10} \\ x_7 \\ x_9 \\ x_3 \\ x_6 \\ x_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2, x_4, x_{10} \\ x_7 \\ x_1, x_8 \\ x_9 \\ x_3 \\ x_6 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Si se desea una ordenación completa es necesario recurrir a algún procedimiento de negociación o recalcular los valores incorporando cierta información adicional para alcanzar una nueva ordenación de las alternativas.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo presentamos un procedimiento para dar solución a problemas de decisión en grupo en los que cada alternativa debe ser valorada con respecto a múltiples criterios y en los que los agentes únicamente ofrecen cierta información parcial sobre la importancia relativa de los criterios. El procedimiento se basa en la transformación de la información parcial sobre los pesos en información ordinal sobre las alternativas, en forma de intervalos de posiciones de un ranking u ordenación de las mismas. Dicha transformación facilita la interpretación de los resultados individuales por parte de los agentes decisores, si bien conlleva cierta pérdida de información que se pone de manifiesto en forma de incomparabilidades entre alternativas.

La segunda parte del procedimiento permite determinar una solución compromiso o de mínimo desacuerdo a partir de los rangos o intervalos proporcionados por los agentes decisores con la ayuda de problemas de programación por metas. Se implementa, además, un procedimiento adicional que permite discriminar ante la posibilidad de soluciones múltiples y que añade propiedades interesantes al procedimiento.

3. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANA E COSTA, C.A. (1986) “A multicriteria decision aid methodology to deal with conflicting situations on the weights”. European Journal of Operational Research, 26, pp. 22-34.
- BORDA, J.C. (1784) “Mémoire sur les élections au scrutin”. Histoire de l’Académie Royale des Sciences.
- CONTRERAS, I., HINOJOSA, M.A., MÁRMOL, A.M. (2004) “Construcción de índices ponderados multicriterio con información ordinal”. Estadística Española, 46 (155), pp. 95-117.
- CONTRERAS, I., HINOJOSA, M.A., MÁRMOL, A.M. (2005) “A class of flexible weight indices for ranking alternatives”. IMA Journal of Management Mathematics, 16, pp. 71-85.
- CONTRERAS, I., MÁRMOL, A.M (2007). “A lexicographical compromise method for multiple criteria group decision problems with imprecise information”. European Journal of Operational Research, 181 (3), pp.1530-1539.
- COOK, W.D., SEIFORD, L.M. (1978) “Priority ranking and consensus formation”. Management Science, 24, pp. 1711-1732.

- COOK, W.D., SEIFORD, L.M. (1982) "The Borda-Kendall consensus method for priority ranking problems". Management Science, 28, pp. 621-637.
- COOK, W.D., KRESS, M., SEIFORD, L.M. (1996) "A general framework for distance-based consensus in ordinal ranking model". European Journal of Operational Research, 96, pp. 392-397.
- DIAS, L.C., CLIMACO, J.N. (2005) "Dealing with imprecise information in group multicriteria decisions: A methodology and a GDSS architechture". European Journal of Operational Research, 160 (2), pp. 291-307.
- DYER, J.S., SARIN, R.K. (1979) "Group preference aggregation rules based on strenght of preference". Management Science, 25, pp. 822-832.
- GONZÁLEZ-PACHÓN, J., ROMERO, C. (1999) "Distanced based consensus methods: a goal programming approach". Omega, 27, pp. 341-347.
- GONZÁLEZ-PACHÓN, J., ROMERO, C. (2001) "Aggregation of partial ordinal rankings: An interval goal programming approach". Computers and Operations Research, 28, pp. 827-834.
- KEENEY, R.L., KIRKWOOD, C.W. (1975) "Group decision making using cardinal social welfare function". Management Science, 22, pp. 430-437.
- KEENEY, R.L., RAIFFA, H. (1976) "Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs". John Wiley; New York.
- KIM, S.H., AHN, B.S. (1997) "Group decision making procedure considering preferente strength under incomplete information". Computers and Operations Research, 12, pp. 1101-1112.
- KIM, S.H., CHOI, S.H., KIM, J.K. (1999) "An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information: Range-based approach". European Journal of Operational Research, 118, pp. 139-152.
- MATSATSINIS, N.F. (2001) "MCDA and preference disaggregation in group decision support systems". European Journal of Operational Research, 130 (2), pp. 414-429.
- SALO, A.A. (1995) "Interactive decision aiding for group decision support". European Journal of Operational Research, 84, pp. 134-149.
- SALO, A., HÄMÄLAINEN, R.P. (2001) "Preference ratios in multriattibute evaluation (PRIME)-elicitation and decision procedures under incomplete information". IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 31, pp. 533-545.

- VALADARES TAVARES, L. (2004) “A model to support the search for consensus with conflicting rankings: Multitrident”. International Transactions in Operational Research, 11, pp. 107-115.
- WANG, Y.M., YANG, J.B., XU, D.L. (2005) “A preference aggregation method through the estimation of utility interval”. Computers and Operations Research, 32, pp. 2027-2049.
- WEBER, M. (1987) “Decision making with incomplete information”. European Journal of Operational Research, 28, pp. 44-57.
- YU, P.L. (1985) “Multiple-Criteria decision making”. Plenum Press, New York.