JUEGOS RESTRINGIDOS MULTICRITERIO

Amparo Mª Mármol Conde
Luisa Monroy Berjillos
Victoriana Rubiales Caballero [1]

Departamento Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

Resumen: La teoría de juegos estudia problemas de decisión multipersonales y proporciona una metodología importante para el análisis cuantitativo en las ciencias sociales. Dentro de este marco, los juegos restringidos permiten una formulación más realista y práctica de ciertos problemas de decisión bajo incertidumbre. Este tipo de juegos surgen cuando las estrategias de uno o más jugadores están sometidas a ciertas restricciones lineales.

El objeto de este trabajo es estudiar los juegos matriciales vectoriales restringidos y poner de manifiesto su potencialidad para analizar y resolver problemas en los que aparecen decisores y criterios en conflicto. Proponemos un procedimiento para resolver el juego restringido cuando las restricciones adicionales a las que están sometidas las estrategias de los jugadores, determinan un subconjunto poliédrico del conjunto de sus estrategias mixtas. Este procedimiento consiste en resolver un juego no restringido, cuya matriz lleva incorporada la información adicional de que se dispone. Además, en estos problemas, el aspecto computacional cobra especial relevancia, pues no sólo es importante el análisis teórico de la existencia de soluciones sino también es conveniente disponer de procedimientos eficaces para obtener las soluciones y analizar sus propiedades.

Palabras clave: Teoría de juegos, juegos multicriterio, programación lineal multiobjetivo.

---

[1] La investigación de las autoras está parcialmente subvencionada por el Ministerio de Educación y Cultura. Proyecto n. PB97-07-07.

1. Introducción

Los juegos restringidos son aquellos en los que las estrategias de uno o de ambos jugadores están sujetas a ciertas restricciones adicionales. Este tipo de juegos permiten una formulación más realista y práctica de ciertos problemas de decisión bajo incertidumbre. Así, un jugador puede incorporar al conjunto de sus estrategias restricciones que representen limitaciones sobre los recursos, relaciones técnicas o cualquier otro tipo de restricción que pueda presentarse. De la misma forma, es importante que el jugador pueda considerar cualquier información acerca de la frecuencia relativa con que su oponente utiliza sus estrategias.

En juegos escalares, donde hay una única regla de decisión para cada jugador, el juego restringido puede representarse equivalentemente como un juego en forma normal introducciendo estrategias pseudopuras, (Charnes (1953)), que se corresponden con los puntos extremos del poliedro convexo de estrategias mixtas restringidas.

En un entorno de decisión más general, se hace necesario la consideración de más de un criterio de decisión para establecer las estrategias que van a utilizarse en la realización del juego. Estas situaciones se modelizan como juegos en los que los pagos son vectores. Los primeros resultados sobre juegos multicriterio, o juegos vectoriales, restringidos surgen en un intento de extender los ya existentes para juegos escalares. Chandra y Durga Prasad (1992) estudiaron las relaciones entre ciertos juegos vectoriales restringidos y un par de problemas multiobjetivo. Singh y Rueda (1994), siguiendo el trabajo de Chandra y Durga Prasad (1992), estudiaron la conexión entre un punto de equilibrio de un juego vectorial restringido y un punto de silla generalizado, de dos problemas de programación no lineal asociados.

En este trabajo analizamos y resolvemos los juegos matriciales restringidos multicriterio, considerando como concepto de solución las estrategias de seguridad Pareto-óptimas, establecido por Ghose y Prasad (1989), y posteriormente estudiado por Fernández y Puerto (1996) y Monroy (1996). Proponemos un procedimiento para resolver el juego restringido cuando las restricciones adicionales a las que están sometidas las estrategias de los jugadores, determinan un subconjunto poliédrico del conjunto de sus estrategias mixtas. Este procedimiento consiste en resolver un juego no restringido, cuya matriz lleva incorporada la información adicional de que se dispone. Además, en estos problemas, el aspecto computacional cobra especial relevancia, pues no sólo es importante el análisis teórico de la existencia de soluciones sino también es conveniente disponer de procedimientos eficaces para obtener las soluciones y analizar sus propiedades.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 presentamos el modelo y establecemos las definiciones básicas que se utilizarán en el resto del trabajo. En la sección 3 estudiamos los juegos multicriterio retringidos. A continuación, en la sección 4, los resultados obtenidos se ilustran con un ejemplo de un modelo publicitario. El trabajo finaliza con una sección dedicada a las conclusiones.

2. Modelo y resultados previos

Consideremos un juego finito bipersonal de suma nula en forma normal, con matriz de pagos $A=(a_{ij}),\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m$. Cada elemento a_{ij} de la matriz A es un vector k-dimensional , $a_{ij}=(a_{ij}(1),...,a_{ij}(k))$, que determina k matrices de orden *nxm* de la forma

$$A(s)=(a_{ij}(s)),\quad 1\le s\le k,\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m$$

Los jugadores los denotamos por JI y JII . Los espacios de estrategias mixtas para JI y JII son respectivamente

$$X=\{\ x\in\Re^n\ /\sum_{i=1}^{n}x_i=1,\ x_i\ge 0,\quad i=1,...,n\ \}$$

$$Y=\{\ y\in\Re^m\ /\sum_{j=1}^{m}y_j=1,\ y_j\ge 0,\ j=1,...,m\ \}$$

El pago esperado del juego cuando los jugadores escogen sus estrategias mixtas $x\in X$ e $y\in Y$ viene dado por el vector $v(x,y)=x^tAy=(v_1(x,y),...,v_k(x,y))$ donde $v_s(x,y)=x^tA(s)y \qquad s=1,...,k$

Cada estrategia $x\in X$, (respectivamente $y\in Y$) define k niveles de seguridad $\underline{v}_s(x)$ (respectivamente $\overline{v}_s(y)$) como los pagos con respecto a cada criterio $v_s,\ s=1,...,k$ cuando JII (respectivamente JI) intenta maximizar (respectivamente minimizar) el criterio *s*. De aquí

$$\underline{v}_s(x)=\min_{y\in Y}v_s(x,y)=\min_{y\in Y}x^tA(s)y \qquad \overline{v}_s(y)=\max_{x\in X}v_s(x,y)=\max_{x\in X}x^tA(s)y$$

siendo el vector nivel de seguridad para cada jugador

$$\underline{v}(x)=(\underline{v}_1(x),...,\underline{v}_k(x)) \qquad \overline{v}(y)=(\overline{v}_1(y),...,\overline{v}_k(y))$$

Usando nuestra notación, introducimos la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima (POSS) establecidada por Ghose y Prasad (1989).

Definición 2.1. Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para JI si no existe $x \in X$ tal que $\underline{v}(x^*) \leq \underline{v}(x),\ \underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$. Una estrategia $y^* \in Y$ es una POSS para JII si no existe $y \in Y$ tal que $\overline{v}(y^*) \geq \overline{v}(y),\ \overline{v}(y^*) \neq \overline{v}(y)$.

Dada una estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad s-ésimo de JI viene dado por

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x,y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

El problema a resolver es un problema lineal escalar, por tanto, tiene una solución óptima entre los puntos extremos del poliedro *Y*. Por ello, podemos expresar

$$\underline{v}_s(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}(s) \quad \text{o matricialmente} \qquad \underline{v}_s(x) = \min\ x^t A(s)$$

Consideremos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo que llamamos el problema lineal del juego multicriterio (*PLJM)*

$$\begin{array}{lll} (PLJM) & \max & v_1,\dots,v_k \\ & s.t. & x^t A(s) \geq (v_s,\dots,v_s) \quad s = 1,\dots,k \\ & & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema 2.1. Una estrategia $x^* \in X$ es una POSS y $v^* = (v_1^*,\dots,v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado para JI si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema (PLJM). (Fernández y Puerto, 1996).

3. Juegos vectoriales restringidos

En esta sección vamos a analizar los juegos en los que los jugadores no pueden considerar todas sus estrategias mixtas, es decir, estas estrategias están sujetas a restricciones adicionales. Si estas restricciones vienen dadas mediante relaciones lineales, determinan un subconjunto poliédrico del conjunto de las estrategias mixtas. En esta situación, proponemos un procedimiento para resolver el juego restringido que consiste en resolver un juego no restringido cuya matriz se transforma en función de los puntos extremos de los nuevos conjuntos de estrategias.

Sea $A = (a_{ij}),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$, la matriz del juego vectorial de suma nula, con $a_{ij} = (a_{ij}(1),...,a_{ij}(k))$ y función de pagos $v(x,y) = x^t Ay = (v_1(x,y),...,v_k(x,y))$ donde $v_s(x,y) = x^t A(s)y,\ s = 1,...,k$. Los conjuntos de estrategias para JI y JII son respectivamente

$S = \{x \in X\ /\ x^t B \le b,\ B \in M_{nxr}, b \in R^r\}$ $\quad T = \{y \in Y\ /\ Dy \ge d,\ D \in M_{sxm}, d \in R^s\}$

Sean P y Q las matrices de puntos extremos de S y T respectivamente.

Teorema 3.1. Si a^* es una estrategia de seguridad Pareto-óptima del juego vectorial de suma nula de matriz $P^tAQ=(P^tA(1)Q,...,P^tA(k)Q)$ y v^* su vector de nivel de seguridad asociado para JI, entonces $x^* = Pa^*$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima del juego restringido de matriz A, y v^* su vector de nivel de seguridad para JI.

<u>Demostración</u>: Si $x \in S,\ y \in T$, entonces

$$x = Pa \text{ , donde } P \in M_{nxp} \quad a = (a_1,...,a_p) \quad \sum_{h=1}^{p} a_h = 1 \quad a_h \ge 0\ \forall h$$

$$y = Qb \text{ , donde } \quad Q \in M_{mxq} \quad b = (b_1,...,b_q) \quad \sum_{t=1}^{q} b_t = 1 \quad b_t \ge 0\ \forall t$$

Las POSS del jugador I se obtienen resolviendo el problema de maximización vectorial

$$\max_{x \in S}\ \{ (\min_{y \in T} x^t A(1)y,...,\min_{y \in T} x^t A(k)y)\}$$

que es equivalente al problema $\max_{a \in X'} \{ \min_{b \in Y'} a^t (P^t A(1)Q)b,...,\min_{b \in Y'} a^t (P^t A(k)Q)b)\}$ con

$$X' = \{a \in R^p\ /\ \sum_{h=1}^{p} a_h = 1 \quad a_h \ge 0\ \forall h\}\ \ Y' = \{ b \in R^q\ /\ \sum_{t=1}^{q} b_t = 1 \quad b_t \ge 0\ \forall t\}$$

de donde se sigue que si a^* es la solución de este problema, entonces $x^*=Pa^*$ es solución del problema inicial. ð

Obsérvese que esta manera de obtener las estrategias del juego restringido puede utilizarse cuando se consideran otros conceptos de solución como los puntos de equilibrio o las soluciones maximin. Asímismo, es aplicable a los juegos escalares restringidos donde el concepto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas coincide con el de estrategia maximin.

Un caso particular de este resultado general surge cuando el jugador no dispone de información sobre las estrategias del otro jugador, por lo que la matriz del juego transformado es P^tA. En este caso, el conjunto de POSS del juego restringido está formado por las POSS del juego original que verifican las restricciones y si existen POSS que no lo eran en el juego original, se encuentran sobre la frontera del conjunto que generan las nuevas restricciones.

Si el jugador dispone de información sobre las estrategias del otro jugador pero no restringe el conjunto de sus estrategias, entonces la matriz del juego transformado es *AQ*. En este caso, se modifican los niveles de seguridad que el jugador obtiene con cada una de sus estrategias (con respecto a los que obtiene en el juego original) dando lugar a una modificación en el conjunto de las POSS.

El resultado que establece el teorema anterior es especialmente útil cuando es fácil determinar los puntos extremos de los poliedros que generan las restricciones del juego. En ciertos casos particulares interesantes los puntos extremos se obtienen de forma directa (Mármol, Puerto y Fernández 1998a, Puerto y otros 2000). En el caso general, los puntos extremos de los poliedros de información pueden obtenerse de forma secuencial (Mármol, Puerto y Fernández, 1998b). A continuación analizaremos el tratamiento de los juegos en algunos de estos casos.

Una situación interesante es cuando los jugadores suponen un orden en las probabilidades con que adoptarán sus estrategias puras. Sin pérdida de generalidad, supongamos que JI jugará sus estrategias con probabilidades $x_1, x_2,..., x_n$ tales que $x_1 \geq x_2 \geq,...,\geq x_n$, y supone que su oponente jugará sus estrategias puras con probabilidades $y_1, y_2,..., y_m$ tales que $y_1 \geq y_2 \geq,...,\geq y_m$. Estas relaciones pueden expresarse matricialmente como $Nx \geq q$, $My \geq q$, donde

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

con $N \in M_{nxn}, M \in M_{mxm}$, es decir los conjuntos de información son $S = \{x \in X,\ Nx \geq 0,\ N \in M_{nxn}\}$, $T = \{ y \in Y,\ My \geq 0,\ M \in M_{mxm} \}$.

Estas matrices tienen inversa no negativa, por lo que los puntos extremos de los conjuntos *S* y *T* son, respectivamente, las columnas de la matriz N^{-1}, M^{-1}, normalizadas para sumar la unidad (ver Carrizosa y otros, 1995). Esto es, las matrices de puntos extremos de *S* y *T* son:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/m \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/m \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/m \end{pmatrix}$$

Las *k* matrices que determina el juego transformado son $B(s) = P^t A(s)Q$, $s = 1,..., k$, cuyos elementos son $b_{ij}(s) = \frac{1}{j}\frac{1}{i}\sum_{r=1}^{j}\sum_{t=1}^{i} a_{tr} \quad i = 1,\ldots,n \quad j = 1,\ldots,m$

Nótese que no es necesario que existan n y m relaciones respectivamente, pues en caso de existir menos, introducimos las relaciones naturales $x_i \geq 0,\ y_j \geq 0$, que sean independientes con las anteriores.

En general, las restricciones adicionales sobre el conjunto de las estrategias de un jugador, pueden expresar comparaciones entre la probabilidad que se asigna a una estrategia y combinaciones lineales de las restantes, es decir se incorporan al juego relaciones de la forma $x_i \geq \sum_{i \neq j} m_{ij} x_j$.

Siempre que la matriz que establece estas condiciones tenga inversa no negativa, el conjunto de puntos extremos que determinan las relaciones viene dado por las columnas de su matriz inversa normalizadas para sumar la unidad, por lo que la información que proporcionan puede incorporarse fácilmente al juego.

Otro tipo de restricciones que puede tratarse de esta forma son las que establecen relaciones intervalares en las probabilidades, relaciones de orden con factor de discrimación, y en general, relaciones lineales no homogéneas .

4. Ejemplo: Campaña publicitaria competitiva.

En esta sección analizamos un modelo de interacción estratégica entre empresas, cuando éstas deben planificar una campaña publicitaria.

Dos empresas disponen de un millón de unidades monetarias (u.m.) cada una para gastar en publicidad de sus productos. Pueden utilizar radio, televisión y prensa escrita para realizar su campaña publicitaria que va a ir dirigida a tres grupos de clientes potenciales, es decir, la publicidad va a tener efecto en tres escenarios distintos. El resultado esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente matriz

	Radio	Televisión	Prensa
Radio	(0, -0.2, 1)	(-0.5, 1, 1.2)	(0, 1.5, 1.5)
Televisión	(2, 0.5, 0.7)	(-0.5, 0.8, 0.7)	(1.5, 1.1, 0.3)
Prensa	(1, 1.2, -0.5)	(-0.5, 0.4, 0)	(0, 0.7, 0.2)

Cada entrada de la matriz de pagos es un vector cuyas componentes representan la cantidad de ingreso extra obtenido en cada grupo cuando cada empresa gasta su dinero en los diferentes medios. La empresa valora sus estrategias mediante los pagos que consigue con ellas.

Este modelo puede analizarse como un juego matricial multicriterio (Mármol y Monroy, 1999), donde la matriz de pagos vectoriales se descompone en las tres matrices siguientes

$$A(1)=\begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A(2)=\begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.8 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad A(3)=\begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ -0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Una estrategia mixta $x=(x_1,x_2,x_3)$ para una empresa representa la probabilidad con que debe considerar cada medio para realizar su publicidad, o bien la proporción de la cantidad total de dinero que debe gastar en cada medio. Resolviendo el problema lineal multiobjetivo asociado mediante el programa ADBASE obtenemos las siguientes estrategias de seguridad Pareto-óptimas extremas y los correspondientes vectores de nivel de seguridad asociados para la empresa 1:

$x^1 = (0, 8/11, 3/11)$ $v^1 = (-1/2, 342/495, 3/11)$

$x^2 = (1/18, 62/99, 7/22)$ $v^2 = (-1/2, 677/990, 663/1980)$

$x^3 = (4/9, 5/9, 0)$ $v^3 = (-1/2, 17/90, 75/90)$

$x^4 = (1, 0, 0)$ $v^4 = (-1/2, -1/5, 1)$

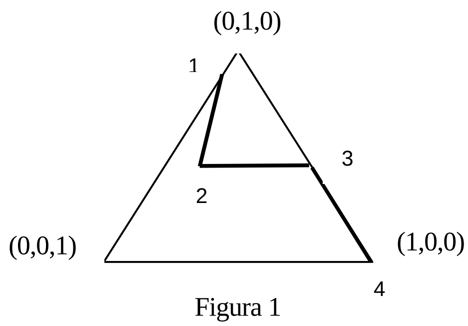

Figura 1

La figura 1 representa el espacio de estrategias mixtas de la empresa 1, donde los vértices de este triángulo corresponden a las tres estrategias puras. La empresa debe utilizar alguna de las estrategias que esté en la línea poligonal que une los puntos 1 y 4.

Por ejemplo, la estrategia x^3 = (4/9, 5/9, 0) indica que utilizando la radio con probabilidad 4/9 y la televisión con probabilidad 5/9, se asegura una disminución de ingresos de no más de 1/2 en el primer segmento de la población y un aumento de ingresos de al menos 17/90 y 75/90 en el segundo y tercero respectivamente, y estos niveles no son mejorables conjuntamente.

Supongamos que ambas empresas realizan un estudio de mercado que indica que la distribución de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias puras debe someterse a las ordenaciones $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, $y_1 \geq y_2 \geq y_3$, respectivamente. En esta situación, los conjuntos de estrategias para ambas empresas son respectivamente

$$S = \{x \in X / x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\} \qquad T = \{y \in Y / y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0\}$$

Estos conjuntos pueden representarse en función de sus puntos extremos como

$$S = \{x \in X / x = Pa,\ a \in R^3,\ \sum_{i=1}^{3} a_i = 1,\ a_i \geq 0,\ i = 1,2,3\}$$

$$T = \{y \in Y / y = Pb,\ b \in R^3,\ \sum_{j=1}^{3} b_j = 1,\ b_j \geq 0,\ j = 1,2,3\}$$

siendo P la matriz de puntos extremos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

El problema se transforma en un juego multicriterio sin restringir que determina tres matrices

$$P^t A(1) P = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & -0.16 \\ 1 & 0.25 & 0.4 \\ 1 & 0.25 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P^t A(2) P = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.4 & 0.77 \\ 0.15 & 0.52 & 0.78 \\ 0.5 & 0.62 & 0.77 \end{pmatrix} \quad P^t A(3) P = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 1.23 \\ 0.85 & 0.9 & 0.9 \\ 0.4 & 0.52 & 0.57 \end{pmatrix}$$

Las soluciones extrema eficientes del problema lineal multiobjetivo asociado proporcionan las siguientes POSS del juego restringido y sus niveles de seguridad asociados:

$x^1 = (1/2, 1/2, 0) \qquad v^1 = (0.25, 0.15, 0.85)$

$x^2 = (0.72, 0.28, 0) \qquad v^2 = (0.036, 0, 0.914)$

$x^3 = (1/3, 1/3, 1/3) \qquad v^3 = (0.25, 0.5, 0.4)$

$x^4 = (3/4, 1/4, 0) \qquad v^4 = (0, -0.025, 0.925)$

$x^5 = (1, 0, 0) \qquad v^5 = (-0.25, -0.2, 1)$

Obsérvese que la estrategia pura, (1,0,0) que es una POSS del juego original, también lo es cuando el jugador I dispone de la información anterior. Sin embargo, el tener información sobre cómo jugará el otro jugador sus estrategias hace que mejore el vector de niveles de seguridad asociado.

Consideremos ahora el caso en el que sólo la empresa 2 realiza el estudio de mercado que establece la ordenación $y_1 \geq y_2 \geq y_3$, y que la empresa 1 dispone de dicha información. Los conjuntos de estrategias de las empresas 1 y 2 son, respectivamente *S*=*X* y $T = \{y \in Y / y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0\}$, por lo que el juego transformado determina las matrices

$$A(1) P = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & -0.16 \\ 2 & 0.75 & 1 \\ 1 & 0.25 & 0.16 \end{pmatrix} \quad A(2) P = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.4 & 0.77 \\ 0.5 & 0.65 & 0.8 \\ 1.1 & 0.8 & 0.77 \end{pmatrix} \quad A(3) P = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 1.23 \\ 0.7 & 0.7 & 0.57 \\ -0.5 & -0.25 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que en esta situación, la valoración que hace la empresa 1 de sus estrategias, cuando la empresa 2 juega su primera estrategia, es la misma que en el juego original. Si la empresa 2 utiliza su segunda estrategia, la valoración que hace la empresa 1 de sus estrategias viene dada por la media de los pagos que obtiene, en el juego original, con la primera y segunda estrategias de la empresa 2. Si la empresa 2 utiliza su tercera estrategia, la valoración que hace la empresa 1 es la media de los pagos que obtiene con la primera, segunda y tercera estrategias de la empresa 2, en el juego original.

Las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del juego restringido y sus correspondientes niveles de seguridad asociados son:

$x^1 = (0, 1, 0)$ $\quad v^1 = (0.75, 0.5, 0.57)$

$x^2 = (0.365, 0.635, 0)$ $\quad v^2 = (0.385, 0.244, 0.809)$

$x^3 = (0, 0.75, 0.25)$ $\quad v^3 = (0.624, 0.675, 0.398)$

$x^4 = (0.715, 0.285, 0)$ $\quad v^4 = (0.035, 0, 0.914)$

$x^5 = (0, 0.727, 0.272)$ $\quad v^5 = (0.614, 0.691, 0.373)$

$x^6 = (0.75, 0.25, 0)$ $\quad v^6 = (0, -0.025, 0.925)$

$x^7 = (0, 0.417, 0.583)$ $\quad v^7 = (0.458, 0.737, 0)$

$x^8 = (1, 0, 0)$ $\quad v^8 = (0.25, -0.2, 1)$

$x^9 = (0, 0.25, 0.75)$ $\quad v^9 = (0.375, 0.762, -0.198)$

$x^{10} = (0, 0.185, 0.815)$ $\quad v^{10} =(0.32, 0.772, -0.278)$

Supongamos ahora que sólo la empresa 1 realiza el estudio de mercado que establece la ordenación $x_1 \geq x_2 \geq x_3$. En este caso, los conjuntos de estrategias de las empresas 1 y 2 son, respectivamente $S = \{x \in X / x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$, $T = Y$, por lo que el juego transformado determina las matrices

$$P^t A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0.75 \\ 1 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad P^t A(2) = \begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1.5 \\ 0.15 & 0.9 & 1.3 \\ 0.5 & 0.73 & 1.1 \end{pmatrix} \quad P^t A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.85 & 0.95 & 0.9 \\ 0.4 & 0.63 & 0.66 \end{pmatrix}$$

La empresa 1 valora sus estrategias mediante los pagos que consigue con ellas, lo que significa que valora su primera estrategia con los pagos del juego original. Su segunda estrategia la valora por la media de los pagos que le proporciona su primera y segunda estrategia en el juego sin restringir. La valoración de la tercera estrategia viene dada por la media de los pagos que consigue con su primera, segunda y tercera estrategias, en el juego original.

Las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del juego restringido y sus correspondientes niveles de seguridad asociados son:

$x^1 = (1/3, 1/3, 1/3)$ $\quad v^1 = (-0.5, 0.5, 0.4)$

$x^2 = (1/2, 1/2, 0)$ $\quad v^2 = (-0.5, 0.15, 0.85)$

$x^3 = (18/25, 7/25, 0)$ $\quad v^3 = (0.5, 0, 0.92)$

$x^4 = (1, 0, 0)$ $\quad v^4 = (-0.5, -0.2, 1)$

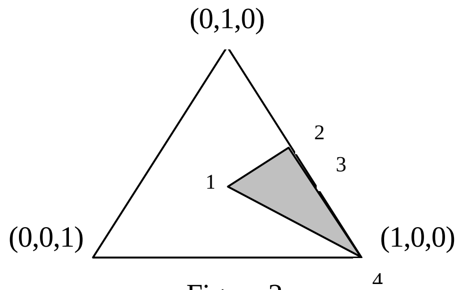

Figura 2

La zona sombreada de la figura 2 representa el espacio de estrategias de la empresa 1, que verifican las restricciones adicionales. Los puntos 1, 2, 3 y 4 representan las POSS para dicha empresa.

Obsérvese que en este caso la estrategia (1,0,0) que era una POSS en el juego original, también lo es en el juego restringido. Además, los niveles de seguridad de cada estrategia no cambian con respecto al problema original.

5. Conclusiones

La incorporación de información adicional sobre la distribución de probabilidad de las estrategias puras en un juego matricial multicriterio, se puede hacer resolviendo un problema lineal multiobjetivo, en el que se incorpora dicha información transformando las matrices de pagos del juego original. En los casos particulares en los que se dispone de ordenaciones sobre la frecuencia de utilización de las estrategias, las valoraciones de éstas vienen dadas por la media de la suma acumulada de las valoraciones originales. Esta manera de resolver los juegos restringidos multicriterio no conlleva un aumento en la carga computacional.

6. Referencias

Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F.R., Puerto, J. (1995): "Multicriteria Analysis with Partial Information about the Weighting Coefficients". *European Journal of Operations Research*, Vol. 81, pp. 291-301.

Chandra, S., Durga Prasad, M.V. (1992): "Constrained Vector Valued Games and Multiobjective Programming". *Opsearch,* Vol. 29, Nº 1, pp. 1-10.

Charnes, A. (1953): "Constrained Games and Linear Programming". *Proceeding of the National Academy of Science,* Vol. 39, pp. 639-641.

Fernández, F.R., Puerto, J. (1996): "Vector Linear Programming in Zero-sum Multicriteria Matrix Games". *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 89, pp. 115-127.

Ghose, D., Prasad, U.R. (1989): "Solution Concepts in Two-Person Multicriteria Games". *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 63, Nº2, pp. 167-189.

Mármol, A.M., Puerto, J., Fernández, F.R. (1998a): "The Use of Partial Information on Weights in Multicriteria Decision Problems". *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, Vol. 7, pp. 322-329.

Mármol, A.M., Puerto, J., Fernández, F.R. (1998b): "Sequential Incorporation of Imprecise Information in Multiple Criteria Decision Processes". *Prepublicación 1/98*. Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Mármol, A.M., Monroy, L. (1999): "Aplicaciones Económicas". En *Avances en Teoría de Juegos con Aplicaciones Económicas y Sociales*, J.M. Bilbao, F.R. Fernández Eds. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla.

Monroy, L. (1996): "Análisis de Juegos Bipersonales con Pagos Vectoriales*". Tesis Doctoral.* Dpto. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Sevilla.

Puerto, J., Mármol, A.M., Monroy, L., Fernández, F.R. (2000): "Decision Criteria with Partial Information ". *International Transactions in Operational Research*. Vol. 7, pp. 51-65.

Singh, N., Rueda, N. (1994): "Constrained Vector Valued Games and Generalized Multiobjective Minmax Programming". *Opsearch,* Vol. 31, Nº 2, pp. 144-154