Convergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes Globalmente Modificadas con retardo a las ecuaciones de Navier-Stokes

Antonio Miguel Márquez-Durán

Dpto. de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica, Universidad Pablo de Olavide

ammardur@upo.es

Pedro Marín-Rubio & José Real

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla

pmr@us.es, jreal@us.es

Resumen

En esta comunicación demostramos que, bajo ciertas hiótesis, de una sucesión de soluciones del modelo Navier-Stokes Globalmente Modificado con retardo podemos extraer una subsucesión que converge en un sentido adecuado a una solución débil del correspondiente modelo de Navier-Stokes en dimensión tres. También se analiza el caso en el que aparecen retardos distintos en los problemas aproximantes.

1. Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado con frontera regular Γ. Para cada $N \in (0, +\infty)$ definimos $F_N : [0, +\infty) \to (0, 1]$ por

$$F_N(r) := \text{mín}\left\{1, \frac{N}{r}\right\}, \quad r \in [0, +\infty),$$

y consideramos el siguiente sistema de ecuaciones globalmente modificadas de Navier-Stokes en Ω, con retardo y condición de forntera de tipo Dirichlet homogénea:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + F_N\left(\|u\|\right)[(u\cdot\nabla)u] + \nabla p = G(t, u(t-\rho(t))), \text{ en } (0,T)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u \ = 0, \quad \text{en} \quad (0,T)\times\Omega, \\ u = 0, \quad \text{en } (0,T)\times\Gamma, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u(t,x) = \phi(t,x), \quad \text{en} \quad (-h,0)\times\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde u y p son las incógnitas del problema y representan el campo de velocidades del fluido y la presión, respectivamente, y como datos tenemos $\nu > 0$, la viscosidad cinemática, $T > 0$ un tiempo final, el término $G(t, u(t - \rho(t)))$, que representa una fuerza externa dependiente del valor $u(t - \rho(t))$, donde $0 \leq \rho(t) \leq h$, con $h > 0$, es una función retardo, u_0 un valor inicial del campo de velocidades y ϕ un campo de velocidades definido en $(-h, 0)$.

Las ecuaciones de Navier-Stokes Globalmente Modificadas, en el caso sin retardo, fueron introducidas y estudiadas en [1] (véase también [2, 3, 7, 8, 9, 12] y [6]). Sin embargo, existen situaciones en las cuales el modelo está mejor descrito si aparecen en las ecuaciones algunos términos conteniendo retardos.

El sistema (1) ha sido estudiado en [4], donde la existencia, unicidad y comportamiento asintótico de la solución $u^{(N)} = u^{(N)}(\cdot; u_0, \phi)$ fue analizado (ver también [10] para el caso de retardo infinito).

Este sistema es una modificación del siguiente sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, con retardo y condición de frontera de tipo Dirichlet homogénea:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = G(t, u(t - \rho(t))), \quad \text{en} \ \ (0,T) \times \Omega, \\ \nabla \cdot u \ = 0, \quad \text{en} \ \ (0,T) \times \Omega, \\ u = 0, \ \ \text{en} \ (0,T) \times \Gamma, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \ \ \text{en} \ \ \Omega, \\ u(t,x) = \phi(t,x), \ \ \text{en} \ (-h, 0) \times \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

que ha sido estudiado en [5], entre otros trabajos.

En esta comunicación demostramos, en particular, que bajo determinadas hipótesis, de la familia de soluciones $\{u^{(N)}(\cdot; u_0, \phi) : \ N > 0\}$, podemos extraer una sucesión $\{u^{(N_j)}(\cdot; u_0, \phi) : \ j = 1, 2, ...\}$, con $N_j \to +\infty$, que converge en un sentido adecuado a una solución débil de (2). De esta forma extendemos el resultado obtenido en [1] para el caso sin retardo.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la sección 2 introducimos algunos preliminares en el marco abstracto para tratar el problema y las hipótesis básicas bajo las cuales se tiene bien planteado el problema aproximante, de modo que estimaciones adicionales pueden ser obtenidas. En la sección 3 establecemos nuestro resultado principal de convergencia de una sucesión de soluciones del problema aproximante a una solución débil del problema sin modificación (2). Finalmente, se analiza el caso en el que aparecen retardos diferentes en los problemas aproximantes.

2. Preliminares

Para formular nuestro problema en un marco abstracto, consideramos los siguientes espacios funcionales (ver, por ejemplo, [13]):

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \operatorname{div} u \ = 0 \right\},$$

H = la clausura de $\mathcal{V}$ en $(L^2(\Omega))^3$ con el producto $(\cdot,\cdot)$ y norma asociada $|\cdot|$, donde para $u, v \in (L^2(\Omega))^3$,

$$(u,v) = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega u_j(x) v_j(x) \mathrm{d}x,$$

V = la clausura de $\mathcal{V}$ en $(H_0^1(\Omega))^3$ con el producto escalar $((\cdot,\cdot))$ y norma asociada $\|\cdot\|$, donde para $u, v \in (H_0^1(\Omega))^3$,

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathrm{d}x.$$

Usaremos $\|\cdot\|_*$ para la norma en V' y $\langle \cdot,\cdot \rangle$ para la dualidad entre V y V'. Finalmente, identificaremos cada $u \in H$ con el elemento $f_u \in V'$ dado por

$$\langle f_u, v \rangle = (u,v) \quad \text{for all } v \in V.$$

Se tiene que $V \subset H \subset V'$, donde las inyecciones son densas y compactas.

Ahora definimos

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx,$$

para cualesquiera funciones medibles u, v, w definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}^3$ y cumpliendo que las integrales en el segundo miembro de la igualdad anterior son finitas. En particular, b es una forma trilineal continua en $V \times V \times V$.

Denotamos

$$b_N(u,v,w) = F_N(\|v\|) b(u,v,w), \quad \forall\, u, v, w \in V.$$

La forma b_N es lineal en u y w, pero no lo es v. Evidentemente, tenemos $b_N(u,v,v) = 0$, para cualesquiera $u, v \in V$. Además, de las propiedades de b (véase [13]), y la definición de F_N, se obtiene fácilmente la existencia de una constante $C_1 > 0$, sólo dependiente de Ω, tal que

$$|b_N(u,v,w)| \leq NC_1 \|u\| \|w\|, \quad \forall\, u, v, w \in V.$$

Así, si denotamos

$$\langle B_N(u,v), w \rangle = b_N(u,v,w), \quad \forall\, u, v, w \in V,$$

tenemos

$$\|B_N(u,v)\|_* \leq NC_1 \|u\|, \quad \forall\, u, v \in V. \tag{3}$$

También consideramos $A : V \to V'$ definido por $\langle Au, v \rangle = ((u,v))$. Denotando $D(A) = (H^2(\Omega))^3 \cap V$, entonces $Au = -P\Delta u, \forall\, u \in D(A)$, es el operador de Stokes (P es el operador de proyección de $(L^2(\Omega))^3$ en H).

Además, suponemos dada una aplicación $G : (0,T) \times H \to H$ tal que c1) $G(\cdot, u) : (0,T) \to H$ es medible, $\forall u \in H$,

c2) existe una función no negativa $g \in L^p(0,T)$ para algún $1 \le p \le +\infty$, y una función no decreciente $L : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, tal que para todo $R > 0$, si $|u|, |v| \le R$, entonces

$$|G(t,u) - G(t,v)| \le L(R) g^{1/2}(t) |u - v|,$$

p.c.t. $t \in (0,T)$, y

c3) existe una función no negativa $f \in L^1(0,T)$, tal que para cualquier $u \in H$,

$$|G(t,u)|^2 \le g(t) |u|^2 + f(t), \quad \text{p.c.t. } t \in (0,T).$$

Finalmente, suponemos $\phi \in L^{2p'}(-h,0;H)$ y $u_0 \in H$, donde $1/p + 1/p' = 1$. En esta situación, consideramos una función retardo $\rho \in C^1([0,T])$ tal que $0 \le \rho(t) \le h$ para todo $t \in [0,T]$, y existe una constante ρ_* verificando

$$\rho'(t) \le \rho_* < 1, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Definición 2.1. *Sean $u_0 \in H$ y $\phi \in L^{2p'}(-h,0;H)$ dados. Una solucioń débil de (1) es una función $u \in L^{2p'}(-h,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ tal que*

$$\begin{aligned} & (u(t),w) + \nu \int_0^t ((u(s),w))\, ds + \int_0^t b_N\,(u(s),u(s),w)\; ds \\ = \quad & (u_0,w) + \int_0^t (G(s,u(s-\rho(s))),w)\; ds, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ y todo $w \in V$, y coincide con $\phi(t)$ c.p.d. en $(-h,0)$.

Observación 2.1. *La definición de solución débil de (2) es análoga a la Definición 2.1, pero con b en lugar de b_N.*

Observación 2.2. *Si u es una solución débil de (1) y definimos $\tilde{g}(t) = g(\theta^{-1}(t))$, donde $\theta : [0,T] \to [-\rho(0), T-\rho(T)]$ es función derivable y estrictamente creciente dada por $\theta(s) = s - \rho(s)$, entonces, por c3), obtenemos*

$$\int_0^T |G(t,u(t-\rho(t)))|^2\, dt \le \frac{1}{1-\rho_*} \int_{-\rho(0)}^{T-\rho(T)} \tilde{g}(t) |u(t)|$$

y por tanto, teniendo en cuenta el hecho de que $\tilde{g} \in L^p(-\rho(0), T-\rho(T))$ y $u \in L^{2p'}(-h,T;H) \cap L^\infty(0,T;H)$, tenemos que $G(\cdot, u(\cdot - \rho(\cdot)))$ pertenece a $L^2(0,T;H)$.

Entonces, como $u \in L^2(0,T;V)$ y satisface la ecuación

$$u'(t) + \nu A u(t) + B_N(u(t),u(t)) = G(t,u(t-\rho(t))),$$

en $\mathcal{D}'(0,T;V')$, como una consecuencia de (3), $u' \in L^2(0,T;V')$, y por tanto (ver [13]) $u \in C([0,T];H)$ y satisface la igualdad de la energía

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_s^t \|u(r)\|^2\, dr = |u(s)|^2 + 2 \int_s^t (G(r,u(r-\rho(r))),u(r))\, dr,$$

para cualesquiera $0 \le s,t \le T$.

En [4] se demuestra el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones de (1).

Teorema 2.1. *Supongamos que se verifican las hipótesis c1)-c3), y que* $u_0 \in H$ *y* $\phi \in L^{2p'}(-h,0;H)$ *están dados. Entonces, existe una única solución débil* $u = u(\cdot; u_0, \phi)$ *de (1) que es, de hecho, una solución fuerte, en el sentido de que*

$$u \in C([\varepsilon, T]; V) \cap L^2(\varepsilon, T; D(A)),$$

para todo $0 < \varepsilon < T$.

Además, si $u_0 \in V$, *entonces*

$$u \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(A)).$$

3. Convergencia hacia las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes

El principal resultado de esta comunicación es el siguiente. Para la prueba consúltese [11].

Teorema 3.1. *Supongamos que se verifican las hipótesis c1)-c3), y consideramos la sucesión* $\{u^{(N_k)} = u^{(N_k)}(\cdot; u_0^{(N_k)}, \phi^{(N_k)}) : k = 1, 2, ...\}$, *donde* $N_k \to +\infty$ *cuando* $k \to +\infty$, *sucesión de soluciones débiles de (1) con* $N = N_k$, *y con dato inicial verificando* $u_0^{(N_k)} \rightharpoonup u_0$ *débilmente en* H, $\phi^{(N_k)} \to \phi$ *fuerte en* $L^{\frac{2p}{2p-1}}(-h, 0; H)$ *cuando* $k \to +\infty$, *y la sucesión* $\{\phi^{(N_k)} : k = 1, 2, ...\}$ *acotada en* $L^{2p'}(-h, 0; H)$.

Entonces, existe una subsucesión $\{u^{(N_j)} : j = 1, 2, ...\} \subset \{u^{(N_k)} : k = 1, 2, ...\}$, *con* $N_j \to +\infty$, *que converge débil-estrella en* $L^\infty(0, T; H)$, *débilmente en* $L^2(0, T; V)$, *débil-estrella en* $L^{2p'}(-h, T; H)$, *fuerte en* $L^{\frac{2p}{2p-1}}(-h, T; H)$, *y fuerte en* $L^2(0, T; H)$, *a una solución débil de (2).*

Con una adecuada modificación de la demostración del Teorema 3.1, es posible probar el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Supongamos que* $G(\cdot, \cdot) : (-h, T+h) \times H \to H$ *es continua, y se tienen las condiciones c2) y c3) con* $p = 1$. *Sea* $\{\rho^{(N_k)} : k = 1, 2, ...\} \subset C^1([-h, T+h])$, *donde* $N_k \to +\infty$ *cuando* $k \to +\infty$, *una sucesión de funciones tales que* $0 \le \rho^{(N_k)}(t) \le h$ *para todo* $t \in [-h, T+h]$ *y para cualquier* $k \ge 1$, *existen constantes* $\rho_* < 1$ *y* $\rho^* \ge 0$ *verificándose*

$$-\rho^* \le (\rho^{(N_k)})'(t) \le \rho_* \quad \textit{para todo } t \in [-h, T+h] \textit{ y cualquier } k \ge 1,$$

y

$$\rho^{(N_k)} \to \bar{\rho}(t) \quad \textit{uniformemente en } C^1([-h, T+h]) \textit{ cuando } k \to +\infty.$$

Para cada $k \ge 1$, *denotamos por* $u^{(N_k)}$, *la correspondiente solución débil de (1) con* $N = N_k$, $\rho = \rho^{(N_k)}$, *y con dato inicial* $(u_0^{(N_k)}, \phi^{(N_k)})$ *tal que* $u_0^{(N_k)} \rightharpoonup u_0$

débilmente en H, $\phi^{(N_k)} \to \phi$ fuerte en $L^2(-h,0;H)$ as $k \to +\infty$, y la sucesión $\{\phi^{(N_k)} : k = 1,2,...\}$ es acotada en $L^\infty(-h,0;H)$.

Entonces, existe una subsucesión $\{u^{(N_j)} : j = 1,2,...\} \subset \{u^{(N_k)} : k = 1,2,...\}$, con $N_j \to +\infty$, que converge débil-estrella en $L^\infty(-h,T;H)$, débilmente en $L^2(0,T;V)$, y fuerte en $L^2(-h,T;H)$, a una solución débil de (2) con $\rho = \bar{\rho}$.

Sección en el CEDYA 2011: EDP

Bibliografía

[1] T. Caraballo, P. E. Kloeden, and J. Real, *Unique strong solutions and V-attractors of a three dimensional system of Globally Modified Navier-Stokes equations*, Adv. Nonlinear Stud. **6** (2006), 411–436.

[2] T. Caraballo, P. E. Kloeden, and J. Real, *Addendum to the paper "Unique strong solutions and V-attractors of a three dimensional system of Globally Modified Navier-Stokes equations", Advanced Nonlinear Studies 6 (2006), 411–436*, Adv. Nonlinear Stud. **10** (2010), 245–247.

[3] T. Caraballo, P. E. Kloeden, and J. Real, *Invariant measures and statistical solutions of the globally modified Navier-Stokes equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **10** (2008), 761–781.

[4] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, *Three dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations with delay*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **20** (2010), 2869–2883.

[5] T. Caraballo and J. Real, *Navier-Stokes equations with delays*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **457** (2001), 2441–2453.

[6] P. E. Kloeden, T. Caraballo, J. A. Langa, J. Real, and J. Valero, *The three dimensional globally modified Navier-Stokes equations,* in Mathematical Problems in Engineering Aerospace and Sciences, Vol. 3, Chapter 2, Eds.: S. Sivasundaram, J. Vasundhara Devi, Zahia Drici and Farzana Mcrae, Cambridge Scientific Publishers, 2009.

[7] P. E. Kloeden, J. A. Langa, and J. Real, *Pullback V-attractors of a three dimensional system of nonautonomous globally modified Navier-Stokes equations: Existence and finite fractal dimension*, Commun. Pure Appl. Anal. **6** (2007), 937–955.

[8] P. E. Kloeden, P. Marín-Rubio, and J. Real, *Equivalence of Invariant measures and Stationary Statistical solutions for the autonomous globally modified Navier-Stokes equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), 785–802.

[9] P. E. Kloeden and J. Valero, *The weak connectedness of the attainability set of weak solutions of the 3D Navier-Stokes equations*, Proc. Roy. Soc. London A **463** (2007), 1491–1508.

[10] P. Marín-Rubio, A. M. Márquez, and J. Real, *Three dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations with infinite delays,* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **14** (2010), 655–673.

[11] P. Marín-Rubio, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, *On the convergence of solutions of Globally Modified Navier-Stokes equations with delays to solutions of Navier-Stokes equations with delays*, Adv. Nonlinear Stud. Por aparecer.

[12] M. Romito, *The uniqueness of weak solutions of the globally modified Navier-Stokes equations*, Adv. Nonlinear Stud. **9** (2009), 425–427.

[13] R. Temam, Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2001.