XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Equi-atracción y dependencia continua de atractores para ecuaciones con retardo

P. E. Kloeden[1], P. Marín-Rubio[2]

[1] *FB Mathematik, Johann Wolfgang Goethe Universität, D-60054 Frankfurt am Main, Germany. E-mail:* kloeden@math.uni-frankfurt.de.
[2] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mail:* pmr@us.es.

Palabras clave: Dependencia continua de atractores, equi-atracción, ecuaciones con retardo

Resumen

En esta comunicación se presentan brevemente los resultados del trabajo [3]: condiciones de equivalencia sobre la continuidad de atractores para semiflujos generados por ecuaciones diferenciales con retardo planteadas en (potencialmente) distintos espacios de fase. Dichas condiciones, basadas en el concepto de equi-atracción, son una extensión de trabajos previos debidos a Li y Kloeden (e.g. [4]), y requieren previamente la inmersión de todos los sistemas dinámicos en un marco que los englobe, y la reinterpretación correcta de las condiciones entre los espacios originales y éste último. Se añaden ejemplos que ilustran la teoría.

1. Introducción

La semi-continuidad superior de atractores con respecto a parámetros es un resultado bien conocido en la teoría de sistemas dinámicos. Sin embargo, en general, la semi-continuidad inferior, y por tanto la continuidad, no suele tenerse sin hipótesis adicionales, las cuáles usualmente se establecen en términos de la estructura del atractor.

Una aproximación al problema la constituye un reciente trabajo de Li y Kloeden [4] donde se muestra que la dependencia continua del parámetro es equivalente a una propiedad de equi-atracción de los atractores parametrizados. Este tipo de resultados también se pueden aplicar al caso de ecuaciones con retardo fijo, aunque existe poco escrito sobre ecuaciones en las que el parámetro influye directamente en el retardo y por tanto en el propio espacio de fases.

Nuestro objetivo es mostrar que la dependencia continua de atractores globales $\mathcal{A}_\tau$ de sistemas dinámicos $S^{(\tau)}(t)$ sobre el espacio $C([-\tau,0];Z)$ con Z un espacio de Banach y un tiempo de retardo $\tau \in [T_*, T^*]$, donde $T_* > 0$, es equivalente a una propiedad de equi-atracción de los atractores. Para ello, resumimos brevemente los principales ingredientes de [4].

Sean λ un parámetro en un espacio métrico compacto (Λ, D_Λ) y $\{S_t^{(\lambda)},\ t \in \mathbb{R}_+\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de sistemas dinámicos definidas sobre un espacio métrico completo (X, d). Definimos $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$ para cualquier $x \in X$ y $A \subset X$, y denotamos $B_X(a, r)$ la bola abierta en X de centro a y radio r; asimismo notamos por $P(X)$ y $C(X)$ las clases de los conjuntos no vacíos y cerrados no vacíos de X, respectivamente. Además, denotamos las semidistancia y distancia de Hausdorff en X, respectivamente, por

$$H_X^*(A, B) = \sup_{x\in A} d(x, B), \qquad H_X(A, B) = \text{máx}\,\{H_X^*(A, B), H_X^*(B, A)\}$$

para cualesquiera cerrados no vacíos A y B de X.

Definición 1 *Un compacto no vacío $\mathcal{A}$ de X se dice atractor global de un sistema dinámico $\{S_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ en X (i.e. un semi-grupo de aplicaciones con $S_t : X \to X$ continua para cada $t \geq 0$) si es invariante, i.e. $S_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, y atrae conjuntos acotados B de X, i.e.*

$$H_X^*(S_t(B), \mathcal{A}) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Definición 2 *Sea $\{S_t^{(\lambda)},\ \lambda \in \Lambda\}$ una familia de sistemas dinámicos de X. Se dice que la familia es*

(i) **equi-disipativa** *en X si existe un conjunto acotado $\mathcal{U}$ de X tal que para cualquier acotado $B \subset X$, existe un $T_B \in \mathbb{R}_+$ independiente de $\lambda \in \Lambda$ tal que*

$$S_t^{(\lambda)}(B) \subset \mathcal{U}, \qquad t \geq T_B;$$

(ii) **eventualmente equi-compacta** *(o uniformemente compacta para t grandes en* [4]*) si para cualquier acotado B de X, existe un $T_B \in \mathbb{R}_+$ independiente de $\lambda \in \Lambda$ tal que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_t^{(\lambda)}(B)$ es relativamente compacto en X para cualquier $t \geq T_B$.*

Teorema 3 [4, Th.2.9] *Supongamos que la familia de sistemas dinámicos $\{S_t^{(\lambda)}, \lambda \in \Lambda\}$ de X es equi-disipativa y eventualmente equi-compacta y que $\mathcal{A}_\lambda$ es el atractor global de $S_t^{(\lambda)}$ para $\lambda \in \Lambda$. Supongamos además que se tiene que*

(A1) *para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$ fijo, $S_t^{(\lambda)}(x)$ es conjuntamente continua en (x, λ) en $X \times \Lambda$.*

(A2) *$S_t^{(\lambda)}(x)$ es equi-continua en λ para (t, x) en cualquier acotado de $\mathbb{R}_+ \times X$.*

Entonces $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ es equi-atrayente (i.e. dado cualquier conjunto acotado $B \subset X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\tau = \tau(B, \varepsilon) > 0$ tal que $H_X^*(S_t^{(\lambda)}B, \mathcal{A}_\lambda) < \varepsilon$, $\forall t \geq \tau\ \forall\lambda$) **si y sólo si** *$\mathcal{A}_\lambda$ es continua en λ con respecto a la distancia de Hausdorff.*

Observación 4 *La equivalencia anterior también se tiene si* (A2) *es reemplazada por:*

(A2') *$S_t^{(\lambda)}(x)$ es equi-continua en λ para t en cualquier acotado de $\mathbb{R}_+$ y x en cualquier acotado de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.*

Teorema 5 [4, Th.2.7] *Supongamos dada una familia* $\{S_t^{(\lambda)}, \lambda \in \Lambda\}$ *tal que es equi-disipativa y eventualmente equi-compacta y se cumplen las condiciones* (A1) *y*

(A3) *Para cualesquiera acotado* B *de* X *y* $T > 0$, $S_t^{(\lambda)} x$ *es uniformemente continuo en* $x \in B$ *de forma uniforme con respecto a* $\lambda \in \Lambda$ *y* $t \leq T$*, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,:\, x, y \in B,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d\left(S_t^{(\lambda)}(x), S_t^{(\lambda)}(y)\right) < \varepsilon,\ \forall t \in [0,T], \lambda \in \Lambda.$$

Entonces, si $\mathcal{A}_\lambda$ *es continua en* λ*, la familia* $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ *es uniformemente estable en sentido Lyapunov, i.e. para cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *(independiente de* λ*) tal que para todo* $\lambda \in \Lambda$*, si* $d(x, \mathcal{A}_\lambda) < \delta$*, entonces* $d(S_t^{(\lambda)} x, \mathcal{A}_\lambda) < \varepsilon$ *para todo* $t \in \mathbb{R}_+$.

En la Sección 2 extendemos sistemas dinámicos dados en espacios de retardo finito, donde el retardo se considera como parámetro, así como sus atractores (supuesto que existen, véase [2] para resultados de existencia) a un espacio de fases común. En la Sección 3 re-interpretamos los "equi" conceptos para los nuevos sistemas dinámicos en función de los espacios de fases originales. Finalmente, en la Sección 4 damos un ejemplo basado en una ecuación diferencial con retardo escalar que posee atractores que son continuos y discontinuos en el retardo para diferentes valores del mismo.

2. Extensión a un espacio de fases común

Una ecuación diferencial con retardo en un espacio de Banach $(Z, |\cdot|)$ con retardo $\tau > 0$ genera un sistema dinámio en el espacio $C_\tau := C([-\tau, 0]; Z)$ de funciones continuas $\phi : [-\tau, 0] \to Z$, que es un espacio de Banach con la norma del supremo $\|\cdot\|_\tau$. Denotamos dicho sistema dinámico en C_τ por $S^{(\tau)}$ y consideramos una familia de tales sistemas dinámicos para diferentes valores fijos del tiempo de retardo $\tau \in [T_*, T^*]$, con $0 < T_* < T^* < \infty$. Además, suponemos que cada sistema dinámico $S^{(\tau)}$ posee un atractor global $\mathcal{A}_\tau$ en su correspondiente espacio de fases C_τ. Como sólo partimos del conocimiento de tales sistemas dinámicos y no de las ecuaciones que los originaron, el Teorema 3 no puede ser aplicado directamente a esta familia, pero sí podrá serlo tras "representar" o sumergir a la en el espacio común C_{T^*}.

Para trasladar los sistemas dinámicos al espacio común, proyectamos la solución $S_t^{(\tau)} \phi$ del espacio de funciones $C([-\tau, 0]; Z)$ sobre el espacio de base Z y entonces reconstruimos la trayectoria como una función dependiente del tiempo para que finalmente pueda ser vista como elemento de $C([-T^*, 0]; Z)$.

Consideramos $\phi \in C_{T^*}$ y $\phi|_{[-\tau,0]}$ su truncada, perteneciente a C_τ. Por tanto $S_t^{(\tau)} \phi|_{[-\tau,0]}$ está bien definido para todo $t \geq 0$. Definimos su proyección $x : [-T^*, \infty) \times C_{T^*} \to Z$ por

$$x(t, \phi) := \begin{cases} \phi(t) & t \in [-T^*, 0], \\ S_t^{(\tau)}(\phi|_{[-\tau,0]})(0) & t > 0, \end{cases}$$

donde $S_t^{(\tau)} \phi|_{[-\tau,0]}(0)$ es el valor que toma la función $S_t^{(\tau)}(\phi|_{[-\tau,0]})$ en Z en tiempo 0. Finalmente, definimos $\widehat{S}_t^{(\tau)}(\phi) \in C_{T^*}$ para cada $t \geq 0$ por

$$\widehat{S}_t^{(\tau)}(\phi)(s) := x(t+s, \phi), \quad s \in [-T^*, 0].$$

Teorema 6 *Sea $S^{(\tau)}$ un sistema dinámico en C_τ, entonces $\{\widehat{S}_t^{(\tau)}, t \in \mathbb{R}_+\}$ define un sistema dinámico sobre C_{T^*}. Más aún, si $S^{(\tau)} : \mathbb{R}_+ \times C_\tau \to C_\tau$ es continuo conjuntamente como aplicación de $(t, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times C_\tau$, entonces $\widehat{S}^{(\tau)} : \mathbb{R}_+ \times C_{T^*} \to C_{T^*}$ es conjuntamente continuo en $(t, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times C_{T^*}$.*

El siguiente paso es extender los atractores a un espacio común y asegurarnos de que efectivamente son atractores en los sistemas dinámicos extendidos. Obsérvese que no basta con tener

$$H^*_{C_\tau}\left(S^{(\tau)}_{t-j\tau}(B_\tau), \mathcal{A}_\tau\right) < \varepsilon \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n^* - 1, \tag{1}$$

donde n^* es el primer entero tal que $n^*\tau \geq T^*$. Esto no asegura que la concatenación correspondiente de elementos del atractor esté en C_{T^*} satisfaciendo la correspondiente desigualdad ahí. Para mostrar el siguiente resultado usaremos, de forma análoga al Teorema de Heine, la compacidad de los atractores y la continuidad de cada sistema dinámico (concretamente de la composición de él consigo mismo un número finito de veces).

Teorema 7 *Supongamos que un sistema dinámico $S^{(\tau)} : \mathbb{R}_+ \times C_\tau \to C_\tau$ posee un atractor global $\mathcal{A}_\tau$. Entonces, el sistema dinámico extendido $\widehat{S}^{(\tau)}$ en C_{T^*} dado por el* Teorema 6 *posee un atractor global $\widehat{\mathcal{A}}_\tau$ en C_{T^*}, que está caracterizado por*

$$\widehat{\mathcal{A}}_\tau := \Big\{\psi \in C_{T^*} \;\; : \;\; \exists \text{ trayectoria completa } \bar{\Phi}_t^{(\tau)} \text{de } S^{(\tau)} \text{ en } \mathcal{A}_\tau \\ \text{con } \psi(s) = \bar{\phi}(s)\ \forall s \in [-T^*, 0]\Big\}, \tag{2}$$

donde $\bar{\phi}(t)$ es la proyección en Z de la solución completa $\bar{\Phi}_t^{(\tau)}$ definida por $\bar{\phi}(t) := \bar{\Phi}_t^{(\tau)}(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

A partir de los resultados anteriores, tiene sentido plantearse la continuidad de los atractores para distintos retardos, que se entiende como

$$H_{C_{T^*}}\left(\widehat{\mathcal{A}}_{\tau'}, \widehat{\mathcal{A}}_\tau\right) \to 0 \quad \text{cuando} \quad \tau' \to \tau.$$

3. Equi-propiedades en los sistemas dinámicos originales

Trasladaremos los conceptos de equi-atracción, equi-disipatividad y equi-compacidad eventual de la familia de sistemas extendidos $\{\widehat{S}_t^{(\tau)}, \tau \in [T_*, T^*]\}$ en el espacio C_{T^*} en términos de los sistemas dinámicos originales $S_t^{(\tau)}$ sobre los espacios de fase C_τ.

Equi-disipatividad

El concepto de equi-disipatividad dado en la Definición 2, (i), en términos del sistema extendido tiene una fácil interpretación en términos del original, ya que basta fijarse en la órbita descrita por las soluciones y reajustar el tiempo. Esto queda reflejado en el siguiente resultado.

Lema 8 *Una familia de sistemas dinámicos $\{\widehat{S}^{(\tau)}, \tau \in [T_*, T^*]\}$ es equi-disipativa si y sólo si existe un conjunto acotado U de Z tal que para todo acotado B de Z existe un $T_B \in \mathbb{R}_+$, independiente de τ, tal que*

$$S_t^{(\tau)}(\mathcal{B}|_{[-\tau,0]})(0) \subset U \quad \textit{para todo} \quad t \geq T_B \quad \textit{y } \tau \in [T_*, T^*],$$

donde

$$\mathcal{B} := \{\phi \in C_{T^*} \,:\, \phi(s) \in B \;\forall\, s \in [-T^*, 0]\}\,. \tag{3}$$

Equi-compacidad eventual y propiedades de continuidad (A1) y (A2)

Nótese que la propiedad de equi-compacidad eventual en la Definición 2, (ii), puede ser reescrita como: *para todo acotado B de X, existe un $T_B \in \mathbb{R}_+$ independiente de $\lambda \in \Lambda$ y una familia de compactos $\{K(t), t \geq T_B\}$ de X tal que*

$$S_t^{(\lambda)}(B) \subset K(t) \quad \textit{para todo} \;\; t \geq T_B.$$

Basta simplemente tomar $K(t)$ como la clausura de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_t^{(\lambda)}(B)$ en X. El compacto $K(t)$ no tiene porqué ser uniformemente acotado en t – si lo fuera, se tendría también la equi-disipatividad.

En nuestra situación, la existencia de una tal familia de compactos es equivalente en un sistema dinámico u otro, ya que basta aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà en un número finito de intervalos que permitan concatenar soluciones de un sistema para verla en el extendido.

No es difícil ver usando la definición de los sistemas extendidos a través de la trayectoria que describen los originales y la misma idea de concatenación un número finito de veces que es equivalente pedir las condiciones (A1) y (A2) a $\{S^{(\tau)}\}_\tau$ que a $\{\widehat{S}^{(\tau)}\}_\tau$.

3.1. Equi-atracción

Supongamos que cada sistema dinámico $S_t^{(\tau)}$ en C_τ posee un atractor global $\mathcal{A}_\tau$ en C_τ para $\tau \in [T_*, T^*]$. Entonces, por el Teorema 7, cada sistema extendido $\widehat{S}_t^{(\tau)}$ de C_{T^*} tiene un atractor $\widehat{\mathcal{A}}_\tau$ en C_{T^*}, donde $\widehat{\mathcal{A}}_\tau$ está definido en términos de $\mathcal{A}_\tau$ a través de (2).

Estos atractores extendidos son equi-atrayentes si para todo $\varepsilon > 0$ y todo acotado $\mathcal{B}$ de C_{T^*} existe $T_{\varepsilon,\mathcal{B}} \in \mathbb{R}_+$ independiente de $\tau \in [T_*, T^*]$ tal que

$$H^*_{C_{T^*}}\left(\widehat{S}_t^{(\tau)}(\phi), \widehat{\mathcal{A}}_\tau\right) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \geq T_{\varepsilon,\mathcal{B}},\, \phi \in \mathcal{B},\, \tau \in [T_*, T^*] \tag{4}$$

lo que obviamente implica que

$$H^*_{C_\tau}\left(S_t^{(\tau)}(\phi|_{[-\tau,0]}), \mathcal{A}_\tau\right) < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad t \geq T_{\varepsilon,\mathcal{B}},\, \phi \in \mathcal{B},\, \tau \in [T_*, T^*]. \tag{5}$$

Por supuesto, uno desearía que (4) y (5) fueran equivalentes (quizás con un valor ligeramente mayor $T_{\varepsilon,\mathcal{B}}$). Sin embargo, aparecen elementos en la demostración del Teorema 7 que dependen de τ de una manera no necesariamente uniforme. Para poder establecer una equivalencia entre ambas condiciones usaremos la propiedad (A3) y algunas ideas sacadas del Teorema 5.

Observación 9 *La condición* (A3) *en el* Teorema 5 *para el sistema extendido* $\widehat{S}^{(\tau)}$ *es equivalente a la siguiente condición sobre el sistema dinámico original* $S^{(\tau)}$ *:*

(A3') *Para cualquier acotado* $\mathcal{B}$ *de* C_{T^*} *y* $T > 0$, $S_t^{(\tau)}(\chi|_{[-\tau,0]})$ *es uniformemente continuo en* $\chi|_{[-\tau,0]} \in \mathcal{B}|_{[-\tau,0]}$ *uniformemente con respecto a* τ *y* $t \leq T$, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,:\, \chi, \phi \in \mathcal{B},\ \|\chi|_{[-\tau,0]} - \phi|_{[-\tau,0]}\|_\tau < \delta$$

$$\Rightarrow \|S_t^{(\tau)}(\chi|_{[-\tau,0]}) - S_t^{(\tau)}(\phi|_{[-\tau,0]})\|_\tau < \varepsilon,\ \forall t \in [0,T],\ \tau \in [T_*, T^*].$$

Usando argumentos de concatenación similares a los empleados en el Teorema 7 en combinación con el Teorema 5 se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 10 *Supongamos dada para* $\tau \in [T_*, T^*]$ *una familia de sistemas dinámicos* $S^{(\tau)} : \mathbb{R}_+ \times C_\tau \to C_\tau$ *con atractores* $\mathcal{A}_\tau$. *Si dicha familia es equi-disipativa y equi-atrayente en el sentido de* (5) *y satisface la condición* (A3'), *entonces los atractores extendidos* $\widehat{\mathcal{A}}_\tau$ *son equi-atrayentes.*

4. Un ejemplo

Li y Kloeden [4, Sec.3,Ex.3.2] consideraron el siguiente ejemplo de ecuación ordinaria para ilustrar sus resultados. Sean $\lambda_0 = 2\sqrt{3}/9$ y $\Lambda = [0, \lambda_0]$ y considérese la función $f : \Lambda \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\lambda, x) = -x^3 + x + 4\sqrt{3}/9 - \lambda,$$

cuya gráfica es como muestra la Figura 1. En particular, para $\lambda < \lambda_0$ tiene un único cero $x^{(\lambda^+)} > 0$ y para $\lambda = \lambda_0$ aparece un nuevo cero $x^{(\lambda_0^-)}$.

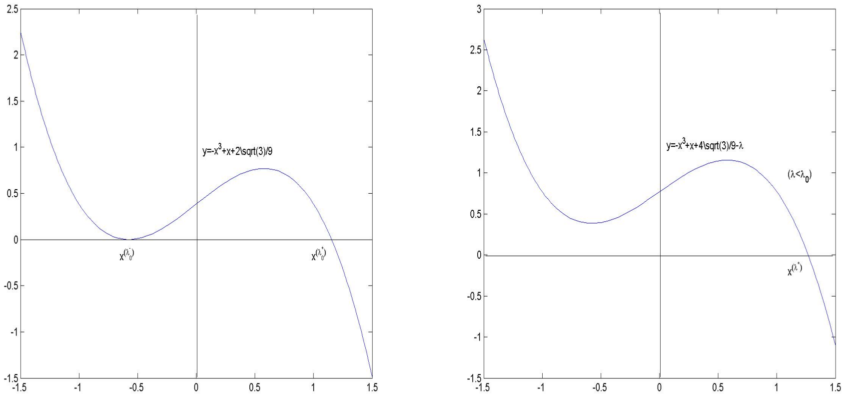

Fig. 1. Dos puntos de equilibrio en λ_0. Un equilibrio para $\lambda < \lambda_0$.

Entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(\lambda, x) \tag{6}$$

genera un sistema dinámico en $Z = \mathbb{R}$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Si $\lambda \in [0, \lambda_0)$ el atractor global es un conjunto formado por un sólo punto, $\{x^{(\lambda^+)}\}$, y para λ_0 el atractor global es el intervalo

$[x^{(\lambda_0^-)}, x^{(\lambda_0^+)}]$. La aplicación $\lambda \mapsto \mathcal{A}_\lambda$ es obviamente discontinua en $\lambda = \lambda_0$ (pero continua para el resto de valores de λ).

Podemos generar una ecuación con retardo a partir del ejemplo anterior. (Notemos el tiempo de retardo $\tau = \lambda$). Consideramos un valor $a > 0$, y una función $g : \mathbb{R} \to [0, a]$ globalmente lipschitziana con constante de Lipschitz $L_g > 0$ y tal que $g(-\sqrt{3}/3) = 0$. Así, podemos considerar la ecuación con retardo

$$\frac{d}{dt}x(t) = F_\lambda(x_t) := f(\lambda, x(t)) + g(x(t-\lambda)), \tag{7}$$

donde $x_t \in C_\lambda = C([-\lambda, 0]; \mathbb{R})$ denota la solución. Nos centraremos en considerar los tiempos de retardo $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0]$ para cierto valor $0 < \theta < 1$, i.e. $\Lambda = [\theta\lambda_0, \lambda_0]$.

Buen planteamiento del problema y existencia de atractores

Supongamos que $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0)$ (el caso $\lambda = \lambda_0$ sigue un análisis similar). El carácter localmente lipschitziano del miembro de la derecha en (7) asegura existencia de solución local. Más aún, un análisis de signo asegura que no hay explosión de las soluciones y que éstas están definidas globalmente en tiempo. Más aún, las proyecciones $S_t^{(\lambda)}(\phi)(0)$ de las soluciones son atraídas en $\mathbb{R}$ por el conjunto $B_\lambda = [x_\lambda, f(\lambda, \cdot)^{-1}(-a)] \subset \mathbb{R}$. Por tanto el conjunto $\mathcal{B}_\lambda \subset C_\lambda$ definido en términos de B_λ a través de (3) es un conjunto absorbente para el sistema dinámico $S^{(\lambda)}$. La existencia de atractor global $\mathcal{A}_\lambda$ (contenido en $\mathcal{B}_\lambda$) sigue de la compacidad de $S_t^{(\lambda)}$ para $t > \lambda$ (así como la existencia de los atractores $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ para los sistemas extendidos $\widehat{S}^{(\lambda)}$).

Equi-propiedades y continuidad

La equi-disipatividad de los sistemas $\widehat{S}^{(\lambda)}$ (y con ello la equi-compacidad, que seguirá directamente tras un tiempo adicional λ_0) se tiene para cualquier conjunto de parámetros de la forma $[\theta\lambda_0, \lambda]$ con $\lambda < \lambda_0$. (Aquí se usa también al continuidad de la función f).

En efecto, dado $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0)$, una solución con dato inicial ϕ tal que $\phi(0) < x_\lambda$ alcanza cualquier valor $x_\lambda - \varepsilon > \phi(0)$ en un tiempo t_ε acotado por el teorema del valor medio por

$$t_\varepsilon \leq \frac{x_\lambda - \varepsilon - \phi(0)}{A} \quad \text{with} \quad A = \sup_{[\phi(0), x_\lambda - \varepsilon]} f(\lambda, \cdot).$$

El caso $\phi(0) > f(\lambda, \cdot)^{-1}(a)$ es similar.

Las propiedades de continuidad siguen de la comparación de soluciones de los siguientes problemas (para valores λ, $\lambda' \in \Lambda$ que tomaremos suficientemente próximos):

$$\begin{cases} x'(t) = \widehat{F}_\lambda(x_t), \\ x_0 = \phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = \widehat{F}_{\lambda'}(x_t), \\ y_0 = \psi \end{cases}$$

para datos iniciales ϕ, $\psi \in C([-\lambda_0, 0]; \mathbb{R})$. Basta considerar la diferencia, $z(t) = x(t) - y(t)$, escribir la ecuación que verifica y aplicar las hipótesis de lipschitzianidad local y usar el lema de Gronwall.

Así, la continuidad uniforme en un intervalo finito de una solución, permite finalmente deducir la condición (A1).

La condición (A2) no ha de darse en conjuntos acotados de datos iniciales, pero sí en conjuntos de funciones equi-continuas, como les ocurre a los elementos del atractor, que es lo único que se requería para la condición (A2') (recuérdese la Observación 4).

Discontinuidad de los atractores en λ_0

De la argumentación previa, el atractor $\mathcal{A}_\lambda$ del sistema $S^{(\lambda)}$ para $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0)$ está contenido en el conjunto

$$\mathcal{B}_\lambda = \left\{ \phi \in C_\lambda \ : \ \phi(s) \in \left[x^{(\lambda^+)}, f(\lambda, \cdot)^{-1}(-a) \right] \ \forall s \in [-h, 0] \right\},$$

donde $x^{(\lambda^+)} > 0$ para todo $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0]$. Sin embargo, cuando el parámetro λ alcanza el valor λ_0, aparece una solución de equilibrio negativa, la función constante de C_{λ_0} idénticamente igual a $x^{(\lambda_0^-)} = -\sqrt{3}/3$. Como el atractor $\widehat{\mathcal{A}}^{(\lambda_0)}$ debe contener a esta solución estacionaria, a las positivas, y ser conexo, concluimos que existe una discontinuidad en la aplicación $\lambda \mapsto \widehat{\mathcal{A}}^{(\lambda)}$ en λ_0.

Continuidad de los atractores para $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0)$

Supongamos la siguiente hipótesis adicional:

$$\operatorname{supp} g \bigcap \left[x^{(\lambda^+)}, f(\lambda, \cdot)^{-1}(-a) \right] = \emptyset \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{8}$$

Entonces, por (8), para un valor suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$, el conjunto $B_\lambda^{(\varepsilon)} = \left[x^{(\lambda^+)} - \varepsilon, f(\lambda, \cdot)^{-1}(-a) + \varepsilon \right]$ es absorbente de las dinámicas proyectadas en $\mathbb{R}$ por $S_t^{(\lambda)}(\phi)(0)$. El término de retardo no tiene influencia en un entorno de dicho conjunto, y en realidad el comportamiento asintótico de la ecuación con retardo es el mismo que el de la EDO original. En concreto, los atractores son conjuntos formados por un sólo elemento: $\mathcal{A}_\lambda = \{\phi_\lambda\}$ donde $\phi_\lambda(s) \equiv x^{(\lambda^+)}$ para todo $s \in [-\lambda, 0]\}$ y $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda = \{\widehat{\phi}_\lambda\}$ donde $\widehat{\phi}_\lambda(s) \equiv x^{(\lambda^+)}$ para todo $s \in [-\lambda_0, 0]\}$. Así, se tiene la continuidad de los atractores en $\lambda \in [\theta\lambda_0, \lambda_0)$ y se puede concluir la propiedad de equi-atracción como consecuencia del Teorema 3.

Agradecimientos

Parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia (España) y FEDER (Comunidad Europea) con ayuda MTM2005-01412 y la Acción integrada Hispano-Alemana Ref. HA2005-0082.

Referencias

[1] P.E. Kloeden, Pullback attractors of nonautonomous semidynamical systems, *Stochastics & Dynamics* **3** (2003), 101–112.

[2] P.E. Kloeden, Upper semi continuity of attractors of retarded delay differential equations in the delay, *Bulletin Aus. Math. Soc.* **73** (2006), 299–306.

[3] P. E. Kloeden & P. Marín-Rubio. *Equi-Attraction and the continuous dependence of attractors on time delays.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. Aparecerá.

[4] D.S. Li & P.E. Kloeden, *Equi-attraction and the continuous dependence of attractors on parameters*, Glasgow Math. J., **46** (2004), 131–141.