

GEOMETRÍA 3D. UNA PROPUESTA PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA INFORMÁTICA GRÁFICA EN LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

3D GEOMETRY. A PROPOSAL TO INTEGRATE COMPUTER GRAPHICS IN DESCRIPTIVE GEOMETRY.

Javier Pita Andreu. Universidad Politécnica de Madrid.

RESUMEN

El presente artículo se centra en el estudio de la integración de los programas de informática gráfica en la didáctica de la Geometría Descriptiva y los nuevos planteamientos que pueden aportar a esta disciplina.

Un problema común, en este sentido, surge de adaptar la exposición de estos programas a las características de los mismos, en lugar de centrarse en explicar los procedimientos geométricos intrínsecos a una geometría tridimensional.

Este artículo analiza algunas de las operaciones geométricas básicas en geometría tridimensional. Aunque muchas de ellas ya nos son conocidas por su planteamiento en los sistemas de representación convencionales (pertenencia, intersecciones, perpendicularidad...), veremos que su desarrollo en un entorno tridimensional plantea unas operativas específicas que merecen ser estudiadas para poder desarrollar posteriormente todas las capacidades de estos programas.

Palabras Clave :

Geometría 3D, Geometría Descriptiva, Informática Gráfica.

El presente artículo se centra en el estudio de la integración de los programas de informática gráfica en la didáctica de la Geometría Descriptiva y los nuevos planteamientos que estos programas pueden aportar a esta disciplina.

La Geometría Descriptiva, si atendemos a los programas de nuestras escuelas, se justifica esencialmente desde dos enfoques diferenciados:

En primer lugar, estudia los fundamentos geométricos que subyacen a los dibujos de arquitectura; los procedimientos para trasladar a las dos dimensiones del papel los objetos tridimensionales de la realidad, así como el proceso inverso. Este enfoque de la disciplina es el que encontramos más habitualmente en las justificaciones de la misma. También es el que expresa Monge en primer lugar al presentar su Método de las Proyecciones, luego conocido como Sistema Diédrico (1).

En segundo lugar la Geometría Descriptiva, y en concreto el Sistema Diédrico constituye el método gráfico más eficaz para la resolución de problemas geométricos complejos, para "operar con geometría". Ciertamente el Sistema de Doble Proyección de Monge es más deudor de los tratados de estereotomía, nacidos de las propias dificultades geométricas inherentes a esa ciencia, que del Sistema de Planta-Alzado-Sección, ya bien conocido en la representación de arquitectura hacía mucho tiempo.

La estereotomía, como señalan Gentil y Rabasa en su introducción a la edición facsímil del Colegio de Ingeniero de Caminos de la Geometría Descriptiva de Gaspard Monge, "era en aquel momento [s.XVII] el brazo abstracto y geométrico del Arte de la Traza, la teoría que justificaba los procedimientos del corte de piedras, es

decir una geometría descriptiva *avant la lettre*." (2) (pag.65). Monge conocía bien los tratados de estereotomía y de hecho el método por él desarrollado podría entenderse como una organización sistemática de los procedimientos de aquellos tratados.

No entraremos en este artículo a valorar las implicaciones que la informática gráfica tiene en el primero de estos enfoques. Conviene en todo caso señalar que la buena acogida que en concreto recibió el Sistema de Doble Proyección tuvo probablemente más que ver con su capacidad de resolución de problemas geométricos que con su relación con el dibujo de arquitectura.

Efectivamente, la proyección ortogonal de los cuerpos tridimensionales sobre un plano convenientemente dispuesto es una cuestión trivial, de manera que la enseñanza del dibujo arquitectónico se las ha apañado bien desde mucho antes que Monge y, mucho tiempo después, coexiste sin mayores dificultades con la enseñanza de la geometría en el primer curso de nuestras escuelas.

Únicamente los fundamentos de otras proyecciones, como la axonométrica o la cónica presentan mayor complejidad, aunque habría que valorar el interés de volver sobre esta fundamentación una vez que estas proyecciones se obtienen a día de hoy automáticamente a partir de modelos virtuales en tres dimensiones.

En lo que respecta a la potencia del

Sistema Diédrico como procedimiento gráfico para resolución de problemas geométricos tridimensionales (paradójicamente a través de proyecciones bidimensionales), está fuera de toda duda, como lo muestra el hecho de su vigencia durante los últimos doscientos años.

Sin embargo también es obvio que los programas gráficos en tres dimensiones sobrepasan con amplitud esta capacidad del Sistema Diédrico, de manera que su desarrollo ha sido determinante para la generación y control de geometrías mucho más complejas tanto en edificación como en aeronáutica, automoción etc.; razón ésta que parece justificar sobradamente la imbricación de estos programas en los contenidos curriculares correspondientes a la Geometría Descriptiva.

La incorporación de los programas de informática gráfica en nuestras escuelas se ha ido haciendo sobre todo a través de asignaturas optativas o de cursillos extracurriculares que tratan el CAD simplemente como una herramienta, ligada, sobre todo, al dibujo arquitectónico.

Sin embargo, los programas de informática gráfica trascienden esa consideración de *herramientas* al posibilitar nuevos *procedimientos* para la resolución de problemas geométricos que son directamente equiparables con los suministrados por los Sistemas de Representación de la Geometría Descriptiva.

Uno de los hechos más cuestionables en relación con la docencia del CAD, estriba en la adaptación que se hace en la exposición de los programas a las características de los mismos, en su versión más simplista a las órdenes que contienen, en lugar de centrar su interés en intentar entender y explicar los procedimientos geométricos intrínsecos a una geometría tridimensional.

Se procede así a mostrar, sin una secuencia premeditada, las numerosas posibilidades operativas que ofre-

cen los programas gráficos. La analogía de la calculadora es muy pertinente en este caso. Con ésta es posible hacer todo tipo de cálculos matemáticos de mayor o menor complejidad, pero es evidente la conveniencia de comprender previamente los conceptos elementales subyacentes.

Este artículo pretende analizar y desarrollar algunas de las operaciones geométricas básicas en geometría tridimensional. Aunque muchas de ellas ya nos son conocidas por su planteamiento en los sistemas de representación tradicionales (pertenencia, intersecciones, perpendicularidad...), veremos que su desarrollo en un entorno tridimensional plantea unos procedimientos específicos que merecen ser estudiados si verdaderamente queremos sentar unas bases firmes sobre las que poder desarrollar toda la potencia de estos programas.

CARACTERÍSTICAS DE LOS PROGRAMAS GRÁFICOS EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA TRADICIONAL

El estudio de la geometría comienza con las cuestiones más elementales durante la enseñanza media. En esta primera etapa se abordan problemas de geometría plana y se comienza operando con el mínimo de instrumentos posibles, concretamente con regla y compás.

Esta escasez de medios da lugar a unos procedimientos específicos para resolver problemas geométricos a través de los mismos.

Así, el estudiante aprende a trazar una perpendicular o una mediatriz con estos medios elementales, lo que le va familiarizando con los procedimientos de la geometría. Más adelante estas mismas operaciones las realizará con instrumentos más complejos (escuadra y cartabón, por ejemplo), lo que a su vez simplificará o hará desaparecer el procedimiento original.

El instrumento simplifica el procedimiento.

Sin embargo el estudio de los procedimientos desde los instrumentos más simples se considera imprescindible para la comprensión pautada y correcta de la disciplina. Pasa como con la matemática y las calculadoras. Estas pueden simplificar o hacer desaparecer muchos cálculos, pero es fundamental comprender los conceptos subyacentes a las operaciones que la calculadora realiza.

La Geometría Descriptiva tradicional proporciona una serie de procedimientos de mayor complejidad que permiten abordar la representación de las formas tridimensionales a través de dibujos en dos dimensiones.

Estos procedimientos se agrupan en torno a diversos "Sistemas de Representación", el más potente de los cuales en cuanto a operatividad geométrica es el Sistema Diédrico.

Los programas de informática gráfica trabajan en tres dimensiones y para ello utilizan elementos geométricos ("entidades geométricas") más variados y complejos que aquellos del dibujo o la geometría tradicional.

Los sistemas de representación convencionales utilizan únicamente dos tipos de entidades, pertenecientes ambas a la geometría plana: los puntos y las líneas. Los planos quedan representados por algunos de sus puntos o líneas (en el sistema de Monge, las trazas), mientras que los cuerpos tridimensionales son representados por la proyección de sus aristas o por algunas líneas características, como los contornos aparentes.

ENTIDADES, HERRAMIENTAS, PROCEDIMIENTOS

Las entidades o elementos geométricos de un programa de informática gráfica son, en general, tridimensionales. Poseen tres coordenadas espaciales, aunque siempre es posible

restringirse al uso de dos dimensiones, como se hace frecuentemente cuando estos programas se utilizan como mera herramienta de dibujo.

Las entidades más simples en un programa gráfico son los puntos y los *alambres*, que constituyen la versión tridimensional de las líneas del dibujo convencional.

En un segundo nivel de complejidad tenemos las superficies, láminas carterentes de espesor.

En tercer lugar tenemos los *sólidos*, entidades tridimensionales macizas. Su piel constituiría una superficie.

En cuarto lugar tendríamos las entidades paramétricas. La definición geométrica de estas entidades es función de determinadas variables. Por último, tendríamos las “entidades inteligentes”, en principio de menor interés para este discurso. Son entidades que incorporan varias características, siendo la geometría únicamente una de ellas.

Una vez determinados los tipos de entidades, convendría acotar las herramientas y procedimientos disponibles.

Las herramientas tradicionales más elementales, como se ha dicho, son la regla y el compás. A partir de ahí el dibujo tradicional fue incorporando algunas otras herramientas, pocas en cualquier caso: escuadra y cartabón, escalímetro, pantógrafo, etc.

Más allá de las herramientas estarían los procedimientos, pudiéndose distinguir tradicionalmente entre los de geometría plana (procedimiento para trazar una bisectriz, por ejemplo) y los de la geometría descriptiva (procedimiento para trazar la perpendicular desde un punto a un plano, por ejemplo).

Herramientas más potentes, como ya se ha indicado, pueden simplificar o eliminar procedimientos. Con regla y compás se puede trazar la perpendicular a una recta desde un punto

mediante un procedimiento sencillo. Sin embargo la escuadra y el cartabón resuelven este problema directamente.

Los programas de informática gráfica poseen unas herramientas muy potentes que pueden hacer innecesarios procedimientos de cierta complejidad. Esto es por supuesto muy interesante, aunque la ignorancia de dichos procedimientos imposibilitará un conocimiento y comprensión bien fundamentados de la geometría y con ello la posibilidad de resolver problemas más complejos.

Las herramientas de que dispone un programa de informática gráfica pueden ser de tipo bidimensional o tridimensional, aunque parece existir la tendencia, a medida que los programas incrementan su complejidad, a que sean únicamente tridimensionales, siendo las bidimensionales un caso particular de aquellas.

Pueden ser, además, herramientas generales o específicas de determinado tipo de entidades. Por ejemplo las operaciones denominadas “booleanas” suelen ser específicas de las entidades sólidas.

La intersección de una recta con una superficie, en principio, solo podría llevarse a cabo si se cuenta con una entidad superficial, aunque siempre sería posible desarrollar rutinas personalizadas que ejecutasen tareas concretas, como hallar la intersección de una recta con un plano dado por tres puntos.

En cualquier caso lo que es fundamental es ir definiendo los procedimientos concretos que se consideran importantes a efectos didácticos, y que se deberían impartir independientemente de que el programa disponga de potentes herramientas que permitieran prescindir de dichos procedimientos.

En tercer lugar parece poder diferenciarse en la naturaleza de estas herramientas, pudiendo clasificarse en tres tipos: las de ayuda a la crea-

ción de objetos, y las que Autocad denominaba de “edición” y de “modificación”.

Herramientas de ayuda a la creación de objetos son, por ejemplo, las que facilitan el trazado de tangencias, paralelismos o perpendicularidades.

Las herramientas de edición afectan a la geometría de uno o varios objetos. Entre ellas estarían, por ejemplo las órdenes de Autocad “recorta”, “alarga”, “estira”, “empalme”..

Las herramientas de modificación se corresponden con las transformaciones matemáticas y afectan a la posición o tamaño de un objeto, permaneciendo su geometría inalterada. En concreto serían las órdenes “desplazar”, “rotar”, “simetría” y “homotecia” (que Autocad denomina en castellano, muy impropia- mente, “escalar”).

PROPUESTA DE UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

Lo que aquí se propone es intentar comprender la naturaleza de las operaciones geométricas de menor a mayor complejidad. Para ello nos valdremos en un primer momento de entidades geométricas y de herramientas sencillas para ir posteriormente incrementando su complejidad.

Partiríamos por tanto del trabajo con entidades alámbricas y plantearíamos con ellas algunas cuestiones geométricas elementales que seguirían una secuencia similar a la de la geometría tradicional.

Es interesante observar que el trabajo en tres dimensiones cuenta en ocasiones con procedimientos que no pueden ser asimilados a las construcciones de los sistemas tradicionales, mientras que en otras ocasiones puede trabajarse no sólo con los objetos tridimensionales, sino también con sus proyecciones sobre un plano, generalmente el horizontal, ase-

mejándose en este caso las construcciones geométricas a las que podrían llevarse a cabo con el sistema axonométrico.

Dada la extensión, necesariamente breve, de este artículo, expondremos únicamente algunos casos para ejemplificar la metodología propuesta.

Como tema previo fundamental habría que tratar el concepto de “plano de trabajo” (sistema de coordenadas personales, SCP, de Autocad). Los planos de trabajo frecuentemente remiten a proyecciones sobre planos los problemas espaciales, teniendo mucha importancia en la geometría tridimensional, por lo que deberían abordarse previamente a otras cuestiones. El manejo ágil de los planos de trabajo tiene mucho que ver con los cambios de plano del sistema diédrico.

Un tema inicial importante es la proyección de un punto sobre un plano definido mediante alambres, procedimiento elemental que resulta útil en construcciones más complejas. Esto, el programa Autocad lo resuelve mediante la utilización de “filtros”, procedimiento similar al puramente matemático, de manera que para proyectar un punto sobre los planos coordenados, basta con igualar la coordenada correspondiente a 0 (fig. 1).

No es mucho más compleja la proyección de un punto sobre un plano cualquiera (siempre definido mediante puntos o alambres), bastando elegir dicho plano como plano de trabajo y operar como en el caso anterior (fig. 2), lo que de alguna manera equivaldría a la creación de una nueva vista auxiliar (o de un cambio en los planos de proyección) en sistema diédrico.

Esta proyección del punto sobre un plano cualquiera es, naturalmente, la perpendicular trazada desde ese punto al plano, problema que, como vemos, resuelven más fácilmente estos procedimientos tridimensionales que los propios del sistema diédrico, que conllevarían dos opera-

ciones consecutivas: la perpendicular al plano desde el punto y la intersección de dicha perpendicular con el plano.

En la figura 3 se muestra esta construcción llevada a cabo en diédrico directo mediante el teorema de las tres perpendiculares, valiéndose para ello de una horizontal (dada en este caso) y de una frontal del plano.

La determinación de las trazas horizontales de rectas y planos puede tener interés con vistas a contar con la ayuda de la proyección horizontal en la resolución de determinados problemas. Este ejercicio, muy sencillo algebraicamente, no me consta que sea resoluble con Autocad, por lo que, si trabajamos con este programa, no tendremos más remedio que acudir a una solución alternativa.

En la figura 4 se muestra un procedimiento similar al del sistema axonométrico, donde se está proyectando cada una de las rectas sobre el horizontal con el método de filtros y posteriormente se realiza el encuentro de cada recta con su proyección, lo que determina las trazas horizontales de las mismas.

La intersección de una recta con un plano dado por tres puntos puede resolverse mediante un procedimiento similar nuevamente al que se lleva a cabo en sistema axonométrico, utilizando la recta tridimensional y su proyección sobre el plano horizontal (fácil de obtener mediante las operaciones ya descritas). (fig.5). Es interesante observar que la construcción resultante es similar al esquema que el profesor hace en la pizarra para que los alumnos la comprendan antes de ponerse a traducirla al sistema diédrico.

Existiría también un procedimiento basado en los planos de trabajo si la selección del mismo para situarlo de canto resulta sencilla y si el programa proporciona las herramientas necesarias para recortar la recta con ese plano de canto. Este procedimiento sería equivalente a la resolución de

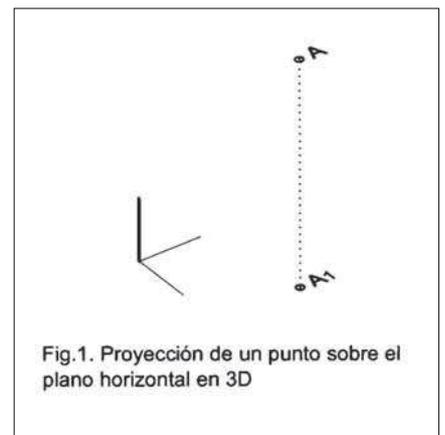


Fig.1. Proyección de un punto sobre el plano horizontal en 3D

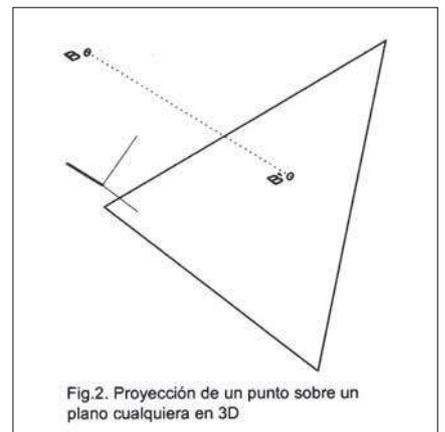


Fig.2. Proyección de un punto sobre un plano cualquiera en 3D

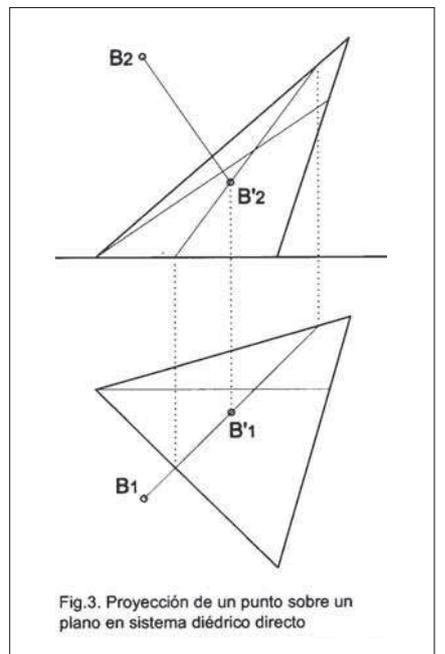


Fig.3. Proyección de un punto sobre un plano en sistema diédrico directo

este problema en diédrico situando el plano de corte de canto y, al igual que sucede en diédrico, sería el más adecuado para una intersección más compleja, como por ejemplo la determinación de la sección plana de un poliedro.

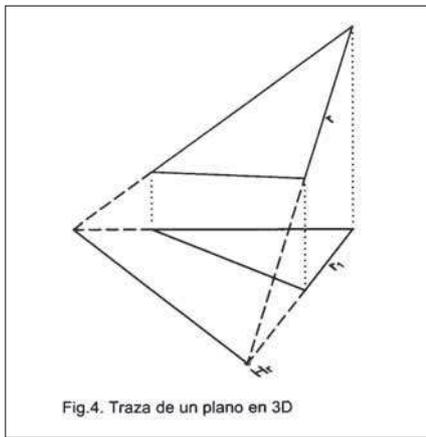


Fig.4. Trazado de un plano en 3D

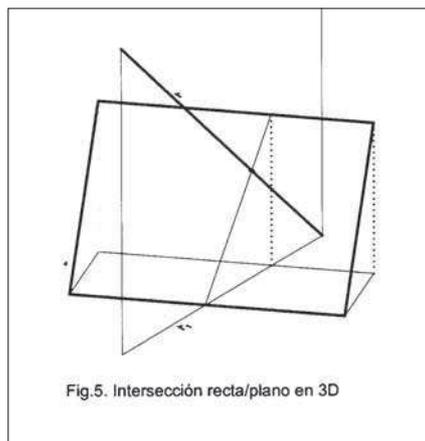


Fig.5. Intersección recta/plano en 3D

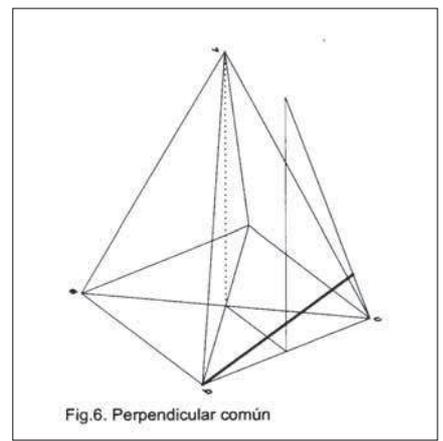


Fig.6. Perpendicular común

Los problemas de distancias y ángulos rara vez disponen de una herramienta específica en los programas de CAD, lo que obliga al desarrollo de procedimientos geométricos de mucha similitud con los que se utilizan en diédrico. En la figura 6 se muestra cómo trazar en 3D la perpendicular común entre la arista AB de la base de una pirámide y su arista lateral CV. El procedimiento seguido es similar al que se lleva a cabo en diédrico.

En algunas ocasiones los problemas pueden verse simplificados por la existencia de determinadas herramientas, que generalmente resuelven problemas más genéricos o elementales. En la figura 7 se muestra la determinación del ángulo entre dos caras adyacentes de una pirámide.

Como se ve la construcción gráfica es casi inmediata gracias a la posibilidad de trazar perpendiculares en el espacio.

Sin embargo, el planteamiento, y consecuente resolución, de este problema pasa por conocer el teorema de las tres perpendiculares (para poder dibujar la traza del plano perpendicular a la arista intersección) así como el proceso a seguir para resolverlo. Todo ello hace patente que aunque los programas informáticos permiten una mejor comprensión de los problemas gracias al trabajo y visualización tridimensional, requieren, sin embargo, de la teoría geométrica para resolver problemas relativamente elementales.

Continuando con este rápido repaso a los temas tradicionales del sistema diédrico, cabe observar que muchos de los problemas de abatimientos dejan de tener sentido en la geometría tridimensional precisamente por la facilidad de cambio del plano de trabajo, lo que permite situarnos y trabajar inmediatamente en verdadera magnitud.

Así, para dibujar una pirámide hexagonal regular cuya base tenga su centro en el punto C, tenga uno de sus aristas sobre la recta R y cuya altura sea conocida, la resolución tridimensional únicamente requiere situar el plano de trabajo adecuadamente para que el problema sea elemental (fig. 8).

La sencillez de la construcción contrasta con la más laboriosa del sistema diédrico (abatimiento del plano, dibujo de la base, desabatimiento de la misma, perpendicular al plano por el centro de la base y medida sobre dicha perpendicular) (fig. 9).

Además de la facilidad de elección del plano de trabajo que, como se ha dicho, viene a ser equivalente al cambio de plano del sistema diédrico, las otras operaciones denominadas por Autocad "de modificación" (traslación, giro, simetría y homotecia) también tienen una estrecha relación

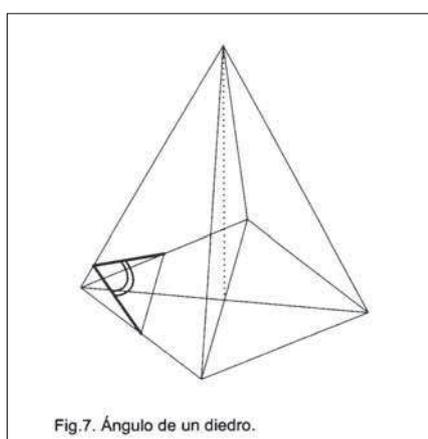


Fig.7. Ángulo de un diedro.

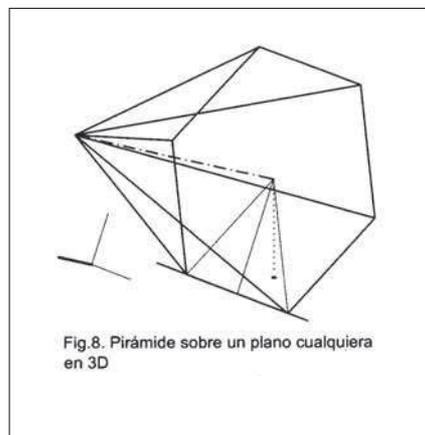


Fig.8. Pirámide sobre un plano cualquiera en 3D

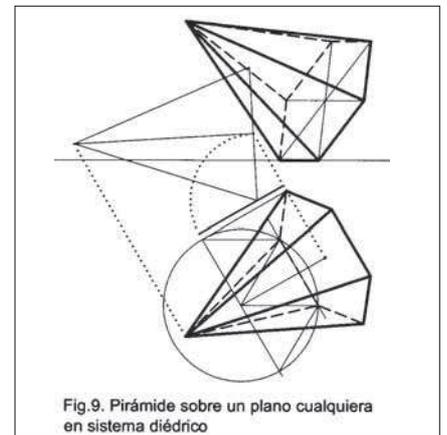


Fig.9. Pirámide sobre un plano cualquiera en sistema diédrico

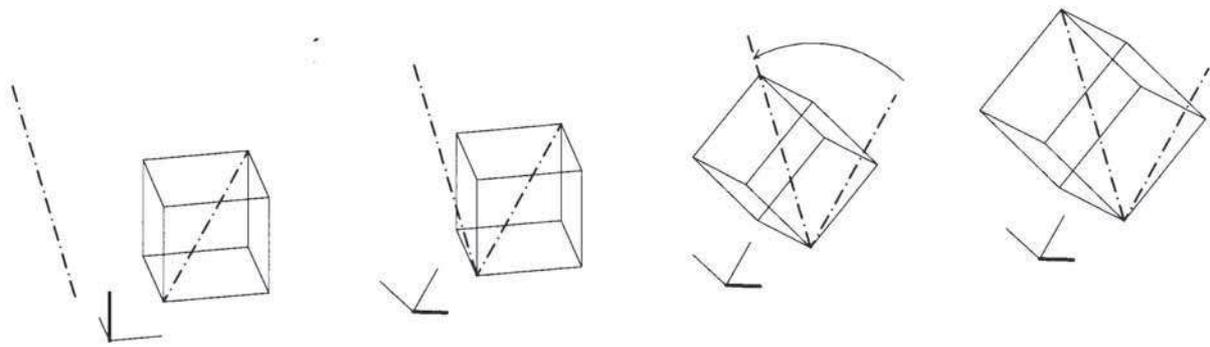


Fig.10. Construcción de un cubo en 3D conociendo su diagonal

con los procedimientos auxiliares clásicos de la geometría descriptiva (cambios de plano, abatimientos y giros)

Este tipo de herramientas facilitan una geometría del movimiento que cuestiona el valor didáctico de muchos problemas complejos, de excesiva dificultad de visualización en sistema diédrico.

Supongamos un problema típico en diédrico: el dibujo de un cubo cuya diagonal, conocida, es un segmento en una posición cualquiera.

Este tipo de problema basa toda su dificultad en la complicada posición del cubo.

Ahora bien, en geometría tridimensional basta con hacer un cubo genérico y aplicarle una serie de transformaciones, en concreto, desplazarlo, girarlo y darle el tamaño adecuado (fig.10). La naturaleza del problema a resolver cambiaría pues radicalmente, ya que se limitaría a una definición correcta de estas transformaciones.

Las últimas versiones de los programas gráficos incluyen herramientas muy potentes, que son capaces de llevar a cabo varias de estas operaciones en una sola orden y que entendemos que no deberían ser introducidas en las primeras fases del aprendizaje.

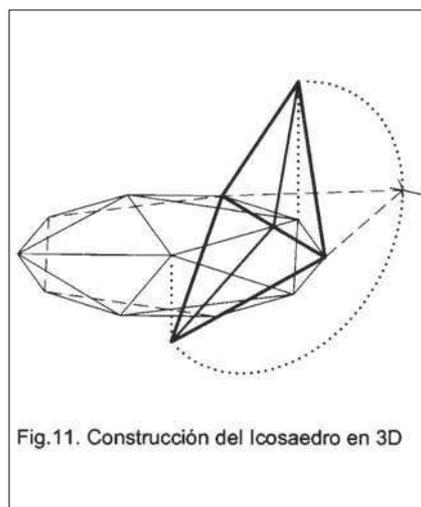


Fig.11. Construcción del Icosaedro en 3D

En todo caso la simplicidad en la manera de abordar muchos problemas en el espacio tridimensional no exime del conocimiento de muchos de los procedimientos geométricos de la geometría descriptiva clásica, como se hace patente al pretender dibujar por ejemplo un icosaedro.

En la figura 11 se muestra el primer paso en la construcción tridimensional del icosaedro, haciendo uso precisamente de un abatimiento. Resolución muy parecida, en este caso, a la que se deriva del sistema diédrico (fig. 12).

Posteriores fases del planteamiento didáctico que proponemos irían haciendo uso de elementos superficiales y sólidos, aumentando de esta manera la complejidad de los problemas tratados.

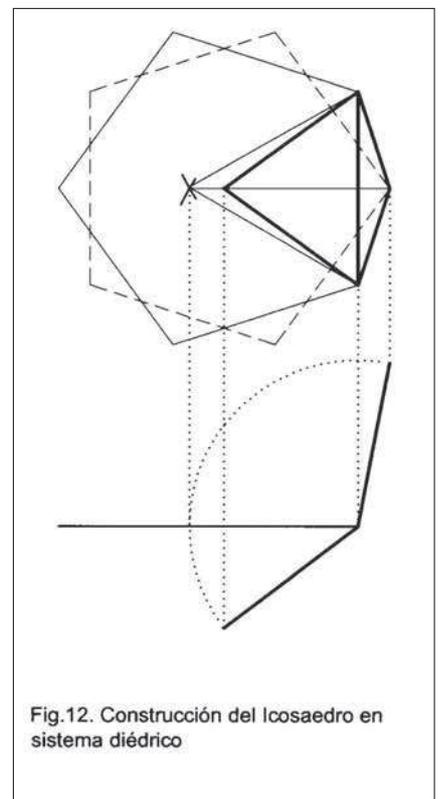


Fig.12. Construcción del Icosaedro en sistema diédrico

Por otra parte, las mayores posibilidades de los elementos sólidos unida a la potencia de las herramientas booleanas a ellos asociados, permiten la generalización de algunos problemas clásicos de la geometría plana como son el trazado de la mediatriz o de la bisectriz.

Efectivamente, el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otros tres dados, es una recta; problema idéntico al de hallar el lugar geométrico de los centros de las esfe-

ras que pasan por esos tres puntos. Este problema, de complicación media en sistema diédrico, resulta sencillo mediante el uso de la esfera (el compás tridimensional), ya que la solución buscada resulta de la intersección de tres esferas de igual radio con centro en cada uno de los puntos dados. En la figura 13 se muestra la resolución simplificada gráficamente, ya que se han dibujado únicamente las circunferencias de intersección de unas esferas con otras, cada una de ellas situada (y definiendo) los planos mediatrices de cada par de centros.

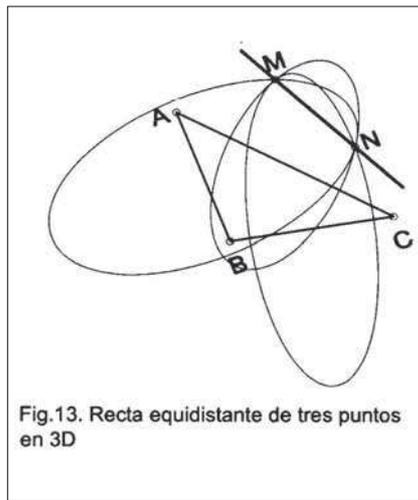


Fig. 13. Recta equidistante de tres puntos en 3D

da en los textos de geometría dada la complicación grande que implica su resolución en diédrico, a pesar de la importancia que dichas intersecciones pueden tener en el campo de la edificación.

El procedimiento que utiliza la geometría descriptiva, apoyándose en planos auxiliares, es muy sencillo conceptualmente y sin duda debe conocerse, pero su ejecución es sumamente laboriosa, lo que restringe los posibles casos a desarrollar a los más elementales. Mediante objetos sólidos tridimensionales es posible resolver complejas intersecciones de poliedros, abriendo perspectivas a campos poco explorados como sería, por ejemplo, el análisis de dichas intersecciones para una casuística dada; lo que se encuentra en el origen del diseño paramétrico. Pero esto es ya otra historia.

La generalización de la construcción de la bisectriz (recta que forma el mismo ángulo con tres segmentos concurrentes) también es inmediata de realizar tridimensionalmente utilizando esferas, simplificando así una construcción compleja y de

poco interés didáctico del sistema diédrico.

En lo que respecta a la mayor complejidad de los temas susceptibles de ser tratados, observemos, por ejemplo, las intersecciones de poliedros diversos, que tiende a ser escamotea-

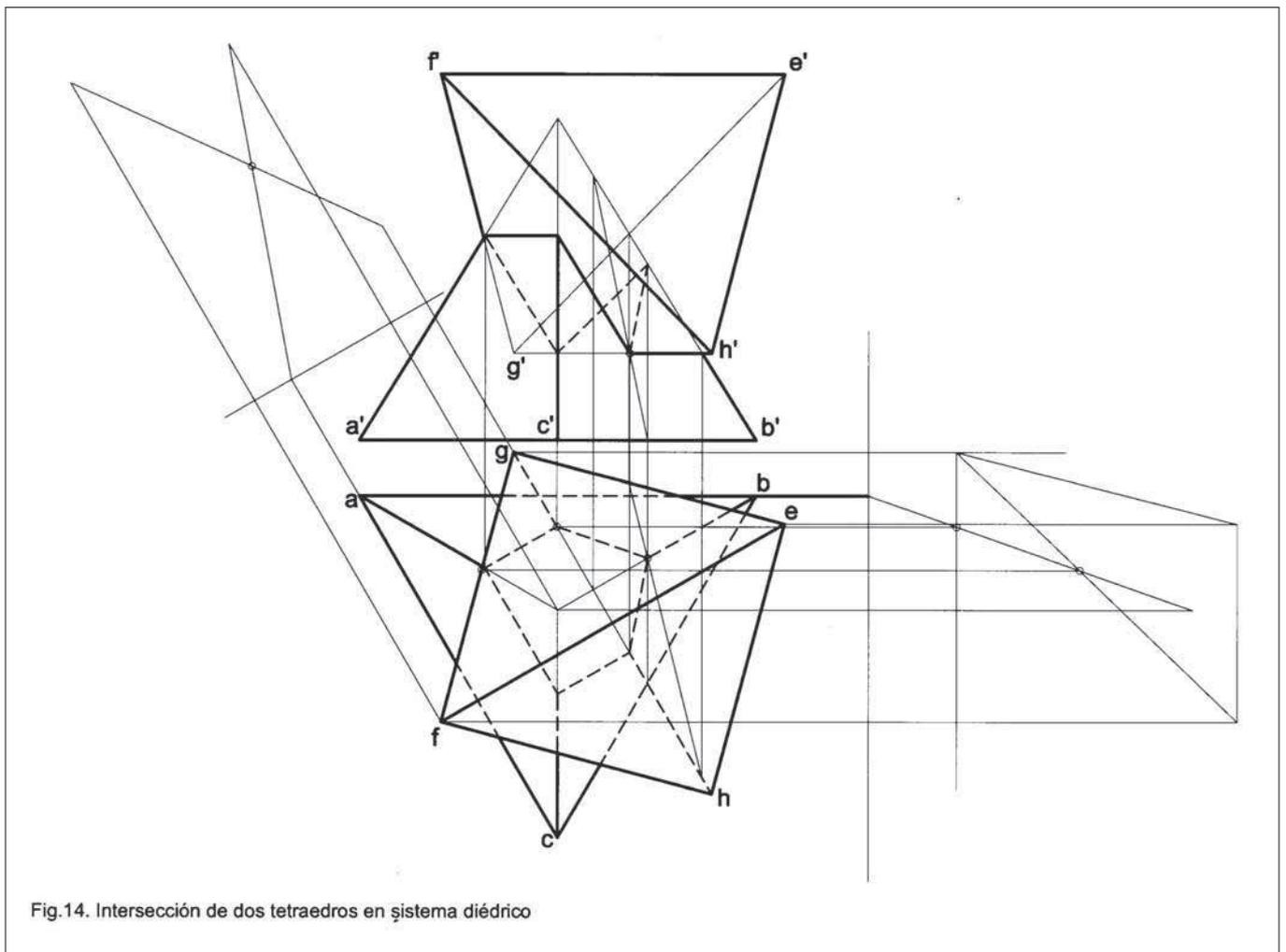
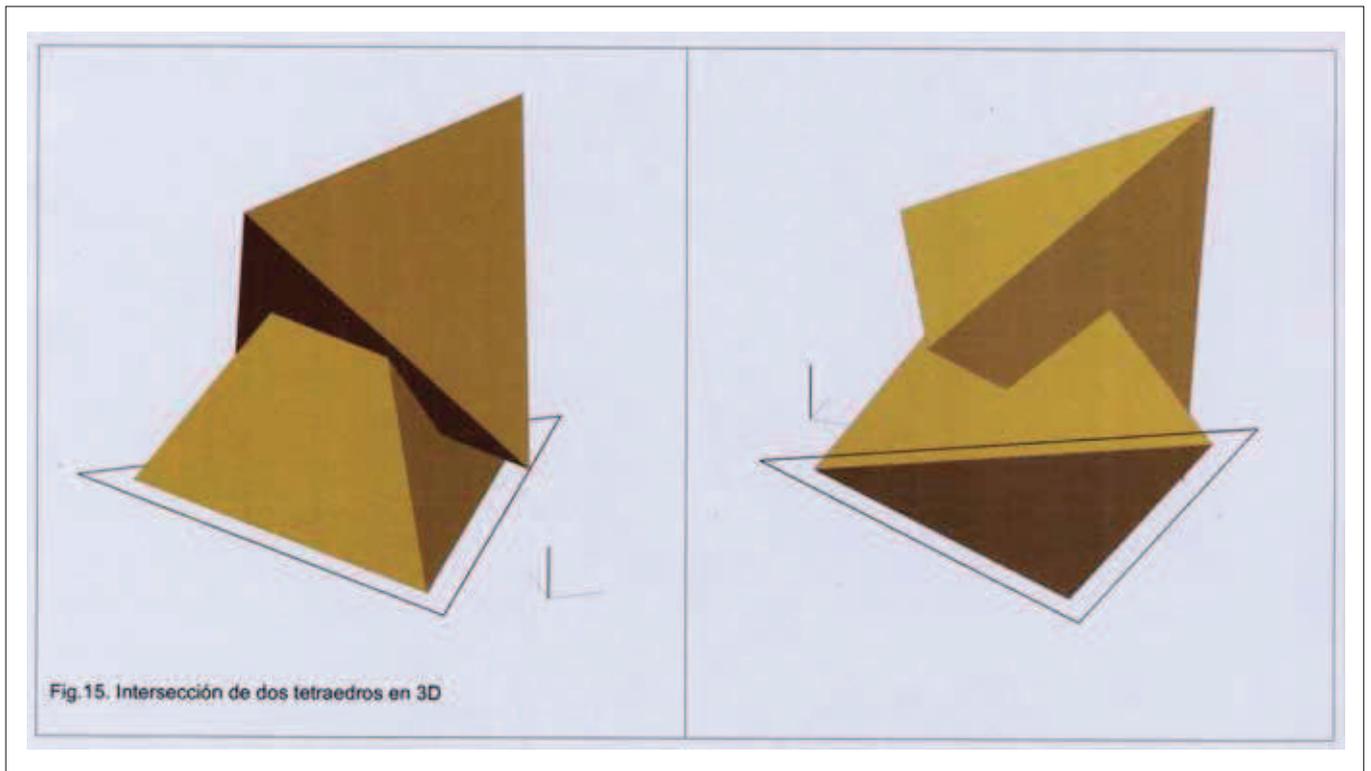


Fig. 14. Intersección de dos tetraedros en sistema diédrico



En las figuras 14 y 15 se muestra la resolución de la intersección de dos tetraedros en sistema diédrico y en 3D (este ejercicio se propuso en un examen de la ETSEM en enero de 2015). En el primero de los casos, los trazados auxiliares son muy complicados, lo que hace muy laborioso la ejecución o el seguimiento de los mismos. Con el trabajo en 3D la dificultad, en cualquier caso menor, estriba en posicionar los poliedros, en imaginar y definir los movimientos que debe realizar el tetraedro superior para llegar a su posición.

Una vez situadas ambas piezas, la intersección es inmediata, pudiendo visualizarla de una manera dinámica para la comprensión espacial de la misma (aquí se han mostrado dos puntos de vista opuestos). También sería inmediata la obtención de nuevas intersecciones, es decir el análisis de la casuística que se genera, por el desplazamiento de la pieza superior.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) **Monge, Gaspard.** 1996. *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. ISBN 84-380-0121-1
- (2) **Gentil Baldrich, Jose María y Rabasa Díaz, Enrique.** 1996. "Sobre la geometría descriptiva y su difusión en España". En Monge, Gaspard.. *Geometría Descriptiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, p.55-93. ISBN 84-380-0121-1