

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Diseño Avanzado en  
Ingeniería Mecánica

Desarrollo de software en C# para el cálculo del FIT  
en grietas semi-elípticas

Autor: Óscar Montero Cañero

Tutor: Jesús Vázquez Valeo

**Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Máster  
Máster Universitario en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

# **Desarrollo de software en C# para el cálculo del FIT en grietas semi-elípticas**

Autor:  
Óscar Montero Cañero

Tutor:  
Jesús Vázquez Valeo  
Profesor titular

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Máster: Desarrollo de software en C# para el cálculo del FIT en grietas semi-elípticas

Autor: Óscar Montero Cañero

Tutor: Jesús Vázquez Valeo

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

*A mi familia*





# Agradecimientos

---

Nadie dijo que el camino fuera fácil, pero ya sabemos que todo esfuerzo tiene su recompensa. Muchas han sido las horas de estudio, las noches en vela, los fines de semana entre cuatro paredes, ... y es que ya me lo advirtió Jaime antes de comenzar, que de la titulación que provenía mucho trabajo me iba a costar. Y me costó, pero al fin llegué.

Quisiera dar las gracias a los compañeros y amigos, por esos ratos de estudio y las vivencias compartidas.

Al profesorado en general, por las dudas resueltas y las tutorías atendidas. En especial quiero dar las gracias a mi tutor Jesús, por su ayuda y paciencia infinita esperando la culminación de este trabajo.

A mis padres, por haber creído siempre en mí y haberme apoyado. Gracias por darlo todo para que hoy sea quien soy.

Lo más importante para el final: mi familia. Gracias por aguantar mi ausencia por las horas de estudio y sacarme una sonrisa cuando más lo necesitaba.

*Óscar Montero Cañero*

*Sevilla, 2018*



# Resumen

---

En este proyecto se obtiene la función general de peso de carga puntual para grietas semi-elípticas en placas de espesor finito. Se utiliza para calcular el factor de intensidad de tensiones para cualquier punto a lo largo del frente de la grieta con el plano de la grieta bajo distribuciones de tensiones bidimensionales. Se muestra la comparación entre los resultados alcanzados de la función de peso obtenida y los disponibles en la literatura, lo que indica una buena precisión. Con el fin de determinar el patrón de crecimiento de grietas y estimar la vida útil a fatiga, esta función de peso se puede usar fácilmente en placas aplicadas en la industria bajo campos de tensión complicados, como el campo de tensiones residuales debido a la soldadura.

En aplicaciones industriales, como es el proceso de soldadura, se aplican complicadas distribuciones de tensiones en el plano de las grietas. Debido a que la soldadura se realiza en los extremos de las placas, la tensión residual varía de forma no lineal a lo largo del espesor y el ancho de las mismas. De hecho, se aplica una distribución de tensiones bidimensional no lineal en el plano de la grieta en placas soldadas. En estas condiciones, los puntos críticos pueden o no ser habitualmente los puntos más profundos y superficiales, por lo que se deben examinar otros puntos. El GPLWF se puede usar fácilmente para calcular el factor de intensidad de tensiones para cualquier punto a lo largo del frente de grieta de las placas soldadas agrietadas bajo distribuciones de tensiones residuales bidimensionales.



# Abstract

---

In this project, a general point load weight function for semi-elliptical crack in finite thickness plates is derived. It is used to calculate stress intensity factors for any point along the crack front with the crack faces under two dimensional stress distributions. The comparison between the results obtained from the derived weight function and those available in literature is presented, indicating a good accuracy. In order to determine the pattern of crack growth, and to estimate fatigue life, this weight function can be easily used in plates as applied in industry under complicated stress fields such as residual stress field due to welding.

In industrial applications, such as a welding process, complicated stress distributions are applied on crack faces. Due to butt welding of plates, the residual stress nonlinearly varies along the thickness and width of a plate. In fact, a nonlinear two dimensional stress distribution is applied on the crack face in welded plates. In these conditions, the critical points may or may not be the deepest and surface points as usual, so other points must be examined. The GPLWF can be easily used to calculate stress intensity factors for any point along crack front of cracked butt welded plates under two dimensional residual stress distributions.



# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Notación</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Principios de la Mecánica de Fractura	1
1.2 Factor de Intensidad de Tensiones	2
1.3 Crecimiento de grieta (criterio de fractura global)	4
1.3.1 Cálculo de la tasa de liberación de energía mediante la derivada de la rigidez	5
1.3.2 Cálculo de la tasa de liberación de energía mediante la Integral $J$	5
1.4 Crecimiento de grieta (criterio de fractura local)	7
1.5 Tolerancia al daño	8
<b>2 Grietas Semi-elípticas en Placas de Espesor Finito</b>	<b>11</b>
<b>3 Función General de Peso Para Cargas Puntuales</b>	<b>15</b>
<b>4 Modelo Matemático</b>	<b>17</b>
4.1 Cálculo de $P'$	17
4.2 Cálculo de $s$	19
4.3 Cálculo de $\rho$	21
4.4 Cálculo de $r$	21
4.5 Cálculo de $R$	22
4.6 Cálculo de $M$	22
4.7 Métodos de integración numérica	22
4.7.1 Método numérico de las semisumas	22
4.7.2 Método numérico de los dobles trapecios	23
4.7.3 Método numérico de Gauss-Legendre	24
<b>5 Resultados y Validación</b>	<b>25</b>
5.1 Validación frente a NASGRO-NASSIF	25
5.1.1 Distribución de tensiones constante	25

5.1.2	Distribución de tensiones bivariantes	26
5.2	<i>Validación frente a función unidimensional</i>	27
5.3	<i>Validación frente a función bivalente</i>	31
<b>6</b>	<b>Desarrollo de la Aplicación</b>	<b>33</b>
6.1	<i>Elección de plataforma y tecnología</i>	33
6.2	<i>Utilización de bibliotecas externas</i>	33
6.3	<i>Estructuras de datos</i>	34
6.4	<i>Almacenaje de datos</i>	34
6.5	<i>Implementación de los métodos numéricos</i>	35
6.5.1	Semisumas	35
6.5.2	Trapecios	36
6.5.3	Gauss-Legendre	37
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>39</b>
	<b>Apéndice A</b>	<b>41</b>
	<b>Apéndice B</b>	<b>43</b>
	<b>Apéndice C: Manual de Usuario</b>	<b>45</b>
	<i>Instalación de la aplicación</i>	45
	<i>Uso de la aplicación</i>	46
	<i>Características de la grieta y la placa</i>	46
	<i>Zona de resultados</i>	47
	<b>Referencias</b>	<b>55</b>



# Índice de Tablas

---

Tabla 1: Comparación de aplicación desarrollada frente a NASGRO-NASSIF	26
Tabla 2: Comparación de aplicación desarrollada frente a NASGRO-NASSIF	26
Tabla 3: Comparación de datos obtenidos frente a [30] y [1]	27
Tabla 4: Coeficientes $M(\alpha, \beta, \phi)$	41
Tabla 5: Parámetros $B_{ij}$ para las fórmulas empíricas de $M(\alpha, \beta, \phi)$	43



# Índice de Figuras

---

Figura 1: Tensiones cerca del fondo de una grieta, en un material elástico	2
Figura 2: Primer modo de fallo	3
Figura 3: Modos de deformación de grieta (Norma UNE 7540:1998)	4
Figura 4: Modelo básico de crecimiento de grieta	4
Figura 5: Superficies de plastificación en una fractura	6
Figura 6: Contorno de integración para la integral J	6
Figura 7: Esquema de planteamiento local	7
Figura 8: Grieta semi-elíptica sometida a tensiones bivariantes	12
Figura 9: Grietas semi-elípticas en placas de espesor finito	15
Figura 10: Notación de función de peso para grietas con superficie semi-elíptica	16
Figura 11: Cálculo de $P'$	17
Figura 12: Cálculo de $P'$ desde $\Phi$	19
Figura 13: Método de los dobles trapecios	23
Figura 14: Expresión para sigma de entrada SC19 de NASSIF	26
Figura 15: Función de distribución de tensiones unidimensional	27
Figura 16: Función de distribución de tensiones bivalente	31
Figura 17: Clase Punto	34
Figura 18: Clase Elipse	34
Figura 19: Implementación del método de las Semisumas	35
Figura 20: Generación de los aportes al FIT en Semisumas	35
Figura 21: Implementación del método de los Trapecios	36
Figura 22: Generación de los aportes al FIT en Trapecios	36
Figura 23: Implementación del método de Gauss-Legendre	37
Figura 24: Generación de los aportes al FIT en Gauss-Legendre	37
Figura 25: Cálculo de $m(x,y,P')$	38

---

Figura 26: Archivo instalador	45
Figura 27: Lanzador de la aplicación	45
Figura 28: Programa recién abierto	46
Figura 29: Valores que definen la grieta, la placa y el punto a estudiar	46
Figura 30: Zona de resultados	47
Figura 31: Información adicional. Tiempo de ejecución y puntos estudiados	47
Figura 32: Zona de detalles	48
Figura 33: Carga de archivo de datos	48
Figura 34: Función de distribución de tensiones constante y valor unitario	49
Figura 35: Sigma que varía en función de y	49
Figura 36: Sigma que varía en función de x	50
Figura 37: Sigma que varía en ambas dimensiones	50
Figura 38: Sigma definida según una serie polinómica	51
Figura 39: Control para la interpolación	51
Figura 40: Botón "Calcular K(P)"	52
Figura 41: Botón "K(phiNorm)"	52
Figura 42: Botón "Calcular K(P) 0°-90°"	53
Figura 43: Archivos de salida con los resultados	53
Figura 44: Ejemplo de archivo de resultados	53

# Notación

---

$a$	longitud de la grieta
$b, h, t$	dimensiones de la placa
$F$	factor de corrección
$K$	factor de intensidad de tensiones (modo I)
$K_r$	factor de intensidad de tensiones de referencia
$m$	función de peso y ponderación de la distribución de tensiones
$M, M_i$	función de peso para un punto
$c$	mitad del ancho de grieta
$P$	punto de carga en el plano de la grieta
$P'$	punto en el frente de grieta bajo análisis
$r$	radio para la coordenada polar
$R$	radio para la coordenada polar para puntos a lo largo del frente de grieta
$s$	distancia mínima entre un punto de carga y el borde del frente de grieta
$s'$	distancia mínima entre un punto de carga simétrico y el borde del frente de grieta
$S$	superficie del plano de la grieta
$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$x', y'$	coordenadas del punto en el frente de grieta bajo análisis
$\alpha$	relación de aspecto de la grieta elíptica $a/c$
$\beta$	relación de aspecto entre la longitud de grieta y el espesor de placa, $a/t$
$\Gamma$	límite del frente de grieta
$\theta$	ángulo de la coordenada polar para un punto en el frente de grieta
$\rho$	distancia entre un punto de carga $P$ y el punto del frente de grieta bajo estudio $P'$
$\rho'$	distancia entre un punto virtual de carga $P$ y el punto del frente de grieta bajo estudio $P'$
$\phi$	ángulo paramétrico de la elipse para el punto $P'$
$\sigma$	función de distribución tensiones en el plano de carga
$\sigma_0$	distribución de tensiones uniforme
$\varphi$	ángulo de la coordenada polar para un punto de carga $P$



# 1 INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 Principios de la Mecánica de Fractura

La mecánica de la fractura es la ciencia que estudia los mecanismos y procesos de propagación de grietas en sólidos, así como la distribución de tensiones y deformaciones que ocurren en un material agrietado o con discontinuidades sometido a cierta tensión externa.

Un ingeniero aeronáutico llamado *Alan Arnold Griffith*, durante la Primera Guerra Mundial, comenzó a desarrollar una hipótesis que relacionaba dos fenómenos hasta entonces discordantes, como eran la tensión de rotura atómica de un material y la tensión de rotura de una estructura del mismo material. Insinuó que la baja resistencia a la fractura observada en los ensayos era debida a la presencia de pequeñas roturas microscópicas en la masa del material.

Con la idea de demostrar hipótesis de la fractura, introdujo una grieta artificial en las probetas experimentales. Dicha fractura era mucho mayor que otras fracturas en la probeta. Las investigaciones revelaron que el producto de la raíz de la mitad de la longitud de grieta y la tensión aplicada en la misma era aproximadamente constante, es decir:

$$\sigma_f \sqrt{a} = C$$

Al producirse el crecimiento de una grieta se forman dos nuevas superficies, una a cada lado de la misma, conllevando un incremento de la energía superficial. *Griffith* halló una formulación de la constante  $C$  en términos de energía superficial, donde se produce el fallo cuando la energía libre alcanza un valor máximo en la longitud de grieta crítica. Al superarse, la energía libre disminuye por al incrementarse la longitud de grieta.

La teoría de *Griffith* fue desestimada aludiendo a que el nivel de energía necesaria para causar la fractura en los materiales estructurales actuales es mucho mayor que el de la energía superficial. Sin embargo, da una excelente aproximación para los resultados de materiales frágiles, puesto que apenas tienen deformación plástica antes de la rotura. Al contrario, en los materiales dúctiles se produce deformación plástica en los extremos de las grietas dando lugar a la disminución de las tensiones antes de que se rompan los enlaces.

En el extremo de toda grieta producida sobre materiales dúctiles se desarrolla una zona de plastificación. Cuando incrementamos la carga aplicada, la zona plástica aumenta hasta que la grieta avanza descargándose el material a ambos lados de la grieta ya desarrollada. Los ciclos de carga y descarga cerca de la grieta conllevan una disipación de energía en forma de calor y plastificación. Eso hace necesario añadir un término disipativo al balance de energía propuesto por *Griffith* para materiales frágiles. Concluyendo, se puede decir que hacer crecer una grieta en un material dúctil requiere más energía adicional que la requerida en los materiales frágiles.

De lo expuesto anteriormente se deduce que la energía total se puede dividir en energía elástica almacenada y energía disipada, que a su vez se subdivide en energía plástica y energía superficial. Para materiales frágiles, la energía superficial es predominante, no siendo así en materiales dúctiles, en los que predomina la disipación plástica. Todo esto implica que la formulación de *Griffith* quede de la siguiente manera:

$$\sigma_f \sqrt{a} = \sqrt{\frac{EG}{\pi}}$$

## 1.2 Factor de Intensidad de Tensiones

Durante la Segunda Guerra Mundial, *George Rankine*, desarrolló un modo de calcular la cantidad de energía necesaria para que se produjera la rotura alrededor del frente de grieta en el sólido elástico lineal. Dado que fueron aceptadas tanto la energía elástica como la de disipación plástica en la mecánica de la fractura, las profundas investigaciones de *Rankine* le llevaron a elaborar la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} \approx \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta)$$

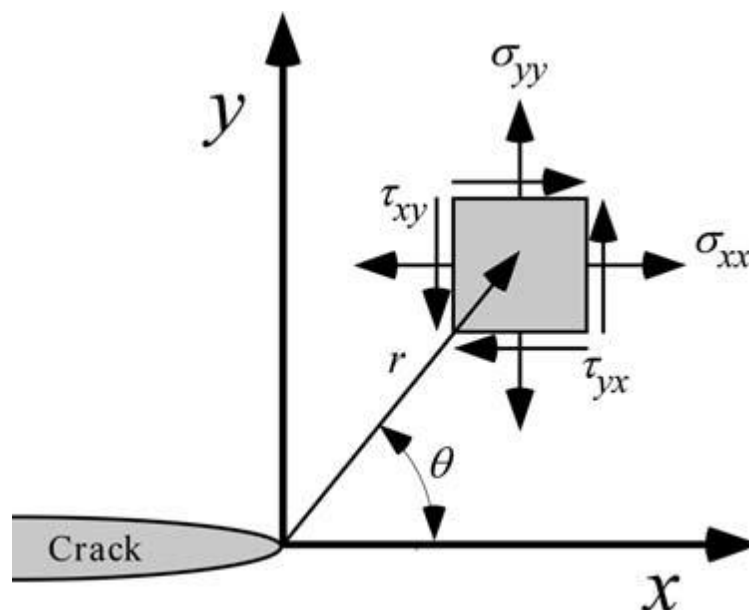


Figura 1: Tensiones cerca del fondo de una grieta, en un material elástico

Donde:

- $\sigma_{ij}$  son las tensiones de *Cauchy*.
- $r$  es la distancia al vértice de fractura.
- $\theta$  es el ángulo con respecto al plano de la grieta.
- $f_{ij}$  son funciones dependientes de la geometría de la grieta y las condiciones de carga.
- $K$  es el factor de intensidad de tensiones.

De otro lado, *Irwin* concluyó que, si era pequeño el tamaño de la zona plastificada alrededor de una grieta comparado con el tamaño de ésta, su energía de propagación se calcularía con un análisis puramente elástico. Considerando esto, el ritmo de liberación de energía para el crecimiento de la grieta se calcula



como la variación en la deformación elástica por unidad de área de ésta:

$$G = - \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_P = - \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_u$$

Donde:

- $U$  es la energía elástica del sistema.
- $a$  es la longitud de la fisura.
- Tanto la carga  $P$  es la carga aplicada (constante al evaluar esta magnitud).
- $u$  es el desplazamiento (constante al evaluar esta magnitud).

Todo esto daría lugar a la reformulación de la de sólidos de *Griffith*. El término de factor de intensidad de tensiones ( $K_I$ ) reemplazaría a la tasa de liberación de energía y la tenacidad a la fractura ( $K_C$ ) a la energía de rotura superficial. El resultado daría lugar primer modo de fallo y quedaría definido por las siguientes ecuaciones:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_C = \sqrt{EG_C} \text{ (para tensión plana)}$$

$$K_C = \sqrt{\frac{EG_C}{1 - \nu^2}} \text{ (para deformación plana)}$$

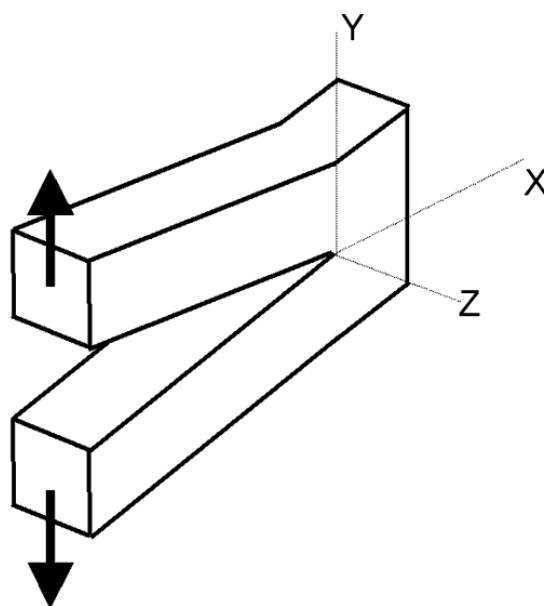


Figura 2: Primer modo de fallo

Una grieta en un sólido puede presentar un estado de tensiones en tres modos diferentes, como se ve en la siguiente ilustración:

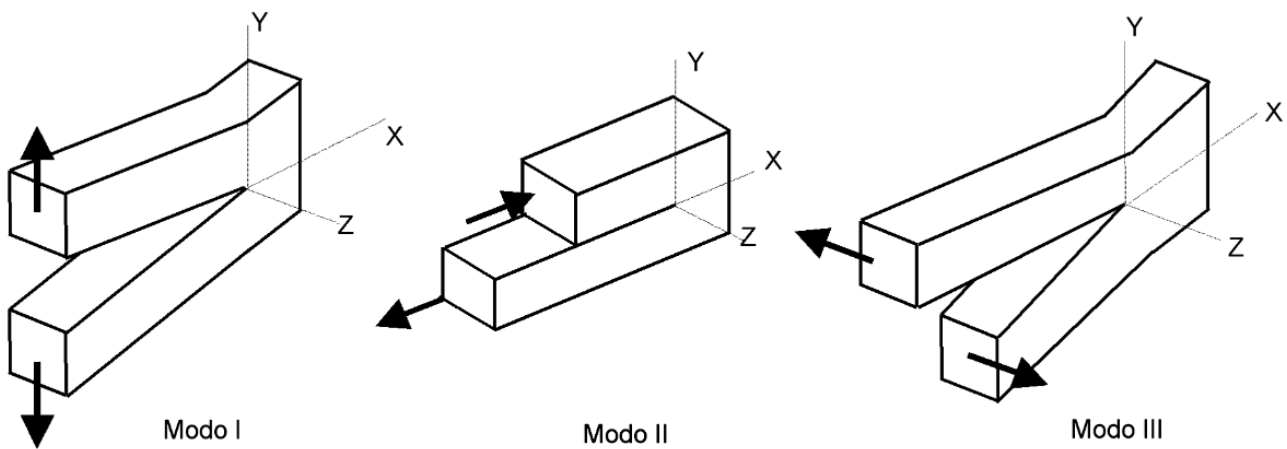


Figura 3: Modos de deformación de grieta (Norma UNE 7540:1998)

La tensión normal perpendicular al plano de la grieta, que se conoce con el nombre de modo de apertura o Modo I. Cuando los desplazamientos de la superficie de la grieta son perpendiculares al plano de la grieta y los esfuerzos cortantes son paralelos al plano de la grieta se denomina como el Modo II y cuando los esfuerzos cortantes son paralelos al plano de la grieta y los labios de esta se mueven en dirección paralela el modo de crecimiento de grieta es de desgarramiento y se denomina Modo III. La superposición de los modos descritos describe el caso general de tensiones de un sólido. El Modo I es técnicamente el más importante y las discusiones se centran generalmente en este Modo I de fractura. El Modo II, menos frecuente, se produce cuando tenemos grietas sobre planos que forman ángulos de 90° y finalmente el Modo III aparece en barras con grietas que están sometidas a esfuerzos de torsión.

### 1.3 Crecimiento de grieta (criterio de fractura global)

Para abordar el crecimiento de grieta, comenzamos por un planteamiento energético en el que se realiza un balance de energía de la circunstancia que está sucediendo en el modelo de fractura al realizar el análisis:

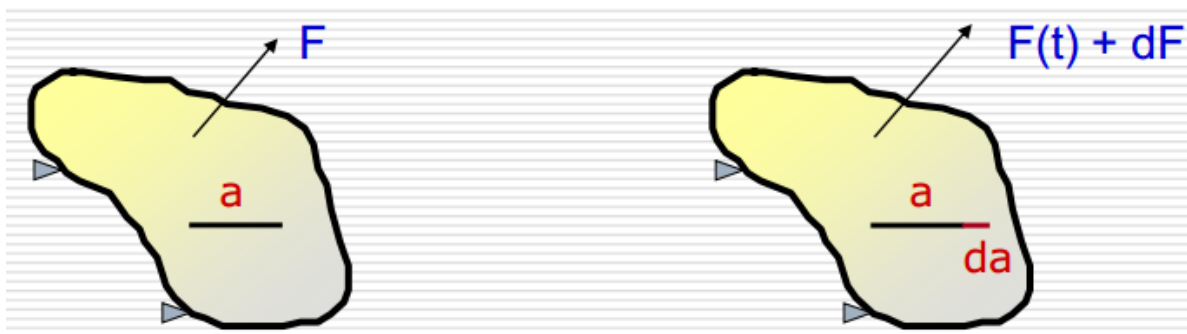


Figura 4: Modelo básico de crecimiento de grieta

$$\frac{dT}{dA} - \frac{dUa}{dA} - \frac{dUr}{dA} = 0$$

Donde:

- $\frac{dT}{dA}$  es el trabajo efectivo de las fuerzas exteriores.
- $\frac{dUa}{dA}$  es la energía elástica almacenada.
- $\frac{dUr}{dA}$  es la energía de fractura.

Analizando la ecuación, se puede comprobar que la propagación de la grieta se producirá cuando la diferencia entre el trabajo efectivo y la energía elástica almacenada sea mayor que la tenacidad a la fractura, es decir, cuando se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{dT - dUa}{dA} \geq \frac{dUr}{dA}$$

Haciendo un cambio de variables para simplificar la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pi = Ua - T &\Rightarrow G = -\frac{d\Pi}{dA} \\ R &= \frac{dUr}{dA} \end{aligned}$$

Donde:

- $G$  es la tasa de liberación de energía o energía potencial.
- $R$  es la resistencia a la fractura.

Uniéndolo ahora a la ecuación anterior, obtenemos el criterio de Fractura Global:

$$G \geq R$$

A continuación, veremos que la tasa de liberación de energía, también llamada energía potencial, se puede calcular mediante la derivada de la rigidez o a través de la integral  $J$ .

### 1.3.1 Cálculo de la tasa de liberación de energía mediante la derivada de la rigidez

La tasa de liberación de energía (energía potencial) se puede representar haciéndola proporcional a la derivada de la rigidez con respecto a la longitud de la grieta:

$$\pi = \left(\frac{1}{2}\right) [u]^T [K] [u] - [u]^T [F] \Rightarrow G = -\frac{1}{2} [u]^T \frac{\partial [K]}{\partial a} [u]$$

En el caso de tener una malla de nodos, la tasa de liberación de energía (energía potencial) se calcularía mediante el sumatorio de las derivadas de la rigidez de cada nodo.

### 1.3.2 Cálculo de la tasa de liberación de energía mediante la *Integral J*

Otro método para hallar la tasa de liberación de energía de un material es el uso de la *Integral J*. Si observamos la siguiente ilustración, se observa que  $J$  puede calcularse integrando una función que representa la variación de  $G$  en las cercanías del frente de grieta y en dirección ortogonal a un contorno cerrado  $\Gamma_0$  alrededor del mismo.

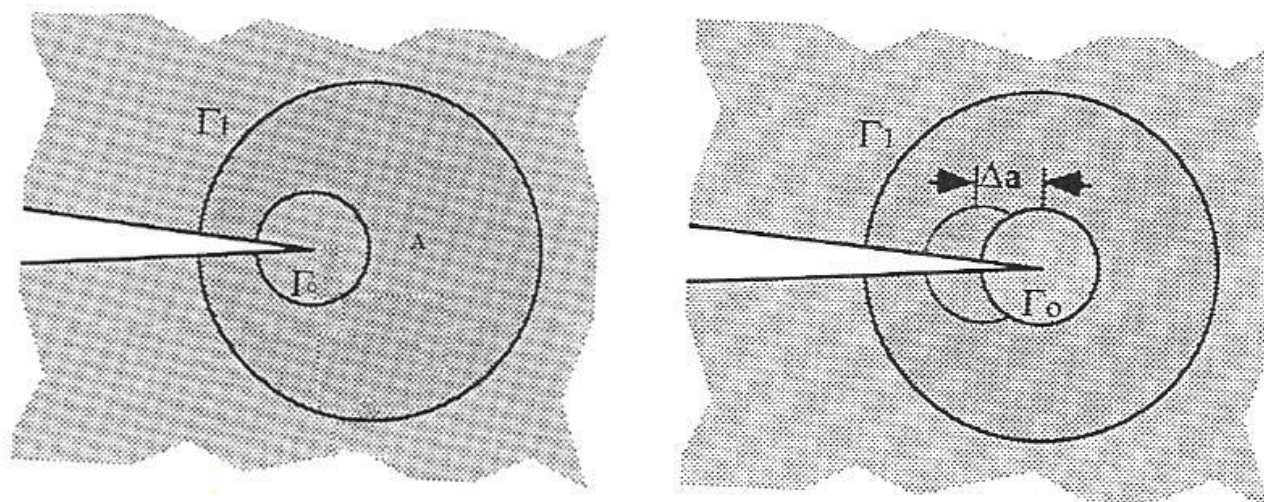


Figura 5: Superficies de plastificación en una fractura

Los puntos del material que se encuentran dentro de  $\Gamma_0$  experimentan una traslación de sólido rígido  $\Delta a$ . Por otro lado, los puntos que están fuera de  $\Gamma_1$  permanecen fijos y, los que están entre las líneas  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$ , sufren una traslación  $\Delta x$ .

$$J = \int_{\Gamma_0} \left[ w dx - \left( \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dS \right]$$

Donde:

- $x$  es el eje de propagación.
- $\Gamma_0$  es el camino de integración que rodea el extremo de la fisura.
- $w$  es la densidad de energía de deformación elástica.
- $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  las componentes de la tensión sobre el contorno de integración  $\Gamma_0$ .
- $dS$  la longitud de un elemento diferencial de  $\Gamma_0$ .

Dado que hay que obtener deformaciones y tensiones a lo largo del contorno, que es muy pequeño, no resulta muy útil la *Integral J* en la implementación numérica. Por ello, lo más sencillo es considerar otro contorno ( $\Gamma_1$ ) como el de la siguiente ilustración:

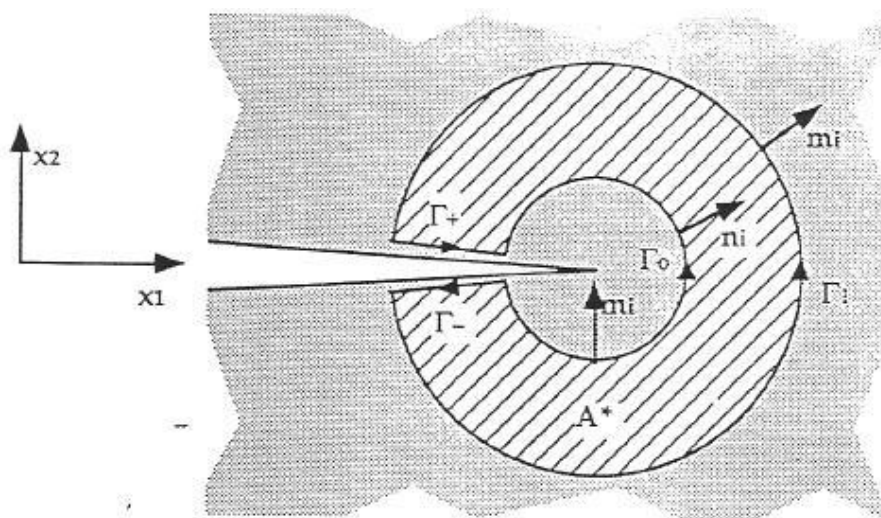


Figura 6: Contorno de integración para la integral J

Así pues, teniendo en cuenta el nuevo contorno, la expresión de la *Integral J* quedaría de la siguiente manera:

$$J = \int_{A^*} \left\{ \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} + \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x_1} - \frac{\partial w^p}{\partial x_1} - F_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] q \right\} dA - \int_{\Gamma_+ + \Gamma_-} \sigma_2 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma$$

Donde:

- $q$  un desplazamiento virtual normalizado.
- $w$  la densidad de energía de la deformación elástica.
- $F$  el vector de fuerzas de masa.

Por último, si consideramos un entorno en condiciones cuasiestáticas, sin fuerzas de volumen, sin deformaciones térmicas y sin fuerzas sobre las paredes de la grieta, la expresión de la *Integral J* quedaría reducida de la siguiente manera:

$$J = \int_{A^*} \left\{ \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} dA$$

#### 1.4 Crecimiento de grieta (criterio de fractura local)

Analizando el frente de grieta en el modelo plano, podemos obtener expresiones de los tensores que rodean al mismo. Estos tensores son muy importantes porque nos ayudan a calcular el factor de intensidad de tensiones.

La siguiente ilustración muestra un esquema de planteamiento local donde se representan los tensores de tensiones y desplazamientos:

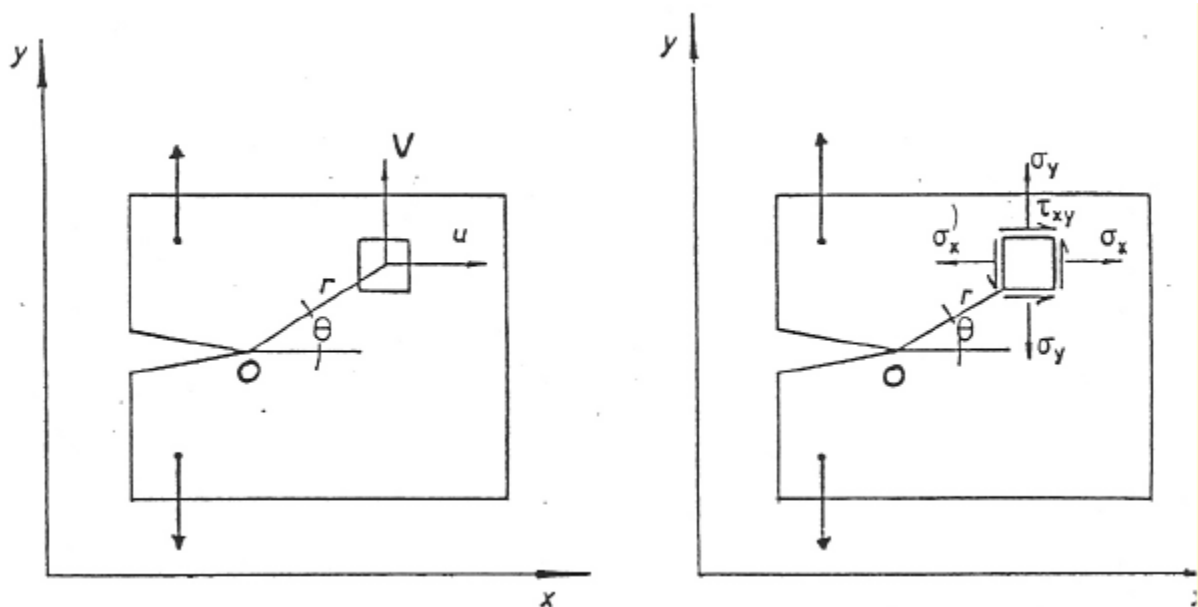


Figura 7: Esquema de planteamiento local

Y sus ecuaciones de representan de la siguiente manera:

- Tensor de desplazamientos:

$$u = \frac{k}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} d_u(\theta) + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$v = \frac{k}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} d_v(\theta) + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right)$$

- Tensor de tensiones:

$$\sigma_x = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_x(\theta) + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_y(\theta) + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{xy}(\theta) + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right)$$

El criterio de Fractura Local se puede establecer calculando el factor de intensidad de tensiones ( $K_I$ ) a partir de cualquiera de las expresiones anteriores y comparándolo con la tenacidad a la fractura ( $K_C$ ):

$$K_I \geq K_C$$

La tenacidad a la fractura ( $K_C$ ) depende de ciertas propiedades del sólido del problema que estemos analizando en cada momento: material, espesor del panel, temperatura y velocidad de sollicitación de la carga.

## 1.5 Tolerancia al daño

La tolerancia al daño se define como la capacidad de una estructura con daños producidos por fatiga, condiciones ambientales o causas accidentales, para soportar determinadas cargas hasta que aquéllos sean detectados mediante las adecuadas inspecciones.

Las inspecciones periódicas buscan detectar el daño antes de que se produzca y evitar así el fallo del sistema, el cual se produce cuando es imposible soportar las cargas a las que está sometido el sistema, produciéndose el fallo estructural.

Se denomina resistencia de seguridad de grieta al nivel más bajo de resistencia residual. En un sistema susceptible a daños por generación y propagación de grietas se consigue la seguridad del mismo con inspecciones periódicas de detección de grietas. También es posible realizar predicciones por medio de la mecánica de fractura:

- Determinar la longitud de grieta mínima detectable, comparando con estructuras conocidas.
- Suponer un historial de carga.
- Pronosticar la resistencia residual del sistema suponiendo la grieta y determinar la longitud crítica de ésta para la resistencia residual mínima requerida.
- Especificar la curva de crecimiento de grieta desde lo mínimo detectable hasta su tamaño crítico.

En la industria aeronáutica se tiene muy en cuenta la tolerancia al daño en las fases de diseño y certificación de los aviones, dado que las normas de aviación exigen una evaluación exhaustiva la misma. Para ello se realizan los pertinentes ensayos e inspecciones que aseguren la integridad estructural de la aeronave y el sostenimiento de la seguridad.

Por lo tanto, el diseño de un sistema estructural debe tener siempre muy presente la tolerancia al daño, de modo que se garantice un apropiado nivel de fiabilidad y pueda conservar la entereza y la capacidad para el servicio durante toda su vida útil. Al mismo tiempo, se debe disponer de un plan de revisiones y mantenimiento registrados para localizar y subsanar cualquier grieta a fatiga que pueda aparecer a lo largo de la vida útil del sistema.





## 2 GRIETAS SEMI-ELÍPTICAS EN PLACAS DE ESPESOR FINITO

---

Las placas de espesor finito son una de las estructuras más utilizadas en la industria. Debido a la posibilidad de utilizar un espesor de placa relativamente alto, tienen la capacidad de soportar grandes cargas mecánicas y térmicas. Sin embargo, las cargas cíclicas inician grietas en la superficie y, después de varios ciclos, van adquiriendo forma semi-elíptica creciendo a lo largo de las grietas y desembocando en la fractura de la placa. Por lo tanto, las placas de espesor finito tienen una vida a fatiga limitada. La estimación correcta de la vida útil a fatiga es especialmente importante en aplicaciones industriales de placas de espesor finito. Pueden ocurrir desenlaces catastróficos si se realiza una incorrecta estimación de la vida a fatiga. La estimación de la vida a fatiga basada en la mecánica de fractura elástico lineal se realiza a través del factor de intensidad de tensiones.

La función de peso es un método que sirve para determinar el factor de intensidad de tensiones. En este método, una vez que se obtiene la función de peso de la geometría agrietada para una carga de referencia, se puede usar para determinar el factor de intensidad de tensiones para cualquier carga arbitraria en los bordes de la grieta.

*Bueckner* [2] propuso el concepto de función de peso para la determinación del factor de intensidad de tensiones en el caso de distribuciones de tensiones complejas. *Rice* [2] representa el concepto de función de peso utilizando la relación entre la tasa de liberación de energía y el factor de intensidad de tensiones. *Rice* demostró que la función de peso puede obtenerse del desplazamiento de apertura de grieta de un caso de carga de referencia y un factor de intensidad de tensiones también conocido. Debido a que los desplazamientos estaban disponibles sólo para algunos casos especiales, *Petrosky* y *Achenbach* [3] propusieron un método para obtener campos de desplazamiento aproximados a partir de un factor de intensidad de tensiones conocido tomado como referencia. Diversos investigadores [4–7] hacen discusiones exhaustivas acerca de las limitaciones del método de *Petrosky* y *Achenbach* para ayudar a evitar su posible aplicación incorrecta. *Sha* y *Yang* [8] propusieron un desplazamiento aproximado de apertura de grieta al expandirse en una serie de potencias. *Fett* [9] propuso otro desplazamiento aproximado de apertura de grieta al expandirse en una serie de potencias. *Glinka* y *Shen* [10] demostraron que cuatro términos de estas series de potencias son lo suficientemente adecuados para determinar el factor de intensidad de tensiones. Demostraron que los parámetros desconocidos de los cuatro términos que pueden aproximar el desplazamiento de apertura de grieta se pueden determinar directamente a partir de las expresiones del factor de intensidad de tensiones de referencia sin utilizar la función de desplazamiento de apertura de grieta. *Shen* y *Glinka* [11] demostraron que la expresión de la función de peso general y sus propiedades características se pueden usar como información complementaria para la determinación de los parámetros de función de peso desconocidos. *Fett* [12,13] obtuvo numerosas condiciones geométricas, así como condiciones de equilibrio, para la construcción de un campo aproximado de desplazamiento de apertura de grieta. *Fett* [14] describió un procedimiento mediante el cual se utiliza un ajuste del factor de intensidad de tensiones de referencia para determinar una función de peso promediada. Todas estas investigaciones están relacionadas con la determinación del factor de intensidad de tensiones en el modo de apertura.

En grietas semi-elípticas, el punto más cercano y el más lejano en el frente de grieta desde su entrada se definen como los puntos más profundos de la superficie de la grieta, mostrados como C y A en la siguiente ilustración, respectivamente:

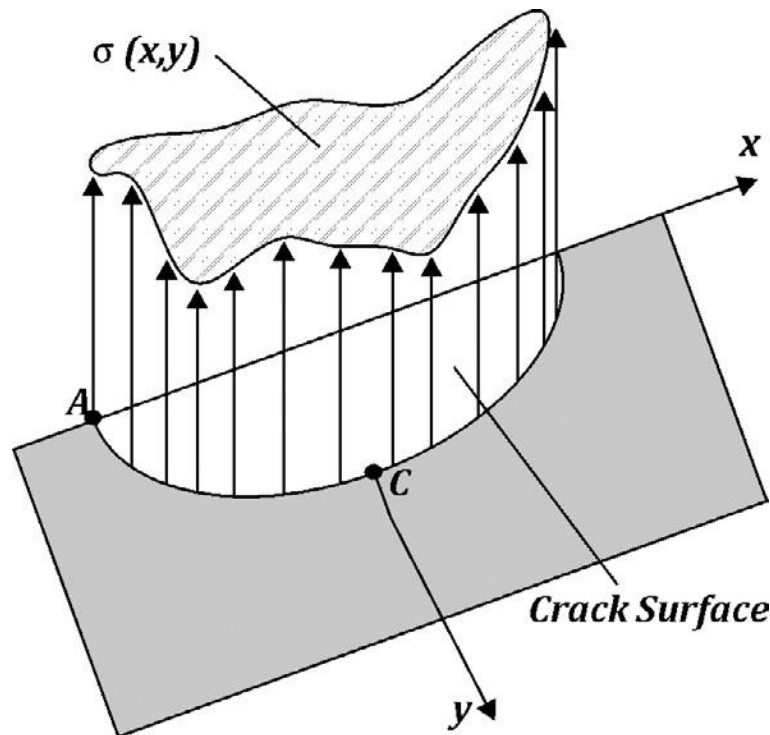


Figura 8: Grieta semi-elíptica sometida a tensiones bivalentes

En general, estos puntos se conocen como puntos críticos cuando se aplican distribuciones de tensiones uniformes en los bordes de la grieta.

Hay muchas investigaciones para el cálculo del factor de intensidad de tensiones en placas agrietadas de espesor finito utilizando el método de función de peso. *Niu y Glinka* [15] presentaron una familia de funciones de peso para grietas de borde y superficies semi-elípticas en placas planas y placas con esquinas. Las funciones de peso se derivaron utilizando la definición de función de peso de *Bueckner y Rice* y la expresión de desplazamiento de apertura de grieta de *Petroski y Achenbach*. *Shen* [16] derivó la función de peso para un punto de superficie en una grieta semi-elíptica sobre una placa de espesor finito. La derivación se realizó utilizando la función de peso universal [10] y dos factores de intensidad de tensiones tomados como referencia. *Shen y Glinka* [17] derivaron funciones de peso para los puntos de superficie y más alejados en una grieta semi-elíptica en una placa de espesor finito a partir de una función de peso general y dos factores de intensidad de tensiones de referencia. *Mikkola* [18,19] desarrolló una solución para el factor de intensidad de tensiones y el desplazamiento de la apertura de la grieta en el centro de la misma para una grieta semi-elíptica en una placa ancha sometida a tensiones remotas y cargas de flexión, utilizando la función de peso. *Ruijia y Reddy* [20] utilizaron métodos alternativos de elementos finitos para evaluar los factores de intensidad de tensiones y las funciones de peso en problemas con grietas superficiales semi-elípticas. *Wang y Lambert* [21] realizaron análisis de elementos finitos tridimensionales para calcular los factores de intensidad de tensiones en grietas semi-elípticas de baja relación de aspecto. Los factores de intensidad de tensiones, en los puntos de borde y frente de grietas semi-elípticas, se presentan con relaciones de aspecto bajas, de 0.05 y 0.1. Se aplicaron distribuciones de tensiones uniformes, lineales, parabólicas y cúbicas al frente de grieta. *Wang y Lambert* [22] obtuvieron funciones de peso para cualquier punto local a lo largo de una grieta de superficie semi-elíptica en placas de espesor finito utilizando una supuesta función de peso general y dos factores de intensidad de tensiones de referencia. Las funciones de peso son adecuadas para el cálculo de factores de intensidad de tensiones en cualquier lugar a lo largo del frente de grieta para grietas de superficie semi-elíptica en campos que varían únicamente a lo largo de la longitud de la grieta. *Wang y Lambert* [23] realizaron análisis de elementos finitos tridimensionales para calcular los factores

de intensidad de tensiones en grietas semi-elípticas de alta relación de aspecto. Los factores de intensidad de tensiones obtenidos en los puntos del borde y más profundos de grietas semi-elípticas se muestran con altas relaciones de aspecto, de 0.6 y 2.

Aunque estas funciones de peso sólo son aplicables para variaciones de tensiones unidimensionales (a través del espesor de la placa), las distribuciones de tensiones pueden ser bidimensionales en aplicaciones de ingeniería. Por lo tanto, es necesario desarrollar funciones de peso de carga puntual que permitan el cálculo de los factores de intensidad de tensiones bajo distribuciones de tensiones bidimensionales arbitrarias. *Wang y Glinka* [24] formularon una nueva forma matemática de función de peso general de carga puntual aprovechando el conocimiento de algunas funciones de peso específicas en grietas planas bidimensionales, disponibles en la literatura, y ciertas propiedades de la función de peso. *Jin y Wang* [25] extendieron la función de peso de carga puntual para obtener funciones de peso en grietas de superficie semi-elíptica en placas de espesor finito. Estas funciones de peso son aplicables sólo para los puntos más profundos y de superficie bajo variaciones de tensiones bidimensionales (a través del espesor y ancho de la placa). En aplicaciones industriales, cuando se aplican distribuciones de tensiones complicadas en los bordes de la grieta, los puntos críticos pueden o no ser los puntos más profundos y de superficie, como suele ser el caso. Por lo tanto, hay otros puntos que se deben examinar.

En este estudio se obtendrá una función generalizada de peso para cargas puntuales en cualquier punto a lo largo del frente de la grieta, para grietas semi-elípticas en placas de espesor finito bajo unas distribuciones de tensiones bidimensionales arbitrarias.



### 3 FUNCIÓN GENERAL DE PESO PARA CARGAS PUNTUALES

En este estudio, GPLWF se obtiene para cualquier punto local a lo largo de la superficie de una grieta semi-elíptica en placas de espesor finito, como las mostrada en la siguiente ilustración:

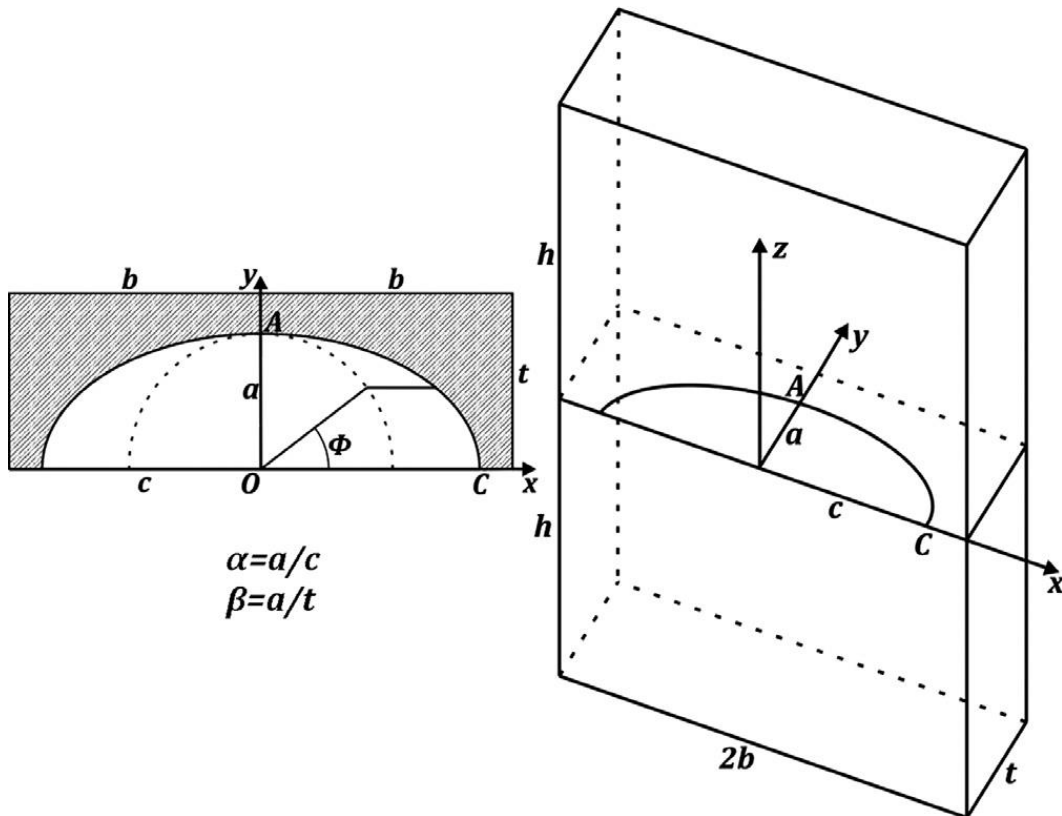


Figura 9: Grietas semi-elípticas en placas de espesor finito

La forma general de la ecuación es la siguiente:

$$m(x, y; P') = \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2} \rho^2} \left[ 1 + M(\alpha, \beta, \phi) \left( 1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)} \right) \right]$$

El resto de parámetros necesarios para calcular la función de peso están representados en la siguiente ilustración:

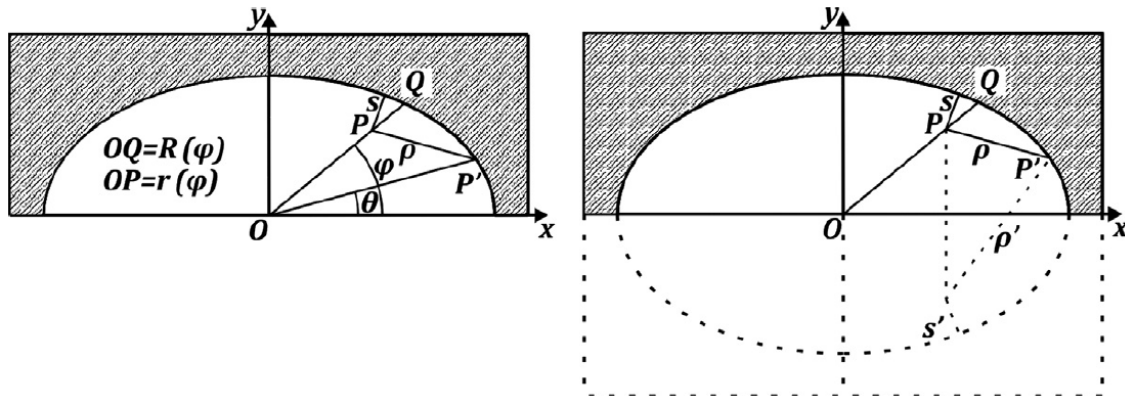


Figura 10: Notación de función de peso para grietas con superficie semi-elíptica

Los experimentos han demostrado que, utilizando un único término ( $n=1$ ), es posible aproximar la función GPLWF con una buena precisión para una amplia gama de configuraciones de superficies de grietas.

Por lo tanto, el coeficiente  $M$  es una función que depende de la relación de aspecto de la grieta ( $\alpha$ ), la relación de aspecto entre la longitud de la grieta y el espesor de la placa ( $\beta$ ), y la situación de cualquier punto a lo largo de la grieta, que viene dada por el ángulo  $\phi$ .

Los factores de intensidad de tensiones de referencia se usan primero en los cálculos de la  $M$ . Después, se pueden calcular los factores de intensidad de tensiones para cualquier punto a lo largo del frente de la grieta para cualquier tensión bidimensional arbitraria utilizando la siguiente ecuación:

$$K(P') = \iint_S \sigma(x, y) \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2} \rho^2} \left[ 1 + M(\alpha, \beta, \phi) \left( 1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)} \right) \right] dS \quad (1)$$

Para determinar el coeficiente  $M$  en la ecuación anterior, se desarrolló un algoritmo de integración numérica, donde se calculó el coeficiente  $M$  para 11 puntos del frente de grieta, desde un punto de la superficie de la grieta hasta el punto más profundo de la misma (es decir,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ), para  $0.1 \leq \alpha \leq 1.0$ ,  $0.1 \leq \beta \leq 0.8$  y  $c/b \approx 0$  (excepto en el caso de  $\alpha = 0.1$  y  $\beta = 0.1$ , simultáneamente). Los valores obtenidos para  $M(\alpha, \beta, \phi)$  se muestran en el *Apéndice A*. Los coeficientes  $M(\alpha, \beta, \phi)$  se incluyen en una fórmula empírica de interpolación, cuya expresión polinómica se presenta en el *Apéndice B*. Para cualquier punto a lo largo del frente de grieta, la precisión de la ecuación está dentro del 1% de los datos numéricos. Esta fórmula es muy conveniente y fácil de usar en aplicaciones industriales.

Ahora, el cálculo del factor de intensidad de tensiones para cualquier punto a lo largo del frente de grieta se puede hacer en dos pasos para cualquier distribución compleja bidimensional arbitraria de tensiones. En el primer paso, las expresiones  $M(\alpha, \beta, \phi)$  y  $\sigma(x, y)$  se reemplazan con la fórmula empírica presentada de  $M(\alpha, \beta, \phi)$  y la distribución de tensiones conocida a través del plano de la grieta en la placa defectuosa, respectivamente. En el segundo paso, la expresión de la integral del factor de intensidad de tensiones para la placa agrietada bajo una distribución bidimensional de tensiones, obtenida en el primer paso, se calcula mediante el programa de integración paramétrica numérica.

## 4 MODELO MATEMÁTICO

En este capítulo se describe el desarrollo matemático de los valores que intervienen en la expresión (1) del capítulo anterior y los métodos para el cálculo del FIT.

### 4.1 Cálculo de P'

Como entrada al cálculo del FIT se partirá de los siguientes parámetros.

- Ángulo  $\theta$  (ángulo de la coordenada polar, entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ )
- Valor  $c$  para el eje mayor
- Valor  $a$  para el eje menor
- Punto  $O(x_0, y_0)$  que será el centro de la elipse que modela la grieta. Consideraremos que  $O$  está en el centro de coordenadas para simplificar cálculos.

Para obtener el punto  $P'$  calcularemos el punto  $T$  correspondiente a una circunferencia de radio  $c$  y un ángulo  $\theta$ .

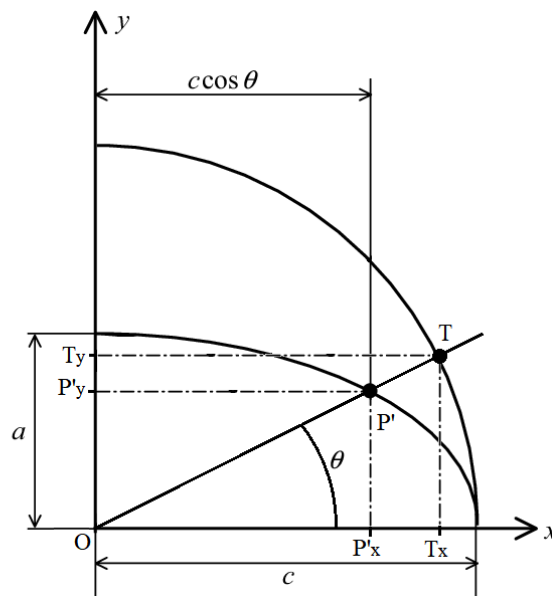


Figura 11: Cálculo de P'

De la ecuación de la recta que pasa por O y T.

$$y = \frac{T_y}{T_x} x \quad (2)$$

Y la ecuación de la elipse.

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (3)$$

Igualando (1) y (2) obtenemos.

$$\begin{aligned} \frac{T_y}{T_x} x &= \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - x^2} \\ \frac{T_y^2}{T_x^2} x^2 &= \frac{a^2}{c^2} (c^2 - x^2) = a^2 - \frac{a^2}{c^2} x^2 \\ \left( \frac{T_y^2}{T_x^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) x^2 &= a^2 \\ x &= \frac{a}{\sqrt{\frac{T_y^2}{T_x^2} + \frac{a^2}{c^2}}} = \frac{aT_x c}{\sqrt{T_y^2 c^2 + T_x^2 a^2}} \end{aligned}$$

Siendo x el valor de  $P'_x$  y sustituyendo en (1) tenemos que  $P'_y$  es el siguiente.

$$P'_y = \frac{aT_y c}{\sqrt{T_y^2 c^2 + T_x^2 a^2}}$$

Así tenemos que  $P'$  queda como se indica en la siguiente expresión.

$$P' = \left( \frac{aT_x c}{\sqrt{T_y^2 c^2 + T_x^2 a^2}}, \frac{aT_y c}{\sqrt{T_y^2 c^2 + T_x^2 a^2}} \right)$$

Si en lugar de partir del ángulo de la coordenada polar partimos del ángulo paramétrico de  $P'$  la obtención de  $P'$  será la siguiente.



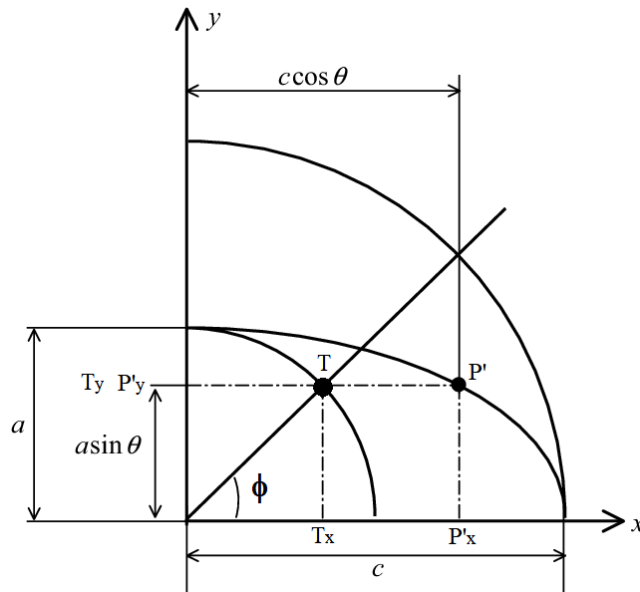


Figura 12: Cálculo de P' desde Phi

$$T_y = a \cdot \text{sen}\Phi$$

$$P'_y = T_y$$

$$P'_x = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - P'^2_y}$$

## 4.2 Cálculo de s

El valor s es la distancia mínima entre un punto cualquiera del interior de la semi-elipse y el borde de ésta. Para calcular este valor partimos de la expresión en forma cartesiana de la elipse centrada en el eje de coordenadas.

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) \cdot a^2$$

$$y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) a^2} = a \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} = a \sqrt{\frac{c^2 - x^2}{c^2}} = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - x^2} \quad (4)$$

Y la combinaremos con la expresión de la distancia euclídea de dos puntos.

$$d(P_E, P) = \sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2}$$

$$d^2(P_E, P) = (x - P_x)^2 + (y - P_y)^2 \quad (5)$$

Siendo  $P_E(x,y)$  un punto del borde de la elipse y  $P(P_x,P_y)$  un punto del interior. Usando la expresión (4) en (5) obtenemos.

$$\begin{aligned}
 d(P_E, P) = f(x) &= (x - P_x)^2 + \left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - x^2} - P_y\right)^2 \\
 f(x) &= x^2 + P_x^2 - 2P_x x + \frac{a^2}{c^2}(c^2 - x^2) + P_y^2 - 2\frac{a}{c}P_y\sqrt{c^2 - x^2} = \\
 &= x^2 + P_x^2 - 2P_x x + a^2 - \frac{a^2}{c^2}x^2 + P_y^2 - 2\frac{a}{c}P_y\sqrt{c^2 - x^2} = \\
 &= \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)x^2 - 2P_x x - 2\frac{a}{c}P_y\sqrt{c^2 - x^2} + P_x^2 + P_y^2 + a^2 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Para conseguir el punto  $P_E(x,y)$  nos devuelva la distancia mínima utilizaremos la técnica de la optimización. Derivaremos la expresión (3) en función de la variable  $x$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)x - 2P_x + 2\frac{a}{c}P_y\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \\
 &= 2x - 2\frac{a^2}{c^2}x - 2P_x + 2\frac{a}{c}P_y\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x - \frac{a^2}{c^2}x - P_x + \frac{a}{c}P_y\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = 0$$

$$\frac{a}{c}P_y\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = P_x + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)x$$

$$\frac{a^2}{c^2}P_y^2\frac{x^2}{c^2 - x^2} = P_x^2 + \left(\frac{a^4}{c^4} + 1 - 2\frac{a^2}{c^2}\right)x^2 + 2P_x\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)x$$

$$\frac{a^2}{c^2}P_y^2x^2 = P_x^2(c^2 - x^2) + \left(\frac{a^4}{c^4} + 1 - 2\frac{a^2}{c^2}\right)(c^2 - x^2)x^2 + 2P_x\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)(c^2 - x^2)x$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{c^2}P_y^2x^2 &= P_x^2c^2 - P_x^2x^2 + \frac{a^4}{c^2}x^2 - \frac{a^4}{c^4}x^4 + c^2x^2 - x^4 - 2a^2x^2 + 2\frac{a^2}{c^2}x^4 + 2P_xa^2x - 2\frac{a^2}{c^2}P_xx^3 \\
 &\quad - 2P_xc^2x + 2P_xx^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(2\frac{a^2}{c^2} - \frac{a^4}{c^4} - 1\right)x^4 + \left(2P_x - 2P_x\frac{a^2}{c^2}\right)x^3 + \left(\frac{a^4}{c^2} + c^2 - 2a^2 - P_x^2 - P_y^2\frac{a^2}{c^2}\right)x^2 + (2P_xa^2 - 2P_xc^2)x \\
 + P_x^2c^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{2a^2c^2 - a^4 - c^4}{c^4}x^4 + 2P_x\left(\frac{c^2 - a^2}{c^2}\right)x^3 + \left(\frac{a^4 + c^4 - 2a^2c^2 - P_x^2c^2 - P_y^2a^2}{c^2}\right)x^2 + 2P_x(a^2 - c^2)x + P_x^2c^2 = 0$$

Con esto obtenemos un polinomio de grado cuatro.

$$p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = 0$$

Siendo los coeficientes los siguientes.

$$p_4 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - c^4}{c^4}$$

$$p_3 = 2P_x \left( \frac{c^2 - a^2}{c^2} \right)$$

$$p_2 = \frac{a^4 + c^4 - 2a^2c^2 - P_x^2c^2 - P_y^2a^2}{c^2}$$

$$p_1 = 2P_x(a^2 - c^2)$$

$$p_0 = P_x^2c^2$$

En el cálculo de las raíces de este polinomio obtendremos cuatro raíces. Las raíces pueden ser cuatro raíces reales puras o dos raíces reales puras y dos raíces con parte imaginaria (con las partes imaginarias de signo contrario). En lugar de estudiar si cada una de estas raíces nos ofrece un punto singular que maximiza o minimiza la expresión realizando el estudio de la segunda derivada, lo que se hará será calcular el resultado en (2) para cada una de las raíces reales puras y nos quedaremos con la que ofrezca un valor menor.

### 4.3 Cálculo de $\rho$

El valor  $\rho$  no es más que la distancia entre un punto cualquiera del interior de la semi-elipse y el punto  $P'$  que está situado en el borde de la elipse.

$$\rho = d(P', P) = \sqrt{(P'_x - P_x)^2 + (P'_y - P_y)^2}$$

### 4.4 Cálculo de $r$

Este valor indica la distancia entre el centro de la elipse y un punto cualquiera del interior de la semi-elipse.

$$r = d(O, P) = \sqrt{(O_x - P_x)^2 + (O_y - P_y)^2}$$

## 4.5 Cálculo de R

Este valor indica la distancia entre el centro de la elipse y un punto Q obtenido de la intersección de la recta que pasa por el centro de la elipse y un punto P cualquiera del interior de la semi-elipse. La obtención de Q es similar a la del punto P' partiendo del ángulo de las coordenadas polares. El punto Q se determinará con la siguiente expresión.

$$Q = \left( \frac{aP_x c}{\sqrt{P_y^2 c^2 + P_x^2 a^2}}, \frac{aP_y c}{\sqrt{P_y^2 c^2 + P_x^2 a^2}} \right)$$

Quedando R determinado como.

$$R = d(Q, P) = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}$$

Hay que indicar que si el punto P es el punto que define el centro de la elipse no es posible calcular el punto Q.

## 4.6 Cálculo de M

El valor  $M(\alpha, \beta, \phi)$  está tabulado a partir de una expresión obtenida de manera empírica como se indica en *Rahmatollah* [1]. Para obtener  $\phi$  a partir del ángulo de las coordenadas polares  $\theta$  se procede como en el cálculo de P' a partir de  $\phi$ . Se obtiene el punto T y al igualarlo a P' y se consigue  $\phi$ .

$$T_y = a \cdot \text{sen}\Phi$$

$$P'_y = T_y$$

$$\phi = \text{arcsen}\left(\frac{P'_y}{a}\right)$$

## 4.7 Métodos de integración numérica

En lugar de realizar los cálculos utilizando la doble integral de la expresión (1) se ha recurrido a la utilización de métodos de integración numérica. Dichos métodos tienen en común que realizan una discretización de los valores x e y para los que se calcularán la expresión interior de (1) y cuyos resultados se combinarán de distinta manera. A continuación, se mostrarán los tres métodos numéricos utilizados y se detallarán sus características.

### 4.7.1 Método numérico de las semisumas

La elección de los valores x e y para los que se hará el cálculo de la función se realiza simplemente a partir de los datos de entrada de la función de distribución de tensiones, esperando que ésta sea regular en la distribución tanto en x como en y.

Una vez establecido esta secuencia de valores  $x$  e  $y$  se aplica el siguiente algoritmo para calcular el FIT en un punto  $P'$  determinado.

```

SS = 0
Desde i=1 hasta Ny-1
    S2 = 0
    yfix = y(i)
    Desde j=1 hasta Nx-1
        S2 = S2 + 1/2*(f(x(j+1),yfix)+f(x(j),yfix))*(x(j+1) - x(j))
    fin
    SS = SS + 1/2*(S1 +S2)*(y(i+1) - y(i))
    S1 = S2
fin

```

#### 4.7.2 Método numérico de los dobles trapecios

Este método numérico usa como valores  $x$  e  $y$  los mismos que el método de las semisumas pero, además, necesita el valor intermedio entre cada dos valores  $x$  consecutivos y de igual manera necesita un valor intermedio entre cada dos valores  $y$  consecutivos. La inclusión de dichos valores intermedios tanto en  $x$  como en  $y$  obliga a calcular el valor de la función de distribución de tensiones en puntos que no se aportan en los datos de entrada. El cálculo de estos nuevos valores se realiza mediante la interpolación bilineal.

La expresión que define el método es la siguiente tal y como se define en *Rouah* [38].

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

$$\approx \frac{(b-a)(d-c)}{16} \times \left[ f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d) + 2 \left( f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right]$$

Figura 13: Método de los dobles trapecios

Una vez definidos los valores de referencia  $x$  e  $y$  se aplica el siguiente algoritmo para calcular el FIT en un punto  $P'$  determinado.

```

Desde y=2 hasta Ny
    a = Y(y-1);
    b = Y(y);
    Desde x=2 hasta Nx
        c = X(x-1);
        d = X(x);
        term1 = f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d);
        term2 = f((a+b)/2,c) + f((a+b)/2,d) + f(a,(c+d)/2) + f(b,(c+d)/2);
        term3 = f((a+b)/2,(c+d)/2);
        Int(x,y) = (b-a)*(d-c)/16*(term1 + 2*term2 + 4*term3);
    fin
fin
y = Σ(Σ(Int))

```

### 4.7.3 Método numérico de Gauss-Legendre

El método de Gauss-Legendre establece una distribución de puntos de referencia no constante. Habrá más densidad de puntos en los extremos del intervalo que en la zona central de éste.

Además, establece un peso a cada uno de los puntos de referencia a modo de ponderación. Cuanto más se acerquen los puntos de referencia al extremo del intervalo menor será su ponderación, ponderación que será máxima en el centro del intervalo.

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[P'_N(x_j)]^2} \quad j = 1, \dots, N. \quad P'_N(x) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (-1)^k \binom{N}{k} \binom{2N-2k}{N} (N-2k)x^{N-2k-1}$$

La expresión que define este método es la siguiente tal y como se define en *Rouah* [38].

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \approx \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 k_1 w_{i,1} w_{j,2} \cdot f(h_1 x_{i,1} + h_2, k_1 x_{j,2} + k_2)$$

$$h_1 = \frac{(b-a)}{2} \quad h_2 = \frac{(b+a)}{2}$$

$$k_1 = \frac{(d-c)}{2} \quad k_2 = \frac{(d+c)}{2}$$

# 5 RESULTADOS Y VALIDACIÓN

---

En este capítulo se comprobará la eficacia de la aplicación implementada calculando el factor de intensidad de tensiones de grietas semi-elípticas sometidas a distintas distribuciones de tensiones: constante, unidimensional y bivalente. Para ello, se realizarán validaciones según las distintas distribuciones empleando la aplicación NASGRO-NASSIF y los resultados proporcionados en los artículos de investigación *Wang* [22], *Shiratory* [30] y *Rahmatollah* [1].

Se ha comprobado analíticamente que realizando una interpolación bilineal de grado 3 sobre la función que define los datos de entrada, se obtienen unos resultados muy precisos sin comprometer el tiempo de cálculo computacional. Este criterio ha sido el empleado en todas las pruebas realizadas.

## 5.1 Validación frente a NASGRO-NASSIF

Utilizando el programa NASGRO-NASSIF, se han obtenido una serie de resultados para unos parámetros de entrada concretos. Se ha intentado realizar una correspondencia entre la manera en la que se definen estos parámetros de entrada en NASSIF y la manera en la que se ha definido en la aplicación desarrollada.

La tabla muestra los resultados para los métodos de las semisumas (Ks), dobles trapecios (Kt), Gauss-Legendre (Kg) y los devueltos por NASSIF (KN).

Se han estudiado 9 casos distintos atendiendo a la geometría de la elipse que modela la grieta:  $c = 6$ ,  $a = \{0.6, 3, 6\}$  para que  $\alpha$  fuese  $\alpha = \{0.1, 0.5, 1\}$  y diversos valores de  $t$  para que  $\beta$  fuese  $\beta = \{0.1, 0.4, 0.8\}$ . Para la obtención de los resultados en la aplicación desarrollada se ha realizado una interpolación de grado tres a los datos generados por la función de distribución de tensiones para conseguir una mayor precisión.

Atendiendo a los resultados tabulados, se aprecia que la similitud en el resultado varía. En algunos casos la diferencia relativa es grande, pero en la mayoría de los casos la similitud de los resultados es alta o muy alta, dando por buenos los resultados obtenidos.

En la realización de la prueba, se ha intentado que tanto los datos de entrada para la función de distribución de tensiones como las características de la elipse que modela la grieta y las características de la placa que la contiene fuesen iguales tanto en nuestra aplicación y en NASGRO-NASSIF. Sin embargo, diversas discrepancias en la descripción de los datos usados por NASSIF y distintas diferencias en el modelado de ambas aplicaciones impiden que todos estos condicionantes puedan tomarse como idénticos, atribuyendo a que éste sea el principal motivo por el que los datos no son más parecidos en algunos casos.

### 5.1.1 Distribución de tensiones constante

En este apartado se ha utilizado una distribución de tensiones constante con valor 1 ( $\sigma_1$ ) en todos los puntos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación en la Tabla 1.

Tabla 1: Comparación de aplicación desarrollada frente a NASGRO-NASSIF

c	a	t	alfa	beta	Sigma	Ks(A)	Kt(A)	Kg(A)	KN(A)	Ks(C)	Kt(C)	Kg(C)	KN(C)
6	0,6	6	0,1	0,1	Sigma1	0,850	0,901	1,034	1,634	0,200	0,138	0,208	0,563
6	0,6	1,5	0,1	0,4	Sigma1	1,827	1,854	1,999	2,466	0,591	0,489	0,569	0,679
6	0,6	0,75	0,1	0,8	Sigma1	3,170	3,163	3,325	4,933	1,296	1,122	1,220	1,711
6	3	30	0,5	0,1	Sigma1	2,419	2,477	2,599	2,850	2,100	2,025	2,068	2,412
6	3	7,5	0,5	0,4	Sigma1	2,681	2,738	2,860	3,226	2,434	2,352	2,395	2,959
6	3	3,75	0,5	0,8	Sigma1	3,233	3,287	3,410	3,734	3,356	3,257	3,301	4,628
6	6	60	1	0,1	Sigma1	2,534	2,595	2,558	3,008	3,103	3,034	3,076	3,743
6	6	15	1	0,4	Sigma1	2,610	2,671	2,634	3,181	3,345	3,274	3,315	4,169
6	6	7,5	1	0,8	Sigma1	2,766	2,826	2,789	3,302	4,054	3,975	4,017	5,336

### 5.1.2 Distribución de tensiones bivariantes

En este apartado se ha utilizado una distribución de tensiones bivariente polinómica (Sigma 16) como se define en la Figura 14. Los resultados obtenidos se muestran a continuación en la Tabla 2.

$$\begin{aligned}
 {}^{NONSYM} S_i^{POLY} &= \sum c_i^{m,n} \left( \frac{2X}{W} \right)^m \left( \frac{Y}{t} \right)^n \\
 &= c_i^{0,0} + c_i^{1,0} \frac{2X}{W} + c_i^{0,1} \frac{Y}{t} + c_i^{2,0} \left( \frac{2X}{W} \right)^2 + c_i^{1,1} \frac{2X}{W} \frac{Y}{t} + c_i^{0,2} \left( \frac{Y}{t} \right)^2 + \\
 & c_i^{3,0} \left( \frac{2X}{W} \right)^3 + c_i^{2,1} \left( \frac{2X}{W} \right)^2 \frac{Y}{t} + c_i^{1,2} \frac{2X}{W} \left( \frac{Y}{t} \right)^2 + c_i^{0,3} \left( \frac{Y}{t} \right)^3 + \\
 & c_i^{3,1} \left( \frac{2X}{W} \right)^3 \frac{Y}{t} + c_i^{2,2} \left( \frac{2X}{W} \right)^2 \left( \frac{Y}{t} \right)^2 + c_i^{1,3} \frac{2X}{W} \left( \frac{Y}{t} \right)^3 + \\
 & c_i^{3,2} \left( \frac{2X}{W} \right)^3 \left( \frac{Y}{t} \right)^2 + c_i^{2,3} \left( \frac{2X}{W} \right)^2 \left( \frac{Y}{t} \right)^3 + c_i^{3,3} \left( \frac{2X}{W} \right)^3 \left( \frac{Y}{t} \right)^3
 \end{aligned}$$

Figura 14: Expresión para sigma de entrada SC19 de NASSIF

Siendo:

$$c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$$

Tabla 2: Comparación de aplicación desarrollada frente a NASGRO-NASSIF

c	a	t	alfa	beta	Sigma	Ks(A)	Kt(A)	Kg(A)	KN(A)	Ks(C)	Kt(C)	Kg(C)	KN(C)
6	0,6	6	0,1	0,1	Sigma16	1,456	1,562	1,821	2,322	0,401	0,276	0,420	0,609
6	0,6	1,5	0,1	0,4	Sigma16	5,019	5,322	6,046	6,117	1,340	1,141	1,321	0,913
6	0,6	0,75	0,1	0,8	Sigma16	16,855	18,069	20,532	23,472	4,078	3,748	4,014	4,165
6	3	30	0,5	0,1	Sigma16	4,248	4,365	4,604	4,109	3,913	3,769	3,856	2,768
6	3	7,5	0,5	0,4	Sigma16	8,820	9,143	9,772	8,905	5,558	5,402	5,493	4,436
6	3	3,75	0,5	0,8	Sigma16	24,177	25,213	27,180	25,151	10,808	10,618	10,719	11,559
6	6	60	1	0,1	Sigma16	4,558	4,678	4,606	4,419	5,627	5,494	5,579	4,395
6	6	15	1	0,4	Sigma16	9,539	9,860	9,668	9,590	7,442	7,304	7,391	6,304
6	6	7,5	1	0,8	Sigma16	25,406	26,415	25,815	26,649	12,682	12,530	12,621	12,715



## 5.2 Validación frente a función unidimensional

La función unidimensional que se utilizará en este apartado para realizar la validación viene definida por la siguiente expresión:

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right)^m \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Figura 15: Función de distribución de tensiones unidimensional

Las características de la semi-elipse que modela la grieta se han elegido de manera que determinen un alfa y beta adecuados para realizar la comparación con los datos que presentan *Shiratory* [30], *Wang* [22] y *Rahmatollah* [1]. Como ya se ha explicado antes, las dimensiones en sí de la grieta semi-elíptica no son determinantes, sino la proporción que determinan las propias alfa y la beta. Tanto los resultados obtenidos con la aplicación desarrollada como los aportados por la bibliografía se representan normalizados mediante un factor de corrección. Dicho factor de corrección se define mediante la siguiente expresión:

$$F = \frac{K}{\sigma_0 \sqrt{1 + 1.464\alpha^{1.65}}}$$

Analizando la expresión de la Figura 15, podemos observar las siguientes situaciones:

- Para  $m = 0 \rightarrow$  La distribución de tensiones es constante
- Para  $m = 1, 2, 3 \rightarrow$  La distribución de tensiones es unidimensional

A continuación, en la Tabla 3, se muestra la comparación de los datos obtenidos por la aplicación desarrollada frente a los contemplados en la bibliografía *Rahmatollah* [1] y *Shiratory* [30].

Tabla 3: Comparación de datos obtenidos frente a [30] y [1]

alfa		beta					alfa		beta				
m	Punto	0,2					m	Punto	0,2				
0,2		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	0,4		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,162	1,178	0,994	1,021	1,201	0	A	1,119	1,131	0,986	1,010	1,151
	C	0,582	0,587	0,550	0,506	0,564		C	0,810	0,797	0,768	0,734	0,782
1	A	0,490	0,454	0,462	0,452	0,454	1	A	0,435	0,406	0,409	0,405	0,406
	C	0,502	0,484	0,449	0,406	0,462		C	0,678	0,644	0,616	0,583	0,630
2	A	0,309	0,287	0,298	0,288	0,288	2	A	0,264	0,250	0,254	0,250	0,250
	C	0,447	0,418	0,386	0,343	0,397		C	0,593	0,549	0,522	0,489	0,535
3	A	0,226	0,210	0,222	0,211	0,211	3	A	0,188	0,180	0,185	0,180	0,180
	C	0,405	0,372	0,341	0,299	0,352		C	0,531	0,482	0,456	0,423	0,469

alfa		beta					alfa		beta				
m	Punto	0,2					m	Punto	0,2				
0,6		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	1,0		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,090	1,098	0,967	0,989	1,055	0	A	1,047	1,048	0,922	0,944	1,016
	C	0,954	0,948	0,921	0,892	0,936		C	1,145	1,167	1,140	1,115	1,157
1	A	0,383	0,365	0,366	0,364	0,365	1	A	0,304	0,291	0,292	0,291	0,291
	C	0,795	0,762	0,735	0,707	0,750		C	0,960	0,938	0,911	0,886	0,928
2	A	0,225	0,218	0,220	0,218	0,218	2	A	0,170	0,162	0,163	0,162	0,162
	C	0,692	0,646	0,620	0,591	0,634		C	0,842	0,796	0,769	0,744	0,786
3	A	0,158	0,155	0,157	0,155	0,155	3	A	0,117	0,111	0,112	0,111	0,111
	C	0,618	0,565	0,540	0,512	0,554		C	0,756	0,697	0,671	0,646	0,687

alfa		Beta					alfa		beta				
m	Punto	0,4					m	Punto	0,4				
0,2		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	0,4		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,371	1,366	1,183	1,207	1,389	0	A	1,216	1,233	1,089	1,112	1,254
	C	0,688	0,706	0,674	0,625	0,683		C	0,911	0,902	0,875	0,839	0,887
1	A	0,610	0,562	0,573	0,560	0,562	1	A	0,490	0,463	0,467	0,463	0,463
	C	0,578	0,577	0,547	0,498	0,555		C	0,750	0,726	0,700	0,664	0,711
2	A	0,400	0,362	0,377	0,363	0,363	2	A	0,310	0,289	0,294	0,289	0,289
	C	0,509	0,494	0,467	0,418	0,473		C	0,650	0,615	0,591	0,555	0,601
3	A	0,300	0,267	0,283	0,269	0,269	3	A	0,229	0,210	0,215	0,210	0,210
	C	0,459	0,436	0,411	0,363	0,417		C	0,579	0,538	0,515	0,480	0,525

alfa		Beta					alfa		beta				
m	Punto	0,4					m	Punto	0,4				
0,6		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	1,0		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,143	1,160	1,028	1,050	1,116	0	A	1,083	1,070	0,944	0,966	1,037
	C	1,025	1,039	1,013	0,983	1,027		C	1,220	1,236	1,209	1,184	1,226
1	A	0,418	0,398	0,400	0,398	0,398	1	A	0,330	0,302	0,303	0,302	0,302
	C	0,840	0,832	0,807	0,777	0,820		C	1,010	0,992	0,966	0,940	0,982
2	A	0,257	0,240	0,243	0,241	0,241	2	A	0,189	0,169	0,170	0,169	0,169
	C	0,727	0,703	0,679	0,649	0,692		C	0,879	0,840	0,814	0,788	0,830
3	A	0,187	0,172	0,174	0,172	0,172	3	A	0,134	0,116	0,117	0,116	0,116
	C	0,647	0,614	0,590	0,561	0,603		C	0,785	0,735	0,709	0,683	0,725

alfa		Beta					alfa		beta				
m	Punto	0,6					m	Punto	0,6				
0,2		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	0,4		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,651	1,640	1,459	1,479	1,663	0	A	1,327	1,375	1,231	1,253	1,396
	C	0,882	0,899	0,875	0,816	0,876		C	1,060	1,066	1,043	1,003	1,052
1	A	0,795	0,720	0,735	0,718	0,720	1	A	0,563	0,542	0,548	0,542	0,543
	C	0,718	0,726	0,705	0,646	0,704		C	0,850	0,853	0,831	0,791	0,839
2	A	0,539	0,472	0,492	0,473	0,473	2	A	0,369	0,343	0,350	0,343	0,343
	C	0,620	0,617	0,599	0,540	0,596		C	0,726	0,719	0,699	0,659	0,706
3	A	0,412	0,351	0,372	0,354	0,354	3	A	0,277	0,251	0,257	0,251	0,251
	C	0,553	0,540	0,525	0,467	0,521		C	0,641	0,627	0,607	0,568	0,613

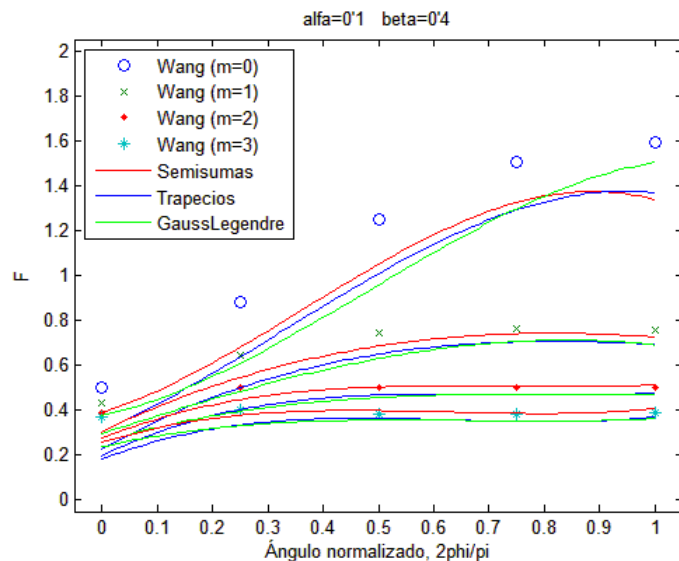
alfa		Beta					alfa		beta				
m	Punto	0,6					m	Punto	0,6				
0,6		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	1,0		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,206	1,243	1,112	1,134	1,200	0	A	1,106	1,099	0,973	0,995	1,066
	C	1,192	1,181	1,157	1,125	1,169		C	1,318	1,347	1,321	1,294	1,337
1	A	0,457	0,443	0,446	0,443	0,444	1	A	0,342	0,317	0,318	0,317	0,317
	C	0,960	0,942	0,919	0,887	0,931		C	1,080	1,079	1,053	1,027	1,069
2	A	0,288	0,271	0,274	0,271	0,271	2	A	0,200	0,179	0,180	0,179	0,179
	C	0,823	0,794	0,771	0,739	0,782		C	0,934	0,912	0,886	0,860	0,901
3	A	0,213	0,195	0,198	0,195	0,195	3	A	0,143	0,123	0,125	0,123	0,124
	C	0,727	0,691	0,669	0,637	0,680		C	0,832	0,796	0,771	0,744	0,785

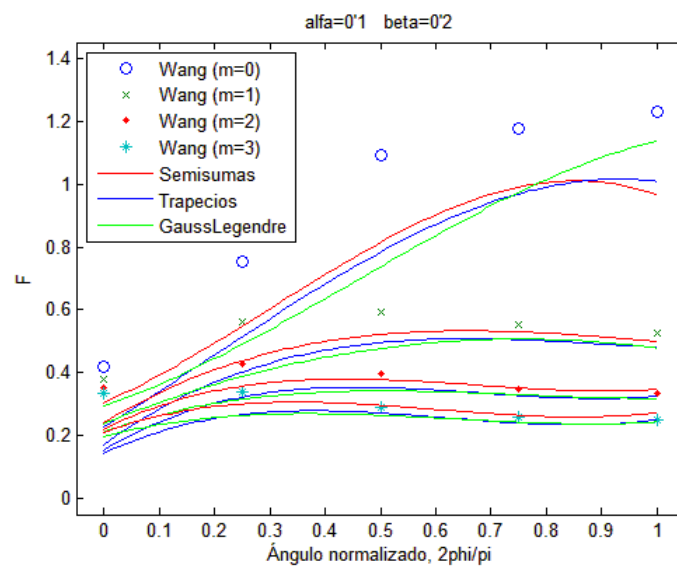
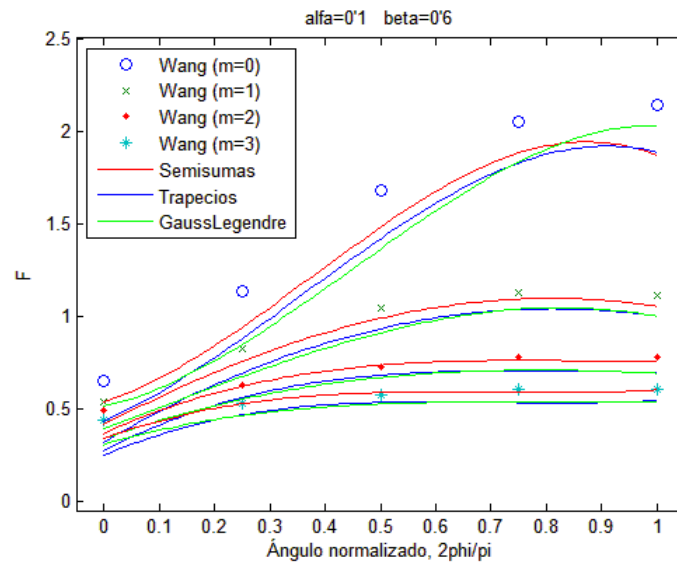
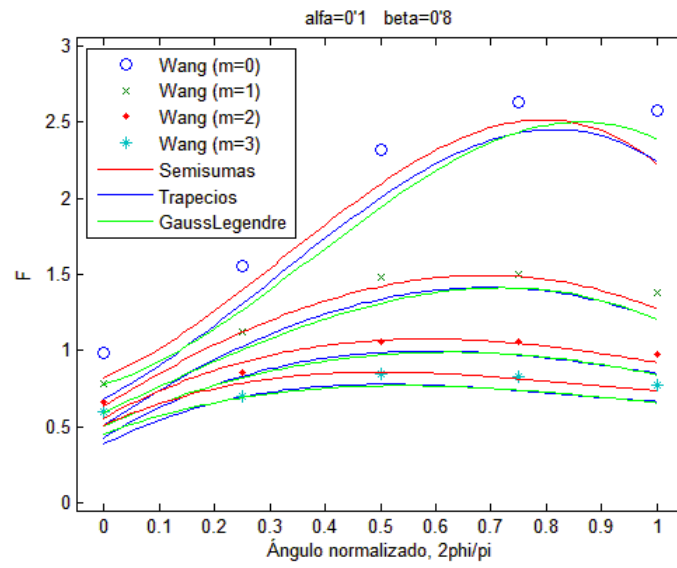
alfa		beta					alfa		beta				
m	Punto	0,8					m	Punto	0,8				
0,2		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	0,4		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,787	1,940	1,761	1,778	1,965	0	A	1,379	1,512	1,369	1,390	1,533
	C	1,201	1,149	1,137	1,065	1,127		C	1,320	1,266	1,248	1,203	1,252
1	A	0,863	0,893	0,914	0,891	0,893	1	A	0,576	0,619	0,625	0,619	0,619
	C	0,945	0,921	0,911	0,840	0,899		C	1,039	1,008	0,991	0,946	0,994
2	A	0,584	0,592	0,618	0,594	0,595	2	A	0,370	0,396	0,403	0,396	0,396
	C	0,796	0,776	0,770	0,699	0,756		C	0,874	0,847	0,830	0,786	0,833
3	A	0,445	0,444	0,470	0,447	0,447	3	A	0,278	0,291	0,298	0,291	0,291
	C	0,695	0,675	0,672	0,602	0,658		C	0,763	0,734	0,719	0,675	0,721

alfa		beta					alfa		beta				
m	Punto	0,8					m	Punto	0,8				
0,6		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL	1,0		[30]	GPLWF	Semis	Trap	GL
0	A	1,228	1,320	1,188	1,210	1,276	0	A	1,107	1,126	1,000	1,022	1,093
	C	1,366	1,353	1,332	1,297	1,342		C	1,441	1,490	1,466	1,437	1,480
1	A	0,449	0,485	0,488	0,485	0,485	1	A	0,327	0,331	0,332	0,331	0,331
	C	1,091	1,076	1,056	1,021	1,065		C	1,174	1,191	1,167	1,138	1,180
2	A	0,277	0,299	0,302	0,299	0,299	2	A	0,183	0,188	0,189	0,188	0,188
	C	0,927	0,903	0,884	0,849	0,892		C	1,011	1,004	0,980	0,952	0,993
3	A	0,202	0,216	0,219	0,216	0,216	3	A	0,127	0,130	0,131	0,130	0,130
	C	0,814	0,784	0,765	0,730	0,773		C	0,896	0,874	0,851	0,822	0,864

A la vista de los resultados obtenidos, se aprecia que la gran mayoría se diferencian menos de un 10% a los aportados por *Shiratory* [30] y por *Rahmatollah* [1], siendo en algunos casos mejores los resultados obtenidos por la aplicación desarrollada que los presentados por *Rahmatollah* [1].

Con la idea de comparar los resultados gráficamente, se utilizarán los datos aportados por *Wang* [22] en el artículo de investigación frente a los obtenidos por la aplicación desarrollada. Como en el caso anterior, se aplica el factor de corrección F a los factores de intensidad de tensiones obtenidos (eje de ordenadas) y se normaliza el ángulo  $\phi$  (eje de abscisas) para realizar la representación gráfica.





### 5.3 Validación frente a función bivalente

En este último caso, la función que se utilizará para realizar la validación viene definida por la siguiente expresión:

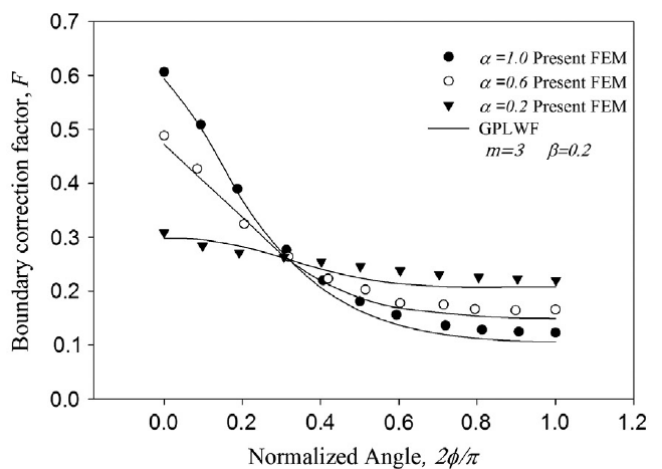
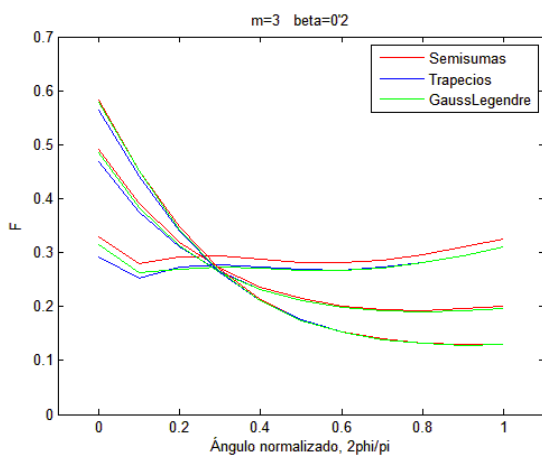
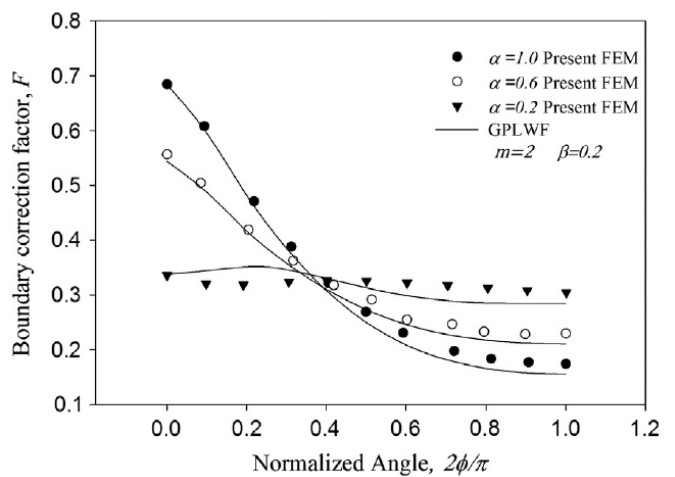
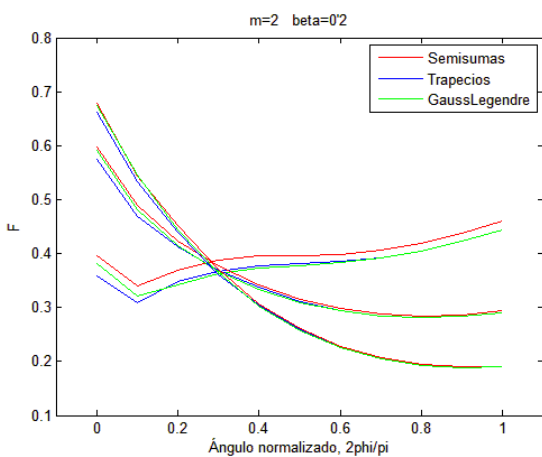
$$\sigma(x,y) = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right)^m \cdot \cos\left(\frac{\pi X}{4c}\right) \quad m = 2, 3.$$

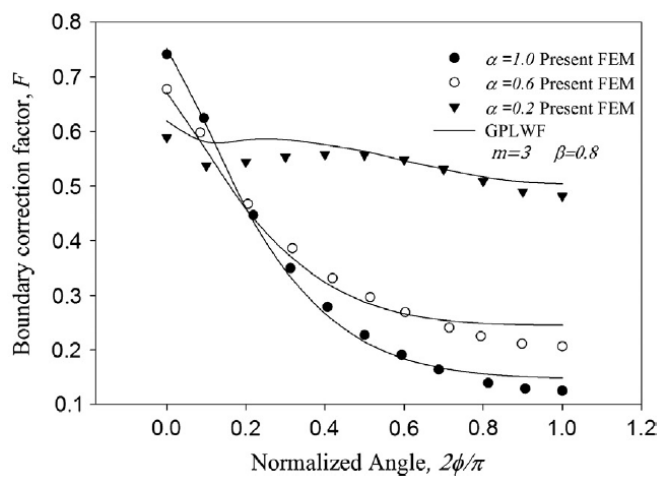
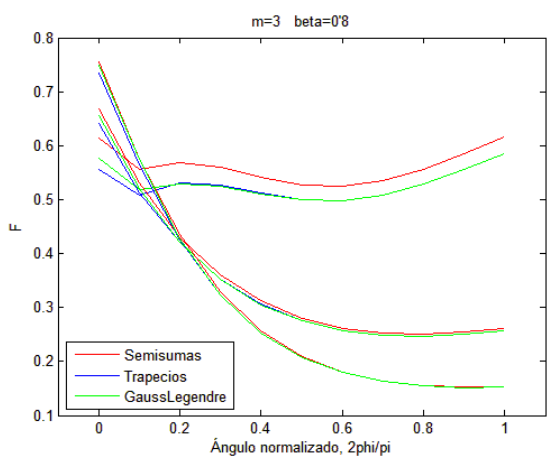
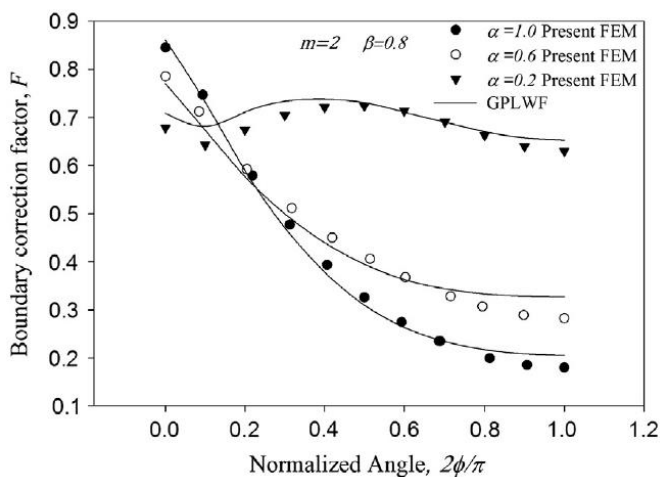
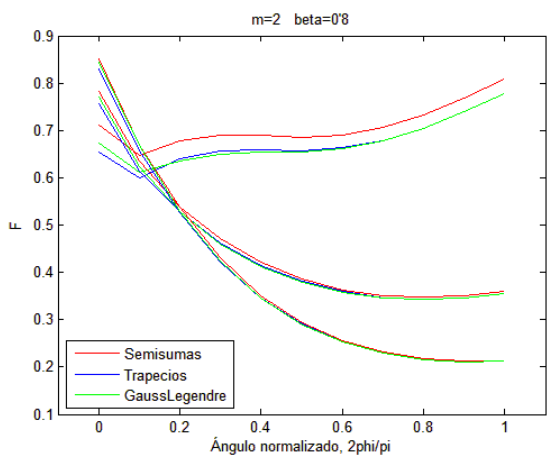
Figura 16: Función de distribución de tensiones bivalente

Al igual que en el caso anterior, los resultados obtenidos se normalizarán aplicando el factor de corrección F:

$$F = \frac{K}{\sigma_0 \sqrt{1 + 1.464\alpha^{1.65}}}$$

En la bibliografía *Rahmatollah* [1] se aportan gráficamente los resultados obtenidos por el autor frente a los calculados por el método de los elementos finitos (FEM). Dado que no se dispone del valor numérico de los resultados, se ha optado por representar gráficamente los resultados obtenidos por la aplicación desarrollada para compararlos visualmente frente a los de *Rahmatollah* [1].





# 6 DESARROLLO DE LA APLICACIÓN

---

En este capítulo se describirán detalles del desarrollo y diseño de la aplicación creada. Se abordarán aspectos concernientes a la implementación de los métodos numéricos, las estructuras de datos empleadas y las tecnologías utilizadas.

## 6.1 Elección de plataforma y tecnología

La aplicación ha sido desarrollada pensando en su utilización sobre sistemas Windows. Se ha desarrollado como una aplicación de ventana que proporciona una interfaz gráfica de usuario intuitiva y fácil de manejar.

Para desarrollar la aplicación se ha utilizado Visual Studio 2015 como entorno de desarrollo porque proporciona todas las herramientas necesarias: edición, inclusión de librerías externas, compilación, depuración, ejecución y generación del instalador.

Se ha utilizado la plataforma o framework .NET que es un enorme conjunto de bibliotecas para el desarrollo de software en una gran variedad de lenguajes. Este proyecto se ha desarrollado bajo la versión 4.5.2. Todas las versiones de esta plataforma pueden encontrarse gratuitamente a través del portal de Microsoft.

Al estar ambos elementos creados por Microsoft la integración entre el lenguaje y el entorno de desarrollo es total ofreciendo infinidad de complementos para cada una de las fases de construcción de la aplicación.

Se eligió C# como lenguaje para implementar la aplicación por ser un lenguaje orientado a objetos que permite trabajar a alto nivel y a bajo nivel, lo que nos permite la fácil construcción de interfaces visuales a la par que nos ofrece alta velocidad de ejecución de su código gracias a que es un lenguaje compilado.

## 6.2 Utilización de bibliotecas externas

Para la realización de tareas puramente matemáticas se ha recurrido a la incorporación de la biblioteca Alglib. Dispone de un gran conjunto de funciones para el análisis matemático, la optimización, el álgebra lineal y un largo etcétera. Estas bibliotecas están escritas C# entre otros idiomas, haciendo que la incorporación al proyecto de desarrollo sea inmediata.

Se recurrió a Alglib para obtener las raíces de polinomio y para general los valores y pesos en el método de Gauss-Legendre.

### 6.3 Estructuras de datos

Los tipos de datos utilizados son todos tipos simples: double para los reales, int para los enteros y bool para variables de tipo lógico.

Se ha creado la clase Punto para representar un par (x,y). Simplemente contiene dos variables X e Y para almacenar dicho par. Además se han incorporado a la clase diversos métodos que facilitan la realización de cálculos comunes y específicos para este tipo de dato.

```
class Punto
{
    private double X;
    private double Y;
    public Punto(double x, double y)
    {
        X = x;
        Y = y;
    }
    . . .
}
```

Figura 17: Clase Punto

De igual manera se ha creado la clase Elipse para trabajar con la modelización de la grieta. Esta estructura de datos tiene un campo para el eje mayor, otro para el eje menor y un campo del tipo Punto para definir el centro de la elipse. Se han desarrollado diversas funciones que facilitan el uso de este tipo de dato y proporcionan operaciones relacionadas con el objeto geométrico.

```
class Elipse
{
    private double aElipse;
    private double cElipse;
    private Punto centro;
    public Elipse(double a, double c, Punto o)
    {
        aElipse = a;
        cElipse = c;
        centro = o;
    }
    . . .
}
```

Figura 18: Clase Elipse

El tipo de dato principal de la aplicación que modela el problema completo es el que contiene tanto las características de la elipse, la placa, la función de distribución de tensiones y los métodos numéricos. Esta estructura de datos se ha implementado mediante la clase GPLWF. Esta clase tiene las funciones principales para el cálculo de cada elemento de la función que describe el método, funciones auxiliares, funciones de gestión y control del flujo del proceso.

### 6.4 Almacenaje de datos

Para realizar el cálculo de la expresión se eligió almacenar los valores utilizados en la expresión calculados para cada punto (x,y) estudiado. Esto aunque hace que el consumo de memoria del programa en tiempo de ejecución sea mayor evita que se tengan que repetir muchos cálculos y el tiempo de proceso sea mucho menor.

Como la aplicación calcula en la misma ejecución el FIT para varios puntos sin variar las características de la elipse pueden calcularse sólo una vez algunos elementos de la expresión que serán el mismo para todos los puntos objetivo del cálculo. Estos elementos serán la distancia mínima (s), la distancia r y la distancia R. Que el cálculo de la distancia s pueda hacerse una sola vez es una gran ventaja pues es un proceso que ocupa la mayor parte del tiempo de ejecución. Valores de la función que dependen del punto P' es la distancia  $\rho$  y el valor M.



## 6.5 Implementación de los métodos numéricos

Dado que cada método numérico utiliza una rejilla de datos (x,y) distinta no pueden compartir resultados intermedios y han de realizarse todos para cada método.

### 6.5.1 Semisumas

```
// Método numérico de las semisumas.
//
ss = 0;
s1 = 0;
s2 = 0;
for (j = 0; j < numYi - 1; j++)
{
    s2 = 0;
    y1 = ydataI[j];
    y2 = ydataI[j + 1];
    for (i = 0; i < numXi - 2; i++)
    {
        x1 = xdataI[i];
        x2 = xdataI[i + 1];
        p1 = new Punto(x1, y1);
        p2 = new Punto(x2, y2);

        // Filtro que asegura que el punto estudiado en cada iteración interior
        // se encuentre dentro del área de la elipse y que no se encuentre demasiado
        // próxima a la elipse para evitar picos en caso de valores ro cercanos a 0.
        // Con el p2 aseguramos que el punto p1(x2,y1) se encuentra dentro de la elipse
        // y no muy cerca de la elipse para evitar resultados muy altos.
        if (elipse.puntoDentroElipse(p1) && elipse.puntoDentroElipse(p2))
        {
            s2 = s2 + 0.5 * (matrizKxySemisumas[j, i + 1] + matrizKxySemisumas[j, i]) * (x2 - x1);
        }
    }
    ss = ss + 0.5 * (s1 + s2) * (y2 - y1);
    s1 = s2;
}
resultados[g] = ss;
```

Figura 19: Implementación del método de las Semisumas

```
public void generaMatrizKxySemisumas()
{
    double x, y;
    Punto p;
    int dimX = xdataI.Length;
    int dimY = ydataI.Length;

    matrizKxySemisumas = new double[dimY, dimX];

    for (int j = 0; j < dimY; j++)
    {
        y = ydataI[j];
        for (int i = 0; i < dimX; i++)
        {
            x = xdataI[i];
            p = new Punto(x, y);
            if (elipse.puntoDentroElipse(p))
            {
                matrizKxySemisumas[j, i] = zdataI[j, i] * matrizm[j, i];
            }
            else
            {
                matrizKxySemisumas[j, i] = 0;
            }
        }
    }
}
```

Figura 20: Generación de los aportes al FIT en Semisumas

## 6.5.2 Trapecios

```

// Método de los trapecios
sumInt = 0.0;
for (i = 0; i <= numX - 5; i = i + 2)
{
    a = xdataI[i];
    b = xdataI[i + 2];
    be = xdataI[i + 3];
    for (j = 0; j <= numY - 5; j = j + 2)
    {
        c = ydataI[j];
        d = ydataI[j + 2];
        df = ydataI[j + 3];
        p1 = new Punto(a, c);
        p5 = new Punto(be, df);
        // Filtro que asegura que el punto estudiado en cada iteración interior
        // se encuentre dentro del área de la elipse y que no se encuentre demasiado
        // próxima a la elipse para evitar picos en caso de valores ro cercanos a 0.
        if (elipse.puntoDentroElipse(p1) && elipse.puntoDentroElipse(p5))
        {
            term1 = matrizKxyTrapecios[j, i] + matrizKxyTrapecios[j + 2, i]
                + matrizKxyTrapecios[j, i + 2] + matrizKxyTrapecios[j + 2, i + 2];
            term2 = matrizKxyTrapecios[j, i + 1] + matrizKxyTrapecios[j + 2, i + 1]
                + matrizKxyTrapecios[j + 1, i] + matrizKxyTrapecios[j + 1, i + 2];
            term3 = matrizKxyTrapecios[j + 1, i + 1];
            sumInt += (b - a) * (d - c) / 16.0 * (term1 + 2.0 * term2 + 4.0 * term3);
        }
    }
}
resultados[g] = sumInt;

```

Figura 21: Implementación del método de los Trapecios

```

public void generaMatrizKxyTrapecios()
{
    double x, y;
    Punto p;
    int dimX = xdataI.Length;
    int dimY = ydataI.Length;

    matrizKxyTrapecios = new double[dimY, dimX];

    for (int j = 0; j < dimY; j++)
    {
        y = ydataI[j];
        for (int i = 0; i < dimX; i++)
        {
            x = xdataI[i];
            p = new Punto(x, y);
            if (elipse.puntoDentroElipse(p))
            {
                matrizKxyTrapecios[j, i] = zdataI[j, i] * matrizm[j, i];
            }
            else
            {
                matrizKxyTrapecios[j, i] = 0;
            }
        }
    }
}

```

Figura 22: Generación de los aportes al FIT en Trapecios

### 6.5.3 Gauss-Legendre

```

// Método de Gauss-Legendre
double Kpp = 0;
for (i = 0; i < xdataI.Length - 1; i++)
{
    x = xdataI[i];
    x1 = xdataI[i + 1];
    xm = (x1 + x) / 2.0;
    for (j = 0; j < ydataI.Length - 1; j++)
    {
        y = ydataI[j];
        y1 = ydataI[j + 1];
        ym = (y1 + y) / 2.0;
        p = new Punto(x, y);
        pm = new Punto(xm, ym);
        // Filtro que asegura que el punto estudiado en cada iteración interior
        // se encuentre dentro del área de la elipse y que no se encuentre demasiado
        // próxima a la elipse para evitar picos en caso de valores ro cercanos a 0.
        if (elipse.puntoDentroElipse(p) && elipse.puntoDentroElipse(pm))
        {
            Kpp += h1 * k1 * wGLx[i] * wGLy[j] * matrizKxyGaussLegendre[j, i];
        }
    }
}
resultados[g] = Kpp;

```

Figura 23: Implementación del método de Gauss-Legendre

```

public void generaMatrizKxyGaussLegendre()
{
    double x, y;
    Punto p;
    int dimX = xdataI.Length;
    int dimY = ydataI.Length;

    matrizKxyGaussLegendre = new double[dimY, dimX];
    for (int j = 0; j < dimY; j++)
    {
        y = ydataI[j];
        for (int i = 0; i < dimX; i++)
        {
            x = xdataI[i];
            p = new Punto(x, y);
            if (elipse.puntoDentroElipse(p))
            {
                matrizKxyGaussLegendre[j, i] = zdataI[j, i] * matrizmGL[j, i];
            }
            else
            {
                matrizKxyGaussLegendre[j, i] = 0;
            }
        }
    }
}

```

Figura 24: Generación de los aportes al FIT en Gauss-Legendre

Los tres métodos se basan en recorrer los puntos definidos por la rejilla y en caso de encontrarse dentro de la elipse se calcula su aportación al FIT mediante el producto de sigma por el valor de  $m(x,y,P')$ .

```
public double calculam(int j, int i, ref double[] vx, ref double[] vy)
{
    double s;
    double ro;
    double r;
    double R;
    double M;

    s = matrizz[j, i];
    ro = matrizRO[j, i];
    r = matrizr[j, i];
    R = matrizRr[j, i];
    M = valorM;
    if (vx[i] == centro.getX() && vy[j] == centro.getY())
    {
        return (Math.Sqrt(2 * s) / (Math.Pow(Math.PI, (3 / 2.0)) * Math.Pow(ro, 2))) * (1 + M);
    }
    else
    {
        return (Math.Sqrt(2 * s) / (Math.Pow(Math.PI, (3 / 2.0)) * Math.Pow(ro, 2))) * (1 + M * (1 - (r / R)));
    }
}
```

Figura 25: Cálculo de  $m(x,y,P')$

Cada matriz de las que aparecen en este trozo de código contienen el cálculo de su valor correspondiente para cada uno de los puntos de la rejilla de datos definida y que estén dentro de la elipse descrita.

## 7 CONCLUSIONES

---

En la industria tenemos multitud de situaciones en las que necesitamos conocer cómo se comportará un determinado sistema ante grietas con forma semi-elíptica. Se ha demostrado que el método GPLWF devuelve unos resultados con bastante precisión comparándolo con otros métodos. Esto nos ayuda a predecir con una buena aproximación cuál será el comportamiento del sistema ante una grieta con forma semi-elíptica de la que conozcamos una distribución de tensiones a la que esté sometida.

GPLWF nos permitirá obtener el factor de intensidad de tensiones en cualquier punto del frente de grieta. De este modo podremos crear un patrón de comportamiento y una estimación de vida hasta que se produzca el fallo del sistema ante la aparición de una grieta semi-elíptica basado en la Mecánica de Fractura Elástico Lineal.

La gran similitud entre los resultados obtenidos por los tres métodos numéricos y a su vez su gran parecido con los datos calculados y mostrados por otras fuentes nos indican que el método GPLWF es un método fiable, realista y confiable.

Las diferencias que se observan en algunos casos se deben posiblemente a causas geométricas que afecten a cada método de manera distinta y debido a su implementación. Situaciones en las que los puntos utilizados en el proceso se aproximan mucho al punto objetivo del cálculo hacen que el parámetro  $\rho$  tome valores excesivamente pequeños que repercuten en un resultado mucho mayor a los de puntos vecinos.



# APÉNDICE A

Los coeficientes  $M(\alpha, \beta, \phi)$  de la función GPLWF para grietas de espesor finito ( $0.1 \leq \alpha \leq 1.0$ ,  $0.1 \leq \beta \leq 0.8$ ,  $c/b \approx 0$  y  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ) se representan en la *Tabla A.1* (excepto el caso de  $\alpha = 0.1$  y  $\beta = 0.1$ , simultáneamente).

Tabla 4: Coeficientes M ( $\alpha, \beta, \phi$ )

$\alpha = 0.1$						$\alpha = 0.2$							
$2\phi/\pi$	$\beta$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	$2\phi/\pi$	$\beta$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
0	---	13.076	18.549	29.078	52.077		0	9.637	10.707	14.950	21.817	30.76	
0.1	---	8.537	13.684	22.991	40.349		0.1	4.617	5.571	9.314	15.240	22.687	
0.2	---	6.346	10.538	18.413	32.121		0.2	3.926	4.743	7.914	12.825	18.799	
0.3	---	4.538	7.798	14.116	24.694		0.3	3.126	3.764	6.222	9.954	14.354	
0.4	---	3.349	5.949	10.982	18.995		0.4	2.409	2.895	4.753	7.528	10.715	
0.5	---	2.585	4.744	8.799	14.797		0.5	1.881	2.257	3.687	5.00	8.178	
0.6	---	2.033	3.890	7.213	11.652		0.6	1.518	1.820	2.963	4.640	6.504	
0.7	---	1.703	3.349	6.126	9.3763		0.7	1.277	1.530	2.484	3.879	5.419	
0.8	---	1.485	2.981	5.361	7.739		0.8	1.120	1.341	2.175	3.391	4.730	
0.9	---	1.343	2.737	4.856	6.669		0.9	1.030	1.232	1.996	3.111	4.337	
1	---	1.295	2.636	4.650	6.260		1	0.998	1.194	1.935	3.016	4.205	
$\alpha = 0.4$						$\alpha = 0.6$							
0	7.486	7.984	9.932	12.986	16.707	0	6.324	6.620	7.779	9.591	11.795		
0.1	3.478	3.876	5.419	7.782	10.555	0.1	2.880	3.103	3.965	5.280	6.818		
0.2	2.595	2.925	4.189	6.076	8.202	0.2	2.021	2.199	2.879	3.891	5.019		
0.3	2.078	2.351	3.382	4.887	6.511	0.3	1.554	1.700	2.251	3.049	3.895		
0.4	1.707	1.931	2.775	3.980	5.232	0.4	1.264	1.386	1.844	2.492	3.145		
0.5	1.432	1.619	2.320	3.306	4.299	0.5	1.073	1.179	1.571	2.115	2.641		
0.6	1.232	1.393	1.990	2.823	3.645	.6	0.946	1.040	1.387	1.862	2.307		
0.7	1.094	1.236	1.762	2.491	3.203	0.7	0.864	0.950	1.267	1.697	2.094		
0.8	1.002	1.131	1.610	2.274	2.919	0.8	0.812	0.893	1.190	1.593	1.963		
0.9	0.948	1.070	1.522	2.149	2.757	0.9	0.781	0.859	1.146	1.535	1.891		
1	0.929	1.048	1.492	2.107	2.703	1	0.770	0.847	1.131	1.515	1.866		
$\alpha = 0.8$						$\alpha = 1.0$							
0	5.555	5.753	6.531	7.757	9.282	0	5.028	5.171	5.733	6.635	7.801		
0.1	2.426	2.567	3.112	3.953	4.961	0.1	2.082	2.177	2.548	3.133	3.867		
0.2	1.640	1.748	2.162	2.785	3.497	0.2	1.359	1.429	1.698	2.113	2.614		
0.3	1.215	1.302	1.630	2.109	2.627	0.3	0.974	1.027	1.232	1.539	1.891		
0.4	0.959	1.031	1.301	1.684	2.075	0.4	0.739	0.783	0.946	1.183	1.439		
0.5	0.799	0.862	1.094	1.415	1.725	0.5	0.592	0.628	0.766	0.960	1.15		
0.6	0.700	0.756	0.964	1.248	1.511	0.6	0.498	0.532	0.654	0.823	0.986		
0.7	0.641	0.694	0.888	1.150	1.387	0.7	0.444	0.475	0.590	0.746	0.892		
0.8	0.606	0.657	0.843	1.093	1.317	0.8	0.411	0.442	0.553	0.704	0.842		
0.9	0.588	0.638	0.820	1.065	1.284	0.9	0.395	0.425	0.535	0.684	0.820		
1	0.580	0.630	0.811	1.054	1.272	1	0.387	0.417	0.527	0.676	0.812		





# APÉNDICE B

Los coeficientes  $M(\alpha, \beta, \phi)$  de la función GPLWF para grietas de espesor finito ( $0.1 \leq \alpha \leq 1.0$ ,  $0.1 \leq \beta \leq 0.8$ ,  $c/b \approx 0$  y  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ) mostrados en el Apéndice A para cualquier punto a lo largo del frente de grieta fueron ajustados según se indica a continuación:

$$M(\alpha, \beta, \phi) = A_0 + A_1 \cdot \beta + A_2 \cdot (2\phi/\pi) + A_3 \cdot \beta^2 + A_4 \cdot \beta \cdot (2\phi/\pi) + A_5 \cdot (2\phi/\pi)^2 + \dots A_6 \cdot \beta^2 \cdot (2\phi/\pi) + A_7 \cdot \beta \cdot (2\phi/\pi)^2 + A_8 \cdot (2\phi/\pi)^3 + A_9 \cdot \beta^2 \cdot (2\phi/\pi)^2 + \dots A_{10} \cdot \beta \cdot (2\phi/\pi)^3 + A_{11} \cdot (2\phi/\pi)^4 + A_{12} \cdot \beta^2 \cdot (2\phi/\pi)^3 + A_{13} \cdot \beta \cdot (2\phi/\pi)^4 + \dots A_{14} \cdot (2\phi/\pi)^5$$

Para cualquier punto a lo largo del frente de la grieta, la precisión de la ecuación está dentro del 1% de los datos numéricos.

Los coeficientes  $A_i$  se calculan de la siguiente manera:

$$A_i(\alpha) = \sum_{j=0}^6 B_{ij} \cdot \alpha^j$$

Los parámetros  $B_{ij}$  se representan en la *Tabla B.1*.

Tabla 5: Parámetros  $B_{ij}$  para las fórmulas empíricas de  $M(\alpha, \beta, \phi)$

$i$	$j$						
	0	1	2	3	4	5	6
0	47.204	-478.91	2327.5	-5788.3	7703.3	-5221.4	1415.5
1	-215.94	2854.4	-14,364	36,095	-48,260	32,797	-8905.2
2	-61.414	-21.311	14.511	-3.5928	0.4513	-0.0287	0.0007
3	347.17	-3814.9	17,866	-43,258	56,562	-37,877	10,179
4	582.22	-6624.7	30,609	-72,945	94,152	-62,425	16,648
5	-507.42	10,642	-54,147	133,545	-174,793	116,608	-31,188
6	-985.16	11,343	-54,837	135,457	-179,479	121,305	-32,819
7	-218.7	-1591.1	21,118	-73,273	115,680	-86,939	25,238
8	1581.9	-28,296	141,682	-346,730	451,462	-300,013	80,000
9	1093.2	-13,389	67,317	-170,301	229,156	-156,526	42,671
10	-553.6	13,697	-88,791	254,544	-368,271	263,514	-74,163
11	-1634.1	27,953	-137,998	334,079	-431,207	284,540	-75,444
12	-474.7	6209	-32,296	83,286	-113,414	78,089	-21,408
13	442.29	-8808.4	53,895	-150,795	215,390	-152,937	42,825
14	569.13	-9534.3	46,328	-110,633	141,168	-92,276	24,278



# APÉNDICE C: MANUAL DE USUARIO

---

## Instalación de la aplicación

Se dispone de un instalador para sistemas Windows de 64 bits. El proceso de instalación es tan sencillo como ejecutar el archivo `install_GPLWFx64.exe` y una vez elegida la ubicación de la instalación aceptar en cada paso que aparezca en la ventana de instalación.

Nombre	Tamaño	Tipo
 <code>install_GPLWFx64.msi</code>	1.880 KB	Paquete de Windo...
 <code>setup.exe</code>	531 KB	Aplicación

Figura 26: Archivo instalador

Una vez instalada aparecerá en el escritorio del usuario un icono para abrir la aplicación.



Figura 27: Lanzador de la aplicación

También es posible abrir la aplicación desde el menú Inicio de Windows.

## Uso de la aplicación

Una vez abierta la aplicación aparecerá la siguiente ventana que contendrá todos los ajustes de la aplicación, las características que modelan las características de la grieta y la placa. También se encuentra un espacio en el que se muestran los resultados y las características para las que se han realizado los cálculos.

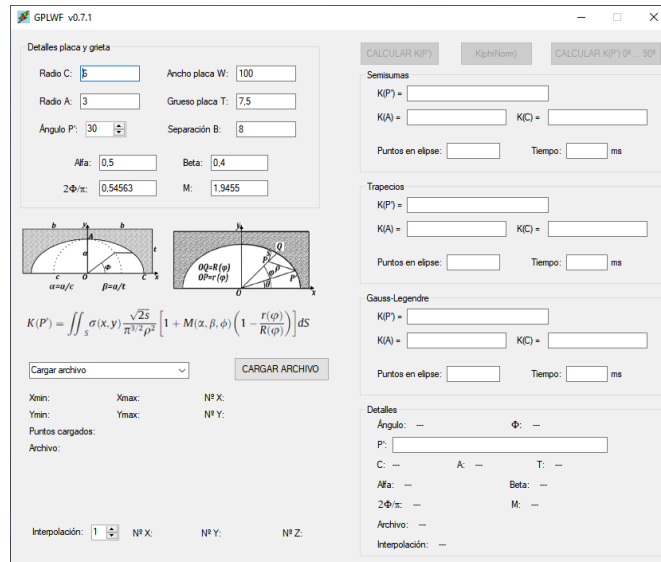


Figura 28: Programa recién abierto

## Características de la grieta y la placa

En esta zona se introducen los valores para la forma de la elipse que modela la grieta (C y A), el ancho de la placa (W), el grueso de la placa (t), la separación del centro de la elipse del borde izquierdo de la placa y el ángulo del punto a estudiar (entre 0° y 90°).

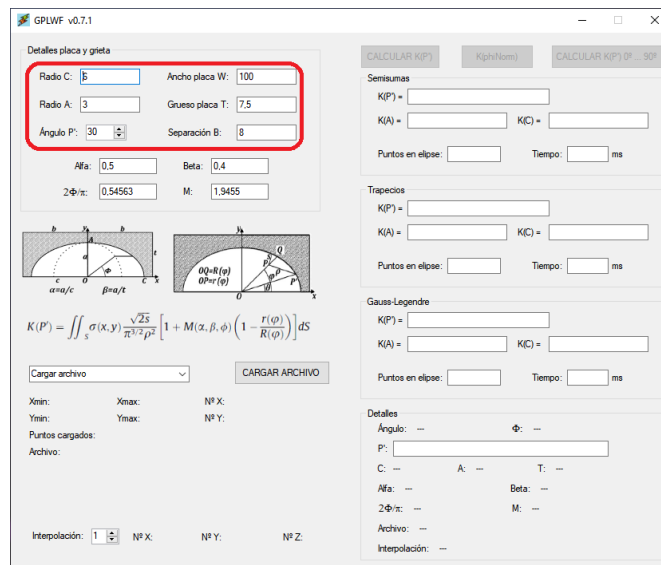


Figura 29: Valores que definen la grieta, la placa y el punto a estudiar

Debajo se encuentran los valores alfa, beta, el ángulo paramétrico normalizado y el valor M. Estos valores se modifican automáticamente cuando se cambian los valores de la grieta, la placa y el ángulo y el usuario no puede modificarlos manualmente.

### Zona de resultados

En estos espacios se muestran los resultados de cada uno de los métodos (semisumas, trapecios, Gauss-Legendre) en cada uno de los puntos (A: 0°, C: 90° y el punto P').

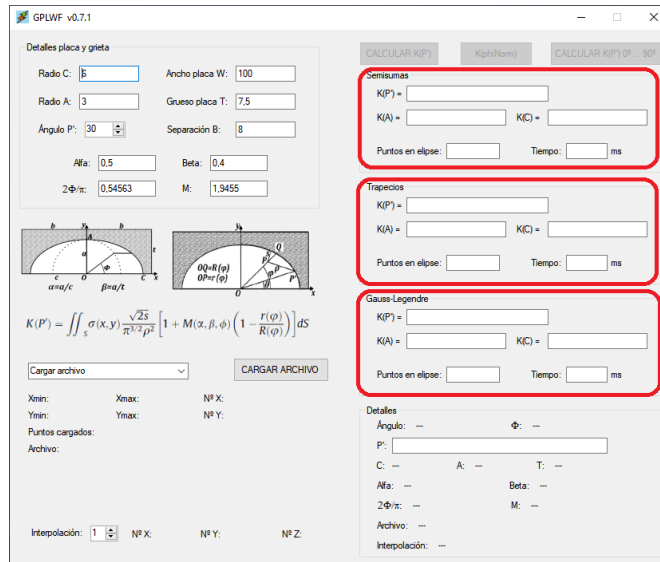


Figura 30: Zona de resultados

Como información adicional se muestra el número de puntos contenidos dentro de la elipse según las dimensiones de ésta y el valor de interpolación. Se proporciona también el tiempo empleado en la ejecución de cada método.

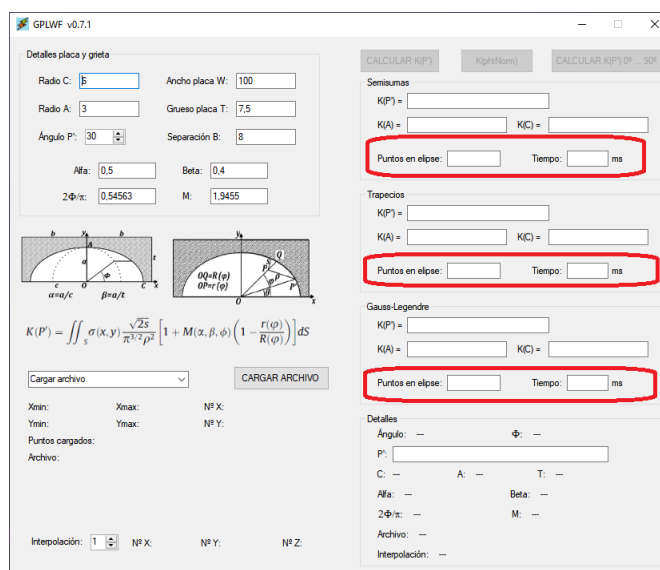


Figura 31: Información adicional. Tiempo de ejecución y puntos estudiados

En la parte inferior se muestran los detalles implicados en la ejecución del programa, así si se modifican los detalles en sus campos no se perderá la información de la última ejecución.

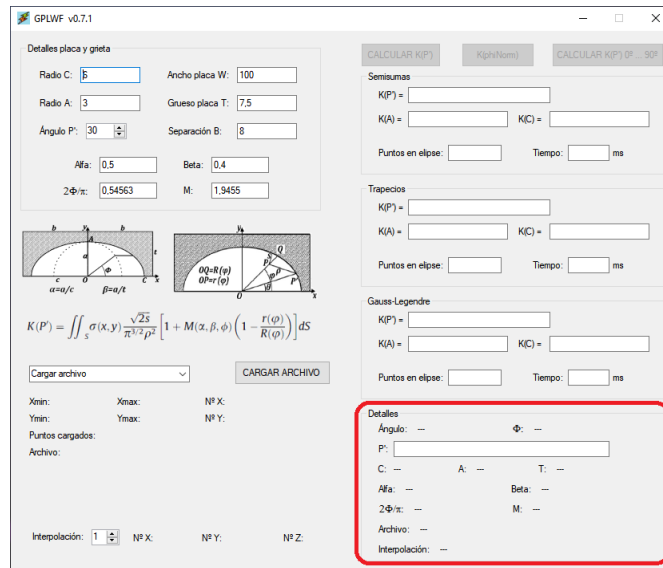


Figura 32: Zona de detalles

Carga de los datos para la función sigma de intensidad de funciones. Se abrirá un cuadro de diálogo habitual para navegar y seleccionar un archivo de datos. El formato de entrada deber ser:

- La primera línea la cabecera de la tabla de datos: x y sigma
- Cada una de las líneas siguientes contendrá una terna con los valores para x, y y sigma.

Una vez cargado el archivo se mostrará el número de valores x, valores y así como el número total de puntos que constituirán la función sigma.

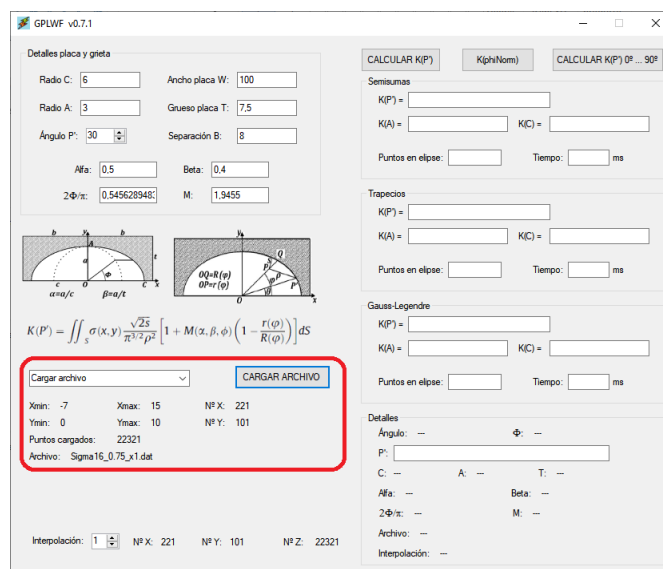


Figura 33: Carga de archivo de datos

La función Sigma1 es la función constante de valor uno para cada par (x,y). El valor de sigma0 no puede modificarse, siempre valdrá 1.

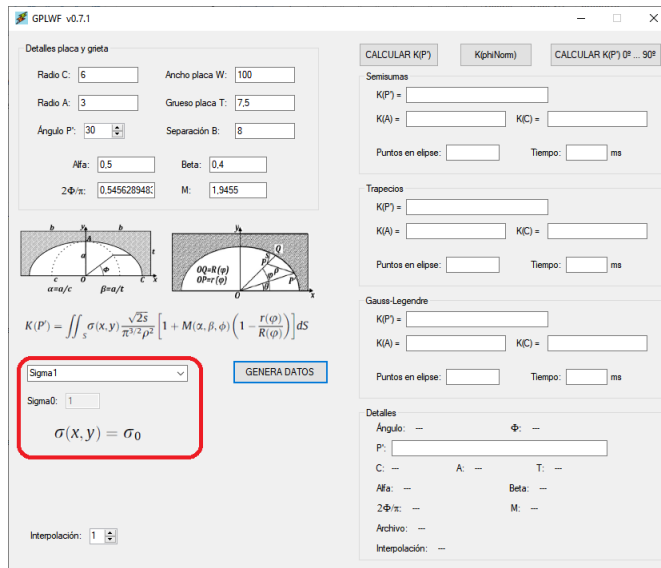


Figura 34: Función de distribución de tensiones constante y valor unitario

Esta función sigma varía según lo profundo que esté el punto dentro de la placa. El valor de sigma0 puede modificarse.

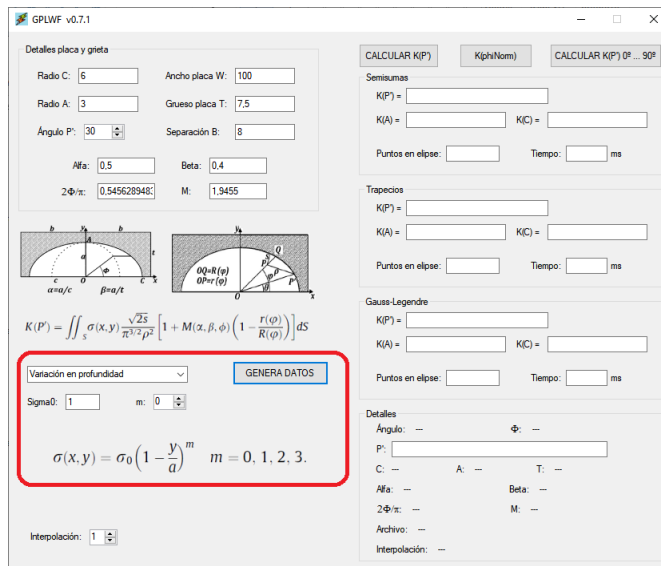


Figura 35: Sigma que varía en función de y

Función que varía según el valor del punto a lo largo del ancho de la grieta. El valor de sigma0 puede modificarse.

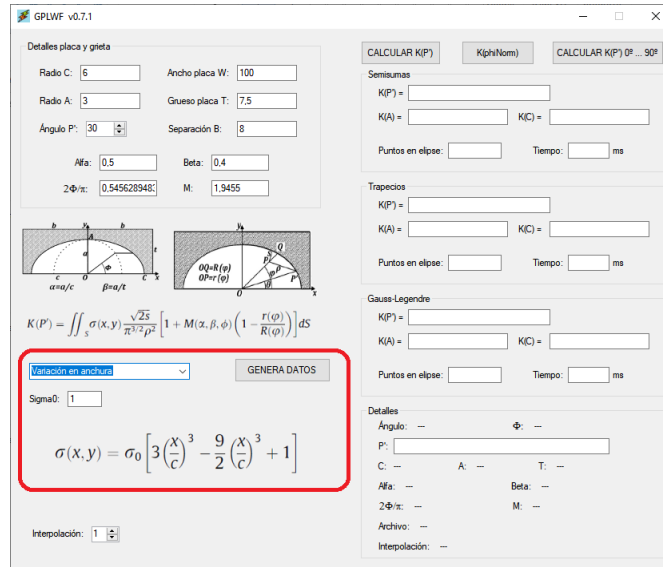


Figura 36: Sigma que varía en función de x

Esta función varía tanto por la posición de x e y. El valor de sigma0 puede modificarse.

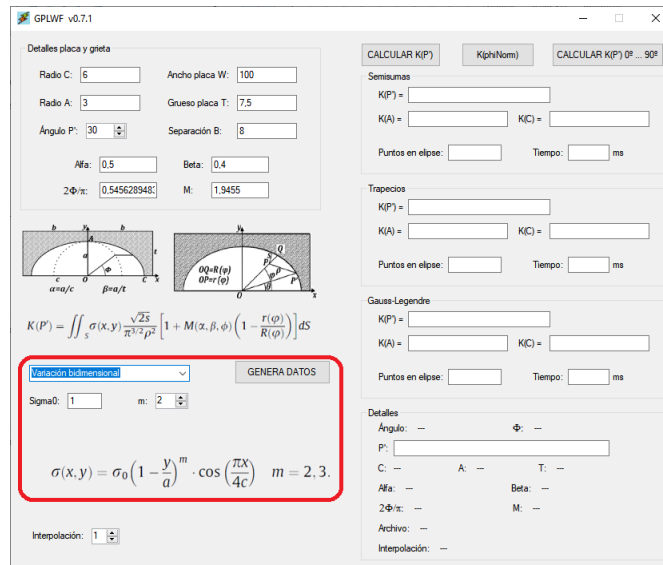


Figura 37: Sigma que varía en ambas dimensiones



Esta función utiliza 16 coeficientes para generar la distribución de sigma.

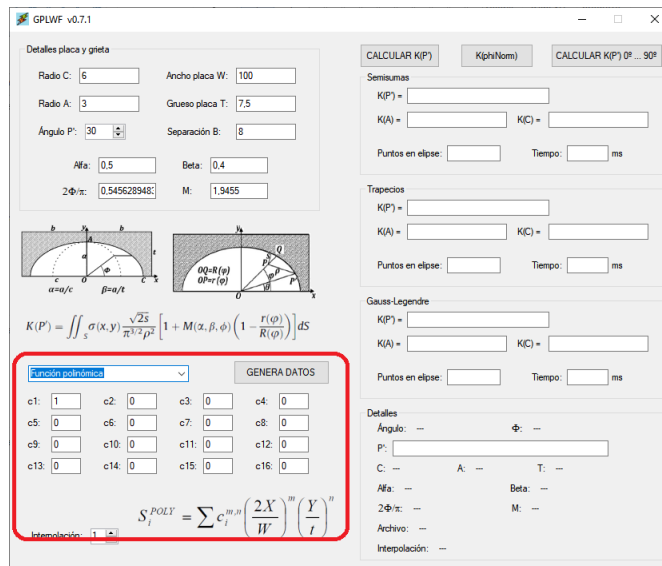


Figura 38: Sigma definida según una serie polinómica

El control Interpolación define el grado de definición de la rejilla que contiene los datos. En caso de tomar los datos a partir de un archivo se indicará la variación de los datos en función de la interpolación. Con interpolación igual a 1 se tomarán los datos originales. Aunque no hay límite para el valor de interpolación se recomienda no utilizar un valor mayor que 5, y lo más recomendable es usar una interpolación de grado 3 que ofrece unos cálculos más precisos sin demorar demasiado los resultados.

Todas las funciones de generación de sigma utilizan una distribución de puntos con separación inicial de 0.1 tanto para las x como para las y.

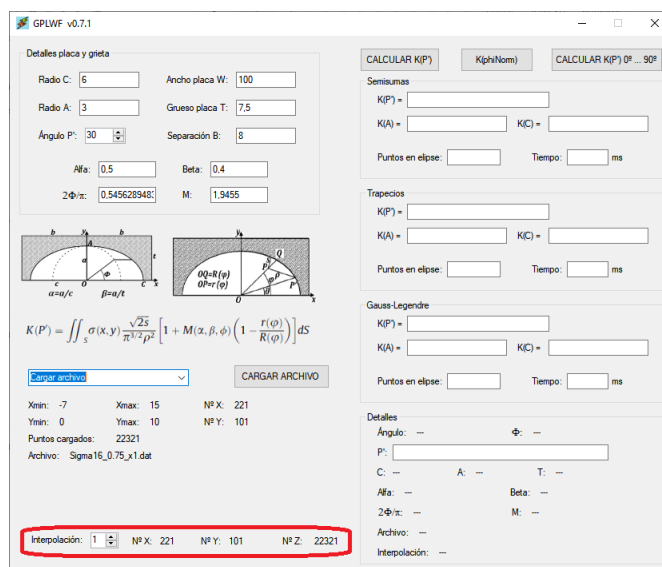


Figura 39: Control para la interpolación

Hasta que no se carga un archivo de datos o se genera una función sigma no se podrán utilizar los botones *Calcular K(P')*, *K(phiNorm)* ni *Calcular K(P') 0°-90°*.

Al pulsar el botón *Calcular K(P')* se calculará el FIT para el punto A, el punto C y el punto indicado mediante el valor *Ángulo P'*. Se calculará por los tres métodos (semisumas, trapecios y Gauss-Legendre).

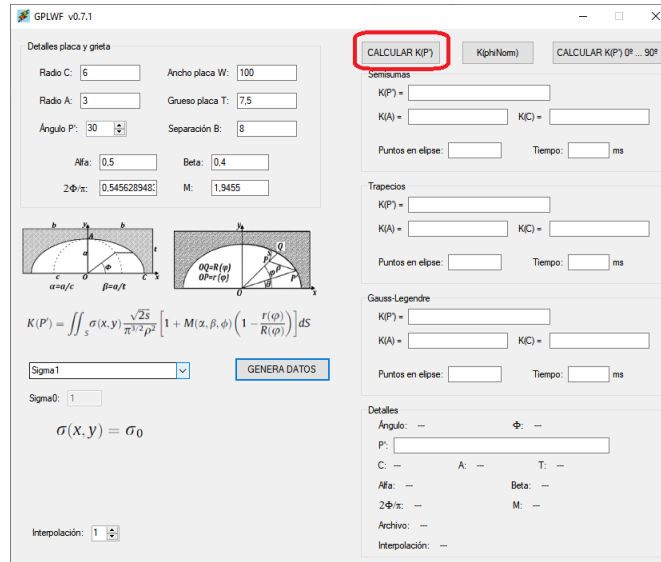


Figura 40: Botón "Calcular K(P)"

Al pulsar el botón *K(phiNorm)* se calcula el FIT para una serie de ángulos paramétricos  $\phi$  normalizado. La serie de valores es 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1. Los resultados se mostrarán en un archivo de texto plano por cada método así como otro archivo con la matriz que representa la función de intensidad de funciones sigma.

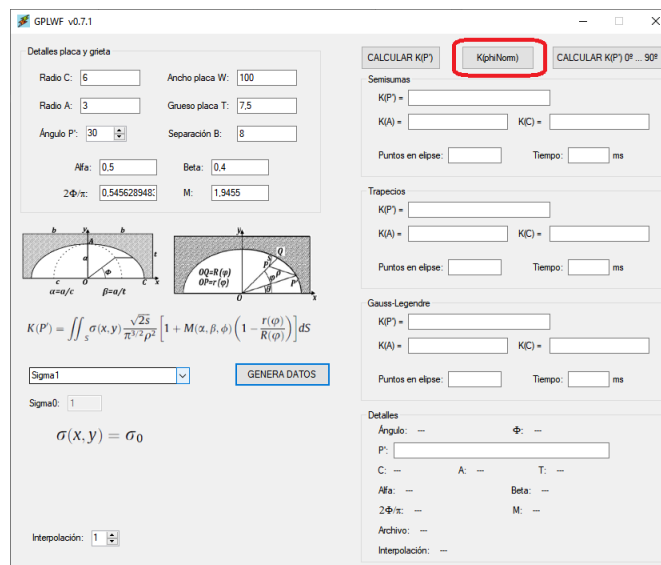


Figura 41: Botón "K(phiNorm)"

Al pulsar el botón Calcular K(P') 0°-90° se calculará el FIT para la serie de ángulos que va de 0° hasta 90° con incremento de 1. Al igual que antes, los resultados se volcarán a un archivo de texto plano y lo mismo para la matriz de sigma.

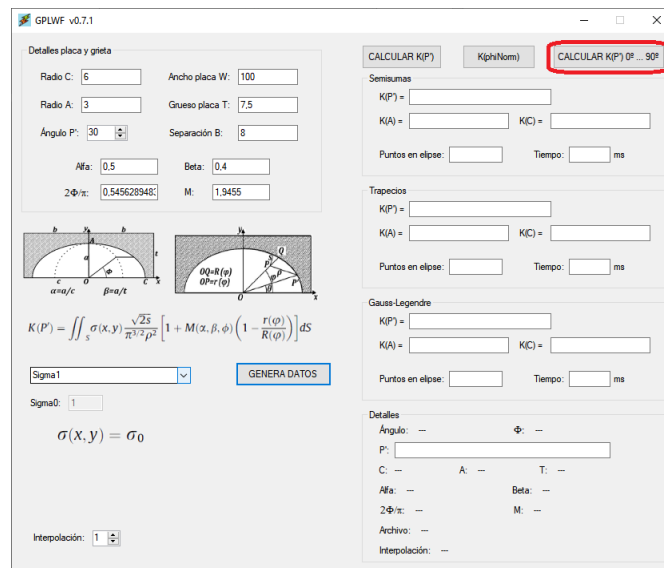


Figura 42: Botón "Calcular K(P') 0°-90°"

Este es un ejemplo de los archivos generados por los cálculos se series de ángulos. Cada método genera dos archivos: uno con los resultados y otro con la matriz sigma. En el nombre del archivo aparecen los ajustes que definen la elipse y el grosor de la placa así como los valores alfa y beta.

Nombre	Tamaño	Tipo
GaussLegendreMatrizZ_6_3_7,5_0,5_0,4_x1.txt	47 KB	Documento de tex...
GaussLegendreResultados_6_3_7,5_0,5_0,4_x1.txt	3 KB	Documento de tex...
SemisumasMatrizZ_6_3_7,5_0,5_0,4_x1.txt	56 KB	Documento de tex...
SemisumasResultados_6_3_7,5_0,5_0,4_x1.txt	3 KB	Documento de tex...
TrapeziosMatrizZ_6_3_7,5_0,5_0,4_x1.txt	219 KB	Documento de tex...
TrapeziosResultados_6_3_7,5_0,5_0,4_x1.txt	3 KB	Documento de tex...

Figura 43: Archivos de salida con los resultados

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de los resultados obtenidos para el cálculo de una serie de ángulos.

TrapeziosResultados\_6\_3\_7,5\_0,5\_0,4\_x1.txt: Bloc de notas

```

Archivo Edición Formato Ver Ayuda
Elipse c=6 a=3 t=7,5 alfa=0,5 beta=0,4
Matriz Resultados:
Grado Valor M K(P')
0 8,8555 2,23360980944066
0,1 4,692 1,8917777477387
0,2 3,534 1,89763796682761
0,3 2,8165 1,99497567639481
0,4 2,3095 2,06110176749757
0,5 1,9455 2,17060828277991
0,6 1,6885 2,26588076596961
0,7 1,5145 2,36042845647355
0,8 1,4 2,43735330923171
0,9 1,334 2,54494735791821
1 1,3115 2,52460369217273

```

Figura 44: Ejemplo de archivo de resultados



# REFERENCIAS

---

- [1] Rahmatollah Ghajar, Hamed Saeidi Googarchin. “General point load weight function for semi-elliptical crack in finite thickness plates”. Engineering Fracture Mechanics. Volume 109, September 2013, Pages 33-44
- [2] Bueckner HF. A novel principle for the computation of stress intensity factor. *Z Agew Math Mech* 1970;50:129-46.
- [3] Rice JR. Some remarks on elastic crack tip stress fields. *Int J Solids Struct* 1972;8:751-8.
- [4] Petrosky HJ, Achenbach JD. Computation of the weight function from a stress intensity factor. *Engng Fract Mech* 1971;10:257-66.
- [5] Niu X, Glinka G. On the “limitation of the Petrosky–Achenbach crack opening displacement approximation for the calculation of weight function” – Do they really exist? *Engng Fract Mech* 1987;26:701-6.
- [6] Fett T. Limitation of the Petrosky–Achenbach procedure demonstrated for a simple load case. *Engng Fract Mech* 1988;29:713-6.
- [7] Niu X. Some requirement on the reference loading with large stress gradient for the calculation of weight function using the Petrosky–Achenbach method. *Engng Fract Mech* 1990;36:167-72.
- [8] Sha GT, Yang CT. Weight functions of radial cracks emanating from a circular hole in a plate. In: *Fracture mechanics, ASTM STP 905*, vol. 17; 1986. p.573-600.
- [9] Fett T, Mattheck C, Munz D. On the calculation of crack opening displacement from the stress intensity factor. *Engng Fract Mech* 1987;27:697-715.
- [10] Glinka G, Shen G. Universal features of weight functions for cracks in mode I. *Engng Fract Mech* 1991;40:1135-46.
- [11] Shen G, Glinka G. Determination of weight function from reference stress intensity factor. *Theor Appl Fract Mech* 1991;15:237-45.
- [12] Fett T. Condition for the determination of approximate crack opening displacement fields. *Engng Fract Mech* 1991;39:905-14.
- [13] Fett T. Direct determination of weight functions from reference loading cases and geometrical conditions. *Engng Fract Mech* 1992;42:435-44.
- [14] Fett T. A procedure for the determination of the weight function for semi-elliptical surface cracks by direct adjustment to reference solutions. *Engng Fract Mech* 1992;43:519-28.
- [15] Niu X, Glinka G. Weight functions for edge and surface semi-elliptical cracks in flat plates and plates with corners. *Engng Fract Mech* 1990;36:459-75.
- [16] Shen G, Plumtree A, Glinka G. Weight function for the surface point of semi-elliptical surface crack in a finite thickness plate. *Engng Fract Mech* 1991;40:167-76.
- [17] Shen G, Glinka G. Weight functions for a surface semi-elliptical crack in a finite thickness plate. *Theor Appl Fract Mech* 1991;15:247-55.
- [18] Mikkola TPJ. Method for calculating stress intensity factors for surface cracks. *Engng Fract Mech* 1992;42:713-30.
- [19] Mikkola TPJ. Applications of the weight function method. *Engng Fract Mech* 1993;45:209-31.
- [20] Ruijia M, Reddy DV. Stress intensity factors and weight functions for semi-elliptical cracks using finite element alternating method. *Engng Fract Mech* 1994;48:305-23.

- [21] Wang X, Lambert SB. Stress intensity factors for low aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates subjected to nonuniform stresses. *Engng Fract Mech* 1995;51:517–32.
- [22] Wang X, Lambert SB. Local weight functions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. *Engng Fract Mech* 1995;23:199–208.
- [23] Wang X, Lambert SB. Stress intensity factors and weight functions for high aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engng Fract Mech* 1997;57:13–24.
- [24] Wang X, Glinka G. Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks. *Int J Fatigue* 2009;31:1816–27.
- [25] Jin Z, Wang X. Point load weight functions for semi-elliptical cracks in finite thickness plate. *J ASTM Int* 2012;9.
- [26] Oore M, Burns DJ. Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields. *ASME J Press Ves Technol* 1980;102:202–11.
- [27] Oore M, Burns DJ. Estimation of stress intensity factors for irregular cracks subjected to arbitrary normal stress field. In: *Proc 4th conf press ves tech, London, vol. 1; 1980. p. 139–47.*
- [28] Newman JC, Raju IS. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack. *Engng Fract Mech* 1981;15:185–92.
- [29] Gross B, Srawley JE. Stress intensity factors for single edge notch specimens in bending or combined bending and tension by boundary collocation of a stress function. *NASA TN D-2603* 1965.
- [30] Shiratory M, Niyoshi T, Tanikawa K. Analysis of stress intensity factors surface cracks subjected to arbitrarily distributed surface stresses. In: Murakami Y et al., editors. *Stress intensity factors handbook, vol. 2; 1987. p. 698–705.*
- [31] Shiratory M. Analysis of stress intensity factors for surface cracks subjected to arbitrary distributed stresses. *Bull Faculty of Engng, Yokohama National Univ* 1986;35:1–35.
- [32] Wang X. Stress intensity factors and weight functions for surface cracked plates and welded joints. Ph.D. thesis. Univ Waterloo; 1997.
- [34] Bate SK, Green D, Buttle D. A review of residual stress distribution of welded joints for the defect assessment of offshore structures, 1st ed. HSE Booksoffshore technology report; Norwich; 1997.
- [34] Parmar RS. *Welding engineering and technology*. 4th ed. Delhi: Khanna Publishers; 2005.
- [35] F. París, V. Mantic. *Mecánica de la Fractura*. ETSI, Universidad de Sevilla, 2015.
- [36] París, F y Picón. *Introducción a la Mecánica de la Fractura*
- [37] *Fundamentos de métodos matemáticos para física e ingeniería*
- [38] Fabrice D. Rouah. *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#*