

## **Una historia sobre las relaciones entre eficiencia y aleatoriedad**

**JOSÉ JAVIER BUSTO GUERRERO**  
**JESÚS MUÑOZ SAN MIGUEL**  
Universidad de Sevilla

### **Introducción**

La teoría de la eficiencia informativa de los mercados financieros, tal como se formula en nuestro tiempo, surgió a mediados del siglo XX a partir del estudio por parte de los economistas sobre la gran cantidad de datos estadísticos que se habían acumulado durante treinta años y que no habían originado una interpretación económica adecuada. La descripción puramente probabilista del análisis de las variaciones bursátiles, por una parte, y la reflexión económica sobre el papel de las informaciones proporcionadas por los precios y la naturaleza de los sistemas de precios, por otra, se reunieron en los años 1960 para dar lugar a la teoría de eficiencia informativa de los mercados. Hayek (1945) dio una primera definición de la naturaleza de los mercados utilizando el concepto información transmitida por el sistema de precios, mientras que, a partir de la tesis de Bachelier (1900), los estadísticos buscaban caracterizar el comportamiento de los mercados bursátiles mediante técnicas aleatorias.

La extensión de su campo de aplicación ha sido inmensa. Los financieros profesionales instrumentalizaron el concepto de eficiencia en la gestión de sus activos, con la creación de gestiones mecanizadas o casi mecanizadas llamadas indiciales. El desarrollo del gran ahorro en EE.UU. a través de los fondos de pensiones aceleró la idea de eficiencia en los bancos y las sociedades de gestión, a la vez que las bolsas organizadas comenzaban a elaborar un número cada vez más grande de índices de representación de los mercados de acuerdo con los principios y las consecuencias de la teoría de la eficiencia. Más adelante, el concepto de eficiencia, se difundió aún más con la creación de los mercados de opciones sobre

instrumentos financieros cada vez más complejos, a medida que los desarrollos matemáticos acompañaban y favorecían el crecimiento de estos mercados de capitales.

Las convulsiones intelectuales que originó la teoría de la eficiencia informativa fueron considerables. Era necesario construir una nueva manera de pensar los mercados, en contra de la intuición y no habitual, en relación a lo que dictaban los manuales clásicos de gestión financiera. Los cambios introducidos por el concepto produjeron modificaciones significativas de las prácticas profesionales. En este sentido, Bernstein (1992) no duda en afirmar que este nuevo enfoque de los mercados “parecía implicar modificaciones radicales en la manera en la que debería ser aplicado a sus responsabilidades profesionales”. Fama (1991) piensa que el concepto de eficiencia “ha cambiado la visión que los profesionales llevan al mercado”. En definitiva, existe un gran acuerdo en que la teoría de la eficiencia informativa ha supuesto una auténtica revolución epistemológica, que deriva de la introducción de los procesos aleatorios en la finanzas, y del abandono de los enfoques clásicos a favor de una perspectiva probabilista en el enfoque de las variaciones bursátiles.

El marco probabilista básico del concepto de eficiencia fue expuesto por primera vez por Bachelier (1900), después precisado por Osborne (1959), para ser posteriormente desarrollado por Samuelson (1965) y Mandelbrot (1966).

Con carácter general, las evoluciones de los activos financieros se modelan en la teoría financiera mediante exponenciales de procesos aleatorios que formalizan sus ecuaciones de comportamiento. El modelo tipo de las variables bursátiles es la ecuación

$$S(t) = S(0)\exp(\mu t + \sigma W(t)),$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  y  $W(t)$  un movimiento browniano estándar. Esta ecuación representa de manera formal la evolución de las trayectorias de los diferentes activos financieros. Si llamamos tasa de rentabilidad a

$$r(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

esta representación hace la hipótesis fuerte de que la rentabilidad de un activo financiero cualquiera puede ser modelado por un proceso aleatorio de incrementos independientes y estacionarios, cuya ley marginal es una ley de Laplace-Gauss. Lo que significa, entre otras cosas, que sus características probabilistas están determinadas de forma única por la esperanza (la media) y la desviación típica. Por ello, toda estrategia de inversión se funda, en última instancia, sobre consideraciones que se basan en la pareja  $(\mu, \sigma)$ , rentabilidad y riesgo o esperanza matemática y desviación típica de la tasa de rentabilidad instantánea del activo considerado. Con esta concepción de las rentabilidades, aplicando estos útiles conceptuales para la elección de portafolios con futuro incierto, Markowitz, Tobin y Sharpe han fundamentado las bases de la teoría del portafolio.

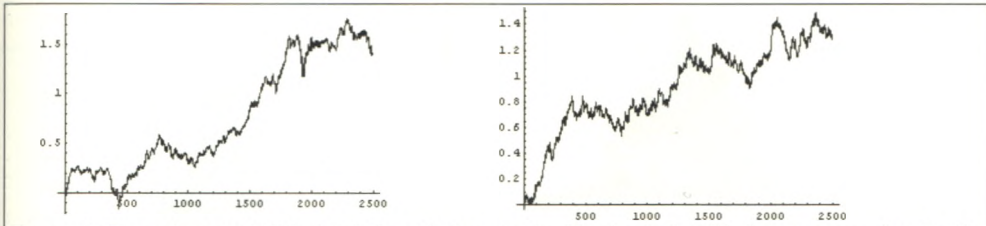


Figura 1: Tasa de rentabilidad del Ibx35 durante la década de los 90 frente a una simulación de un movimiento browniano con la misma media y varianza.

El primer aspecto a subrayar en esta modelación es la hipótesis de que el proceso aleatorio de la tasa de rentabilidad tiene incrementos independientes e idénticamente distribuidos (en adelante escribiremos i.i.d.). Esta hipótesis es muy cómoda para el cambio de escala de las rentabilidades bursátiles periódicas, puesto que en este caso  $P(\Delta r_{t,\tau})$  es la distribución de probabilidad de las rentabilidades periódicas  $\Delta r_{t,\tau} = \ln[S(t)/S(t-\tau)]$ , entonces

$$P(\Delta r_{t,n\tau}) = P(\Delta r_{t,\tau})^{\otimes n}, (*)$$

donde  $\otimes$  representa el operador convolución. Desde el punto de vista probabilista el interés de la hipótesis i.i.d. es de cálculo. Desde el punto de vista económico, la independencia de las rentabilidades está relegada, como se verá, a la hipótesis de eficiencia informativa. La identidad de las distribuciones significa que las características económicas del fenómeno observado no cambian *demasiado* en el curso del tiempo.

En el caso de la modelación financiera estándar, la relación (\*) se simplifica algo más, ya que el movimiento browniano presenta propiedades de invarianza por cambio de escala:

$$P(\Delta r_{t,n\tau})^{\otimes n} = n^{1/2} P(\Delta r_{t,\tau})$$

Se puede interpretar esta relación como una *propiedad fractal de autosemejanza*: el proceso de las tasas de rentabilidad  $\{r(t), t > 0\}$  es autosemejante de exponente  $1/2$ :

$$r(n\tau) \cong n^{1/2} r(\tau),$$

donde  $\cong$  simboliza igualdad en distribución. En consecuencia, *el modelo estándar de las rentabilidades bursátiles que utiliza la teoría financiera es un modelo fractal*.

El segundo aspecto a subrayar es que el riesgo es un riesgo unidimensional, valorado únicamente en términos de la variación endógena de la rentabilidad del activo, la desviación típica o *volatilidad*. De aquí se sigue la importancia de la ley marginal del proceso que modela la evolución de las tasas de rentabilidades mediante la medida de la variación, y por ello del riesgo, de los activos financieros. La utilización de la distribución normal calibra el nivel del riesgo del mercado y por ello las posibilidades de dispersión de las rentabilidades efectivamente observadas en torno a su media teórica. La modelación gaussiana implica que el número de valores extremos observados sobre un mercado dado es muy pequeño en relación al número de valores próximos a la media, dicho de otro modo que la probabilidad de saltos de las cotizaciones o de rupturas de mercado, es extremadamente débil. Esta es la consecuencia fundamental de la hipótesis de normalidad de las rentabilidades.

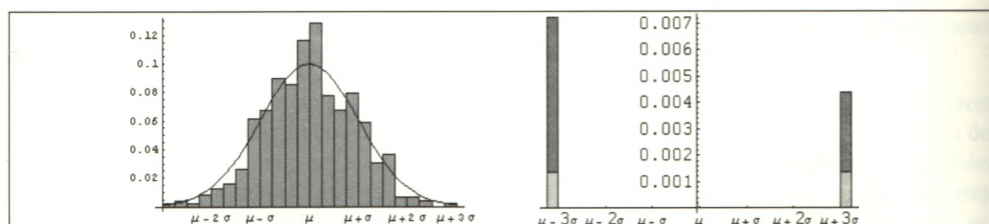


Figura 2: Distribución empírica de los incrementos diarios de la tasa de rentabilidad del Ibovespa durante la década de los 90 y sus colas acumuladas frente a una normal con la misma media y varianza.

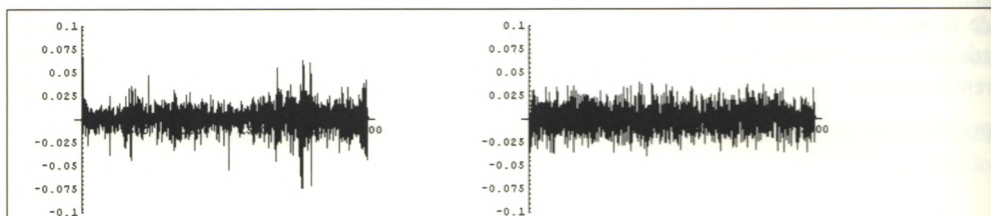


Figura 3: Incrementos diarios de la tasa de rentabilidad del Ibovespa durante la década de los 90 frente a los incrementos de un movimiento browniano correspondiente a una normal con la misma media y varianza.

La observación del comportamiento real de los mercados y, en particular, de las serie de precios financieros, revelan la ocurrencia de saltos, de discontinuidades, de rupturas mucho más frecuentes que las predichas por la ley normal: si se observa la forma de las distribuciones empíricas de las rentabilidades empíricas que se dan en los mercados, se verifica que éstas presentan un carácter de leptocurtosis, es decir, poseen colas espesas, contienen un gran número de valores elevados en relación a su centro. Dicho de otro modo, las dispersiones potenciales de las cotizaciones son más fuertes que las previstas por la modelación estándar: la normalidad de las rentabilidades no se verifica empíricamente. El proceso de evolución de las rentabilidades es más *quebrada e irregular* que un proceso de incrementos estacionarios e independientes gaussianos, que no presenta saltos.

Por tanto, parece necesario poner en cuestión al menos una de las tres hipótesis de la modelación: estacionariedad, independencia y distribución gaussiana de los incrementos. De antemano todas las vías son igualmente válidas, nos concentraremos, al menos de momento, en la hipótesis gaussiana. Con más precisión nos proponemos mantener la hipótesis fractal de la modelación financiera estándar, pero generalizando, siempre en el marco i.i.d., a los casos en que el exponente de autosemejanza valga  $1/\alpha$ , con  $\alpha$  entre 0 y 2. Las distribuciones correspondientes, llamadas alfa estables, tienen como características principales tener una varianza infinita y conducir a procesos cuyas trayectorias son discontinuas. Estas distribuciones se adaptan a la modelación de fenómenos *más erráticos* que el movimiento browniano.

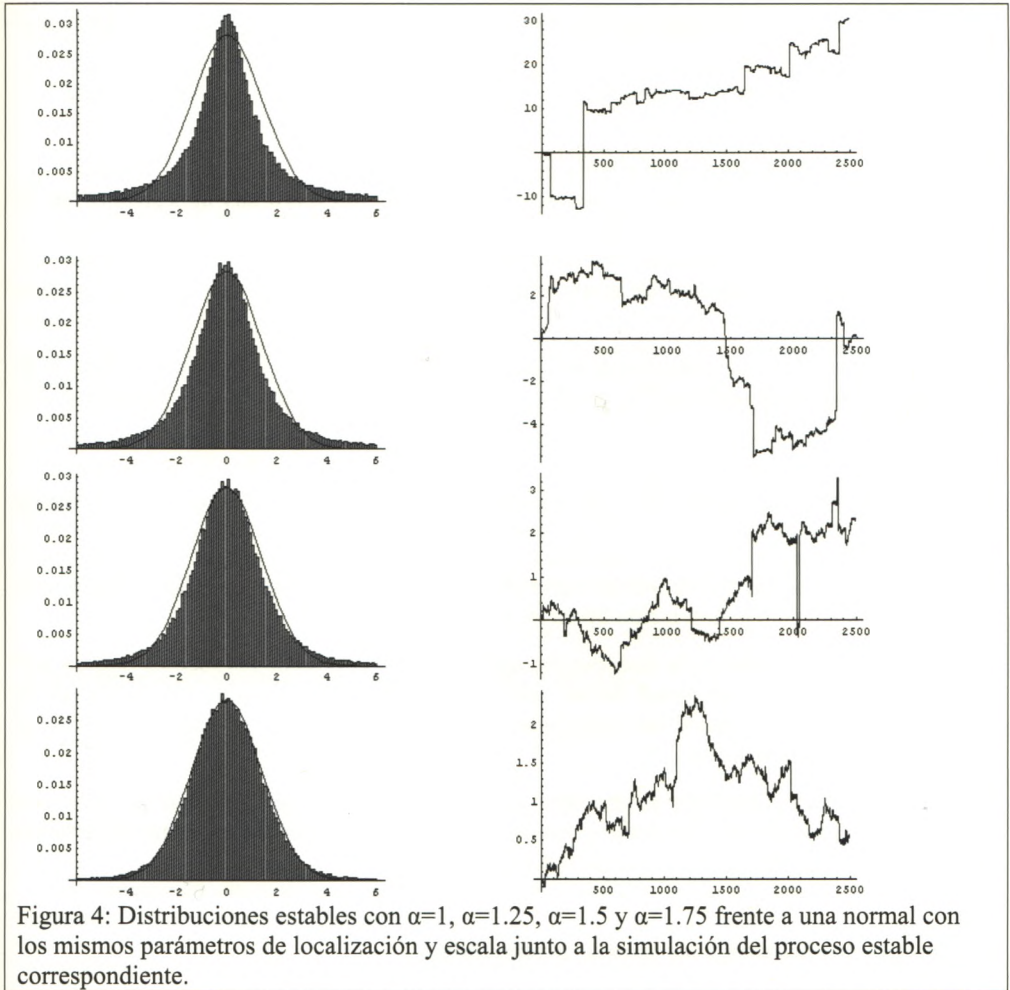


Figura 4: Distribuciones estables con  $\alpha=1, \alpha=1.25, \alpha=1.5$  y  $\alpha=1.75$  frente a una normal con los mismos parámetros de localización y escala junto a la simulación del proceso estable correspondiente.

Para situar el punto de partida del problema que nos proponemos, consideremos la siguiente propiedad de invarianza de escala de las rentabilidades bursátiles: según la modelación usual sobre una duración  $\tau$ , las rentabilidades periódicas  $\Delta r_{t,\tau}$  varían en la forma:

$$\sigma\sqrt{\tau},$$

donde  $\sigma$  es una constante positiva.

Para dar cuenta de la no normalidad observada sobre las distribuciones reales de las rentabilidades bursátiles, la investigación ha introducido modelaciones en las que  $\Delta r_{t,\tau}$  varía en la forma

$$\sigma(t)\sqrt{\tau},$$

es decir, haciendo variar la volatilidad.

En relación a este enfoque, se propone mantener el factor  $\sigma$  ajustando el valor del exponente de  $\tau$  :

$$\sigma\tau^{1/\alpha},$$

donde  $1/\alpha$  es el exponente de autosemejanza.

Por una parte esta vía parece que puede ser prometedora para sus aplicaciones en la práctica financiera, por lo que se refiere a la relación entre complejidad de la modelación y ganancia inmediata de realismo. Por otra parte, esta generalización fractal sencilla del movimiento browniano dispone de una teoría matemática más desarrollada en los momentos actuales.

Bajo hipótesis i.i.d. consideraremos una generalización fractal del marco probabilista de la modelación financiera que tiene en cuenta tres parámetros, dos de ellos de dimensión del riesgo, que describen

1. La rentabilidad anticipada que es un parámetro de *localización* correspondiente a la media gaussiana  $\mu$  ;
2. La dispersión de las rentabilidades esperadas, que es un parámetro de *talla o escala*, que se corresponde con la desviación típica  $\sigma$  ;
3. El espesor de las colas de la distribución, que cuantifica el peso de los sucesos raros, y por ello el número y la amplitud de los saltos posibles, es un parámetro de *forma* (en el sentido de la estructura de las variaciones) de la distribución que se corresponde con el exponente característico  $\alpha$  .

De este modo se mantiene el concepto de eficiencia de los mercados que se hace más extenso con la introducción del tercer parámetro que es de forma del comportamiento errático del mercado. Los mercados fractales siguen siendo eficientes.

### **El concepto de eficiencia y las leyes de probabilidad.**

El concepto de eficiencia informativa de los mercados se encuentra en el núcleo de la teoría financiera moderna y constituye su fundamento. Concepto de contornos fluctuantes y fronteras difusas. La intuición del mismo comienza con Bachelier (1900), y el esbozo en Cowles (1933). Aparece por primera vez en lo que se puede decir su formulación moderna en Samuelson (1965), donde define explícitamente el contenido del concepto así como su relación con las formulaciones probabilistas. En otras palabras, en un mercado eficiente informativamente, las variaciones futuras de las cotizaciones son imprevisibles si las anticipaciones de esas cotizaciones se hacen incluyendo la información de todos los que intervienen en el mercado. En ese caso, las variaciones de las cotizaciones evolucionan *al azar*.

Los aspectos informativos del concepto de eficiencia han sido ampliamente analizados por Grossman, S, y Stiglitz, J.E. (1980). Hoy es bien conocido que el concepto es en parte contradictorio. Para una buena síntesis de esas discusiones se puede ver en Roger (1988). Nos centraremos sobre las relaciones específicas entre eficiencia y leyes de probabilidad.

En cuanto al *impacto intelectual de las herramientas probabilistas* que operan en el interior del concepto, herramientas que no han sido objeto de un análisis crítico específico, en tanto que marcaban *maneras de pensar* la teoría de la eficiencia, hay algunos trabajos que han abordado este aspecto:

1. Trabajos sobre la relación entre eficiencia informativa y modelos de martingala, Mandelbrot, B. (1971).
2. Trabajos que adoptan un punto de vista más próximo a la historia de las ciencias: Longin, F. y Walter, C. (1994); Walter, C. (1996).

Estos trabajos de investigación epistemológica son importantes. En efecto, la eficiencia de los mercados es un concepto que hunde sus raíces en una larga historia, la del análisis estadístico de las variaciones bursátiles: los orígenes intelectuales del concepto de eficiencia son orígenes probabilistas y estadísticos, y la eficiencia de los mercados ha estado estrechamente asociada, desde sus comienzos, a un paradigma probabilista-estadístico. Las incomprendiones que resultan de un mal uso del concepto por parte de los profesionales del mercado son también la consecuencia de la confusión entre eficiencia y ley de probabilidad. Comprender la naturaleza de la articulación entre eficiencia informativa y modelo probabilista permite por ello aprehender mejor los problemas que se proponen hoy sobre los mercados bursátiles, y las razones por las que se podría conservar la hipótesis de eficiencia modificando las leyes de probabilidad que operan en ella. Es por esta razón por lo que se desarrolla las interacciones entre eficiencia y aleatoriedad.

### Las definiciones clásicas de la eficiencia de los mercados

La definición de Fama (1970, pág. 383) es como sigue:

*“Un mercado bursátil se dice eficiente si las cotizaciones registradas reflejan plenamente toda la información disponible”.*

El subrayado de *reflejan plenamente* parece indicar tanto su importancia como la necesidad de precisar esa expresión.

La definición de Mandelbrot (1971, pag. 225) dice:

*“Un mercado bursátil se dice eficiente si las cotizaciones registradas reflejan plenamente toda la información pertinente y disponible. La llegada de una nueva información al mercado produce una ocasión de arbitraje (una imperfección de información), pero se supone que toda imperfección es inmediatamente arbitrada, de manera que la sucesión de los precios arbitrados debe ser una martingala”.*

Mandelbrot precisa la definición de Fama añadiendo a la información “disponible” la noción de información pertinente, es decir, utilizada realmente por el mercado para la fijación de los precios.

La definición de Jensen (1978, pág. 96) presenta el concepto de eficiencia (eficacia) bajo una forma operativa que permite su validación mediante comprobaciones empíricas:

*“Un mercado bursátil se dice eficiente, en relación a un conjunto de información dado, si es imposible realizar una ganancia bursátil poniendo en práctica una política de intervención o de gestión fundamentada sobre este conjunto de información”.*

Lo que quiere decir que no se puede sacar partido de una ventaja informativa pues, como dicen los operadores de los mercados, la información útil está ya *en las cotizaciones*. Esta definición conduce a la introducción de eficiencia en relación a diferentes subconjuntos de información, y a distinguirla de la eficiencia en relación a una información global para todo el mercado.

En este sentido, Beaver (1981, pág. 35) propone la siguiente definición:

*Un mercado bursátil se dice eficiente en relación a un conjunto de información dado, si la comunicación a todos los participantes del mercado de la información contenida en este conjunto específico no tiene impacto sobre el nivel de las cotizaciones registradas.*

A partir de esta definición surge la aproximación moderna de la eficiencia, que modela la agregación de informaciones diferenciadas en la formación del precio de equilibrio, problemática introducida y desarrollada en Grossman (1976) y Grossman y Stiglitz (1980).

Por último, todos estos enfoques están reunidos en la definición convencional dada por Malkiel (1989):

*Un mercado se dice eficiente si las cotizaciones registradas reflejan plena y correctamente toda la información disponible y pertinente. Formalmente, un mercado se dice eficiente en relación a un conjunto de información dado, si la comunicación a todos los participantes del mercado de la información contenida en este conjunto no tiene impacto sobre el nivel de las cotizaciones registradas. Además, la eficiencia de un mercado en relación a un conjunto de información dado tiene una consecuencia práctica: es imposible realizar ganancias bursátiles poniendo en práctica una política de intervención basada en este conjunto de información.*

Esta definición de Malkiel representa la concepción que se puede denominar clásica de la eficiencia, en la medida en que no hace referencia a la problemática de agregación de información de los diferentes agentes. Es este concepto, en su forma clásica, el que ha pasado de la investigación a la industria y que ha tenido consecuencias profesionales importantes, como se verá más adelante.

Como última nota después de estas definiciones, es necesario resaltar que el término *eficiencia*, traducción usual de la palabra inglesa *efficiency*, no refleja bien la analogía física contenida en el concepto. Utilizando la palabra *eficacia* se ve que se cualifica mejor un mercado por su *eficacia* a la hora de transformar información en dinero. De la misma manera que la *eficacia* de un motor es su capacidad para transformar la energía contenida en el combustible en trabajo útil, la *eficacia* de un mercado se medirá por su capacidad para transformar sin pérdida toda la información en precios.

Por ello, se puede proponer la siguiente definición:

*Un mercado bursátil se dice eficaz si transforma correctamente la información en precios.*

Desde este punto de vista un mercado puede ser más o menos eficaz, y puede existir una pérdida (ruido) en ese proceso de transformación. El concepto de eficacia perfecta puede ser



utilizado como patrón para apreciar la cualidad del instrumento *mercado* para transformar la información y comparar los mercados entre ellos según este criterio.

Aunque en adelante seguiremos utilizando la traducción financiera española de la palabra (efficiency), nos parece adecuado mantener en mente este concepto de *eficacia*.

### Implicaciones profesionales de la restricción gaussiana

Las consecuencias operativas de la identificación de la eficiencia informativa con la distribución normal fueron inmensas. Un ejemplo bastante emblemático es el de la industria y empresas de gestión de activos, esta industria es representativa de la manera en que "*la investigación universitaria en finanzas ha modificado las prácticas profesionales*" Fama (1991, pág 1608). Modificación que resultó de la implantación del concepto de eficiencia en las cadenas de producción y de gestión de activos en EE.UU. primero, y después en Europa y Japón.

La definición de Jensen (1978) indicaba claramente que toda gestión activa conducida por gestores profesionales experimentados, y ayudados por analistas financieros que buscaban identificar los valores a comprar, todos esos esfuerzos no podían permitir realizar resultados superiores a los obtenidos por un índice representativo del mercado. Esa era la conclusión a la que había llegado Cowles (1933), para quien la mejor estrategia de inversión posible era la constitución de un portafolio (cartera) de mercado. Formalmente, eso significa que la esperanza matemática de la desviación de ganancias en relación al índice, resultante de una estrategia de inversión basada en el conjunto de información  $\Phi_t$ , es nula para un nivel de riesgo idéntico. Esta manera de ver la eficiencia constituye el *fundamento conceptual de la gestión por índice llamada pasiva*. La eficiencia de los mercados aparece como *la última razón* de la gestión por índice pasiva.

Esta manera de ver la eficiencia remite, entre otras cosas, a una manera de *definir un tipo de aleatoriedad*. En efecto, si, *en media*, la desviación del resultado entre una gestión activa y un índice de mercado es nula, pueden existir sin embargo desviaciones temporales más o menos importantes según el tipo de aleatoriedad. Con una aleatoriedad gaussiana, las desviaciones estarán limitadas al *ruido* en torno a cero, y los partidarios de la gestión por índice podrán hacer valer mecánicamente un índice de mercado antes que comprometerse en costos importantes para el mantenimiento de equipos de gestores que, en definitiva, se revelan inútiles y que, según la célebre boutade de Samuelson, deberían reciclarse como cuadros en la industria. El reciclaje de Samuelson no es en realidad más que la consecuencia de una elección de la aleatoriedad gaussiana para la formalización del resultado. Con una aleatoriedad no gaussiana, la existencia de desviaciones importantes no está excluida, y una esperanza de desviación nula no está en contradicción con una gestión activa.

En efecto, sea  $X_n$  la desviación del resultado observado en la fecha  $n$  para el período  $[n-1, n]$  entre un índice de mercado y una cartera gestionada activamente y del mismo riesgo. Se observa a lo largo del tiempo una sucesión de desviaciones que se suponen i.i.d.  $\{X_n, n > 0\}$ . El problema planteado por Cowles y Samuelson se puede analizar formalmente como sigue. Dadas una sucesión  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables aleatorias i.i.d., se plantea la cuestión de la forma de su distribución límite de su suma  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La solución a este problema fue dada por Paul Levy en 1937, con el descubrimiento de las leyes

estables: cuando  $E(X_i^2)$  es finita, la única ley límite es la ley de Laplace-Gauss. En los demás casos, nos encontramos en presencia de leyes más complejas que generalizan la ley normal (la ley de Cauchy es un ejemplo). En estos casos, la convergencia eventual de las medias empíricas no responde a los mismos comportamientos que en el caso gaussiano.

Por ejemplo, supongamos un caso extremo en el cual las desviaciones de los resultados siguen una ley de Cauchy, definida por

$$P[a < X < b] = \int_a^b \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} (\arctg b - \arctg a)$$

Para esta distribución, la esperanza matemática (la desviación del resultado medio) no existe, ya que la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\pi(1+x^2)}$  no está definida. Las medias empíricas obtenidas por lanzamientos aleatorios de Cauchy no convergen y obedecen a comportamientos desconcertantes y contraintuitivos: la no existencia de la esperanza teórica tiene como consecuencia la aparición en las trayectorias de períodos de cuasi estabilidad, seguidas de saltos, después, de nuevo, de períodos de calma,... Todo ocurre como si, de repente, de manera inesperada las medias empíricas diesen un salto, en un sentido u otro, tanto más imprevisible como contrario a la intuición. Nos encontramos entonces delante de una configuración probabilista en la cual podrían existir durante largos períodos una desviación del resultado importante entre un índice de mercado y una gestión activa del mismo nivel de riesgo. En este caso una gestión por índice pasiva no sería la mejor política de gestión. La razón es que si algunos momentos no existen, la aleatoriedad de la rentabilidad puede variar de manera brutal. Para detalles sobre la historia de la creación de la gestión por índice que sigue la hipótesis gaussiana se puede ver Walter (2000). Por todo ello, se puede decir que la gestión por índice pasiva es una consecuencia, no de la hipótesis de eficiencia, sino de la hipótesis gaussiana.

Otra consecuencia de la reducción de la eficiencia a la hipótesis gaussiana es la estructuración de los procesos de inversión de las sociedades de gestión según la forma llamada en la jerga de la industria de gestión *approach top down*. Es el desarrollo del ahorro a largo plazo que corresponde a la constitución de los fondos de pensiones que ha conducido al desarrollo del actuariado financiero y a una racionalización de los procesos de inversión en la gestión de este ahorro. Se han desarrollado métodos de determinación de asignaciones llamadas *estratégicas* de activos o composición de carteras a largo plazo, en función de los objetivos de gestión de los administradores de los fondos de pensiones, métodos que se apoyan sobre las previsiones de estabilidad de las rentabilidades a largo plazo y la adecuación activo pasivo.

Los procesos de inversión se han construido privilegiando las asignaciones estratégicas de activos sobre las intervenciones llamadas *tácticas*, decisiones a corto plazo, y las elecciones de títulos, consideradas como de ruido de actuación alrededor de la base constituida por la asignación estratégica. En sus presentaciones comerciales han hablado del *triángulo de actuación* según el cual el 70% del resultado de una actuación proviene de la asignación estratégica, el 20% de las asignaciones tácticas, y solamente el 10% de las elecciones de títulos.

El principio subyacente a esta estructuración de los procesos de inversión es la idea según la cual *la paciencia reduce el riesgo*, Hammer (1991, pág. 48), y que por ello el ruido desaparece sobre períodos largo, haciendo converger los resultados reales hacia el resultado

teórico de la asignación estratégica. Esta descomposición del resultado en fuentes que contribuyen al resultado total proviene de la aplicación del CAPM gaussiano. En efecto, en virtud de la aplicación del modelo de evaluación de los activos financieros de Sharpe-Lintner-Mossin, la rentabilidad esperada, y por tanto el resultado de una cartera se descompone en la parte que proviene del mercado y la parte que proviene de las elecciones de títulos. Se sabe que el riesgo específico (la elección de títulos) no está remunerado, la aleatoriedad gaussiana que garantiza un decrecimiento rápido de la varianza total.

Pero según el tipo de aleatoriedad, estable o gaussiana, será necesario ser más o menos paciente... El paradigma de la asignación estratégica y de la diversificación depende del tipo de aleatoriedad, y se puede por tanto adelantar que el postulado de la asignación estratégica es una idea que proviene, no de la hipótesis de eficiencia, sino de la hipótesis gaussiana.

### **Las anomalías observadas en relación a la restricción gaussiana**

Los trabajos sobre la comprobación empírica de la hipótesis gaussiana son bastante numerosos. Existen excelentes síntesis de las que cabe citar Taylor (1986), Campbell, J. Lo A. y MacKinlay (1997). Los dos grandes ejes que emergen de estos trabajos hacen hincapié en dos tipos de fenómenos calificados de anomalías sobre los mercados bursátiles:

1. Una aparente previsibilidad de las rentabilidades, que ponen en evidencia dependencias o correlaciones sobre diferentes horizontes de tiempo.
2. Una leptocurtosis (no normalidad de las distribuciones empíricas) que parece atenuarse con el paso del tiempo, fuerte en alta frecuencia, más débil en la baja frecuencia.

Estas dos formas de anomalía pueden ser conectadas entre ellas en la medida que se puede resolver una parte del problema, el de la leptocurtosis de las distribuciones marginales, introduciendo dependencias no lineales sobre los parámetros de las distribuciones condicionales.

Esto está en el origen de los modelos ARCH que orienta la investigación hacia la dependencia de las volatilidades más que de las rentabilidades. Se ha demostrado cómo formas de dependencia no lineales pueden producir distribuciones marginales no normales.

Los trabajos que se citan a continuación, Baillie y King (1996), Lordic y Mignon (1999), son buenas síntesis sobre la investigación de la previsibilidad (dependencias lineales y no lineales) en los mercados. Nos centraremos solamente en el problema de la no normalidad.

Los primeros trabajos donde se da cuenta de que las colas de las distribuciones de las rentabilidades empíricas contenían demasiados puntos para que pudieran ser ajustadas por una ley Laplace-Gauss aparecen en Osborne (1959), Alexander (1961), Cootner (1962), pero consideran el fenómeno como despreciable.

El primero en atraer la atención sobre la leptocurtosis de las distribuciones observadas, así como de la necesidad de no despreciar e ignorar el fenómeno se encuentra en los trabajos de Mandelbrot (1962, 1963a). Según Mandelbrot, era necesario interesarse de forma particular en esos puntos, que eran el refugio de puntos aberrantes que contenían informaciones esenciales sobre el funcionamiento de los mercados, para la comprensión de riesgos potenciales. Según esta apreciación, *la información importante no se pierde en la suma* (las medias de las distribuciones), *sino que se refugia en las colas*. La posición de Mandelbrot significa una variación radical de la visión de las variaciones bursátiles. Hasta entonces, se

habían interesado en las fluctuaciones de las sumas parciales de las variables aleatorias, y en el comportamiento asintótico de las medias empíricas. En Mandelbrot (1963b) sugería *interesarse por las fluctuaciones extremas*.

Mandelbrot (1962) utiliza por primera vez la ley de Pareto para el estudio del comportamiento del mercado del algodón desde 1880 hasta 1958, en el que observa que rentabilidades  $\Delta_{t,1}$  y  $\Delta_{t,20}$ , donde la unidad de tiempo es el día, son demasiado estiradas para ser gaussianas. Aplica de nuevo este análisis en los mercados financieros, Mandelbrot (1963a), y obtiene resultados parecidos.

Fama (1965a), aplica este análisis al índice Dow Jones, y confirma el resultado de Mandelbrot.

Mandelbrot (1967), vuelve a aplicar el mismo análisis en otros mercados, con frecuencias semanales, mensuales y anuales. En particular, analiza las cotizaciones de trigo entre 1883 y 1936; cuatro acciones de sociedades de ferrocarriles, de 1857 a 1936; la tasa de cambio USD/STG, de 1803 a 1895. Los resultados de estos trabajos confirman la leptocurtosis de las distribuciones empíricas.

Muñoz San Miguel (2002, pág. 170), estudia la serie de cierres diarios del IBEX35 en la década de los noventa del siglo pasado y comprueba que la distribución empírica de los incrementos logarítmicos diarios, semanales y mensuales de la citada serie presentan un fuerte nivel de curtosis marcadamente positiva, las distribuciones están ligeramente sesgadas hacia la izquierda y las colas son sensiblemente mayores que las correspondientes a una distribución normal.

Aunque la no normalidad es considerada hoy día como un hecho básico de los mercados, es necesario subrayar que fueron necesarios casi 40 años para que ese hecho *observable* se convirtiera en un hecho *observado* y entrara en el campo de investigación de las finanzas. A pesar de las anomalías constatadas, las grandes variaciones bursátiles no tenían existencia intelectual en el campo de investigación de las finanzas. Así hasta la década de los 90 del siglo pasado estudiar los movimientos extremos comenzó a ser un enfoque original en las finanzas. Parece que ese ya no es el caso en nuestros días, donde la necesidad de tener en cuenta una estructura diferente del riesgo, y por ello de la aleatoriedad, en las distribuciones reales, está en el origen de una cierta convulsión en las formas de considerar los mercados.

En efecto, paralelamente a este cambio de visión en la comunidad científica, ha aparecido entre los profesionales una amplia toma de conciencia de la no normalidad y de sus consecuencias. Un seguimiento de la prensa profesional durante estos últimos años lo ilustra: entre 1998 y 2000, en una de las principales revistas profesionales no universitarias, *Risk*, aparecen mas de quince artículos consagrados al problema de la no normalidad. La leptocurticidad se presenta como uno de los diez principales problemas a abordar por la industria financiera para los próximos años<sup>1</sup>, y la gestión de los sucesos raros se convierte en el problema clave a resolver en la gestión del riesgo<sup>2</sup>. Así por ejemplo, se puede leer en *Risk* que “la teoría de los valores extremos es una potente herramienta para la gestión de los riesgos”<sup>3</sup>.

Este nuevo interés profesional procede de lo que, en el campo de la industria financiera se muestra, desde hace quince años, como un enfoque institucional de los riesgos del mercado,

<sup>1</sup> “The 10 challenges left to tackle”, *Risk*, abril 2000, pp. 34-39.

<sup>2</sup> “Taylor-made for tails” *Risk*, febrero 2000, pp. 95-98.

<sup>3</sup> “History repeating”, *Risk*, Enero 1998, pp. 99.

enfoque que se denomina prudente, y que se traduce en la existencia de grupos de reflexión internacionales cuyo objetivo es promover reglas de cuantificación de los riesgos universalmente aplicables por las entidades financieras en todos los dominios de su actividad. Esta prudente preocupación está relacionada con el aumento extremadamente rápido de los endosos de instrumentos financieros derivados, cuya inestabilidad y dificultad de gestión constituyen fuentes de enorme preocupación para las autoridades que tutelan el mercado: una muestra representativa de sesenta establecimientos financieros activos sobre los mercados de derivados, perteneciente al grupo de los diez países más ricos (G10), hace aparecer un endoso nominal sobre esos instrumentos de 130 billones de dólares. La exposición al riesgo de los establecimientos concernidos (relación entre los endosos nominales y los activos subyacentes) puede alcanzar el coeficiente 34, lo que quiere decir que el establecimiento está expuesto por 34 veces del valor de los activos de base sobre los cuales se negocian los productos derivados (fuente: Basle [1999], pág. 4).

Las instancias representativas que constituyen estos grupos de reflexión ven cada vez con más claridad que el fenómeno de la leptocurtosis debilitaba la fiabilidad de las herramientas y los instrumentos basados en la distribución normal, y era necesario una renovación conceptual de los enfoques tradicionales.

Los procesos alfa estables es una de las maneras de modelar la aparición de discontinuidades en las series temporales. En efecto, las trayectorias de los movimientos alfa estables, que son los procesos fractales leptocúrticos que se utilizan actualmente para la modelación, presentan la propiedad de saltar de manera arbitrariamente grande entre dos realizaciones, y por ello presentar un gran número de puntos en las colas que corresponden a los valores extremos observados. La evidencia de distribuciones leptocúrticas se puede interpretar como un signo de la fractalidad de los mercados, en un contexto de independencia de los crecimientos.

### Bibliografía

---

- BACHELIER, L. (1900), "Théorie de la Spéculation", Thèse de doctorat, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, troisième série, pp. 21-86.
- BAILLIE, R.; KING, M. (1996), "Fractional Differencing and long memory processes", Special issue of *Journal of Econometrics*, vol. 73, n° 1.
- Basle Committee on Banking Supervision (1999), *Trading and Derivatives Disclosures of Banks and Securities Firms*.
- BEAVER, W. (1981), "Market Efficiency", *The Accounting Review*, vol. 56, pp. 23-37.
- CAMPBELL, J. ; LO A. ; MACKINLAY A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- COOTNER P.A. (1962), "Stock Prices: Random versus Systematic Changes", *Industrial Management Review*, vol. 3, pp. 24-45.
- COWLES, A.(1933), "Can Stock Markets Forecasters Forecasts?", *Econometrica* 1, pp.309-324.
- BERNSTEIN, P. (1992), *Capital Ideas. The improbable origin of modern Wall Street*, The Free Press, New York.
- FAMA; E. (1965a), "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, vol. 38, n° 1, pp. 34-195.

- FAMA, E. (1970), "Efficient Capital Market: a Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, vol. 25, pp. 383-417, and discussion pp. 418-423.
- FAMA, E. (1991), "Efficient Capital Markets:II", *Journal of Finance*, vol. 46, pp. 1575-1617.
- GROSSMAN, S. (1976), "On the efficiency of competitive stock markets where traders have diverse information", *Journal of Finance*, vol 31, pp. 573-595.
- GROSSMAN, S, Y STIGLITZ, J.E. (1980), "On the impossibility of informationally efficient markets". *American Economic Review*", vol. 70, pp.393-408.
- HAMMER,D. (1991), *Dynamic Asset Allocation*, New York, Wiley.
- HAYEK, F.A.(1945), "The use of Knowledge in Society", *The American Economic Review*, vol. XXXV, September 1945, Number Four.
- JENSEN, M. (1978), "Some anomalous evidence regarding market efficiency", *Journal of Financial Economics*, vol.6, pp. 95-101.
- LONGIN, F. Y WALTER, C. (1994), "Scientific and Technological approach of knowledge: the case of financial markets" . Sixth Annual International Conference on Socio-Economics, HEC, juillet.
- MALKIEL, B. (1989), "Is the Stock Market Efficient", *Science*, vol.243, pp. 1313-1318.
- MANDELBROT, B.B. (1962), "Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle base sur les processus stables non gaussiens de Paul Levy", *Compte-rendus à l'Academie des Sciences*, vol. 254, pp. 3968-3970.
- MANDELBROT, B.B. (1963a), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, vol. 36, pp. 394-419.
- MANDELBROT, B.B. (1963b), "New methods in statistical economics", *Journal of Political Economy*, vol. 71, pp. 421-440.
- MANDELBROT, B.B. (1966), "Forecasts of future prices, unbiased markets, and martingale models", *Journal of Business*, vol. 39, pp. 242-255.
- MANDELBROT, B.B. (1967), "The variation of Some Other Speculative Prices", *Journal of Business*, vol. 40, pp. 393-413.
- MANDELBROT, B.B. (1971), "When can price be arbitrated efficiently?. A limit to the validity of random walk and martingale models", *Review of Economics and Statistics*, vol. 53, pp. 225-236.
- MUÑOZ SAN MIGUEL, J. (2002), *La dimensión fractal en el mercado de capitales*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. Sevilla, Junio 2002.
- OSBORNE, M.F.M. (1959). "Brownian Motion in the Stock Markets", *Operations Research*, vol. 7, pp. 145-173, and discussions: vol. 7, pp. 807-811.
- ROGER, P. (1988), "Théorie des marches efficients et asymetrie d'information: une revue de la literature", *Finance*, vol. 9, n° 1, pp. 57-98.
- SAMUELSON, P.A. (1965). "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly", *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 41-49.
- TAYLOR, S. (1986), *Modelling Financial Time Series*, J.Wiley and Sons.
- WALTER, C. (1996), "Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers". *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, vol. 51, n° 4, (juillet-août), pp. 873-905.
- WALTER, C. (2000), "The Efficient Market Hypothesis, the Gaussian Assumption, and the Investment Management Industry",

[http://papers.ssrn.com/paper.taf?Abstract\\_id=267443](http://papers.ssrn.com/paper.taf?Abstract_id=267443)