Capítulo 24

Una explicación de las regularidades detectadas por Pascal en su tabla de valores de las partidas

FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUÍZ
JESÚS BASULTO SANTOS
Universidad de Sevilla

Introducción

Entre el verano y el otoño de 1654 tuvo lugar la correspondencia entre los sabios franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), donde se abordan, además de otros problemas sobre aritmética y geometría, la resolución de tres problemas sobre juegos de azar: El problema del dado con partidas no jugadas, el problema de los dados del Caballero de Méré y el Problema de los Puntos, siendo este último el que consideraremos en nuestro trabajo.

De forma resumida, el Problema de los Puntos se presenta en la siguiente situación: dos jugadores, A y B, se ponen de acuerdo en jugar una serie de juegos justos, que llamaremos partidas, hasta que uno de ellos haya ganado un número especificado de ellas, por ejemplo, n. Por alguna razón, los jugadores deciden interrumpir el juego cuando el jugador A ha ganado g_a partidas y B ha ganado g_b, donde g_a y g_b son menores que n, o sea, el juego ha sido interrumpido antes de la conclusión del mismo. Si los jugadores A y B han apostado la misma cantidad monetaria, k, surge entonces el problema de cómo repartir la cantidad total apostada, $2k$, entre ambos. La forma de hacer el reparto es lo que se conoce como Problema de los Puntos.

Aunque hubo soluciones anteriores a este problema (en algunos manuscritos medievales de Italia y Francia y las proporcionadas por los matemáticos italianos del Renacimiento como Pacioli, Tartaglia, Forestani, Peverone o Cardano) las más conocidas son las que aportaron Pascal y Fermat en su famosa correspondencia de 1654 y en la publicación póstuma, en 1665, del Triángulo Aritmético de Pascal. Estos autores lo abordan acotando el mismo dentro de los siguientes supuestos: (1) Por juego justo entienden que los jugadores tengan la misma habilidad y, también, que sus apuestas sean proporcionales a sus habilidades, es decir, deben apostar la misma cantidad monetaria. En lenguaje actual, el supuesto sería que la probabilidad de que el jugador A gane una partida es igual a 0.5. (2) Los jugadores "*ni se cansan ni aprenden en el desarrollo del juego*", es decir, sus habilidades permanecen constantes y, así, no les afectan los resultados obtenidos en partidas anteriores. Este último supuesto corresponden a lo que entendemos en el campo de las probabilidades como independencia, es decir, supone que los distintos juegos son conjuntamente independientes. Por último, el supuesto (3) se refiere a que al interrumpirse el juego la información relevante es el número de partidas que le restan por ganar a cada jugador y, así, están suponiendo que el juego interrumpido puede reanudarse hasta finalizar con un ganador. La situación existente al interrumpirse el juego la representaremos por (a,b), donde los valores a y b son el número de partidas que le restarían por ganar a los jugadores A y B respectivamente para ser proclamados vencedores del juego.

Bajo los tres supuestos anteriores, Pascal y Fermat resuelven el problema de los puntos mediante los siguientes métodos: (a) Fermat sumerge el problema de los puntos en un nuevo problema con un número máximo de partidas y lo resuelve mediante combinatoria; (b) Pascal propone su regla de la esperanza y a partir de su trabajo sobre el Triángulo Aritmético, que hoy denominamos, Triángulo de Pascal, resuelve el problema a partir de la binomial simétrica y (c), ante las dudas que planteó Pascal a su primera propuesta, Fermat resuelve el problema a partir de lo que hoy denominamos binomial negativa.

Para el caso genérico de juego interrumpido en la situación (a,b), es decir, al jugador A le faltan a partidas y b al jugador B, si $2k$ es el total apostado por ambos jugadores, Pascal calcula la probabilidad de que el jugador A ganase el juego, si éste continuase, por la siguiente fórmula:

$$P_A\left[(a,b)\right]=\sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{a+b-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b-1},$$

y, por tanto, dicho jugador debe recibir la cantidad $2k\cdot P_A\left[(a,b)\right]$.

Uno de los problemas particulares que aborda Pascal dentro de este contexto es el siguiente. Partiendo de la situación (b,b), es decir, a ambos jugadores les restan el mismo número de partidas para ganar el juego, consideramos los juegos $\{(b-j,b);\quad j=1,2,...,b\}$, o sea, juegos en los que el jugador A va ganando partidas de forma sucesiva, mientras que B no gana ninguna. Bajo esta premisa, Pascal compara las situaciones $(b-r+1,b)$ con $(b-r,b)$, es decir, el jugador A al que le faltaban $b-r+1$ partidas ha ganado una más (la partida r-ésima) y, por tanto, ahora le faltan $b-r$ partidas. El interés de Pascal consiste en calcular el valor que tiene la partida r-ésima ganada por el jugador A, valoración que se hace sobre la apuesta del otro jugador. O sea, Pascal calcula la proporción de apuesta del jugador B que le aporta al jugador A al ganar la partida r-ésima. Si llamamos a esta proporción $W_A\left[(r,b)\right]$, entonces por ejemplo, $W_A\left[(2,b)\right]$ es la diferencia entre la proporción que el primer jugador se lleva del otro al haber alcanzado el juego $(b-2,b)$ y esta misma cuando llegó al juego $(b-1,b)$. En este caso, usando el lenguaje de Pascal, diríamos que $W_A\left[(2,b)\right]$ mide "*el valor de la segunda partida*". Pascal demuestra el siguiente resultado:

$$W_A[(r,b)] = \binom{2b-r-1}{b-r}\left(\frac{1}{2}\right)^{2b-r+1},$$

cuya demostración con notaciones más actuales puede verse en Basulto y Camúñez (2007,a).

Esta fórmula le permite calcular $W_A\left[(r,b)\right]$ para distintos valores de b y r. En su carta del 29 de julio 1654, Pascal incluye la siguiente tabla de valores de las sucesivas partidas ganadas por el primer jugador como proporción de lo apostado por el segundo.

Tabla I. Tabla de Pascal: Valor de las partidas

		Número de partidas del juego					
		6	5	4	3	2	1
Valor de la partida	1ª	0’2461	0’2734	0’3125	0’375	0’5	1
	2ª	0’2461	0’2734	0’3125	0’375	0’5	
	3ª	0’2188	0’2344	0’250	0’250		
	4ª	0’1641	0’1563	0’125			
	5ª	0’0938	0’0625				
	6ª	0’0313					

En esta tabla las filas son los valores de las partidas, de la primera a la sexta, y las columnas corresponden a valores de b. Pascal presenta esta tabla multiplicada por 256 para operar con enteros, nosotros hemos trabajado con los valores calculados de las partidas. Sobre esta tabla, Pascal escribe a Fermat en la citada carta:

> *"Veréis igualmente que los números de la primera línea aumentan siempre, lo mismo los de la segunda, lo mismo los de la tercera. Pero a continuación, los de la cuarta disminuyen, los de la quinta, etc. Esto es lo que resulta extraño".*

Igual que Pascal se extrañaba de las regularidades encontradas en su tabla, a nosotros nos extraña que ninguno de los autores que hemos investigado, posteriores a Pascal y Fermat, hayan abordado esta cuestión más particular que se presenta de forma colateral a la resolución del Problema de los Puntos.

Por ejemplo, Huygens (1629-1695) recoge, en su conocida obra *De Ratiociniis in Ludo Alea* (1657, versión latina, 1660, versión holandesa, la primera obra impresa sobre este cálculo), los resultados de Pascal y Fermat sobre la resolución del Problema de los Puntos, sin añadir nada nuevo sobre este asunto. Igual ocurrirá con Jacob Bernoulli que en su obra, The Art of Conjecturing, publicada en 1713, y cuya traducción en el 2006, se debe a Edith Dudley Sylla, recoge en las páginas 106-110 los mismos resultados que Huygens, a pesar que en un trabajo sobre *Lettre a un Amy, sur les Parties du Jeu de Paume*, Jacob Bernoulli introduce jugadores con distintas habilidades en un juego de Tenis.

Para el caso de que las habilidades de los jugadores sean distintas, sean estas p y q, con $p+q=1,\quad p>0,\quad q>0$, si mantenemos que las probabilidades son proporcionales a dichas habilidades en cada partida, Johann Bernoulli, un primo de Jacob Bernoulli aportará una generalización de la fórmula de Pascal para el cálculo de la probabilidad de que el jugador A gane el juego, si éste continuase:

$$P_A\left[(a,b)\right] = \sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{a+b-1}{i}p^i q^{a+b-1-i}.$$

Esta fórmula aparece, sin demostración, por primera vez en una carta de fecha 17 de marzo de 1710 que Johann Bernoulli envió a P. R. Montmort, el cual la recoge en la segunda edición de su obra, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard, 1713 second edition,* en las páginas 232-248. En este fragmento, Montmort prueba esta fórmula de Johann Bernoulli, añadiendo otra equivalente que generaliza la solución última de Fermat mediante la Binomial Negativa (Basulto el al, 2005). De forma independiente, A. de Moivre resolverá el problema de los puntos para desigual habilidad de los jugadores y para más de dos jugadores en sus obras de *De Mensura Sortis* (1712) y *The Doctrine of Chances*.

Como ya se ha dicho, en ninguna de las obras citadas que siguieron al trabajo de Pascal hemos encontrado el estudio y valoración individualizada de cada partida ganada por un jugador. Así pues, el objeto del presente trabajo es explicar el "*comportamiento extraño*" detectado por Pascal en base a propiedades de la distribución de probabilidad binomial (obsérvese que $W_A[(r,b)] = P\left[X_{2b-r-1} = b-r\right]$, donde X_{2b-r-1} es una variable aleatoria que sigue un modelo binomial de con $2b-r-1$ pruebas independientes y probabilidad de éxito $p = 0.5$). Asimismo, extenderemos los resultados obtenidos por Pascal para el caso de jugadores con igual habilidad a la situación genérica en que las habilidades de los jugadores sean p y q, donde ($p+q=1$).

A partir de aquí, en la sección 2 generalizamos la fórmula de valoración de las partidas al caso de jugadores con distinta habilidad; en la sección 3 analizamos las propiedades de la distribución binomial que nos permitirán, en la sección 4, explicar el comportamiento de la tabla construida por Pascal. En la sección 5, exponemos las principales conclusiones de este trabajo.

Valoración de las partidas ganadas en el caso de jugadores con distinta habilidad.

Para un juego interrumpido en la situación (a,b), donde suponemos que las habilidades de los jugadores A y B son p y q, respectivamente, que son valores del intervalo $(0,1)$, con $p+q=1$, la probabilidad de que el jugador gane el juego, suponiendo que éste continuase, como ya hemos señalado viene dada por la fórmula

$$P_A\left[(a,b)\right] = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} p^i q^{a+b-1-i}.$$

Ahora, nuestro interés se centra en obtener el valor de cada partida en la situación descrita en el epígrafe primero, cuando las habilidades de los jugadores son distintas.

En este caso, no supondremos que cada jugador apuesta una cantidad monetaria *K*, sino que trabajaremos bajo el supuesto de que cada jugador hace una apuesta proporcional a su habilidad. El hecho de trabajar bajo esta suposición de apuesta proporcional a la habilidad, nos va a permitir generalizar los resultados obtenidos por Pascal con la binomial simétrica (de parámetro $p = 0'5$) a la binomial general de parámetro p. O, en otras palabras, los resultados obtenidos por Pascal para el caso simétrico pueden generalizarse al caso general siempre que supongamos que las apuestas sean proporcionales a las habilidades. Concretamente, sin pérdida de generalidad, supondremos que el total apostado es la unidad, con lo que las cantidades apostadas por los jugadores A y B serán p y q respectivamente.

En esta situación, el siguiente lema generaliza la relación encontrada por Pascal entre los valores de las distintas partidas con las probabilidades de una variable aleatoria binomial.

Lema 1: $W_A[(r,b)]=\binom{2b-r-1}{b-r}p^{b-r}q^{b-1}$.

La demostración de este lema se recoge en el apéndice I.

Como podemos comprobar, el valor de la partida r-ésima se corresponde con la probabilidad de que una variable aleatoria binomial con $2b-r-1$ pruebas independientes cada una de ellas con probabilidad de éxito p tome el valor $b-r$, es decir, $W_A[(r,b)]=P[X_n=b-r]$, donde $X_n \sim Bi(n,p)$, siendo $n=2b-r-1$.

Pascal encontró el comportamiento "*extraño*" al analizar su tabla por filas. Así, lo que hace es comparar el valor de una de las partidas (por ejemplo la primera, la segunda, etc.) cuando el número inicial de partidas que le restaban a cada jugador era b y $b-1$ respectivamente. Es decir, Pascal se interesa por las comparaciones del tipo $W_A[(r,b)]$ con $W_A[(r,b-1)]$. Él encuentra que cuando $r=1,2,3$, $W_A[(r,b)]$ siempre es mayor (en un caso igual) que $W_A[(r,b-1)]$, mientras que se da la situación contraria para $r=4,5$. Puesto que el valor de cada par (r,b) puede identificarse con la probabilidad de un valor concreto de una variable binomial con probabilidad de éxito p, utilizaremos esta correspondencia para explicar el comportamiento de la tabla de Pascal y generalizarlo también al caso de distintas habilidades. Ahora bien, el valor $b-r$, por conveniencia, vamos a expresarlo en la forma $\frac{n}{2}-l$ o $\frac{n-1}{2}-l'$, para lo que resulta conveniente distinguir los casos en que r es par de aquellos en los que es impar.

Concretamente, cuando r es impar, entonces $n=2b-r-1$ es par y en este caso nos interesa relacionar el par (r,b) con la probabilidad del valor $\frac{n}{2}-l$ de X_n; ahora bien, como sabemos que dicho valor es $b-r$, entonces debe cumplirse $\frac{n}{2}-l=b-r$, y por tanto $l=\frac{r-1}{2}$, pudiendo escribir ahora $W_A\left[(r,b)\right]=P\left[X_n=\frac{n}{2}-l\right]$, donde $n=2b-r-1$ y $l=\frac{r-1}{2}$. Por ejemplo, la primera partida, $r=1$, la relacionamos con el valor $\frac{n}{2}$, que al ser n par ($n=2b-2$) corresponde al valor mediano o central del conjunto de posibles valores que toma la variable X_n, es decir, las situaciones $\{(1,6),(1,5),(1,4),(1,3),(1,2)\}$ se corresponden siempre con los valores $\{5,4,3,2,1\}$ de una distribución binomial en la que n va tomando los valores $\{10,8,6,4,2\}$ respectivamente. Para la partida tercera, $r=3$, $l=1$, y, por tanto, el valor relacionado es $\frac{n}{2}-1$, el primer valor a la izquierda del valor central ($n=2b-4$), y así sucesivamente.

Para las partidas pares, $r=2,4,6,\ldots$, se tendrá que $n=2b-r-1$ es impar y ahora relacionamos la partida r-ésima con el valor $b-r=\frac{n-1}{2}-l'$ de una variable binomial con parámetros (n,p), donde $l' = \frac{r-2}{2}$ y, por el Lema I, $W_A\left[(r,b)\right] = P\left[X_n = \frac{n-1}{2} - l'\right]$. Por ejemplo, la segunda partida, $r=2$, la relacionamos con el valor $\frac{n-1}{2}$, que al ser n impar ($n=2b-3$) corresponde al menor de los dos valores centrales del conjunto $\{0,1,2,...,n\}$, valores que toma la variable X_n. Para la partida cuarta, $r=4$, tendremos $n=2b-3$ y el valor relacionado es $\frac{n-1}{2}-1$, y así sucesivamente.

La anterior correspondencia entre partidas y valores de una variable binomial, no superiores al mínimo de los valores medianos, permite pasar de estos valores de una variable binomial a las partidas de juegos interrumpidos. Así, si consideramos la familia de variables binomiales (n,p), con n par, los valores $X_n = \frac{n}{2} - l$, con $l = 0,1,...,\frac{n}{2}$, los podemos relacionar con las partidas impares $r = 2l+1$, para juegos con $b = n+1-\left(\frac{n}{2}-l\right)$, siendo $P\left[X_n = \frac{n}{2} - l\right] = W_A\left[(r,b)\right]$; mientras que si consideramos la familia de variables binomiales (n,p), con n impar, los valores $X_n = \frac{n-1}{2} - l'$, con $l' = 0,1,...,\frac{n-1}{2}$, los podemos relacionar con las partidas pares $r = 2l'+2$, para juegos con $b = n+1-\left(\frac{n-1}{2}-l'\right)$, siendo $P\left[X_n = \frac{n-1}{2} - l'\right] = W_A\left[(r,b)\right]$.

Propiedades de las probabilidades de la familia binomial (n,p) con n par detectadas en los valores $X_n = \frac{n}{2} - l$, con $l = 0,1,...,\frac{n}{2}$.

En este epígrafe consideraremos dos situaciones del tipo (r,b) y $(r,b-1)$. Para comparar los valores de estas partidas, dados por $W_A[(r,b)]$ y $W_A[(r,b-1)]$, establecemos la correspondencia de cada partida con un valor concreto de una distribución binomial, y entonces procederemos a comparar las probabilidades de ambos valores. Vamos a considerar inicialmente valores de r impares (que se asocian a distribuciones binomiales de parámetro par), siendo todo el desarrollo similar en el caso de partidas pares.

Como hemos descrito, el valor de la partida (r,b) cuando r es impar, es igual a la probabilidad del valor $x = \frac{n}{2} - l$ (donde $l = \frac{r-1}{2}$), en una distribución binomial de parámetros $n = 2b-r-1$ y p. Así, $W_A[(r,b)] = P\left[X_n = \frac{n}{2} - l\right]$; análogamente, el valor de la partida $(r,b-1)$ será la probabilidad del valor $x' = \frac{n'}{2} - l$ en una distribución binomial de parámetros

$n' = 2b - r - 3$ y p. Así, $W_A[(r,b-1)] = P\left[X_{n'} = \frac{n'}{2} - l\right]$; Puesto que $n' = n-2$, también tendremos $x' = \frac{n-2}{2} = x-1$. De esta forma, la comparación de $W_A[(r,b)]$ con $W_A[(r,b-1)]$, podemos llevarla a cabo comparando $P[X_n = j]$ con $P[X_{n-2} = j-1]$, donde n es un entero par. Para comparar estas dos probabilidades, consideramos el polinomio

$$P_n(j) = \frac{P\left[X_{n-2} = j-1\right]}{P\left[X_n = j\right]} - 1 = \frac{\binom{n-2}{j-1} p^{j-1} q^{n-j-1}}{\binom{n}{j} p^j q^{n-j}} - 1 = \frac{j(n-j)}{n(n-1)pq} - 1,$$

y ahora tendremos qué ver cuándo este polinomio es mayor, menor o igual a 0.

Las raíces de este polinomio son $\frac{n}{2} \pm \lambda_n$, donde $\lambda_n = +\sqrt{\frac{n^2}{4} - pqn(n-1)}$; Para el problema que nos ocupa, solo nos interesa el recorrido $0 \le j \le n/2$, ya que los valores que se corresponden con la valoración de las partidas siempre son menores o iguales que $n/2$. Es fácil comprobar que el polinomio es negativo en el intervalo $\left[0, n/2 - \lambda_n\right)$, positivo en el intervalo $\left(n/2 - \lambda_n, n/2\right]$ e igual a cero en el punto $n/2 - \lambda_n$. Diremos que un valor de la distribución binomial está "*en la zona central*" si pertenece al intervalo $\left(n/2 - \lambda_n, n/2\right]$; el valor está "*en la cola*" si pertenece al intervalo $\left[0, n/2 - \lambda_n\right)$; si el valor coincide con $n/2 - \lambda_n$, diremos que es "*frontera*".

Así, podemos encontrarnos tres situaciones, que recogemos enunciadas en forma de lema (de demostración inmediata).

Lema 2: En la situación descrita con anterioridad, se verifica:

i) Si $j < n/2 - \lambda_n$, entonces $P_n(j) < 0$, es decir, $P\left[X_{n-2} = j-1\right] < P\left[X_n = j\right]$. Como consecuencia, obtenemos que si el valor asociado a la partida (r,b) está "*en la cola*", entonces $W_A[(r,b-1)] < W_A[(r,b)]$, es decir, al disminuir b, disminuye el valor de la partida $r-ésima$.

ii) Si $n/2 - \lambda_n < j \le n/2$, entonces $P_n(j) > 0$, es decir, $P\left[X_{n-2} = j-1\right] > P\left[X_n = j\right]$. Como consecuencia, obtenemos que si el valor asociado a la partida (r,b) está "*en la zona central*", entonces $W_A[(r,b-1)] > W_A[(r,b)]$, es decir, al disminuir b, aumenta el valor de la partida $r-ésima$.

iii) Si $j = n/2 - \lambda_n$, entonces $P_n(j) = 0$, es decir, $P\left[X_{n-2} = j-1\right] = P\left[X_n = j\right]$. Como consecuencia, obtenemos que si el valor asociado a la partida (r,b) está "*en la frontera*", entonces $W_A[(r,b-1)] = W_A[(r,b)]$, es decir, al disminuir b, se mantiene el valor de la partida $r-ésima$.

Ejemplo 1: En el caso de la primera partida, $r=1$, sabemos que los valores asociados siempre son de la forma $n/2$, por lo que siempre están "*en la zona central*", y por tanto, el valor de la primera partida va aumentando a medida que b disminuye (como observó Pascal en su tabla para el caso $p=0'5$).

Ejemplo 2: Vamos a considerar el caso $p=0'65$, y la partida quinta (es decir, $r=5$), cuando inicialmente restaban por ganar 5,6,7,8 y 9 partidas (es decir, consideramos los valores $b\in\{5,6,7,8,9\}$). Comparemos la valoración de la partida quinta para cada uno de los valores de b.

Tabla II: Valor de la partida quinta ($b\in\{5,6,7,8,9\}$, $p=0'65$).

b	9	8	7	6	5
$n=2b-r-1=2b-6$	12	10	8	6	4
$x_n=\frac{n}{2}-\frac{r-1}{2}=\frac{n}{2}-2$	4	3	2	1	0
$\frac{n}{2}$	6	5	4	3	2
$\frac{n}{2}-\lambda_n$	3'557	2'872	2'194	1'525	0'873
$P\left[X_n=x_n\right]=W_A\left[(r,b)\right]$	0'0199	0'0212	0'0217	0'0205	0'0150

Para la partida $(5,9)$, vemos que el valor $x_n=4$ está "*en la zona central*", pues pertenece al intervalo $\left(n/2-\lambda_n, n/2\right]=\left(3'557,6\right]$; estamos en la situación **ii)** y por tanto, al disminuir b, el valor de la partida quinta debe aumentar, como se observa en la tabla, ya que el valor pasa de 0'0199 a 0'0212. Para la partida $(5,8)$, vemos que el valor $x_n=3$ también está "*en la zona central*", pues pertenece al intervalo $\left(n/2-\lambda_n, n/2\right]=\left(2'872,5\right]$; de nuevo estamos en la situación **ii)** y por tanto, al disminuir b, el valor de la partida quinta debe aumentar, como se observa en la tabla, ya que el valor pasa de 0'0212 a 0'0217. Sin embrago, en la situación $(r,b)=(5,7)$, el valor $x_n=2$ queda "*en la cola*" pues no pertenece al intervalo $\left(n/2-\lambda_n, n/2\right]=\left(2'194,4\right]$, por lo que estaríamos en la situación **i)** y así el valor de la partida quinta debe disminuir al disminuir b, como también podemos observar en la tabla. Idéntica situación ocurre para la partida $(5,6)$.

Aplicación al caso de la binomial simétrica: explicación del comportamiento de la tabla de Pascal.

Vamos a aplicar los resultados obtenidos en la sección 3 al caso particular de la binomial simétrica ($p=0'5$) y a los valores de r y b analizados por Pascal en su tabla, al objeto de explicar el "*comportamiento extraño*" observado por el autor.

Indiquemos en primer lugar que para el caso $p=0'5$, el polinomio que hemos usado para comparar las probabilidades sería

$$P_n(j)=\frac{4j(n-j)}{n(n-1)}-1,$$

cuyas raíces son $n/2 \pm \lambda_n$, donde $\lambda_n = +\sqrt{n}/2$; Así, el punto "*frontera*", que distingue la "*zona central*" de la cola sería en este caso $n/2 - \sqrt{n}/2$ (que coincide con la esperanza de la distribución menos una vez la desviación típica de la misma). Comencemos con el caso de las partidas impares (es decir, $r = 1,3,5$). El comportamiento de la partida primera, ya ha sido explicado en el ejemplo 1 de la sección tercera. Recordemos que en este caso los valores asociados coinciden siempre con $n/2$ y por tanto siempre están en la "*zona central*" (situación **ii)** del Lema 2), con lo que el valor de la partida primera aumenta a medida que disminuye b.

Para la tercera partida, cuando $b = 6$, tenemos que considerar el valor $x = 3$ en la distribución binomial para $n = 8$. En esta distribución, el punto "*frontera*" es 2'586, por lo que estaríamos en la "*zona central*" (situación **ii)**) y por tanto la probabilidad debe aumentar al pasar al caso $b = 5$, como efectivamente ocurre en la tabla. Idéntica situación se da al analizar el juego $(3,5)$, en el que $n = 6$, $x = 2$ y el punto "*frontera*" es 1'7753. Sin embargo, en el juego $(3,4)$, en el que $n = 4$, el valor de la binomial correspondiente, $x = 1$, coincide con el punto "*frontera*", por lo que estaríamos en la situación **iii)** del Lema 2 y por tanto la probabilidad (o valoración de la partida) debe mantenerse al pasar al valor $b = 3$; efectivamente, vemos que en los casos $b = 4$ y $b = 3$ la valoración de la tercera partida es igual a 0'25.

Para la quinta partida, sólo tiene sentido ocuparse del caso $b = 6$. Este juego se corresponde con el valor $x = 1$ de una distribución binomial simétrica con $n = 6$, en la que el "*punto frontera*" sería 1'7752; así, el valor asociado está "*en la cola*" de la distribución (situación **i)** del Lema 2), por lo que el valor de la partida quinta debe disminuir al pasar al caso $b = 5$, como efectivamente ocurre.

Aunque solo hemos analizado el caso de partidas impares (que se corresponden con binomiales en las que n es par), todos los resultados pueden extenderse sin mayor dificultad cuando la partida sea par, teniendo en cuenta las observaciones efectuadas en la sección segunda. Vamos a considerar el caso concreto de la tabla de Pascal, para explicar también el comportamiento de las partidas pares ($r = 2,4$). En este caso, el intervalo que define la "*zona central*" sería $\left(\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - pqn(n-1)}, \frac{n-1}{2}\right]$ (observemos que las raíces del polinomio $P_n(j)$ no dependen de que n sea par o impar; por otra parte, el extremo superior lo definimos como $(n-1)/2$ porque al ser n impar sólo estamos interesados en el recorrido $0 \le j \le (n-1)/2$), mientras que el valor a considerar sería $x = b - r = \frac{n-1}{2} - l'$, donde $l' = \frac{r-2}{2}$. Para el caso particular $p = q = 0'5$, el intervalo de la "*zona central*" es $\left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{n-1}{2}\right]$.

Para la segunda partida, $r = 2$, la situación es similar a lo que ocurre con la partida primera, ya que el valor asociado sería $(n-1)/2$, que siempre está en la "*zona central*"; aplicando la situación ii) del lema 2, obtenemos que al disminuir b, el valor de la segunda partida siempre debe aumentar, como así se observa en la tabla de Pascal.

Para la cuarta partida, $r = 4$, cuando $b = 6$, tendríamos que considerar el valor 2 de una binomial simétrica con $n = 7$, para la que la zona central es $(2'177, 3]$ y por tanto el valor está en "la cola", con lo que el valor de la partida cuarta debe disminuir al pasar a $b=5$, como de hecho se observa en la tabla. Si analizamos la situación $(4,5)$, veremos que $n=5$, por lo que la "zona central" es el intervalo $(1'382,2]$; puesto que el valor asociado para este juego es $x=1$, vemos que de nuevo queda en "*la cola*", con lo que la probabilidad debe disminuir al pasar a $b=4$.

Conclusiones.

Una de las ideas principales que pretendemos remarcar en este apartado es la "*extrañeza*" que nos causa el hecho de que un problema planteado en la correspondencia entre Pascal y Fermat no haya sido abordado posteriormente por otros autores (al menos en lo que nosotros conocemos) a pesar de la gran cantidad de literatura existente dedicada a esta correspondencia.

Con respecto al problema en sí, destacar que el valor de la partida $r-ésima$ cuando a ambos jugadores les restaban b partidas es la probabilidad de un valor concreto $(b-r)$ en una distribución binomial con $2b-r-1$ ensayos, como se desprende inmediatamente de la fórmula aportada por Pascal. Esto nos conduce a que el comportamiento de los valores de la tabla de Pascal se deba a una propiedad de la distribución binomial, que nosotros hemos enunciado en el lema 2, que hace referencia al aumento o disminución de la probabilidad al pasar del valor j en la distribución X_n al valor $j-1$ en X_{n-2}, es decir, la base de la explicación del comportamiento de la tabla de Pascal es la comparación de las probabilidades $P[X_{n-2}=j-1]$ y $P[X_n=j]$, lo que finalmente se reduce al hecho de que el valor j de X_n se encuentre en lo que hemos denominado "*zona central*", "*cola*" o "*frontera*" de la distribución X_n.

Pascal sólo considera el caso de jugadores con igual habilidad. Nosotros hemos generalizado el resultado al caso de jugadores con distintas habilidades; para ello, es necesario introducir la hipótesis de que los jugadores apuestan una cantidad proporcional a su habilidad, pues en otro caso la valoración de las partidas ya no sería una generalización de la fórmula de Pascal.

Apéndice: Demostración del *Lema 1.*

Lema 1: $$W_A[(r,b)]=\binom{2b-r-1}{b-r}p^{b-r}q^{b-1}$$

Dmt.

Si suponemos que cada jugador apuesta una cantidad proporcional a su habilidad y consideramos que el total apostado es la unidad, entonces para el juego interrumpido (a,b) la ganancia esperada del jugador A es $q\cdot P_A[(a,b)]-p\cdot[1-P_A[(a,b)]]=P_A[(a,b)]-p$. Si ahora expresamos la ganancia esperada de la forma $\beta_A[(a,b)]\cdot q$, donde $\beta_A[(a,b)]$ es un valor del intervalo $[-1,1]$, entonces $P_A[(a,b)]=p+\beta_A[(a,b)]\cdot q$, es decir, la probabilidad de que el jugador A gane el juego es igual a lo apostado por dicho jugador más una parte proporcional a lo apostado por el jugador B. Cuando

$\beta_A\left[(a,b)\right]=0$, entonces cada jugador retira lo que apostó, cuando $\beta_A\left[(a,b)\right]>0$, entonces el jugador A gana $\beta_A\left[(a,b)\right]\cdot q$, mientras que si $\beta_A\left[(a,b)\right]<0$, entonces el jugador A pierde esa cantidad. Despejando de la última igualdad, obtenemos que $\beta_A\left[(a,b)\right]=\left(P_A\left[(a,b)\right]-p\right)/q$.

Recordemos que $W_A[(r,b)]$ es la diferencia entre la proporción que el primer jugador se lleva del otro al haber alcanzado el juego $(b-r,b)$ y esta misma cuando llegó al juego $(b-r+1,b)$, y por tanto

$$W_A\left[(r,b)\right]=\beta_A\left[(b-r,b)\right]-\beta_A\left[(b-r+1,b)\right].$$

Ahora, sustituyendo el valor de las proporciones β_A obtenemos:

$$W_A\left[(r,b)\right]=\frac{1}{q}\left(P_A\left[(b-r,b)\right]-P_A\left[(b-r+1,b)\right]\right)$$

y sustituyendo el valor de las probabilidades:

$$W_A\left[(r,b)\right]=\frac{1}{q}\left\{\sum_{i=b-r}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-1-i}-\sum_{i=b-r+1}^{2b-r}\binom{2b-r}{i}p^i q^{2b-r-i}\right\}.$$

Aplicado al factor segundo de la izquierda la igualdad siguiente,

$$\binom{2b-r}{i}=\binom{2b-r-1}{i-1}+\binom{2b-r-1}{i},$$

se obtiene la expresión,

$$\begin{aligned}\sum_{i=b-r+1}^{2b-r}\binom{2b-r}{i}p^i q^{2b-r-i} &= \sum_{i=b-r+1}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i-1}p^i q^{2b-r-i}+\sum_{i=b-r+1}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-i}+p^{2b-r}= \\ &=\sum_{i=b-r}^{2b-r-2}\binom{2b-r-1}{i}p^{i+1}q^{2b-r-(i+1)}+\sum_{i=b-r+1}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-i}+p^{2b-r}\end{aligned}.$$

Sustituyendo,

$$W_A\left[(r,b)\right]=\frac{1}{q}\left\{\sum_{i=b-r}^{2b-r-2}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-1-i}(1-p)+p^{2b-r-1}-p^{2b-r}-\sum_{i=b-r+1}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-i}\right\}.$$

Operando,

$$W_A\left[(r,b)\right]=\left\{\sum_{i=b-r}^{2b-r-2}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-1-i}+p^{2b-r-1}-\sum_{i=b-r+1}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-1-i}\right\}.$$

es decir,

$$W_A\left[(r,b)\right]=\left\{\sum_{i=b-r}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-1-i}-\sum_{i=b-r+1}^{2b-r-1}\binom{2b-r-1}{i}p^i q^{2b-r-1-i}\right\}$$

Finalmente,

$$W_A\left[(r,b)\right]=\binom{2b-r-1}{b-r}p^{b-r}q^{b-1}.$$

Bibliografía

BASULTO, J., CAMÚÑEZ, J.M. (2007,a), "Sobre una propiedad de la familia de Distribuciones Binomiales Simétricas detectada por Blaise Pascal (1654) en su resolución del problema de los puntos", *Estadística Española*, vol. 164, p. 33-58.

BASULTO, J., CAMÚÑEZ, J.M. (2007,b), *La geometría del azar. La correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal,* Ed. Nivola, Madrid.

BASULTO, J., CAMÚÑEZ, J. A., ORTEGA, F. J., PÉREZ, M. D. (2004). "Una fórmula casi mágica en la resolución de Pascal del problema de los Puntos.". Capítulo 9 de *Historia de la Probabilidad y de la Estadística (II)*, Editorial AC, Madrid, 157-169.

BERNOULLI, JACOB (1713), *The art of conjecturing,* Traducido por Edith Dudley Sylla, Jonhs Hopkins University Press, 2006, Baltimore.

DE MOIVRE, A. (1712), *De mensura sortis, seu, de Probabilitate Eventuun in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus.* Traducido al inglés por B. McClintock en *Intern. Statist. Rev.,* 1984, 52, 237-262.

EDWARDS, A.W.F. (1987). *Pascal's arithmetical triangle*. Griffin, London.

HUYGENS, C. (1660) *Oeuvres Complètes*. 22 volúmenes. Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. 1888-1950. Volumen usado: XIV.

KYRIACOPOULOS, L. (2000). "Peut-on tout de même parler d'un "triangle de Pascal"?". *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, p. 167-217.

MONTMORT, P. R. (1713), *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* Seconde Edition. Revûe et augmentée de plusieurs Leerte. Quillau, París. Reimpreso por Chelsea, New Cork, 1980.

PASCAL, B. (1963). *Oeuvres Complètes*, Edición de Lafuma, París.