

La memoria de Daniel Bernoulli sobre la inoculación contra la viruela (1760): Un problema de decisión bajo incertidumbre

JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ

JESÚS BASULTO SANTOS

FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO

Universidad de Sevilla

Sobre la inoculación y la posterior vacunación como lucha contra la viruela

La viruela (en francés, *petite vérole*, en inglés, *smallpox*) es una enfermedad infecciosa de origen viral, muy contagiosa, y que ha sido totalmente erradicada a partir de 1977 (fecha del último caso conocido, que apareció en Somalia). Pero, la viruela fue una plaga terrible y temida. Los cálculos situaban su mortalidad en una tasa de un enfermo de cada ocho o incluso mayor, según el momento del análisis. La enfermedad siempre quedó fuera del alcance de un tratamiento eficaz, siendo el único remedio contra ella el de la vacunación.

Previo a la vacunación se usó una técnica conocida como “inoculación” o “variolización”, con mayor riesgo que la vacunación, y que tuvo su auge en Europa durante el siglo XVIII, dando lugar a una importante serie de investigaciones y discusiones por parte de médicos, matemáticos, estadísticos y, en general, pensadores, a lo largo de dicho siglo, hasta la aparición de la vacuna. La nómina de investigadores sobre el asunto es extensa para ese periodo. Así, podemos citar, además de la Memoria de Daniel Bernoulli, las investigaciones de Charles Marie de La Condamine (1701-1774), Jean le Rond D’Alembert (1717-1783), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Jean Trembley (1749-1811), Emmanuel Étienne DuVillard (1755-1832) y Joshua Milne (1776-1851).

Asociado a la viruela aparece el término “variola”, palabra derivada del latín “varius” que significa grano o pústula. El contagio de la enfermedad es directo, de humano a humano, pues no existen reservorios animales. La entrada del virus se produce normalmente a través de las vías respiratorias. El periodo de incubación es de 10 a 14 días. Aparecen escalofríos, fiebres, dolor de cabeza, náuseas... Tras estos síntomas se produce la erupción, caracterizada por la aparición de manchas rojas sobre la piel, que se convierten en vesículas, después en pústulas

llenas de pus, dolorosas, densas y redondas, para acabar formando costras. Estas manifestaciones aparecen primero en la mucosa de la boca y faringe, luego en la cara y extremidades, para pasar después al tronco, a las palmas de las manos y pies. Las costras aparecen cerca del octavo o noveno día de evolución y, cuando se desprenden, dejan una cicatriz en la piel. Por tanto, es una enfermedad deformante que deja sus huellas para toda la vida. Las marcas de viruela se observan en el 70% de los supervivientes siendo las lesiones en el rostro las que prevalecen por la tendencia a la infección de las glándulas sebáceas. La enfermedad, si no mata al paciente, es inmunizante: cualquier infección por el mismo virus es imposible durante años.

Como primera práctica para erradicar el mal se usó la “inoculación”, que consistía en introducir un hilo de seda impregnado de pus tomada de una pústula de viruela de alguien que sufriese la enfermedad, en una ligera incisión hecha en el brazo de la persona a inocular. El hilo era retirado al cabo de dos días. Se preparaba al paciente con una dieta ligera y se le aislaba durante una semana justo hasta que un breve acceso de fiebre junto con una erupción local marcaba la aparición de la enfermedad “artificial”. El procedimiento era arriesgado, pues los inoculados podían acabar falleciendo por la propia enfermedad, contraída en este caso de forma voluntaria. Había estimaciones diversas, nada coincidentes, de la tasa de ese riesgo.

La técnica era muy antigua en China y se fue difundiendo a lo largo de la ruta de la seda hacia occidente. En 1701, Giacomo Pylarini realiza la primera inoculación en Constantinopla. Llega a Gran Bretaña a través de Lady Mary Wortley Montagu (1689-1762), esposa del embajador de este país en Turquía, mujer de alta sociedad y de una fuerte formación intelectual, escritora e independiente, que aprende la técnica del doctor Emmanuel Timoni (1670-1718). El doctor Timoni, médico de la embajada en Estambul, diplomado por la Universidad de Padua, y miembro de la Royal Society de Londres, publica en 1713 en las *Philosophical Transactions* de esta sociedad su tratado sobre la inoculación. Pero la concienciación de la sociedad británica sobre la inoculación se debe a Lady Mary Wortley Montagu, quien inoculó a sus hijos y aprovechó su influencia y sus escritos para llegar a la misma Reina que hizo lo propio con los suyos.

La moda de inocular se propagó por Francia a partir de 1755, después de que M. Hosty, doctor de la facultad de París, fuese instruido en Londres con el método.

La discusión sobre la eficacia de la inoculación en la lucha contra la viruela se mantuvo en los círculos científicos europeos durante la segunda mitad del siglo XVIII, hasta la aparición de las investigaciones de Edward Jenner (1749-1823), médico y naturalista inglés, el cuál, desde que empieza a ejercer como médico, se muestra partidario de la inoculación y la lleva a la práctica. Pero recoge de sus pacientes la existencia de una extraña creencia popular: las personas que trabajan en las granjas de la región nunca son alcanzadas por la viruela.

Esto le lleva a observar un hecho: los animales de granja, vacas, equinos y cerdos sufren enfermedades parecidas a la viruela, conocidas como Cowpox, Horsepox y Swinepox, y dichas enfermedades pueden transmitirse al hombre. Confirmó que las granjeras que ordeñaban las vacas que sufrían de Cowpox, desarrollaban unas pocas pústulas en sus manos y, además, se mantenían protegidas contra la viruela, porque no enfermaban en un brote epidémico.

Entre 1789 y 1796 realiza diversos experimentos de inoculación con smallpox y cowpox concluyendo con una prueba final en 1796, cuando varioliza un niño de 8 años con fluido vesicular de las pústulas de una granjera que se había contagiado de cowpox al ordeñar su vaca. A los ocho días aparecieron en la zona de la inoculación unas pocas pústulas y el niño

tuvo una fiebre ligera. Pero el gran desafío se produjo dos meses después. Jenner inocula al niño una fuerte dosis de viruela, tan fuerte que debería enfermarlo. Sin embargo, nada ocurre, el cowpox protegió contra la viruela. ¡Había nacido la vacuna! Nombre que fue adoptado por el origen del material obtenido a partir de la vaca (*Vaccinus*, *vacca* en latín). Un siglo después, Pasteur extiende el nombre de vacunación a la inmunización contra otros agentes.

Después de repetir el experimento en varios sujetos más, Jenner escribe un trabajo para su publicación en "Philosophical Transaction", pero fue rechazado. Por tanto, para dar publicidad a su descubrimiento, este autor escribe un pequeño texto cuya impresión debe financiar él mismo. La importancia de la experiencia de este científico fue reconocida inmediatamente y su libro fue traducido a seis idiomas de modo que la vacuna comenzó a emplearse fuera de Inglaterra en muchos países de Europa.

Ni que decir tiene, la forma de conservar la vacuna, pasando de brazo a brazo, era compleja, resultando en una cadena viviente no siempre fácil de controlar. Era más cómodo desplazarse con un hombre recién vacunado y que presentase pústulas, que con una vaca infectada. Con el tiempo, este sistema trajo problemas de contaminación (Louis Pasteur y la asepsia no llegan hasta más tarde). De todas formas, la base fundamental de la vacunación quedó establecida a partir del trabajo de Jenner.

La memoria de Daniel Bernoulli (1700-1782)

Este autor, físico y matemático, que ejerció cátedra de botánica, de anatomía, de filosofía natural y de matemáticas, era miembro de una familia suiza que dio al mundo ocho notables matemáticos en tres generaciones.

El 30 de abril de 1760, D. Bernoulli leyó una memoria en la Real Academia de las Ciencias de París titulada *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*. La memoria de D. Bernoulli, sin embargo, no fue publicada hasta 1765. Esto no fue, seguramente, por azar teniendo en cuenta que d'Alembert, que ocupaba en la Academia una posición influyente, consiguió hacer publicar la suya en 1761. Este último criticó la solución del problema de la inoculación dado por "un sabio geómetra", sin nombrarlo. Hemos de reconocer, sin embargo, que otras memorias leídas en la Academia en ese período también sufrieron retraso en su publicación. Por ejemplo, la de Trembley fue leída en 1796 y publicada en 1799.

D'Alembert no coge el punto de vista de la colectividad, sino únicamente el del individuo que debe elegir entre el riesgo inmediato de la inoculación, y el riesgo más distante de la enfermedad: se goza mejor de la vida cuando se es joven, dice él, y una ganancia de tres o cuatro años de vida media, perspectiva lejana (¿años de vejez?) no es suficiente para justificar que se exponga a morir en pocos días de una inoculación voluntaria.

D. Bernoulli, añadió una "Introducción Apologética" para la publicación de 1765. En ella declara que no estaba sorprendido de que al vulgo le llame poco la atención este último aspecto, pero no puedo impedir estarlo cuando veo personas de mérito y de una gran reputación, plantearse seriamente si vale la pena sufrir una operación como la inoculación, con la esperanza de prolongar su vida en dos años: sería de desear que las críticas fuesen más reservadas y más circunspectas, y sobretudo que hiciesen el esfuerzo de ponerse en el hecho de las cosas que se proponen criticar por anticipado. Como vemos, la nota es bastante mordaz, dada la cortesía de la época. La debilidad del texto de d'Alembert viene del hecho de su resistencia a la teoría de las probabilidades. Trembley (1799) lo dice sin ambages: "ha

sustituido el análisis elegante del señor Bernoulli por una teoría matemática tan fuertemente matemática, que ni él ni nadie, que yo sepa, ha hecho aplicación”. “El ilustre d’Alembert se precipita en la contienda”, dice Duvillard (1806), apuntando algunos errores en la metafísica del cálculo que extrañan en el caso de “un tan grande géometra”, y añade una alabanza al trabajo de Bernoulli: “Este escrito, el mejor sin duda que haya sido publicado a favor de la inoculación, es notable por la finura, la precisión de las ideas, las visiones y las cosas que encierra”.

Los argumentos de d’Alembert tienen sin embargo el interés de atraer la atención sobre dos hechos: las estimaciones relativas a la esperanza de vida de una población no son más que un elemento de valoración, entre otros, cuando se razona sobre la chance de sobrevivir de un individuo dotado de una cierta constitución; y la utilidad de una determinada solución debe evaluarse no sólo con la *cantidad* de vida que ofrece, sino también con su *calidad*.

Volviendo al trabajo de Bernoulli, éste dice haber compuesto su memoria sobre la mortalidad de la viruela a petición de Maupertuis (1698-1759, matemático, astrónomo y biólogo francés, con importantes trabajos en genética), que le había confiado su proyecto de exponer “*en una misma Tabla los dos estados de la humanidad, uno tal como es efectivamente, y otro tal como sería si se pudiese eximir de la viruela todo el género humano*”. Así, en esta importante memoria, D. Bernoulli presentó la primera doble tabla de vida decreciente de la historia de la ciencia, además de proponer un modelo matemático de comportamiento de la viruela en una población. Y el autor añade: “*Pienso que el paralelismo de esto dos estados explicaría mejor la diferencia y el contraste, que cualquier comentario más amplio, pero he sentido también la dificultad del intento; y la insuficiencia de las listas mortuorias, que no señalan la edad de aquellos que la viruela se lleva; no hace más que poner un mayor obstáculo a estos enfoques.*”

Así pues, la gran debilidad de este trabajo viene de la falta de datos empíricos. El único dato contrastado con el que D. Bernoulli contaba (según las listas de Süssmich, 1741, entre otros) es el de la proporción de mortalidad de viruela sobre el total de muertes, considerando todas las edades: “*Está constatado por una larga serie de observaciones que la viruela se lleva la treceava o catorceava parte de cada generación*”. O sea, parte del supuesto contrastado que la suma de todas las muertes de viruela hace alrededor de 1/13 del total de las muertes, o sea, 100 sobre su generación de 1300 (de hecho, su tabla suma 101). En cuanto a lo que se llamará más tarde la letalidad de la enfermedad, este autor no tiene más que estimaciones muy fragmentarias: “*Se sabe... que esta enfermedad se lleva alrededor de la octava o la séptima parte de aquellos a los que le ataca, con tal que se tome la proporción sobre un gran número de epidemias; ...*” Esto le servirá de soporte sobre el que apoyar las proporciones que introducirá después.

D. Bernoulli toma como base de cálculo la tabla de mortalidad establecida por el astrónomo inglés Halley (1693) que preparó con datos de la ciudad de Breslaw, y que nuestro autor conoció a través del autor alemán Süssmilch. Esta tabla no indica el número de niños recién nacidos. Su punto de partida es el número de supervivientes a la edad de un año, que considera igual a mil. Süssmilch (1741) supone que Halley había partido de una generación de 1238 niños, número medio de nacimientos en Breslaw para el período considerado. D. Bernoulli no cree admisible este supuesto, porque las tablas de Buffon, publicadas en 1749, daban una mortalidad infantil mucho más elevada. Entonces, toma como punto de partida a la edad de cero años una cifra arbitraria de 1300 niños, intermedia entre las estimaciones de Buffon y de Süssmilch.

Falto de datos, D. Bernoulli se limita a efectuar conjeturas. Apela a los párrocos de las ciudades para que anoten las edades de los fallecidos (p. 22), a los médicos para que valoren la importancia de la inoculación (p. 29), y afirma que el día en que se tenga listas mortuorias bien hechas, él será incluso su “más severo crítico” (p. 4). Su método de cálculo no es, desgraciadamente, aplicable bajo hipótesis distintas a las suyas, como lo señala Trembley (1799). Pero ve claramente lo que está en juego en el problema; un conocimiento exacto de los riesgos permitiría no sólo a los particulares, sino también a los Estados, tomar decisiones racionales: *Si se conociesen con exactitud todas las proporciones medias que se hubiesen podido determinar sobre un número muy grande de observaciones, pero bien consideradas y reflexionadas, se podría dar una teoría completa sobre los azares de la viruela: una teoría así dictaría las máximas que todo hombre razonable debe seguir* (p. 8).

Los cálculos de D. Bernoulli

El problema planteado es encontrar una fórmula que permita obtener, a partir de la tabla de mortalidad en “el estado natural y con viruela”, una tabla de mortalidad del “estado sin viruela”.

Para llevar a cabo su propósito, el autor echa en falta dos conocimientos: *“Veía mejor, en primer lugar, que la realización de una idea así exige dos conocimientos elementales: ¿cuál es el riesgo anual a diferentes edades de ser sorprendido por la viruela?, ¿y cuál es el de morir para aquellos que son atacados?”*

Entonces, D. Bernoulli plantea dos principios: el primero es que “tanto que no se haya tenido la viruela, se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla”, el segundo es “que el riesgo de morir de viruela cuando se es atacado, (es)... el mismo en toda edad” (1760b, Introducción, p. 4).

En la Introducción que, como se ha dicho fue, redactada en el momento de la publicación, en 1765, da algunos argumentos que intentan mostrar que las hipótesis elegidas son, al menos, verosímiles. El texto primitivo de la memoria insiste en el hecho de que se puede adaptar el cálculo a las condiciones locales: así, en el “pequeño país” de Bernoulli (Bâle), los médicos estimarían $1/20$ la probabilidad de morir cuando se contrae la viruela. Pero las observaciones recogidas en las “grandes ciudades” dan una probabilidad mucho mayor.

Por tanto, el autor se ve en la obligación de introducir supuestos o hipótesis con los que poder construir sus cálculos. Asume que nadie puede padecer viruela más de una vez en la vida, e introduce dos proporciones que considera constantes para las diferentes edades: la proporción anual de los que cogen viruela entre aquellos que nunca la han tenido es $1/n$, o sea, de cada n individuos que no hayan tenido viruela uno la coge en el plazo de un año, y que la proporción anual de muerte entre aquellos que enferman de viruela es $1/m$, o sea, de cada m individuos que enferman de viruela en el mismo año, uno de ellos fallece de esa enfermedad. Por tanto, según esto, la probabilidad de que un individuo que hasta ahora no ha padecido de viruela, muera de esa enfermedad en el plazo de un año será el producto de las dos anteriores, esto es $\frac{1}{nm}$. Escribe argumentos para mantener su hipótesis de que se puede considerar la misma proporción de aquellos que cogen la viruela en todos los tramos de edad. Concluye diciendo: *En tanto no se haya tenido la viruela se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla. Las leyes de la Naturaleza más simples son las más verosímiles.*

Con este planteamiento, el problema es qué valores hay que dar a los dos parámetros n y m , ante lo ya comentado de ausencia de datos de enfermos y fallecidos de viruela por edades. Este asunto será motivo de discusión y de análisis entre los investigadores posteriores a Bernoulli en el siglo XVIII. Cada uno de ellos proporcionará valores distintos para n y m según los tramos de edad y en base a algunas estadísticas de las que ya se disponían.

Bernoulli propone como valores de ambos parámetros $n = m = 8$. O sea, la probabilidad de contraer la enfermedad, en el plazo de un año, para un individuo que no la ha tenido es $1/8$, para cualquiera que sea su edad, y la probabilidad de fallecer de viruela en dicho plazo es $1/64$. El autor elige esos valores en base a los escasos datos de que disponía y, además, porque no contradecía al dato más sustentado de una muerte de cada 13 era debida a la viruela.

Con estas premisas se propone construir una fórmula que, bajo supuestos razonables, proporcione el número "s" de personas que no han tenido la viruela, de una edad "x", en función de dicha edad y del número "y" de supervivientes. Para ello, argumenta como sigue. Los supervivientes, s, que no han tenido viruela decrecen por

- (i) aquellos que cogen viruela (muriendo o no de ello) y,
- (ii) aquellos que mueren de otras causas sin haber tenido viruela alguna vez.

En un elemento de tiempo dx el decrecimiento de s es $-ds$ (ds y dy , usado abajo, son intrínsecamente negativos y el signo menos es entonces necesario para convertirlos en números positivos). El número de atacados por viruela es $\frac{sdx}{n}$, y el número de aquellos que mueren de viruela es $\frac{sdx}{nm}$. El número total de muertes por todas las causas en un tiempo dx es $-dy$. Por tanto, el número de muertes por otras causas distintas a la viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$.

Pero este número relaciona a y personas, mientras que al formar una ecuación para s hemos referido el número de muertes de otras causas entre s , esto es, con $\frac{\left(-dy - \frac{sdx}{nm}\right)s}{y}$ muertes.

Entonces

$$-ds = \frac{sdx}{n} + \frac{\left(-dy - \frac{sdx}{nm}\right)s}{y}.$$

Por tanto

$$\frac{s \cdot dy - y \cdot ds}{s^2} = \frac{ydx}{sn} - \frac{dx}{nm}.$$

Poniendo $\frac{y}{s} = r$, por lo que $dr = \frac{s \cdot dy - y \cdot ds}{s^2}$. Entonces, $nm \cdot dr = mr \cdot dx - dx$, o $dx = \frac{nm \cdot dr}{mr - 1}$. Integrando da $n \log(mr - 1) = x + c$, donde c es una constante a determinar, o $n \log\left(\frac{my}{s} - 1\right) = x + c$. Ahora, cuando $x = 0$, $y = s$, lo que da

$$c = n \log(m - 1)$$

Y de aquí

$$n \log\left(\frac{\frac{my}{s} - 1}{m - 1}\right) = x.$$

Entonces

$$\frac{my}{s} - 1 = (m - 1)e^{x/n}.$$

Por tanto

$$s = \frac{m}{1 + (m - 1)e^{x/n}} y. \quad (1)$$

Para los valores que estableció para m y n , la fórmula queda

$$s = \frac{8}{7e^{\frac{x}{8}} + 1} y.$$

Con esto, el autor construye la Tabla 1 de su memoria, donde en la primera columna aparece la edad (lo que hemos llamado x); en la segunda, el número de supervivientes a esa edad según la tabla de Halley (lo que hemos llamado y).

Tabla 1. -

Edad por años	Supervivientes según Halley	No habiendo tenido la viruela	Habiendo tenido la viruela	Cogiendo la viruela durante cada año	Muertes de viruela cada año	Suma de muertes de viruela	Muertes de otras enfermedades cada año
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17'1	17'1	283
2	855	685	170	99	12'4	29'5	133
3	798	571	227	78	9'7	39'2	47
4	760	485	275	66	8'3	47'5	30
5	732	416	316	56	7'0	54'5	21
6	710	359	351	48	6'0	60'5	16
7	692	311	381	42	5'2	65'7	12'8
8	680	272	408	36	4'5	70'2	7'5
9	670	237	433	32	4'0	74'2	6
10	661	208	453	28	3'5	77'7	5'5
11	653	182	471	24'4	3'0	80'7	5
12	646	160	486	21'4	2'7	83'4	4'3
13	640	140	500	18'7	2'3	85'7	3'7
14	634	123	511	16'6	2'1	87'8	3'9
15	628	108	520	14'4	1'8	89'6	4'2
16	622	94	528	12'6	1'6	91'2	4'4
17	616	83	533	11'0	1'4	92'6	4'6
18	610	72	538	9'7	1'2	93'8	4'8
19	604	63	541	8'4	1'0	94'8	5
20	598	56	542	7'4	0'9	95'7	5'1
21	592	48'5	543	6'5	0'8	96'5	5'2
22	586	42'5	543	5'6	0'7	97'2	5'3
23	579	37	542	5'0	0'6	97'8	6'4
24	572	32'4	540	4'4	0'5	98'3	6'5

En la tercera columna, nuestro presenta el número de personas que han llegado a esa edad sin haber padecido aún la viruela (lo que hemos llamado s), habiendo sido calculado ese número mediante la fórmula anterior última; en la cuarta, el número de individuos que, a esa edad, ya han padecido viruela y se han recuperado (supervivientes de la enfermedad), o sea $y - s$; en la quinta, el número de enfermos de viruela de ese año, por tanto, $\frac{1}{8}s$, pero para mayor exactitud toma para s la media entre los valores de esa cantidad para ese año y el anterior, o sea, construye la 5ª columna calculando $\frac{1}{8} \times \frac{s_{x-1} + s_x}{2}$; en la sexta, el número de

fallecidos de viruela ese año: un octavo de los valores de la quinta columna; en la séptima, las muertes acumuladas de viruela desde 0 años hasta ese año y, por último, en la octava, las muertes por otras causas distintas a la viruela, o sea, $y_{x-1} - y_x$ - columna 6. La Tabla se construye hasta la edad de 24 años porque, como se ha dicho, para esa edad, pocos de los que sobreviven no han padecido la enfermedad.

Resulta de las tablas calculadas por D. Bernoulli que en el estado natural, para una generación de 1300 recién nacidos, 500 morirán sin haber contraído la viruela, 700 la cogerán y morirán de otra cosa y 100 cogerán la viruela y morirán por culpa de ella. La mitad de estos últimos, mueren antes de los cinco años.

A continuación, nuestro autor considera lo que ocurriría si todos fuesen inoculados al nacer y, entonces, la viruela fuese erradicada como causa de muerte. Eso le permite preparar una tabla de vida para el caso en que no hubiese muerte por viruela. Ilustramos el método de construcción de esta segunda tabla usando los números de la Tabla 1:

- (iii) En el primer año de vida hay 17'1 muertes de viruela, así que, sin viruela, el número de los que sobreviven un año crecerá de 1000 a 1017'1.
- (iv) Si 133 (columna 8) mueren durante el segundo año de otras causas distintas a la viruela entre los 1000 vivos al comienzo de este año, sería, por proporción, 135'3 muertes entre los 1017'1 vivos al comienzo de ese año en una situación libre de viruela, quedando 881'8 vivos al final del segundo año; y así para el resto de edades.

Los resultados son recogidos en la Tabla 2, donde se comparan las columnas de supervivientes en el estado natural (esto es, con muertos de viruela) y en el estado no varioloso.

Al construir esta segunda tabla, Bernoulli descuida el hecho de que algunos de estos supervivientes podrían sucumbir en ese año de otras enfermedades, algo que Duvillard (1806) rectificará.

Tabla 2.

Edad por Años	Estado natural y varioloso	Estado no varioloso	Diferencia o ganancia	Edad por Años	Estado natural y varioloso	Estado no varioloso	Diferencia o ganancia
0	1300	1300	0	13	640	741'1	74'1
1	1000	1017'1	17'1	14	634	709'7	75'7
2	855	881'8	26'8	15	628	705'0	77'0
3	798	833'3	35'3	16	622	700'1	78'1
4	760	802'0	42'0	17	616	695'0	79'0
5	732	779'8	47'8	18	610	689'6	79'6
6	710	762'8	52'8	19	604	684'0	80'0
7	692	749'1	57'2	20	598	678'2	80'2
8	680	740'9	60'9	21	592	672'3	80'3
9	670	734'4	64'4	22	586	666'3	80'3
10	661	728'4	67'4	23	579	659'0	80'0
11	653	722'9	69'9	24	572	651'7	79'7
12	646	718'2	72'2	25	565	644'3	79'3

Esta Tabla hace ver de un vistazo, cuántos de 1300 niños, supuestos nacidos al mismo tiempo, quedarían vivos de año en año hasta la edad de veinticinco años, suponiéndoles todos sujetos a la viruela; y cuántos quedarían si estuviesen todos exentos de esta enfermedad, con la comparación y diferencia de los dos estados.

Sin emplear la expresión “esperanza de vida”, Daniel Bernoulli calcula que la vida media para un recién nacido, en el estado no varioloso, sería de 29 años y 9 meses (contra 26 años y 7 meses en el estado varioloso), o sea, una ganancia de 3 años y 1 mes. A continuación plantea el riesgo de la inoculación. Inicialmente, plantea dicho riesgo como de 1 sobre N . Por lo tanto, la generación inicial ha de ser disminuida en la proporción de N a $N-1$. Comenta que no hay acuerdo en cuánto debe ser N . Opina que en el peor de los casos $N=200$ y, entonces, bajo ese supuesto calcula que el riesgo de la inoculación supone una disminución inferior a dos meses de la vida media calculada para el estado no varioloso. Por tanto, la inoculación, con el riesgo añadido, supone una ganancia en la vida media de 3 años, sobre una media inicial de 26 años y 7 meses en el estado natural o varioloso, o sea, $\frac{1}{9}$ de esa media.

En este contexto, Bernoulli se plantea cuál debería ser N para que la inoculación no alterase la vida media del estado natural. El cálculo le lleva a $N=9'43$. Entonces, añade que si la inoculación se lleva menos de 100 sobre 943 hará más bien que mal a la humanidad, sobre todo si es practicada en los más jóvenes, pues entonces “la pérdida sólo caería en los niños inútiles para la sociedad, y... toda la ganancia recaería sobre esta edad que es la más preciosa” (edad adulta). D. Bernoulli se anticipa aquí a los estudios de Quételet, tendientes a medir el coste, para la sociedad, de la mortalidad de los jóvenes clasificados por edad.

Sólo después de haber preparado su Tabla 2, Bernoulli se da cuenta que era posible obtener una fórmula que relacionase los supervivientes de las dos tablas. Como se demuestra

arriba las muertes en el período de tiempo dx por causas distintas a la viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$ con respecto de una población de y (supervivientes en el estado natural). Por tanto, para una población de z (supervivientes en el estado no varioloso) podemos escribir

$$-dz = -\frac{z}{y} \left(dy + \frac{sdx}{nm} \right)$$

O bien,

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{sdx}{nmy}$$

Sustituyendo (1) para un s dado

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \left\{ 1 - \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \right\} dx$$

Integrando obtenemos

$$\log \frac{z}{y} = \frac{x}{n} - \log \left\{ 1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}} \right\} dx + c$$

Dado que $y = z$ cuando $x = 0$, entonces $c = \log m$, de donde se deduce

$$z = \frac{me^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} y \tag{2}$$

Bernoulli da sólo dos comparaciones numéricas de z por su método aproximado para construir la Tabla 2 y por la fórmula exacta (2); estos son:

Valores de z

	Aproximado	Exacto
Edad (x)	(Tabla 2)	(Fórmula 2)
16	700'1	697'4
24	651'7	649'2

Tras considerar los dos ejemplos comenta el acuerdo razonable entre su método aproximado y su fórmula exacta. En cada caso el valor exacto es menor que el aproximado, lo cual es de esperar ya que, como se ha dicho, el principal defecto del método aproximado de Bernoulli es que no tiene en cuenta las muertes por otras causas que tendrían lugar entre los muertos de viruela salvados en cada año en particular. Desde un punto de vista más matemático podemos entender la Tabla 2 como una forma discreta de mostrar la supervivencia, mientras que la Fórmula 2 nos da una aproximación continua del mismo asunto, introduciendo la continuidad su corrección hacia abajo.

Un problema de decisión

Aunque no disimula que él cree personalmente que la inoculación es “muy útil”, D. Bernoulli declara que su intención es únicamente arrojar sobre la cuestión “alguna luz”, con el fin de que se juzgue “con todo el conocimiento de causa posible”.

Concibe que el problema se plantea de forma diferente a los particulares y a lo Estados. En cualquier caso, la decisión está por tomar: ¿Inoculación o no inoculación? El fundamento de esta decisión es enunciado por D. Bernoulli de manera perfectamente clara: “en tanto que se quiera adoptar *el principio de la mayor utilidad* de toda la humanidad...”

Además del cálculo de la esperanza de vida de un recién nacido en los dos estados, Bernoulli se encarga de introducir una serie de conclusiones basadas en los cálculos que realiza usando como soporte la dos tablas construidas, de manera que la toma de la decisión adecuada no deje lugar a dudas. Así, introduce el concepto de “ganancia relativa” para cada edad, cociente entre la ganancia absoluta expresada por la cuarta columna de la 2ª tabla y el número de supervivientes en el estado varioloso a esa edad. Demuestra que si todos los recién nacidos son protegidos de la viruela desde el nacimiento, la “ganancia relativa” en vidas humanas que resultaría de la erradicación de esta causa de mortalidad, crecería de año en año, llegando a 1/7 de la generación en el momento en que ésta alcance su 17º año, que Daniel Bernoulli llama su “nacimiento civil”, y concluye que la proporción asintótica de “ganancia sobre los vivos” es, en general, igual a $\frac{1}{m-1}$. También, que la proporción de “vivos en estado natural”/“vivos en estado no varioloso” se estabiliza con la edad, quedando en $\frac{m-1}{m}$.

Un segundo dato que destacamos de entre la gran cantidad de cálculos que aporta el autor es: En el estado natural toda una generación queda reducida a la mitad cuando han cumplido 11 años y 5 meses, mientras que en el estado no varioloso esto ocurre a la edad de 24 años y 3 meses.

Un tercer dato es el cálculo de las esperanzas de vida de un niño de 5 años si no es inoculado y si lo es y obtiene para las mismas la proporción de 17 a 19.

El siguiente resumen en cifras es bastante contundente: En el estado natural, de 1300 individuos, 800 cogerán la viruela. Si todos son inoculados, entonces los 1300 cogerán la viruela. Por tanto, la proporción de enfermos de viruela de un estado a otro será de $\frac{8}{13}$. Pero la infección de los inoculados es mucho menor, reduciéndose en $\frac{1}{13}$. Por tanto, la proporción de enfermos de viruela de un estado a otro queda como $\frac{8}{1}$. Por otra parte, la “superficie del cuerpo de los inoculados” es 4 veces menor, por lo que, concluye, la proporción queda $\frac{32}{1}$.

La conclusión no da lugar a equívoco: aunque la inoculación sea costosa en vidas humanas, “el interés público” es practicarla, y hacerla lo más pronto posible, en cualquier caso, antes de cumplido los 5 años, pues a esa edad ya se ha llevado la mitad de aquellos que debe hacer morir. “Será siempre geoméricamente cierto que el interés de los Príncipes es favorecer y proteger la inoculación...” El mejor partido es el que da mayor vida media,

porque la colectividad tiene la ventaja en que los individuos acceden a una edad donde acaban siendo productivos.

Para las circunstancias particulares de un individuo, Bernoulli indica que habría que hacer cálculos particulares para conocer el partido más ventajoso. Imaginemos una persona que llega a los veinte años sin haber tenido la viruela. La sociedad no tiene casi ningún interés en hacerla vacunar a una edad donde la viruela ya se ha llevado el 95% de su tributo. La persona, por el contrario, "llegada a la edad de la razón", está en medida de sopesar la ganancia esperada de la inoculación, al riesgo que debería pagarle, y ver dónde está su ventaja. Se trata, una vez más, de elegir una solución que maximiza una esperanza matemática.

Este párrafo es bastante esclarecedor para la resolución del problema de decisión: *"Todo hombre que no ha tenido la viruela se encuentra en la agobiante necesidad de jugar durante cada año de su vida con otros 63 a cuál debe morir de esta enfermedad, y con otros 7, a cuál debe cogerla, y lleva con él esta triste suerte hasta que coge la enfermedad. ¿No es mejor, suponiendo que la inoculación quita 1 de 473, jugar contra 472 en lugar de con 63, y no tener que sufrir la suerte más que una sola vez, en lugar de que le vuelva cada año de su vida? ¿Un hombre avisado puede titubear sobre la elección? Sin embargo, esta alternativa es exactamente la de esperar la viruela natural o hacerse inocular."*

Conclusión

Estamos ante un trabajo que se nos muestra competente, científico y pragmático. El autor sabe exactamente lo que quiere hacer y procede a hacerlo. Cuando sus datos son escasos, establece supuestos y, con ellos, comprueba la coherencia con la información disponible. Usa el cálculo diferencial bajo supuestos realistas, y lleva a cabo, por primera vez en la historia de la ciencia, la comparación de las tablas de vida entre el estado natural y el estado en que quedaría al erradicarse una enfermedad.

Bibliografía

- BERNOULLI, D. (1760). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité cause par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir, *Memoires de mathématiques et de physiques tirés des registres de l'Academie Royale des Sciences, de l'année 1760; Hist. de l'Academie*. Paris, 1766, 1-45.
- DAW, R. H. (1979). Smallpox and the Double Decrement Table. A piece of Actuarial Pre-History. *JIA* 106, 299-318.
- DUVILLARD, E. E. (1806). *Analyse et Tableaux de l'influence de la petite vérole à chaque age, et de celle qu'un preservative tel que la vaccine peut avoir sur population et la longévité* (Paris) (A. S.)
- FAGOT-LARGEAULT, A. (1989). *Las causas de la mort. Histoire naturelle et facteurs de risque*. Institut Interdisciplinaire d'Etudes Epistémologiques. Paris.
- HALLEY, E. (1693), An estimate of the degrees of the Mortality of mankind, drawn from curious Tables of the births and funerals at the City of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of Annuities upon lives, *Philosophical Transactions...*, XVII, 596-610, 654-656.
- JENNER, E. (1798). *An Inquiry into the Causes and Effects of the Variolae Vaccinae, a Disease discovered in some of the Western Counties of England, particularly Gloucestershire, and known by the Name of the Cow Pox*. Sampson Low, London.
- SÜSSMILCH, J. P. (1741), *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen*, Berlin. Existe una versión en francés de 1998, traducida y anotada por J. M. Rohrbasser, y publicada por l'Institut National d'Études Démographiques.
- TREMBLEY, J. (1799). Recherches sur la mortalité de la petite vérole. *Mém. De l'Acad. Roy. Des Sciences pour 1796* pp. 17-38. Berlin.