Capítulo 16

Kolmogorov y sus aportaciones fundamentales

CRISTINA SÁNCHEZ FIGUEROA
PEDRO CORTIÑAS VÁZQUEZ
IÑIGO TEJERA MARTÍN
Universidad Nacional de Educación a Distancia (Uned)

Introducción

La Estadística es una ciencia con tanta antigüedad que su proceso de desarrollo hace, que por sí misma, sea auxiliar de otras ciencias como: la medicina, la ingeniería, la sociología, etc, y está presente en las más diversas esferas de la vida cotidiana, como se observa en el deporte que las marcas de un mismo atleta son diferentes en distintas repeticiones del mismo ejercicio. La Estadística actúa como disciplina que proporciona técnicas precisas para obtener información, (recogida y descripción de datos) y por otra parte proporciona métodos para el análisis de la misma. Los métodos y técnicas estadísticas ayudan a la realización de múltiples tareas en las organizaciones productivas o sociales, tanto públicas como privadas; así la ausencia de ésta conllevaría a un caos generalizado no existiendo en muchos casos información vital a la hora de tomar decisiones en tiempos de incertidumbre. Del mismo modo, es la base para la realización de estudios e investigaciones que permiten la mejora, no solo, de los procesos de producción, de bienes y de servicios, sino también de las decisiones tomadas en las empresas u organizaciones de los más diversos ámbitos.

Aunque los comienzos de la estadística pueden ser hallados en el antiguo Egipto con los recuentos de población o de riqueza, la estadística podemos decir que ha existido desde el inicio de las civilizaciones, si bien, utilizando técnicas que hoy consideramos elementales pero que tienen toda su importancia por el momento en el que se promueven. Durante muchos años las grandes operaciones estadísticas fueron la realización de censos o los recuentos de defunciones, no obstante la estadística que conocemos hoy en día debe gran parte de su elaboración a los trabajos matemáticos de aquellos hombres que desarrollaron la teoría de la probabilidad. Durante el siglo XVII y principios del XVIII, matemáticos como Bernoulli, Moivre, Bayes, Lagrange y Laplace desarrollaron la teoría de probabilidades. Pese a que durante cierto tiempo la teoría de la probabilidad limitó su aplicación a los juegos de azar, no será hasta el siglo XIX cuando comienza a aplicarse a los grandes problemas científicos.

Será en el año 1933 cuando el célebre matemático estadístico Kolmogorov se propuso construir una teoría de la probabilidad totalmente rigurosa, formuló un sistema de axiomas para la teoría de la probabilidad, basado en la teoría de conjuntos y en la teoría de la medida, desarrollada pocos años antes por Lebesgue, Borel y Frechet entre otros. La construcción axiomática de la teoría de la probabilidad, procede de las propiedades fundamentales de la probabilidad observadas en los ejemplos que ilustran la definición clásica y frecuentista. La definición axiomática las incluye como casos particulares y supera las carencias de ambas. Así la probabilidad pudo desarrollarse como una teoría completamente lógica, al mismo tiempo que siguió permitiendo resolver los problemas aplicados.

Un científico tan impresionante como Kolmogorov recibió un amplio reconocimiento honorífico de muchos países, pues a lo largo de su trayectoria científica escribió muchos libros y más de 200 artículos sobre diversas disciplinas científicas como física, mecánica o biología. Pero será a los diversos campos de la matemática a los que dedique su mayor número de artículos, destacando entre sus aportaciones las que realiza a la Teoría de Conjuntos, Teoría de Integración, Teoría de la Información, Teoría de la Turbulencia, *Teoría de Probabilidad*, *Teoría de los Procesos Estocásticos, o Estadística Matemática* entre otras.

Andrei Nikolaevich Kolmogorov.

Es importante señalar que el trabajo científico llevado acabo durante toda su vida por el célebre matemático estadístico Andrei Nikolaevich Kolmogorov es un ejemplo de superación y de gran dedicación a la investigación aplicada (no solo en el campo de las matemáticas sino también en el de otras disciplinas), pues los años en los que se desarrolla están condicionados, entre otros acontecimientos, por las revoluciones sociales (ocasionadas por las condiciones de crisis económica vivida) y las dos guerras mundiales.

Sus padres no pudieron influir en su educación, su padre murió en 1918 durante la guerra civil luchando en las filas del ejército rojo y su madre murió durante el parto. Así, el pequeño Andrei creció en una de las propiedades de su abuelo materno, donde cuidaron de él sus tías maternas quienes se preocuparon en desarrollar su curiosidad por la naturaleza y su interés en los libros.

Las primeras clases las recibe en una pequeña escuela creada por una de sus tías, para una docena de niños de vecindad. En la escuela se editaba la revista "Spring Swallows" donde publicó sus descubrimientos iniciales y algunos problemas aritméticos. A los seis años escribió su primer descubrimiento, la suma de los primeros números impares consecutivos es siempre un cuadrado:

$$1 = 1^2 \qquad 1+3 = 2^2 \qquad 1+3+5 = 3^2 \qquad 1+3+5+7 = 4^2 \qquad ,etc.$$

A los siete años se traslada a Moscú con su tía y allí se matriculará en el Instituto Repman. Las clases seguían métodos no tradicionales, pero muy avanzados para su tiempo. En Repman contó con buenos profesores, destacó obteniendo premios en historia y matemáticas y comenzó su interés, más serio, por la investigación científica.

En 1920 comienza a estudiar en la Universidad Estatal de Moscú, en la Facultad de Física y Matemática. La teoría de conjuntos con Zhegalkin y la geometría proyectiva con Vlasov, fueron sus primeros cursos, luego se interesó en la teoría analítica de funciones enseñada por Nikolai Nikolaievitch Luzin. Su primer trabajo matemático surgió de un contraejemplo en una proposición geométrica elemental planteada por Luzin, así aunque Kolmogorov era tan sólo un estudiante comenzó a investigar y producir resultados de importancia internacional en este campo de la ciencia.

También asiste al seminario sobre series trigonométricas que dirigía el profesor Viacheslav Stepánov, en él resuelve el problema de la construcción de una serie de Fourier cuyos coeficientes tienden a cero mas lentamente de lo deseado, un problema en el cual Luzin estaba muy interesado. En el artículo resultante formula un resultado más completo sobre los valores de los coeficientes de Fourier. También obtuvo su más celebre resultado sobre series trigonométricas construyendo una serie de Fourier-Lebesgue que diverge en casi todos los puntos. Su interés por la teoría de series trigonométricas y teoría descriptiva de conjuntos, hizo que sus investigaciones le llevaran al análisis clásico (diferenciación, integración, teoría de la medida y lógica matemática). Kolmogorov analizó en profundidad las afirmaciones y nuevas construcciones de la integral, así vuelve a sorprender a la comunidad científica construyendo una función integrable cuya representación en serie trigonométrica divergía en todo punto.

En años sucesivos comienza su interés por la *teoría de la probabilidad*, así en 1925 tiene lugar otro momento importante en su carrera pues publica su primer artículo sobre *probabilidad.* Fue publicado conjuntamente con Aleksandr Yakovlevich Khinchin y contiene *"El teorema del las tres series"*, en él formula la convergencia de una serie, si y solo si, converge en probabilidad considerando para ello tres supuestos fundamentales. El interés por el azar y las cuestiones relacionadas con la probabilidad, son temas que marcarán el inicio de los posteriores trabajos científicos desarrollados a lo largo de toda su vida.

Kolmogorov termina su carrera en 1925, pero este mismo año decide iniciar sus estudios de postgrado, durante cuatro años más, en la Universidad Estatal de Moscú. Es importante señalar que entre 1922 y 1925, años en los que realiza su carrera, también desarrolla la labor de Maestro de Matemáticas y Física en la escuela modelo experimental de Moscú, este entusiasmo por la enseñanza lo acompañará a lo largo de toda su vida. Así y tras esta experiencia, en 1931 Kolmogorov fue promovido como profesor en la Universidad Estatal de Moscú. Será también en este mismo año cuando publique un artículo fundamental *"Métodos analíticos de la teoría de probabilidades"*, que será el inicio de lo que hoy conocemos como procesos de Markov.

En años sucesivos, siendo director del Instituto de Investigaciones en Mécanica y Matemática, publica su monografía sobre *"Fundamentos de la Teoría de Probabilidades"* cuyo nombre original en alemán es *"Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung"* (1933). En ella reconstruyó la teoría de probabilidad de forma rigurosa, a partir de los axiomas fundamentales que hoy en día se reconocen y aceptan al estudiar la teoría probabilidad. Serán precisamente sus trabajos sobre la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, los que le consolidan y le atribuyen gran relevancia científica a nivel mundial. Esto hace que entre 1938 y 1966 sea *Jefe de la Cátedra de Teoría de Probabilidades*; creada a instancia suya ante la necesidad de seguir investigando estadística matemática.

De igual forma plantea un nuevo enfoque de la teoría de la información, el concepto de complejidad que va más allá de los postulados que partían de una concepción estadística de la información. Así, Kolmogorov en el año 1963 expone la idea de proporcionar una base algorítmica a las nociones básicas de la teoría de la información y *la teoría de probabilidades.*

A pesar de que su apasionante vida científica giró entorno al desarrollo matemático, Kolmogorov también tuvo tiempo, no solo, para llevar a cabo su vida personal, que compartirá hasta su muerte con su amiga de la escuela Anna Dimitrieva Egórova con quien se casa en 1942, sino también para contactar con otros científicos no matemáticos quienes le instruirán sobre temas como la física o la biología. Serán estas aportaciones las que precisamente lleven a Kolmogorov a realizar el análisis de los problemas de las turbulencias, desde el punto de vista estocástico, y el estudio de los procesos ramificados. Así entre 1946-1949 es jefe del laboratorio de investigaciones sobre turbulencia en el Instituto de Geofísica Teórica.

Para Kolmogorov su vida siempre estuvo repleta de prosperidad que recibió tanto por el reconocimiento a sus logros personales, en la búsqueda de la verdad en el proceso de conocimiento, como de la dedicación a fines humanos, ya que participó con gran entusiasmo en la educación de los jóvenes a lo largo de su vida científica. Como reconocimiento a sus meritos didácticos, llega a ser miembro fundador de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS en 1966 y dedica los últimos veinte años de su vida a la obra pedagógica. El interés por la educación le llevó a tener estudiantes con un talento excepcional, con los que realizó una importante labor científica, entre ellos destaca Vladimir I. Arnold con quien resuelve el 13 problema de Hilbert.

Si analizamos la diversidad de trabajos y artículos, publicados a la largo de la vida de Kolmogorov, podemos tener una imagen incierta de un científico que analiza materias dispersas y sin ningún tipo de relación. Pero es todo lo contrario, su inquietud científica hace que se preocupe por alcanzar objetivos suficientemente ambiciosos en temas relacionados con la matemática, *teoría de probabilidades, estadística matemática*, teoría de sistemas y procesos estocásticos, no solo para su propia satisfacción personal sino también como una excelente contribución a la comunidad científica. Toda una vida dedicada a la investigación científica llevó a que recibiera las más altas distinciones del sistema soviético, y al mismo tiempo fuera elegido miembro honorario de las academias de ciencia y de las sociedades científicas más prestigiosas del mundo. Haciendo un repaso posemos enunciar las siete órdenes Lenin, el premio Stalin, el premio Lenin que le concedió el Estado Soviético por trabajos en la teoría de perturbaciones de sistemas dinámicos. Además también recibió el premio Chebyshev por su libro *"Distribuciones límite para sumas de variables estocásticas independientes"*, el premio internacional Fundación Balzan en Matemáticas, premio internacional Fundación Wolf por profundos y originales descubrimientos en el *"análisis de Fourier, teoría de probabilidades, teoría ergódica y sistemas dinámicos"*, y el premio Lobatchevski de la Academia de las Ciencias de la URSS en 1987. Este mismo año su cerebro dejó de pensar para siempre y sus trabajos quedaron para que fueran recopilados y publicados en años sucesivos .

Aportaciones a la Estadística.

Es fundamental señalar la gran aportación que realizó a la Estadística, como consecuencia de su inquietud científica.

> *"Andrei Nikolaievitch ya no está, pero la naturaleza guarda el eco de sus preguntas y los hombres conservan su mensaje de esperanza. La vida de todo científico completo es parte de un torrente inagotable que labra el curso de la humanidad"*[1].

---

[1] Rolando Rebolledo

- *FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES*

Uno de los aspectos más significativos de Kolmogorov es su gran interés por cuestiones relacionadas con el azar, esto le llevará a ser un gran precursor de la *teoría de la probabilidad*. Desde el inicio de su trabajo científico escribe diversos artículos sobre *probabilidad*, el primero en 1924 siendo aún estudiante de la universidad; en él desarrolla la convergencia de series cuyos términos dependen del azar. Pero el trabajo que le da relevancia a nivel mundial es *Fundamentos de la Teoría de Probabilidades, cuyo nombre original en alemán es "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1933).* Las definiciones dadas hasta el momento eran demasiado intuitivas y con una elevada experiencia práctica, por lo que no eran muy apropiadas para un desarrollo teórico de la teoría de la probabilidad. Será a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, cuando se pueda realizar una formalización más exhaustiva de los conceptos probabilísticos gracias al desarrollo de las teorías de conjuntos y de la medida de Georg Cantor, Émile Borel y Heri Lebesgue. Así Kolmogorov, poniendo en relación estas teorías construye *una teoría de la probabilidad* de forma rigurosa y basándose en unos axiomas fundamentales. Esta aproximación axiomática surge ante las limitaciones surgidas de las teorías:

Clásica: Esta definición clásica de probabilidad fue una de las primeras que se dieron y se atribuye a Laplace; En 1812 Laplace publica su famosa obra "*Theorie Analytique des probabilités*", que contiene una exposición completa y sistemática de la teoría matemática de los juegos de azar. Laplace define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos, siempre que todos sean igualmente posibles. Pese a la gran cantidad de aplicaciones de esta teoría (que se conoce con el nombre de probabilidad a priori) existen también voces críticas, pues presenta una serie de inconvenientes que hacen su aplicación limitada.

Frecuentista: La definición frecuentista considera la probabilidad como una frecuencia relativa ideal. Define la probabilidad como el límite de la sucesión de frecuencias relativas de un suceso al aumentar indefinidamente el número de realizaciones. Aunque es imposible llegar a este límite, pues no podemos repetir el experimento un número infinito de veces, si podemos repetirlo muchas veces y observar como las frecuencias relativas tienden a estabilizarse.

Tanto en la definición clásica como en la frecuentista la probabilidad se define como un cociente, siendo siempre el numerador menor o igual que el denominador porque corresponde al número de elementos de un subconjunto del conjunto cuyos elementos contamos en el denominador. Así estas teorías hacen imposible la formalización matemática de la asignación de un modelo matemático a la probabilidad, pero Kolmogorov tenía gran empeño en convertir el cálculo de probabilidades en una autentica teoría, totalmente unida a la práctica y formalizada al estilo que Hilber proponía para toda su matemática.

En el enfoque axiomático Kolmogorov define probabilidad a partir de las propiedades fundamentales que debe satisfacer la noción de probabilidad, observadas en los ejemplos que ilustran las definiciones clásica y frecuentista, y que tomadas como puntos de partida o axiomas permiten edificar sobre ellas toda la teoría. Así conceptos ampliamente utilizados en la jerga probabilística, como variable aleatoria y función de distribución, cobran precisión matemática.

Las probabilidades son valores de una función de conjunto, también conocida como medida de probabilidad, esta función asigna números reales a diversos subconjuntos de un espacio muestral:

Sea ω un espacio muestral y sea $\overline{A}$ una colección de subconjuntos del espacio muestral ω, es decir un conjunto de sucesos. Se define probabilidad como una aplicación $P:\overline{A}\to[0,1]$ (a cada $A\in\overline{A}$ le hace corresponder un $P(A)$) que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 1. Si A es un elemento de $\overline{A}$, existe un número $P(A)\geq 0$, denominado probabilidad del suceso A.

Axioma 2. $P(\omega)=1$

Axioma 3. Dada una sucesión númerable de sucesos, $A_1,\cdots,A_j$, disjuntos dos a dos, $A_i\cap A_j=\varnothing$, se verifica que: $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$

Así la probabilidad pudo desarrollarse como una teoría completamente lógica después de un siglo donde había sido dejada de lado, fue ganando aceptación como una teoría con innumerables aplicaciones a ramas muy diferentes del conocimiento. Numerosos probabilistas de la época, después de analizar la obra de Kolmogorov, quedaron convencidos de que la *teoría de probabilidades* puede desarrollarse en términos de la teoría de la medida, de forma tan rigurosa como cualquier otra área de la matemática. Pero el verdadero significado de esta obra se puede apreciar mejor en la actualidad, pues no sólo contiene la construcción axiomática de la teoría, sino que desarrolla de forma clara y precisa una serie de conceptos probabilísticos que serán la base necesaria para la fundamentación de los *procesos estocásticos*.

- TEORÍA DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS

El año 1931 es de crucial importancia para la constitución de los procesos estocásticos como una rama ampliamente desarrollada de la teoría de probabilidades. Este año Kolmogorov publica su artículo *Métodos analíticos en la teoría de probabilidades,* que será el inicio de lo que hoy conocemos como procesos de Markov, pues Kolmogorov descubrió profundas relaciones entre los procesos markovianos y las ecuaciones diferenciales.

Los procesos estocásticos o procesos aleatorios constituyen una herramienta estadística que surge ante la necesidad de modelar el comportamiento de experimentos aleatorios que varían en el tiempo o dependen de alguna otra variable aleatoria determinista. Los procesos estocásticos se pueden clasificar atendiendo a dos aspectos: si el espacio de estados posibles de la variable aleatoria contiene valores discretos o continuos y si los valores del tiempo son discretos o continuos. Asimismo, las cadenas de Markov constituyen un proceso estocástico en el que los valores del tiempo son discretos y los estados posibles de la variable aleatoria contienen valores discretos, es decir, es una cadena estocástica de tiempo discreto. De esta manera Kolmogorov desarrolla la *ecuación de Chapman-Kolmogorov*, como una identidad que deben satisfacer las probabilidades de transición para cualquier proceso de Markov.

- ESTADÍSTICA MATEMÁTICA.

- La prueba de Kolmogorov-Smirnov:

Otra gran aportación de Kolmogorov es la demostración de que la función de distribución empírica se aproxima, tanto como se quiera, a la distribución de probabilidades de la variable aleatoria, siempre que la muestra que se tome sea suficientemente grande. La forma de estimar el error máximo que se comete en esta aproximación, hizo que formara parte de todos los textos de estadística matemática.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S), nombre con el que se conoce, fue propuesta originalmente en los años 30 por Andrei Nikolaevich Kolmogorov y Nikolai Vasilyevich Smirnov (1933). Es una prueba no paramétrica de bondad de ajuste que sirve para contrastar la hipótesis nula de que la distribución de una variable se ajusta a una determinada distribución teórica de probabilidad. Su objetivo fundamenta es señalar si los datos provienen de una población que tiene la distribución teórica especificada. Es una extensión del Teorema de Glivenco-Cantelli (llamado también *Teorema Fundamental de la Estadística* por el papel que desarrollará dentro de la Inferencia Estadística) que demuestra que para muestras grandes la función de distribución empírica $F_n(x)$ converge en probabilidad a la función de distribución de la población $F(x)$. Kolmogorov y Smirnov (1933) establecen la medida más simple para calcular la diferencia que existe entre ambas funciones, por medio de la distancia máxima (medida en dirección vertical) entre las gráficas correspondientes a ambas funciones, esa medida viene dada por lo que hoy conocemos como *el estadístico de Kolmogorov y Smirnov:*

$$D_n = Máx_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x) - F(x)\right|$$

La distribución de este estadístico D_n no depende del modelo fijado para $F(x)$ fijado en la hipótesis nula, es decir, es la misma para cualquier función $F(x)$.

- Teoría de los estimadores insesgados:

En 1950 Andrei Nikolaevich Kolmogorov completó uno de sus trabajos más importante en Estadística con el título de *Estimadores Insesgados*, en él analiza sistemáticamente las propiedades de los estimadores insesgados y los diferentes métodos de construcción, por medio de estadísticos suficientes, y también describe el significado de las aplicaciones de estos estimadores en problemas de estadísticas de control y control de calidad en la industria. Para ello recurre al teorema de Rao-Blackwell (1945-1947) para calcular el estimador insesgado de la proporción.

Bibliografía

CASAS SÁNCHEZ JOSÉ M. (1997): *Inferencia Estadística.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces S.A.

GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE, FRANCISCO JAVIER: (2004): *Breve introducción a la obra de A. N. Kolmogorov (1903-1987).* Real Academia de Ciencias y Universidad de Malaga.

KOLMOGOROV A.N. (1991-1993), *Vol. II : Probability Theory and Mathematical Statistics.* Kluwer, Berlin.

KOLMOGOROV A.N. (1956): *Foundations of the theory of probability,* Chelsea, New York.

KOLMOGORV IN PERSPECTIVE (2000): *History of Mathematics,* Vol 20. American Math. Soc. Y London Math. Soc.

MARTÍN PLIEGO, F. JAVIER Y RUIZ-MAYA, L. (1997): *Estadística. I. Probabilidad.* Editorial AC.

RUIZ MUÑOZ, D.: *Manual de Estadística.* Universidad Pablo Olavide.

SÁNCHEZ FERNANDEZ,C.Y VALDÉSCASTRO,C. (2003): *Kolmogórov , El zar del azar.* Editorial NIVOLA, libros y ediciones S.L.

Direcciones de Internet.:

1. http://Kolmogorov.com
2. http://Thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/40-1-b-Kolmogorov.html