Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 38 *(1983)*

UN EJEMPLO DE TEORIA DE BORDISMO EQUIVALENTE AL PL-BORDISMO.

A. QUINTERO.

Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemática. Universidad de Sevilla. C/ Tarifa s/n. Sevilla. (España).

In this paper we define the CPL-manifolds and we prove, by using a desingularization procedure, that these objects give a bordism theory which is equivalente to the PL-bordism. It's interesting to note that the family CPL of the CPL-manifolds is not closed to taking topological cilynders.

Notaciones. En lo que sigue emplearemos el signo "+" para indicar la unión disjunta. También usaremos los conceptos y notaciones habituales de la Topología Poliedral tales como triangulación, poliedro euclídeo, estrella abierta (st(-)), engarce o "link" (lk(-)), cono (c(-)), suspensión n-ésima (Σ^n-), PL-isomorfismo, PL-variedad, PL-esfera,etc. Para una referencia general ver [9] .

Asimismo, la teoría de homología que utilizaremos será la homología singular con coeficientes en el grupo de los números enteros.

1. VARIEDADES DE HOMOLOGIA FUERTES

Por una variedad de homología de dimensión n (HML-variedad) se entenderá un poliedro euclídeo, no necesariamente compacto, cuya homología local es la del semiespacio R^n_+ (ver [6] para más detalles). Una n-esfera de homología es una HML-variedad compacta H^n cuya homología es la de la esfera canónica S^n. Cuando H^n es PL-variedad se dice una PL-esfera de homología. Analogamente se puede considerar las n-bolas y las PL-bolas de homología.

1.1 Definición. Una variedad de homología fuerte (HMLF-variedad) de dimensión n es una HML-variedad tal que el engarce de cada punto es una PL-esfera o PL-bola de homología de dimensión n-1.

Un punto es singular si su engarce no es PL-esfera o PL-bola.

1.2 Proposición. Todo punto singular de una HMLF-variedad M es el vértice de cualquier triangulación de M. En particular, los puntos singulares forman un conjunto aislado.

Demostración. Sea K una triangulación de M y $x \in \mathring{\sigma}$ con $\sigma \in K$ y $\dim \sigma = r > 0$. Entonces $\mathrm{lk}(x;M)$ es PL-isomorfo a $\Sigma^r \mathrm{lk}(\sigma;K)$. Como $\mathrm{lk}(x;M)$ es PL-variedad se sigue que $\mathrm{lk}(\sigma;K)$ debe ser la PL-bola o PL-esfera de la dimensión correspondiente; es decir, x no es un punto singular.

1.3 Nota. a) De acuerdo con la proposición anterior, si K es una triangulación de una HMLF-variedad, $\mathrm{lk}(\sigma;K)$ es la PL-esfera o la PL-bola si $\dim \sigma > 0$ y una PL-bola o PL-esfera de homología en caso contrario.

b) Si H^3 es la 3-esfera de Poincaré (ver [5]), entonces $\Sigma^1 H^3$ es una HMLF-variedad tal que su cilindro topológico $\Sigma^1 H^3 \times I$ no es HMLF-variedad, pues si v Σ^1, $\mathrm{lk}(v_0;\Sigma^1 H^3 \times I)$, con $v_0 = (v,0)$, es PL-isomorfo a cH^3 que no es PL-variedad. Esta misma propiedad la cumple $\Sigma^1 \partial G_n$, donde G_n es una n-variedad de Glaser (ver [3]).

1.4 Definición. Un punto singular del interior de una HMLF-variedad M es acíclico si su engarce en M es el borde de una PL-bola de homología.

1.5 Proposición. Los puntos singulares interiores de una HMLF-variedad de dimensión distinta de cuatro son acíclicos.

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del hecho de que toda PL-esfera de homología de dimensión distinta de tres es el borde de una PL-bola de homología (ver [4]).

1.6 Nota. Obsérvese que la proposición anterior no se puede extender a la dimensión cuatro pues $\Sigma^1 H^3$ no tiene sus puntos singulares acíclicos ya que H^3 representa un elemento no nulo del grupo Θ_3^H (grupo de H-bordismo de las PL-esferas de homología de dimensión tres) (ver [8]).

1.7 Proposición. Si M es una HMLF-variedad cerrada cuyos puntos singulares son acíclicos, existe una PL-variedad $\tilde{M}$ que es bordante a M por una HMLF-variedad cuyos puntos singulares coinciden con los de M.

Demostración. Puesto que los puntos singulares son aislados, podemos suponer que M sólo tiene un punto singular; sea éste p y sea W una PL-bola de homología cuyo borde es $\mathrm{lk}(p;M)$, entonces el pegamiento $\tilde{M}$ de $M' = M - \mathring{s}t(p;M)$ con W a través de sus bordes respectivos es una PL-variedad. Y el pegamiento V de $M' \times I$ con $c(W \times 1 \cup \partial W \times I)$ a través de sus respectivos bordes es una HMLF-variedad cuyo borde es $M + \tilde{M}$ y tiene a p como único punto singular.

1.8 Proposición. Sea M una HMLF-variedad con borde cuyos puntos singulares interiores son acíclicos y tal que si $\dim M = 4$ éstos son los únicos puntos singulares. Entonces existe una PL-variedad $\tilde{M}$ que es bordante a M por una HMLF-variedad como variedades con borde, es decir, existen HMLF-variedades Z y Z_0 tales que $\partial Z = (M + \tilde{M}) \cup Z_0$ y $\partial Z_0 = \partial M + \partial \tilde{M}$.

Demostración. Sea p un punto singular, si $p \in M - \partial M$ se desingulariza como en 1.7. Si $p \in \partial M$, existe una PL-bola de homología W tal que $\partial W = \mathrm{lk}(p;\partial M)$. Entonces $L = \mathrm{lk}(p;M) \cup W$ es una PL-esfera de homología que, por [4] , acota una PL-bola de homología V. Sean $\tilde{M}$ el pegamiento de $M - \mathring{s}t(p;M)$ con V a través de $\mathrm{lk}(p;M)$ y Z el pegamiento de $M - \mathring{s}t(p;M) \times I$ con $c(V \times 1 \cup \mathrm{lk}(p;M) \times I)$ a través de $\mathrm{lk}(p;M) \times I$. Si hay más puntos singulares se repite la operación anterior). Entonces M es una PL-variedad y Z es una HMLF-variedad cuyo borde es $\partial Z = (M+M) \cup Z_0$, donde Z_0 es el pegamiento de $\partial M - \overset{\circ}{st}(p;\partial M)\times I$ con el cono $c(W\times 1 \cup lk(p;\partial M)\times I)$.

1.9 Corolario. Si M es una HMLF-variedad en las condiciones de 1.8, existen HMLF-variedades Q y Q_0 tales que $\partial Q = (M+M) \cup Q_0$ y $\partial Q_0 = \partial M + \partial M$.

Demostración. Con la notación de 1.8, basta considerar $Q = Z \cup \tilde{M}\times I \cup Z$, y $Q_0 = Z_0 \cup \partial\tilde{M}\times I \cup Z_0$.

1.10 Proposición. Con M y Q en las condiciones de 1.9, y dada una aplicación contínua $f : (M,\partial M) \longrightarrow (X,A)$, existe una extensión de f a (Q,Q_0). Más aún, si $f, g : (M,\partial M) \longrightarrow (X,A)$ son homotópicas, existe una función contínua $F : (Q,Q_0) \longrightarrow (X,A)$ tal que $F|M+M = f+g$.

Demostración. Si $p \in M - \partial M$ es un punto singular y W es una PL-bola de homología tal que $\partial W = lk(p;M)$, definimos

$$\tilde{G} : c(W\times 1 \cup \partial W\times I) \longrightarrow X$$

como la composición natural

$$\begin{array}{ccc} c(W\times 1 \cup \partial W\times I) \longrightarrow c(W/W\text{-}C \times 1 \cup \partial W\times I) & \simeq & c(st(p;M)\times 1 \cup \partial W\times I) \\ & & \cong \\ & & st(p;M)\times I \\ & & \downarrow \\ & & st(p;M)\times 0 \xrightarrow{f} X \end{array}$$

donde C es un PL-collar de ∂W en W (ver [9]).

Si $p \in \partial M$ es singular y W es una PL-bola de homología con $\partial W = lk(p;\partial M)$ y V es otra PL-bola de homología con $\partial V = lk(p;M) \cup W$ (ver 1.8), definimos

$$\tilde{G} : c(V\times 1 \cup lk(p;M)\times I) \longrightarrow X$$

de modo análogo al caso anterior.

Extendemos $\tilde{G}$ a $G : (Z,Z_0) \longrightarrow (X,A)$ haciendo $G = f\times id$ fuera de las estrellas de los puntos singulares.Es obvio que G extiende a f.

Sean $f, g : (M,\partial M) \longrightarrow (X,A)$ homotópicas y H una homotopía entre ellas. Por la propiedad de extensión de homotopías existe $\tilde{H} : (Z,Z_0)\times I \longrightarrow (X,A)$ que extiende a

$$G \cup H|st(p;M)\times I : Z\times 0 \cup st(p;M)\times I \longrightarrow X$$

Por último, definimos

$$F : (Q,Q_0) = (Z_1 \cup \tilde{M}\times I \cup Z_2,\ Z_0^1 \cup \partial\tilde{M}\times I \cup Z_0^2) \longrightarrow X$$

$(Z_i = Z,\ Z_0^i = Z_0,\ i = 1,2)$

por

$$F(x) = \begin{cases} G(x) & \text{si } x \in Z_1 \\ \tilde{H}(x) & \text{si } x \in \tilde{M}\times I \\ \tilde{H}(x,1) & \text{si } x \in Z_2 \end{cases}$$

Es claro que F cumple las propiedades deseadas.

2. CPL-BORDISMO.

Por CPL representaremos la subfamilia de las HMLF-variedades cuyos puntos singulares interiores son acíclicos. Para las CPL-variedades de dimensión cuatro se exigirá además que sólo haya puntos singulares en el interior.

Obsérvese que en dimensiones distintas de cuatro las CPL-variedades y las HMLF-variedades coinciden por 1.5. La nota 1.6 nos dice que esto no es así en dimensión cuatro.

De forma natural podemos considerar la relación de bordismo entre las CPL-variedades cerradas, y gracias a 1.9 se deduce facilmente que se trata de una relación de equivalencia. Podemosentonces definir los grupos $\mathcal{N}_n^{CPL}$ de CPL-bordismo no orientado.

<u>2.1 Nota</u>. Es interesante observar que la familia CPL no es cerrada para la operación de tomar cilindro topológico. Así, como se vió en 1.2, $\Sigma^1\partial G_n\times I$ no está en CPL, pero sí lo está $\Sigma^1\partial G_n$. Sin embargo, 1.9 prueba que CPL está dotada de un cilindro categorial que permite definir la relación de bordismo.

<u>2.2 Teorema</u>. El morfismo olvido olv : $\mathcal{N}_n^{PL} \longrightarrow \mathcal{N}_n^{CPL}$ es un isomorfismo para todo $n \geqslant 0$, donde $\mathcal{N}_n^{PL}$ representa el n-ésimo grupo de PL-bordismo.

<u>Demostración</u>. Por 1.7 se tiene que "olv" es epiyectivo. Además, como para $n \leqslant 3$ las HMLF-variedades coinciden con las PL-variedades, sólo queda que probar que "olv" es inyectivo si $n \geqslant 3$. Así pues, sea M una PL-variedad con dim $M \geqslant 3$ que representa el elemento nulo de $\mathcal{N}_n^{CPL}$. Entonces existe una CPL-variedad Q tal que $\partial Q = M$. Utilizando los mismos razonamientos que en la demostración de 1.8, se puede construir una CPL-variedad Q' de modo que sólo contenga puntos singulares en $\partial Q' = M$. Si $n = 3$, Q' será directamante una PL-variedad; si $n > 3$ supongamos que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son los puntos singulares de Q', que están todos en el borde. Entonces

$$L_j = st(y_j;M) \cup lk(y_j;Q') = \partial st(y_j;Q')$$

es una PL-esfera de homología. Por [4] , existe una PL-bola de homología V_j tal que $\partial V_j = L_j$. De este modo

$$Q = (Q' - \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{s}t(y_j;Q')) \cup \bigcup_{j=1}^{k} V_j$$

es una PL-variedad cuyo borde es M. Hemos probado así que la clase de M en el grupo $\mathcal{N}_n^{PL}$ es el elemento neutro, y por tanto que "olv" es inyectivo.

Al igual que en los casos clásicos, podemos dar la definición de CPL-bordismo singular para CPL-variedades singulares $f : (M,\partial M) \longrightarrow (X,A)$, donde (X,A) es un par topológico cualquiera. La proposición 1.10 nos asegura que la relación anterior es de equivalencia.

<u>2.3 Nota</u>. La razón de la condición impuesta para la dimensión 4 en la definición de CPL-variedad es garantizar que la relación de CPL-bordismo singular es transitiva. Se puede probar que la relación de CPL-bordismo absoluto es transitiva sin imponer retricciones en dimensión cuatro. En efecto, si M, de dimensión tres, es CPL-bordante a M' por W_1, y M' lo es a M" por W_2, en el pegamiento $W_1 \cup W_2$, que puede no ser CPL-variedad, se sustituyen las estrellas abiertas de los puntos x M' no acíclicos por una PL-variedad cuyo borde sea $lk(x;W_1 \cup W_2)$

(esto es posible pues $\mathcal{N}_3^{PL} = 0$). Este método no se puede seguir en el caso simgular ya que se tropieza con el problema de extender aplicaciones contínuas.

Siguiendo los procedimientos habituales tenemos definidos los grupos $\mathcal{N}_n^{CPL}(X,A)$ de CPL-bordismo singular no orientado. Además por 1.10, estos funtores son homotópicos. La demostración de que dichos funtores definen una teoría de homología generalizada se realiza como en el caso de las seudovariedades (ver [2]) o de las HML-variedades (ver [7]), teniendo en cuenta que la existencia de entornos regulares es consecuecia de la siguiente proposición sobre células duales.

2.4 Proposición. Si K es una triangulación de M, CPL-variedad de dimensión n, y $f : K \longrightarrow L$ es una aplicación simplicial, dado $\alpha \in L$, la célula dual $D(\alpha;f)$ es una CPL-variedad de dimensión $n - \dim \alpha$. Además

$$\partial D(\alpha;f) = D(\alpha;f|\partial K) \cup \dot{D}(\alpha;f)$$

Recordemos que si $f : K \longrightarrow L$ es simplicial y $K' \lhd K$ y $L' \lhd L$ son subdivisiones baricéntricas tales que $f : K' \longrightarrow L'$ sigue siendo simplicial, se define la célula dual de $\alpha \in L$ respecto a f como

$$D(\alpha;f) = \{<\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_1,..,\hat{\sigma}_q> \in K' \mid \alpha \leq f(\sigma_0)\}$$

y

$$\dot{D}(\alpha;f) = \{<\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_1,..,\hat{\sigma}_q> \in K' \mid \alpha < f(\sigma_0)\}$$

Demostración de 2.4. Si $A = <\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_1,..,\hat{\sigma}_q>$ es un q-símplice de $D(\alpha;f)$ tal que $A \cap f^{-1}(\hat{\alpha}) \neq \emptyset$ se tiene

$$\mathrm{lk}(A;D(\alpha;f)) = f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(\hat{\alpha}) * \dot{D}(\sigma_0;\dot{\sigma}_1) * \ldots * \dot{D}(\sigma_{q-1};\dot{\sigma}_q) * \dot{D}(\sigma_q;K)$$

donde $f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(\hat{\alpha})$ es la PL-esfera de la dimensión correspondiente (ver [1]). Entonces, si $\dim \dot{A} = 0$, se tiene

$$\mathrm{lk}(A;D(\alpha;f) = f|_{\dot{\sigma}_q}^{-1}(\hat{\alpha}) * \dot{D}(\sigma_q;K) \quad \text{si } q > 0$$

$$\dot{D}(\sigma_q;K) \quad \text{si } q = 0$$

Como $\dot{D}(\sigma_q;K)$ es PL-isomorfo a $\mathrm{lk}(\sigma_q;K)$, en el primer caso estamos ante la PL-esfera o la PL-bola y en el segundo ante una PL-bola o PL-esfera de homología (ver 1.2a).

Si $\dim A > 0$ es fácil concluir que $\mathrm{lk}(A;D(\alpha;f))$ es la PL-bola o la PL-esfera.

Si ahora $A \cap f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ se tiene que $\mathrm{lk}(A;D(\alpha;f))$ es PL-isomorfo a

$$D(\alpha;f|\dot{\sigma}_0) * \dot{D}(\sigma_0,\dot{\sigma}_1) * \ldots * \dot{D}(\sigma_q;K)$$

y es fácil comprobar que $\mathrm{lk}(A;D(\alpha;f))$ es la PL-bola.

La descripción de $\partial D(\alpha;f)$ se hace igual que en [7] .

2.5 Teorema. El morfismo olvido

$$\mathrm{olv} : \mathcal{N}_n^{PL}(X,A) \longrightarrow \mathcal{N}_n^{CPL}(X,A)$$

determina una equivalencia natural entre teorías de homología.

Demostración. En el caso absoluto es una consecuencia inmediata de las proposiciones 1.7, 1.8 y 1.10. El caso relativo se deduce entonces del lema de los cinco.

2.6 Nota. La HMLF-variedad $\Sigma^1 H^3$ no puede ser componente del borde de ninguna HMLF-variedad de dimensión 5, pues, como se dijo en 1.6, H^3 representa un elemento no nulo del grupo θ_3^H. En particular, la relación clásica de bordismo no es reflexiva en estos casos.

Consideremos entonces toda HMLF-variedad cerrada de dimensión 4, M, como la unión disjunta $M_a + M_s$, donde M_a es la reunión de las componentes conexas que tienen todos sus puntos singulares acíclicos y M_s la reunión de aquellas componentes con algún punto singular no acíclico. Definimos, a partir de la descomposición anterior, la siguinte relación de "bordismo": M y M' son "bordantes" si $M_s = M'_s$ y M_a es bordante a M'_a por una HMLF-variedad. Esta relación es de equivalencia y el conjunto cociente lo denotamos por $\mathcal{M}_4^{HMLF}$. La reunión disjunta de los representantes sólo determina una estructura de semigrupo sobre dicho conjunto, pues, por ejemplo, $\Sigma^1 H^3$ no posee inverso.

2.7 Nota. Aunque hemos trabajado sólo en el caso no orientado, todos los resultados que aquí se exponen tienen la correspondiente versión para el caso orientado.

REFERENCIAS

[1] M.M. COHEN: "Simplicial structures and transverse cellularity". Ann. of Math. 85(1967) 218-245

[2] E. DOMINGUEZ: "Grupos de Seudobordismo". Rev. Acad. Cienc. Zaragoza 30 (1975) 5-16

[3] L. GLASER: "Uncountably many contractible open manifolds". Topology 6 (1967) 37-42

[4] M.A. KERVAIRE: "Smooth homology spheres and their fundamental group". Trans. A.M.S. 144(1969) 67-72

[5] R.C. KIRBY and M.G. SCHARLEMAN: "Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere". Proc. of the Georgia Topology Conf. 1977. Academic Press 1979.

[6] C.R.F. MAUNDER: Algebraic Topology. Van Nostrand 1970

[7] A. QUINTERO: "Algunos resultados sobre el bordismo de las variedades de homología". Por aparecer

[8] H. SATO: "Constructing manifolds by homotopy equivalence. An obstruction to constructing PL manifolds from homology manifolds" Ann. Inst. Fourier 22(1972) 271-286

[9] J.R. STALLINGS: Lectures on Polyhedral Topology. Tata Inst. Bombay 1968