LOS PROCESOS ESTABLES COMO GENERALIZACIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO: EL IBEX35

JESÚS MUÑOZ SAN MIGUEL
e-mail: jmiguel@us.es

JOSÉ JAVIER BUSTO GUERRERO
e-mail: jjbusto@us.es

Departamento de ECONOMÍA APLICADA I
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Área temática: Métodos cuantitativos.

Resumen

El movimiento browniano, caracterizado por la independencia y la normalidad de la distribución de sus incrementos, es uno de los modelos más utilizados para describir el precio de una acción. Sin embargo, su distribución empírica difiere de la distribución normal. En los años sesenta Benoît B. Mandelbrot (1924-) propuso como generalización del movimiento browniano los procesos estables como modelo de la evolución de los precios de un activo financiero manteniendo la independencia de los incrementos del proceso. En este trabajo se analiza algunas de las aportaciones de esta generalización tomando como modelo la serie de los cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa.

Palabras clave: Proceso estocástico, Movimiento browniano, Proceso estable, Ibex35.

Abstract

Browniam motion, whose increments are Gaussian and independent, is one of the most used models to describe stock prices. However, its empirical distribution differs from the Gaussian one. During the sixties Benoit B. Mandelbrot (1924-) suggested stable processes, which generalize Brownian motion, as a model of price variation. In this paper is analyzed some features of stable processes taking the Ibex35 series as a model.

Key words: Stochastic process, Brownian motion, Stable process, Ibex35.

1.-Introducción

El movimiento browniano, caracterizado fundamentalmente por la independencia y normalidad de la distribución de sus incrementos, aparece por primera vez como modelo para describir la evolución de los precios de un activo financiero como un proceso estocástico en 1900 en la tesis de L. Bachelier [1], Sin embargo, no cobra importancia hasta que en 1965 el premio nobel en Economía P. A. Samuelson (1915-) propone el movimiento browniano geométrico o económico en el cual los logaritmos de los precios son los que siguen un movimiento browniano [9], para lo que se basa en la idea de trabajar con los logaritmos de los precios que aparece en 1959 en un artículo de M. F. M. Osborne[7]. En la misma década B. B. Mandelbrot (1924-) propuso como generalización del movimiento browniano los procesos estables, cuyos incrementos también son independientes pero donde las distribuciones que siguen estos incrementos son las distribuciones estables [3].

2.-Las distribuciones estables

Las distribuciones estables se caracterizan por el hecho de que la suma ponderada de dos variables aleatorias estables e independientes es, salvo centrado y escala, una variable aleatoria estable; propiedad que caracteriza a la distribución normal si añadimos el hecho de que tengan varianza finita. Excepto en casos muy concretos (distribuciones normal, de Cauchy y de Levy) no tienen una expresión para su función de densidad y se describen mediante su función característica [2, 8, 10]:

$$\varphi(t) = \exp\left(i\mu t - \gamma \,|\, t \,|^{\alpha} \left[1 + \beta \frac{t}{|\, t \,|} w(t,\alpha) \right] \right) \quad \text{con} \quad w(t,\alpha) = \begin{cases} tg\left(\dfrac{\alpha\pi}{2} \right) & \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi} \ln |\, t \,| & \alpha = 1 \end{cases}$$

Los parámetros dan lugar a las distintas distribuciones estables, que notaremos por $S\alpha,\beta[\mu,\gamma]$, y son:

- $\alpha\in(0,2]$ (exponente característico),
- $\beta\in[-1,1]$ (parámetro de asimetría),
- $\mu\in(-\infty,+\infty)$ (parámetro de localización)
- $\gamma\in[0,+\infty)$ (parámetro de escala).

Para $\alpha=2$, la función característica resultante corresponde a una distribución normal con media μ y varianza 2γ (el valor de β es irrelevante, por lo que al ser simétrica se toma $\beta=0$). Para $\alpha=1$ y $\beta=0$ la función característica que se obtiene es la de una distribución de Cauchy con mediana μ y parámetro de escala γ. Ambas distribuciones son los casos límite para la finitud de la esperanza y de la varianza, ya que las distribuciones estables con esperanza finita están comprendidas entre la distribución normal, que tiene esperanza y varianza finita, y la distribución de Cauchy, cuya esperanza y varianza son infinitas.:

- si $\alpha\in(0,1]$ la distribución tiene media y varianza infinita,
- si $\alpha\in(1,2)$ la distribución tiene media finita pero varianza infinita,
- si $\alpha=2$ la distribución tiene tanto media como varianza finita.

El exponente característico determina el grado de apuntamiento de la distribución y el tamaño de las colas (figura 1):

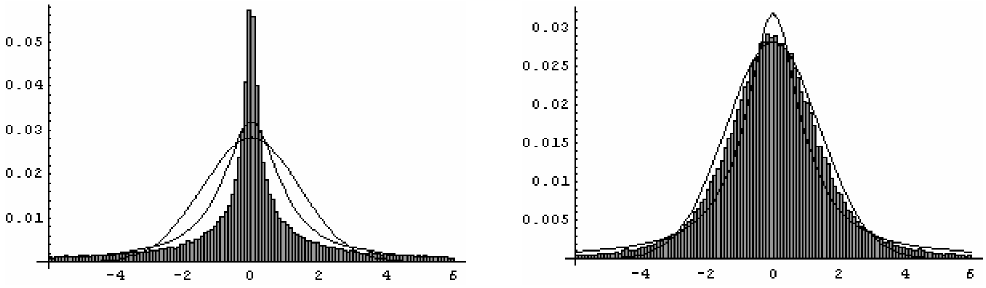

Figura 1: Distribuciones estables $S_{\alpha,0}[0,1]$ para α=0.5 y α=1.5 comparadas con la distribución de Cauchy (α=1) y la distribución normal (α=2).

El parámetro de asimetría, β, como su nombre indica, determina el grado de asimetría de la distribución. La distribución es simétrica para β=0 y para $\beta \neq 0$ es tanto más asimétrica cuanto mayor es el valor absoluto de β, estando sesgada a la derecha para β>0 y a la izquierda para β<0 (figura 2).

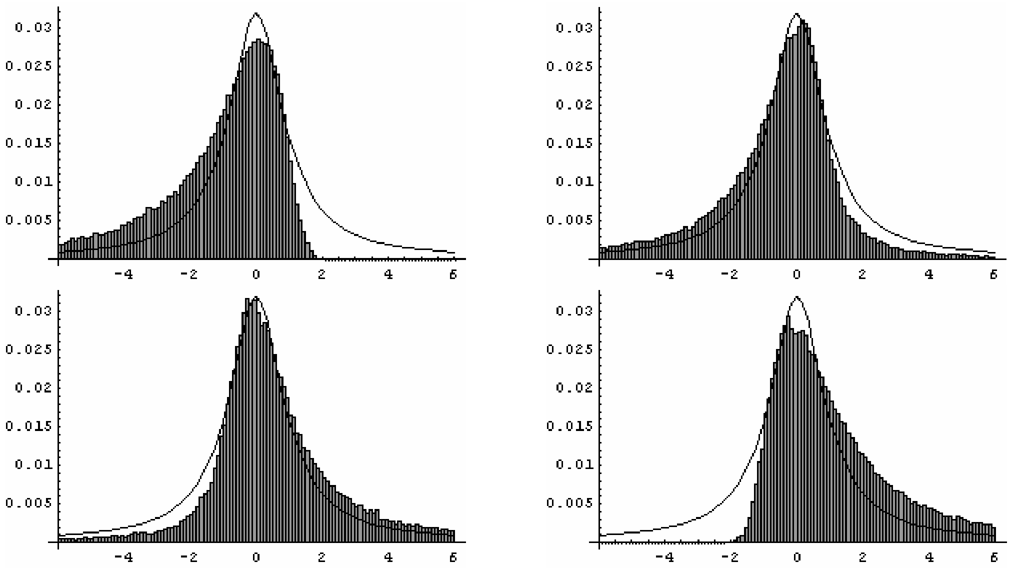

Figura 2: Distribuciones estables $S_{1,\beta}[0,1]$ para β=-1, β=-0.5, β=0.5 y β=1 comparadas con la distribución de Cauchy (β=0).

El parámetro de localización de la distribución, μ, tiene una interpretación clara cuando la media es finita, α>1, ya que en este caso es la media de la distribución y cuando la distribución es simétrica, β=0, ya que en este caso corresponde a la mediana. Sin embargo, cuando la media es infinita, $0<\alpha\leq 1$, y no es simétrica, $\beta \neq 0$, μ no tiene una interpretación tan clara y simplemente es un parámetro que describe la localización de la distribución (figura 3).

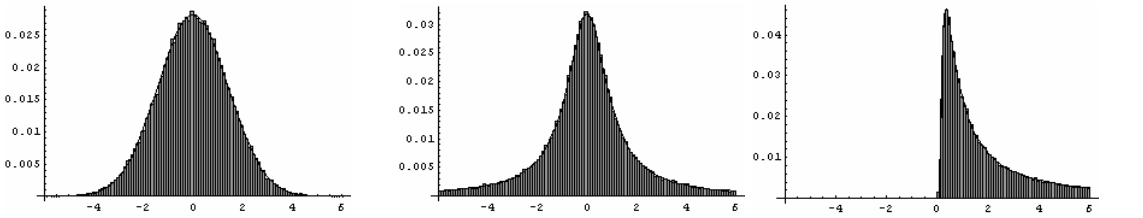

Figura 3: Las distribuciones estables que tienen función de distribución con parámetro de localización cero. El parámetro de localización de la distribución normal (α=2) coincide con la media ya que tiene esperanza finita. El parámetro de localización de la distribución de Cauchy (α=1 y β=0) coincide con la mediana ya que es simétrica. El parámetro de localización de la distribución de Levy (α=0.5 y β=1), que tiene esperanza infinita y no es simétrica, no coincide ni con la media ni con la mediana.

El parámetro de escala de la distribución, γ, como su nombre indica, es un parámetro finito que define la escala de la distribución. En el único caso donde la varianza es finita, α=2, corresponde a la mitad de la varianza.

3.-El movimiento browniano y los procesos estables

El movimiento browniano clásico se define como un proceso que comienza en el origen casi seguro, cuyos incrementos son independientes y están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal, en el que el hecho de considerar la media como cero se debe a que en otro caso se descompone como la suma de una tendencia y un proceso con media cero [10]:

Definición 3.1: Un **movimiento browniano**, es un proceso estocástico, $\{B(t): t \geq 0\}$, que comienza en el origen casi seguro y verifica:

- El proceso tiene incrementos independientes.

- $\forall t \geq 0\ \forall h \geq 0\ \ B(t+h)-B(t) \sim N(0,\sigma2\ h)$

Para $\sigma=1$ diremos que es un movimiento browniano estándar. ♣

Los incrementos del proceso son estacionarios, están idénticamente distribuidos y sólo dependen del incremento temporal. Además, al comenzar en el origen, el proceso coincide con su incremento respecto al origen y sigue una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal:

$$B(t) \sim N(0,\sigma2\ t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Si generamos un ruido blanco gaussiano estándar siguiendo una distribución normal con media cero y varianza unitaria sus sumas acumuladas forman una aproximación al movimiento browniano (figura 4).

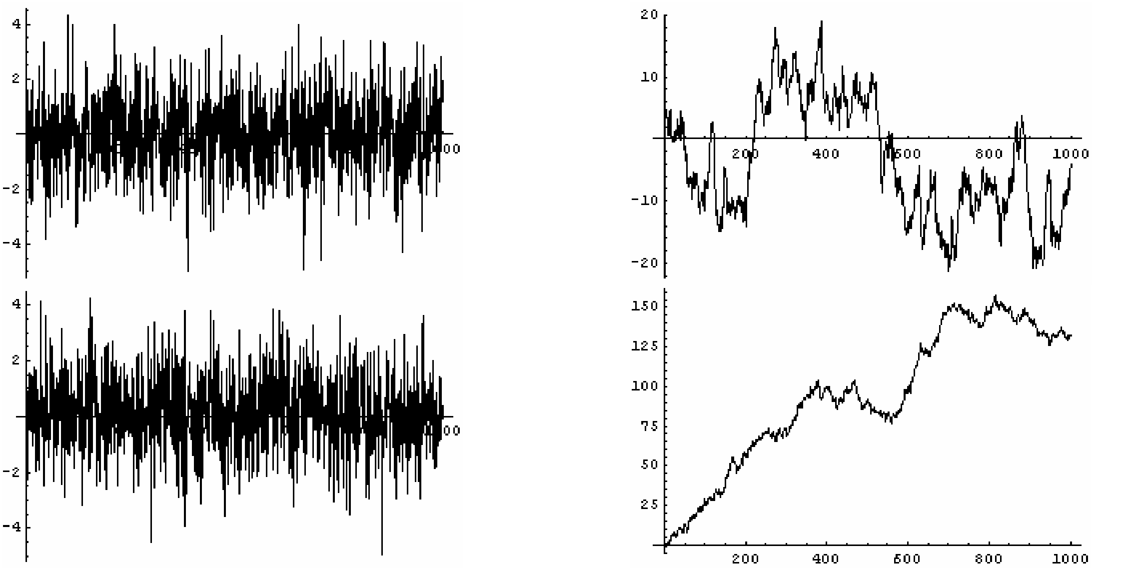

Figura 4: Las sumas acumuladas de un ruido blanco gaussiano estándar, obtenido siguiendo una distribución normal con media cero y varianza unitaria, forman una aproximación al grafo de un movimiento browniano (dos realizaciones independientes).

Los procesos estables se obtienen al considerar que sus incrementos siguen una distribución estable con exponente característico α, $0<\alpha\leq 2$, en lugar de una distribución normal, que es estable con $\alpha=2$. Al igual que en el movimiento browniano se considera que no tienen tendencia, por lo que el parámetro de localización, μ, que en la distribución normal es la media, se toma como cero [8, 10]:

Definición 3.2 Un proceso estable es un proceso estocástico $\{L\alpha,\beta(t): t\geq 0\}$ que comienza en el origen (casi seguro) y verifica:

- El proceso tiene incrementos independientes.
- $\forall t\geq 0, \forall h\geq 0: L\alpha,\beta(t+h)-L\alpha,\beta(t) \sim S\alpha,\beta(0,\gamma h)$. ♣

El parámetro de escala de la distribución, γ, va a establecer la proporcionalidad de los incrementos de un proceso estable con el incremento temporal, análogamente al movimiento browniano clásico único caso con varianza finita (α=2) donde con la sustitución $\gamma=\sigma2/2$ la distribución de los incrementos es normal con media cero y varianza $\sigma 2h$. Como los incrementos del proceso están idénticamente distribuidos y sólo dependen del incremento temporal, los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar en el origen, se tiene:

$$L\alpha,\beta(t) \sim S\alpha,\beta(0,\gamma t), \quad \forall t\geq 0.$$

Si en vez de un ruido blanco como en el movimiento browniano consideramos que los incrementos siguen distribuciones estables con parámetro de localización cero y parámetro de escala unitario obtenemos aproximaciones a distintos procesos estables que dependen fundamentalmente del exponente característico (figura 5).

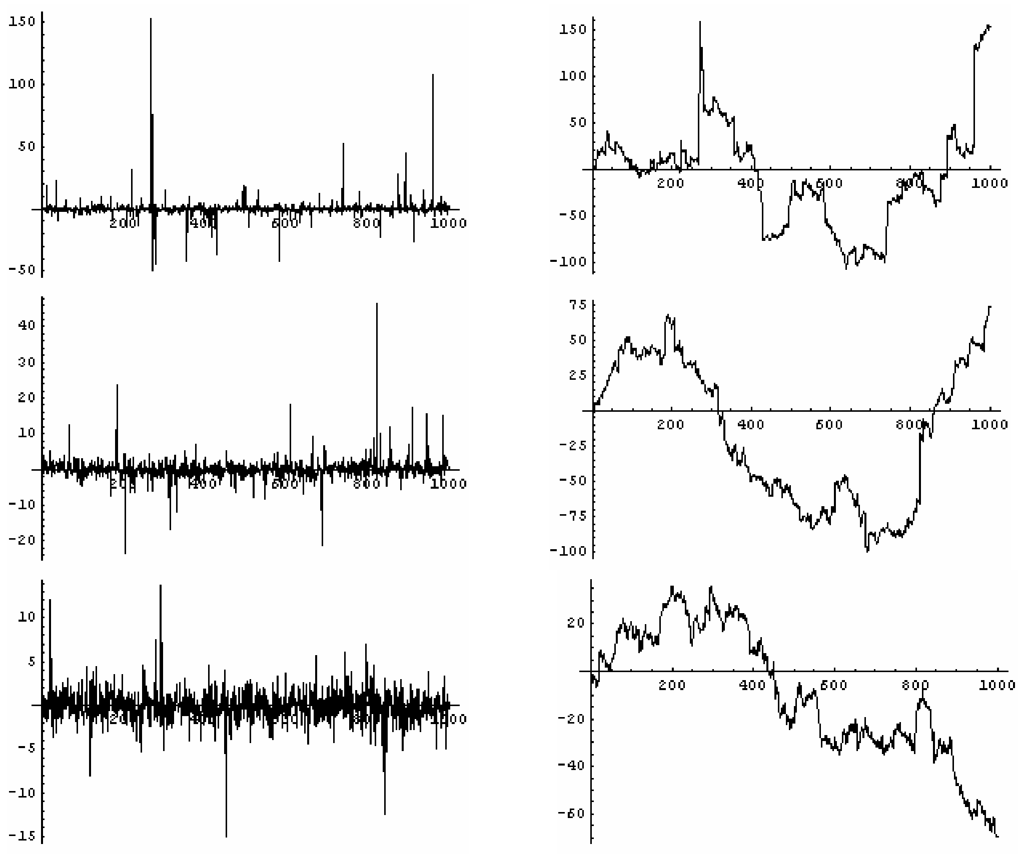

Figura 5: Las sumas acumuladas de una distribución estable con parámetro de localización cero y parámetro de escala unitario forman aproximaciones a distintos procesos estables que dependen fundamentalmente del exponente característico de la distribución (α=1.25, 1.5 y 1.75).

4.-Conclusiones

Aunque el movimiento browniano es uno de los modelos más utilizados para describir el precio de una acción, en la mayoría de las acciones los datos empíricos no se ajustan bien al modelo, ya que la distribución empírica de los incrementos difiere de la normal, sobre todo en el tamaño de las colas. Por tanto, si en vez de utilizar el movimiento browniano como modelo de los precios de una acción utilizamos los procesos estables disponemos de dos nuevos parámetros para capturar la forma de la distribución de los incrementos del proceso: el exponente característico del proceso, que determina el grado de apuntamiento de la distribución, y el parámetro de asimetría, que determina el grado de simetría de la distribución (figura 6).

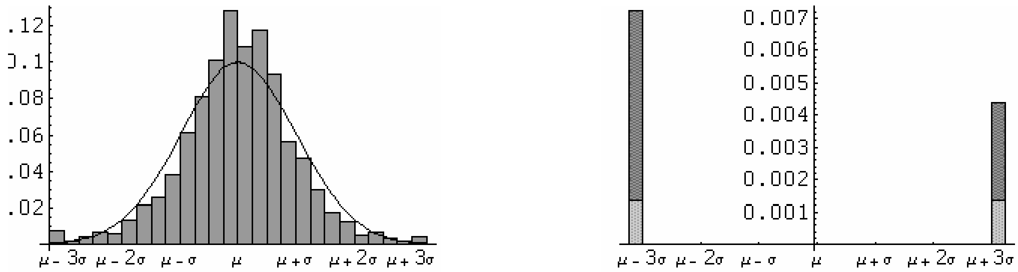

Figura 6: La distribución empírica de los incrementos logarítmicos de la serie ibex35 presenta diferencias con la distribución correspondiente a una normal con la misma media y varianza: hay un fuerte nivel de apuntamiento y la distribución está ligeramente sesgada a la izquierda. Además, sus colas son sensiblemente mayores.

El exponente característico del proceso se considera que varía entre $\alpha=1$ (distribución de Cauchy) y $\alpha=2$ (distribución normal), ya que en este caso la distribución tiene media finita y varianza infinita y, generalizando el caso del movimiento browniano, sería posible representar la serie como la suma de una tendencia y un proceso con media cero. Cuando se consideran los cierres correspondientes a distintos periodos, el comportamiento del proceso obtenido es compatible con el comportamiento lineal de la media muestral, al igual que en el movimiento browniano con tendencia, y además explica el comportamiento errático de la varianza muestral, que no es compatible con el movimiento browniano (figura 7).

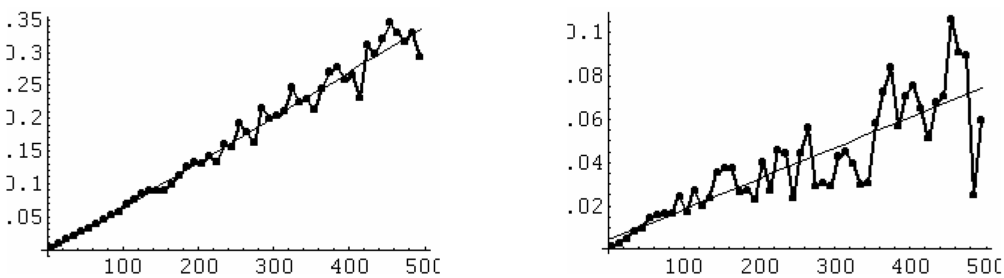

Figura 7: Si en la serie Ibex35 representamos la media muestral de las subseries que se obtienen al considerar distintos periodos de cierre se observa que estas medias muestran una tendencia lineal. Sin embargo, al representar la varianza muestral se observa que su comportamiento es errático, lo que no sucede en el movimiento browniano, ya que en este caso la varianza es proporcional al incremento temporal.

Esta generalización del movimiento browniano mantiene la independencia de los incrementos del proceso y sigue siendo adecuada para modelizar la apariencia errática e irregular que presentan las gráficas del precio de una acción y que se mantiene cuando se reduce la escala temporal en la que las representamos (esta característica común a las gráficas del precio de una acción, el movimiento browniano y los procesos estables recibe el nombre de autoafinidad y se analiza con detalle en [6]) (figura 8).

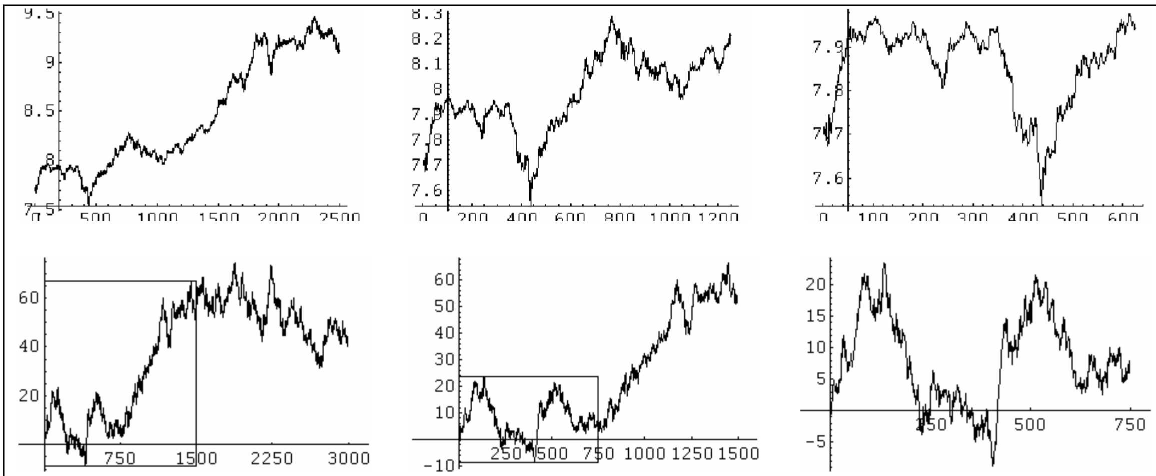

Figura 8: Cuando representamos la serie de los logaritmos de los cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa en intervalos de tiempo con una duración cada vez menor los grafos siguen mostrando una apariencia errática e irregular (primera fila). Si simulamos un proceso estable y lo representamos en intervalos cada vez más pequeños los gráficos obtenidos mantienen el mismo aspecto y son iguales en sentido estadístico, ya que el proceso del que provienen es un proceso estable que sólo difiere del original en la escala vertical (segunda fila).

Bibliografía

1. Bachelier, L. Theory of speculation. En *The Random Character of Stock Market Prices*. Risk Books, 2000 (editor P. Cootner).
2. Feller, W. *Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. II. Limusa, 1978.
3. Mandelbrot, B.B. The pareto-lévy law and the distribution of income. *Int. Economic Review*, 1:79--106, 1960.
4. Mandelbrot, B. B. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer-Verlag, 1997.
5. Muñoz San Miguel, J. *La dimensión fractal en el mercado de capitales*. Tesis doctoral. Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla, 2002.
6. Muñoz San Miguel, J. Autoafinidad en series temporales. *Actas Asepelt XX*. Badajoz 2005.
7. Osborne, M. F. M. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7:145--173, 1959.
8. Samorodnitsky, G. y Taqqu, M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes.* Chapman and Hall, 1994
9. Samuelson, P.A.. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6:13--31, 1965.
10. Shiryaev, A. N. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. World Scientific, 1999.