



**Pinceladas sobre Concepciones y
Conocimiento Especializado de un
Profesor de Educación Primaria
en la Enseñanza de la Geometría**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

NOMBRE: *JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ*

TITULACIÓN: *GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA*

TUTORA: *ANA MARÍA ESCUDERO DOMÍNGUEZ*

CURSO: *2017/2018*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

INDICE

RESUMEN	1
1. INTRODUCCIÓN	3
2. MARCO TEÓRICO	4
2.1 LA GEOMETRÍA EN EL ÁMBITO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA	4
2.1.1 CONTENIDOS DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA	5
2.1.2 EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA	6
2.1.3 LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA	8
2.2 LA INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR.....	10
2.2.1 INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS	12
2.2.2 INVESTIGACIÓN SOBRE CONCEPCIONES DEL PROFESOR	18
3. METODOLOGÍA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO	21
3.1 OBJETIVO	21
3.2 METODOLOGÍA Y ESTUDIO DE CASO.....	22
3.3 HERRAMIENTAS Y PROCEDIMIENTOS	22
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS	26
4.1 ANÁLISIS DE LOS DOMINIOS Y SUBDOMINIOS DEL MTSK	27
4.1.1 Conocimiento de los temas matemáticos (KoT).....	27
4.1.2 Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	29
4.1.3 Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	30
4.1.4 Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM).....	31
4.1.5 Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT).....	31
4.1.6 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	34
4.2 ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DEL PROFESOR	34
5. CONCLUSIONES.....	37

BIBLIOGRAFÍA	40
ANEXOS	46
ANEXO 1	46

RESUMEN

Las creencias y el conocimiento de los docentes guardan, sin duda, una estrecha relación con la forma de educar y la manera en que los alumnos entienden el mundo que les rodea. La idea de que la mentalidad del profesor ha influido directamente en la educación de los alumnos ha estado por bastante tiempo extendida en el ámbito investigativo. En este estudio se trata de determinar esta relación, intentando detectar algunas pinceladas de comportamiento y actuación docente obtenidas mediante el análisis de una entrevista a un profesor de Educación Primaria en la enseñanza de las matemáticas, estudiando sus conocimientos y concepciones acerca del ámbito de la geometría.

Para ello nos basaremos en un modelo de análisis actual denominado Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (en adelante MTSK), que se utiliza con el objetivo de conocer y determinar el conocimiento especializado y las concepciones que posee un profesor de matemáticas, siguiendo los indicadores y dominios que tiene el modelo.

PALABRAS CLAVE: Conocimiento, Concepción, Geometría, Matemáticas, Profesor.

ABSTRACT

The beliefs and the knowledge of teachers have a close relationship with the way of educate and the way in which students understand the world that the teacher shows them. The idea that the teachers' mindset has affected to the education of students has been widespread in the field of research for quite a bit of time. This study tries to determine this relationship, trying to detect some brush-strokes of behaviour and teaching performance obtained by an analysis of a interview passed to a teacher of the Primary School in the mathematical teaching, analysing their knowledge and conceptions about the field of Geometry.

In order to do this, we will base this proyecto n a current model wich is called Teacher's Specialised Knowledge (hereinafter MTSK), which is used with the objective of knowing and determining the specializad knowledge and conceptions thatthe mathematics teacher has, following the indications and domains that this model has.

KEYWORDS: Conception, Geometry, Mathematics, Knowledge, Teacher.

1. INTRODUCCIÓN

La geometría es una rama de las matemáticas que ha sido estudiada desde los inicios de la edad racional del ser humano. Desde los griegos hasta nuestros días, esta ciencia nos ha servido de base para dar respuesta a muchas de las cuestiones que nos abordan en nuestra vida. De ahí viene la importancia de inculcar a los más pequeños de nuestra sociedad la importancia de la geometría y su valor para nuestro mundo. Pero ¿cómo debemos enseñar la geometría?, ¿influye la manera de enseñarla en la manera de entenderla de nuestros alumnos?, ¿qué importancia tiene la idea que el profesor tenga sobre estas y sobre las matemáticas en general? Estas cuestiones han sido objeto de estudio durante muchos años. En este trabajo intentaremos sonsacar algunas pinceladas sobre aspectos relacionados con el conocimiento que muestra un profesor de matemáticas y pensaremos como afecta a la educación de los alumnos.

Antes de comenzar con esta investigación debemos tener en cuenta el concepto de qué son las matemáticas. Según la Real Academia Española (2014), las matemáticas son la ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones. Estas, además, nos ayudan a reconocer nuestra realidad y nos permiten compararla y considerarla para la toma de decisiones, lo cual es vital en nuestra vida diaria.

Según Martínez (1994), “el aprendizaje de las matemáticas es un medio excepcional para desarrollar las capacidades cognitivas que se transfieren con mayor facilidad a otros dominios de aprendizaje, por ello su inclusión en el currículo es esencial para la formación del alumnado” (p.11).

Tal importancia tiene las matemáticas en nuestro día a día que son una parte fundamental dentro de nuestro sistema educativo. La ley que, actualmente, regula la educación y la acción de los centros escolares en nuestro país es Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE, 2013).

En este proyecto de investigación nos centraremos en el área de matemáticas, la cual conforma una de las materias troncales de la Educación Primaria, como se ha comentado con anterioridad. Según la LOMCE, las matemáticas son un conjunto de saberes

asociados a los números y a las formas, y constituyen una forma de analizar diversas situaciones y obtener conclusiones sobre ellas que nos permitan identificar estructuras que nos ayuden a encontrar patrones y leyes matemáticas. En la Educación Primaria el objetivo es que los alumnos se familiaricen con la alfabetización numérica para que, así, estos puedan resolver problemas básicos en su vida cotidiana.

El currículo de la Educación Primaria, en lo referente a las matemáticas, aborda una variedad extensa de bloques de contenidos, ya que esta es una ciencia que adopta multitud de formas y saberes, como el álgebra, la aritmética o incluso la geometría, la cual será una de las piezas central de nuestro estudio.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 LA GEOMETRÍA EN EL ÁMBITO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Cuando hablamos de geometría solemos pensar, a menudo, que es algo complicado y está totalmente relacionado con las figuras geométricas. Sin embargo, esta abarca mucho más. La palabra geometría procede de los vocablos griegos “*geo*” (tierra) y “*metrein*” (medir), que unidos significan “medida de la tierra”. Es una parte de las matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades y medidas de las figuras en los planos o en el espacio.

La geometría siempre ha estado relacionada con las actividades que lleva a cabo el ser humano. Por ello, tiene una gran importancia en el sistema educativo. Según Gamboa y Vargas (2013), “la geometría despierta en el estudiante diversas habilidades que le sirven para comprender otras áreas de las Matemáticas y le prepara mejor para entender el mundo que lo rodea” (p. 75). Sin embargo, la pregunta es la siguiente: ¿a qué edad deben los alumnos comenzar a adquirir conocimientos de geometría? ¿Qué nivel de conocimiento se debe conseguir? Pues bien, el individuo, mientras antes vaya adquiriendo conocimiento matemático, mayor facilidad tendrá a la hora de superar las expectativas de la sociedad a la que pertenece. Según Andonegui (2006), “el estudio de la geometría ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información recibida

a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar destrezas que le permiten comprender e influir el espacio donde vive” (p. 6).

Todo esto nos permite saber cuán de importante es la geometría para el desarrollo de los estudiantes, tanto a nivel personal como en la sociedad en sí. Es por ello, que los contenidos que los docentes deben enseñar a los educandos se deben llevar a cabo generando “situaciones problema” que les permitan descubrir la solución a esas situaciones mediante ellos mismos.

2.1.1 CONTENIDOS DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Los contenidos referidos a la Geometría en la Educación Primaria están agrupados exactamente en el Bloque 4 según el currículo vigente. Aunque en cada etapa educativa se abordan diferentes aspectos de la geometría, de conceptos generales a específicos según la edad de los alumnos, la LOMCE expone los siguientes contenidos para toda la etapa de Educación Primaria:

- La situación en el plano y en el espacio.
- Posiciones relativas de rectas y circunferencias.
- Ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice.
- Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos.
- La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
- Formas planas y espaciales: figuras planas: elementos, relaciones y clasificación.
- Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. Clasificación de los paralelepípedos.
- Concavidad y convexidad de figuras planas.
- Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados.

- Perímetro y área.
- La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular.
- Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación.
- Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas. Tipos de poliedros.
- Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.
- Regularidades y simetrías: Reconocimiento de regularidades.

Es importante resaltar que el papel del docente en la enseñanza de la geometría es muy relevante. Debido a que los alumnos aprenden los conceptos de forma gradual, los alumnos tienen que ir superando “niveles de aprendizaje” para así poder adquirir un conocimiento adecuado y completo de esta área de las matemáticas.

2.1.2 EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Los alumnos van adquiriendo los conocimientos progresivamente completándolos hasta llegar a analizar situaciones variadas y más complejas. El aprendizaje de la geometría en la etapa de primaria es primordial, ya que sirve a los niños como base para desarrollar otros muchos aspectos de la matemática, la geometría es una rama que interconecta con las otras muchas de la ciencia matemática. Además, es una de las más antiguas. Es una ciencia aplicable, en igual manera a la vida cotidiana y además permite a los niños desarrollar la capacidad de razonar, comparar, clasificar, etc., hasta llegar a desarrollar y relacionar unos elementos geométricos con otros.

El aprendizaje por etapas o niveles viene recogido en la Teoría o Modelo de Van Hiele. Esta Teoría se origina en el año 1957 y fue diseñada en común por el matrimonio holandés formado por Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, en la Universidad de Utrecht. Los Van Hiele hacen una propuesta de cinco niveles secuenciales y progresivos, los cuales, hay que aclarar, no van asociados con la edad. Los niveles cumplen algunas características, tales como que el estudiante no podrá alcanzar un nivel sin pasar por el anterior, ya que, como hemos comentado con

anterioridad, se trata de una progresión secuencial e invariante. Además, lo que en un nivel determinado tiene carácter implícito, en el siguiente nivel de pensamiento se vuelve explícito. Por otro lado, cada nivel posee un lenguaje utilizado determinado, o símbolos lingüísticos, los cuales se interconectan, dotándole así de un significado. Debido a esto, dos estudiantes de distintos niveles no pueden entenderse.

A continuación, pasamos a describir cada uno de los niveles de Van Hiele para la didáctica de la geometría:

- NIVEL 1: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO. Los alumnos en este nivel perciben los objetos como una unidad, sin diferenciar sus componentes. A la hora de describirlos, lo hacen por su apariencia física mediante su visualización. Se buscan similitudes con objetos de su vida cotidiana. No hay lenguaje geométrico específico.
- NIVEL 2: ANÁLISIS. Se diferencian las propiedades y los componentes del objeto en sí a través de la visualización y la experimentación. Saben describir las figuras, pero no relacionar unas características de estas con otras. No clasifican ni objetos ni figuras teniendo en cuenta las propiedades que tienen.
- NIVEL 3: ORDENACIÓN O CLASIFICACIÓN. Según Fouz y De Donosti (2005), en este nivel se describen las figuras de manera formal, pues el nivel de razonamiento se ha alcanzado en el nivel anterior. Esto es importante porque conlleva entender el significado de las definiciones.

Por otro lado, realizan clasificaciones lógicas de manera formal. Según Jaime (1993), la demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se utilizan razonamientos deductivos informales.

- NIVEL 4: DEDUCCIÓN FORMAL. Según Fouz y De Donosti (2005), en este nivel los alumnos hacen demostraciones lógicas y formales. Se comprenden las relaciones entre las propiedades y se entiende cómo se llega a los mismos resultados partiendo de proposiciones distintas. Cuando se adquiere este nivel se tiene una visión globalizada de las Matemáticas.

- NIVEL 5: RIGOR. En este nivel se puede trabajar la geometría de una manera mucho más específica y abstracta. En este punto, se alcanza el más alto nivel del conocimiento matemático. Según Alsina, Fortuny y Pérez (1997), este nivel solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad con una buena capacidad y preparación de la geometría, es decir, prácticamente un conocimiento abstracto del área comentada.

Como se puede observar en cada descripción de los niveles de Van Hiele, todos los niveles son diferentes entre sí pero marcan las pautas y pasos que el individuo poco a poco va adquiriendo para llegar al máximo escalón posible. Es por ello, que no nos podemos saltar ninguno de ellos, pues no se tendría un correcto conocimiento del área y no se podría avanzar conforme al siguiente nivel.

Según hemos visto, tenemos una idea de cómo secuenciar los contenidos y conceptos del área de la geometría. Sin embargo, ahora nos es necesario saber cómo adaptar esos niveles a una unidad didáctica y como plantear actividades para su desarrollo. Para ello, tendremos que valernos de las fases comentadas y descritas posteriormente por dicho modelo.

2.1.3 LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

En lo referente a la enseñanza de la geometría, Jaime (1993) argumentaba que:

Los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro. Las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (p. 9).

Se argumenta que, si la instrucción sigue esta secuencia de fases, el alumno podrá ir avanzando a niveles superiores a los que se encuentra.

Las fases a las que se refieren los Van Hiele son las siguientes:

- FASE 1: INFORMACIÓN. Según Salazar (2011), “el objetivo de esta fase es doble, en primer lugar, el maestro aprende qué conocimiento previo tienen los estudiantes acerca del tema y, en segundo lugar, los estudiantes conocen en qué dirección se dará el estudio o trabajo a realizar” (p.29).
- FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA. Los alumnos tienen que indagar en el tema de estudio que el profesor les ha proporcionado. El objetivo principal es que descubran los componentes básicos del conocimiento y resuelvan los problemas planteados que darán, mediante su exploración, resultados para la situación o situaciones planteadas.
- FASE 3: EXPLICACIÓN. Según Salazar (2011), “al construir sobre sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus expresiones acerca de las estructuras que han observado” (p. 30).
- FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE. Los alumnos deberán servirse de lo que han aprendido anteriormente para resolver situaciones diferentes a las que ya han resuelto. Estas serán un poco más complejas para ir aumentando el nivel de dificultad. El profesor debe limitarse a plantear el problema y prestar la mínima ayuda posible. Según Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), “los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales” (p.11).
- FASE 5: INTEGRACIÓN. Según Jaime y Gutiérrez (1990), en esta fase los alumnos tienen que relacionar los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente. El profesor fomenta este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas no añadan nada nuevo al estudiante.

Como podemos observar, en las fases de Van Hiele el papel o rol del docente es crucial a la hora de guiar a los alumnos por el buen camino del aprendizaje de las matemáticas. Es por ello por lo que el profesor debe tener un conocimiento específico de las mismas para poder estar a la altura en su enseñanza. Nos disponemos, pues, a hacer un análisis concreto sobre la importancia que tiene el

conocimiento y las concepciones que tiene el profesor de matemáticas sobre las mismas y el papel que juegan estas características a la hora de la enseñanza de estas.

2.2 LA INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Resulta evidente que una de las características más importantes que se debe llevar a cabo a la hora de la enseñanza de la Educación Matemática es el desarrollo profesional del profesorado. Según Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001), la carrera profesional de los docentes tiene que ver con la manera en que se representa la enseñanza a lo largo de su experiencia como alumno y la manera en que contempla el mundo. Es por eso por lo que, su tarea educativa la realizará de una manera u otra.

En el ámbito educativo de las matemáticas, el desarrollo profesional del profesor resulta ser un proceso progresivo en el que tendrá que enfrentarse a una serie de acontecimientos, tales como el contexto donde se va a desarrollar la adquisición de los contenidos, el estilo de enseñanza que se lleve a cabo, la socialización, etc., los cuales afectarán de una manera u otra al proceso de enseñanza de esta área tan importante.

Según Brown y Borko (1992), “para la comprensión del desarrollo profesional del docente, hay que considerar al profesor como un aprendiz adulto cuyo desarrollo es el resultado de cambios en su estructura cognitiva, pasando a alcanzar mayor madurez y complejidad” (p. 227). Por otro lado, según Estepa (2000), se entiende el conocimiento del profesor como un compuesto de saberes y experiencias que este domina y utiliza para el desarrollo de su labor docente.

El desarrollo profesional del profesor tiene que ver con la toma de conciencia de sus concepciones, de su manera de entender la profesión, de su conocimiento, de sus necesidades y de la puesta en práctica de su enseñanza como docente (Jaworski, 1998).

El desarrollo de la acción docente se divide en tres partes principales. La primera de ellas es la planificación didáctica, que hace referencia a cómo va a enfocar los contenidos y de qué manera los va a poner en práctica con el alumnado. Después se

realiza la puesta en práctica, donde se encargará de poner en marcha lo que ha planificado con anterioridad. Por último, se encuentra la reflexión, donde el docente se encarga de determinar y examinar si los contenidos matemáticos han sido entendidos y adquiridos por el alumnado.

Cabe destacar que esta última fase debería de impartirse también durante la puesta en práctica de la planificación, pues resultaría relevante que, si el profesor determina algún tipo de complicación o situación en la que el alumnado no llega a entender lo que se está impartiendo, el profesor debe cambiar lo planificado para mejorar la situación de aprendizaje inmediatamente.

Según, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2007), el proceso del desarrollo profesional del profesor se representa con una hélice. Este modelo helicoidal representa el desarrollo profesional desde un enfoque cognitivo, donde se consideran las concepciones, el conocimiento y la metacognición o la toma de conciencia.

Una concepción, según Ruíz (1994):

Se caracteriza por la presencia de invariantes que un sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto, por el conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto y por el conjunto de situaciones, problemas etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir, para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta (p. 72).

El conocimiento, por otro lado, según Alexander, Schallert y Hare (1991), es “un stock personal de información, destrezas experiencias, creencias y memoria de una persona” (p. 317).

Y la metacognición, según Flavell (1992), es la capacidad de una persona o individuo de reflexionar conscientemente sobre su propia cognición.

Más adelante, se detallarán en mayor medida los dos aspectos que, desde el punto de vista de esta investigación, tienen más importancia en el desarrollo profesional del docente, desde un aspecto cognitivo, que son: las concepciones y el conocimiento. Son dos aspectos que serán de gran interés a la hora de proceder al posterior análisis.

No cabe duda de que la acción profesional del docente es imprescindible en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, uno de los aspectos más importantes de un profesor de matemáticas son las concepciones que este posee sobre el área. La enseñanza que docente lleva a cabo en su aula está totalmente ligada a sus concepciones, lo cual va a influir, así mismo, en la metodología, evaluación, materiales y otros recursos adicionales.

2.2.1 INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Uno de los elementos más importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje es el profesor. Según Torres (2015), para poder enseñar matemáticas el profesor debe tener unos conocimientos matemáticos sólidos del tema que le permitan ayudar al alumno a comprender el tema más allá de su soporte didáctico (p. 5). Un docente que disponga de un nivel inferior a otro tendrá menos posibilidad de prestar ayuda a sus alumnos.

El conocimiento del profesor se ha estudiado durante muchos años. La teoría de la enseñanza, llevada a cabo por Shulman (1986, 1987), se vio por primera vez en los artículos *Those who understand: knowledge growth in teaching* y *Knowledge and teaching: foundations of new reform*. Con la publicación de estos artículos, aparece la propuesta del conocimiento didáctico del contenido. El por qué surgió es simple, las diferentes investigaciones llevadas a cabo recogieron datos desfavorables relacionados con los resultados de los alumnos respecto a sus nociones y conocimientos, la necesidad de hacer un cambio en la enseñanza era evidente, se debía dar igual importancia al conocimiento del contenido que al conocimiento pedagógico, etc. Debido a diferentes factores, Shulman determinó que el profesor debía tener un mínimo de conocimientos, que se agruparon en el conocimiento de la materia, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular. Según Shulman (2005), el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico se dan durante la formación inicial del profesor, es decir, cuando este entra en contacto con la realidad del aula y la experimentación que desarrolla. Esto, a la vez, nutre el conocimiento didáctico de contenido, que hace referencia e influye en la manera por la cual el docente enseña la materia los estudiantes.

Tomando como referencia y base las investigaciones de Shulman (1986), el equipo formado por Ball, Thames y Phelps, construyó un modelo que ha sido utilizado para analizar el conocimiento que posee el profesor, y para plantear actividades que mejoren su acción como docente. Ball, Thames y Phelps (2008), denominaron este modelo como “El Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (Mathematical Knowledge for Teaching), MKT en adelante.

Dentro del MKT, encontramos seis subdominios de conocimiento. Los tres primeros (conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático) los relacionamos con el conocimiento de la materia y los tres últimos (conocimiento de distintos recursos, conocimiento del contenido y los estudiantes y conocimiento curricular) van ligados al conocimiento didáctico del contenido. Comenzaremos pues, con los que están relacionados el conocimiento de la materia:

- Conocimiento Común del Contenido (CCK): el conocimiento del contenido matemático, según Ball, Thames y Phelps (2008), alude al “conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza” (p. 399). Este subdominio tiene mayor relación con los primeros niveles educativos.
- Conocimiento especializado del contenido (SCK): según Sosa (2011), “este incluye el conocimiento que permite a los profesores conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones inesperadas que dan sus alumnos podrían funcionar matemáticamente en general o no” (p. 1152).
- Conocimiento del horizonte matemático (HCK): básicamente hace referencia al conocimiento que posee el profesor sobre los temas del área de matemáticas y cómo se relacionan entre sí.

En lo que se refiere a los subdominios agrupados en el conocimiento didáctico del contenido, tenemos los siguientes:

- Conocimiento de distintos recursos (KCT): este enfoque tiene relación con el conocimiento que posee el profesor sobre el área y su enseñanza, así como de los materiales que puede utilizar para su acción docente.
- Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS): hace referencia al conjunto de saberes y conocimientos que posee el alumnado para resolver situaciones matemáticas. En este enfoque los profesores tienen un papel muy importante, pues deben imaginar lo que los alumnos harán ante una situación que este plantee. Además, tendrá un rol “empático”, pues deberá identificar cuáles son las dificultades o errores de los niños, así como sus ideas previas, las cuales son fundamentales a la hora de construir un buen aprendizaje.
- Conocimiento curricular (KCC): este se refiere al conocimiento del currículo del país en el que se esté ejerciendo. Según afirma Shulman (1986) sobre este enfoque en concreto:

Este conocimiento está representado por el conjunto de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios particulares o los materiales del programa en determinadas circunstancias (p. 10).

A continuación, se muestra un esquema orientativo del MKT y sus subdominios.

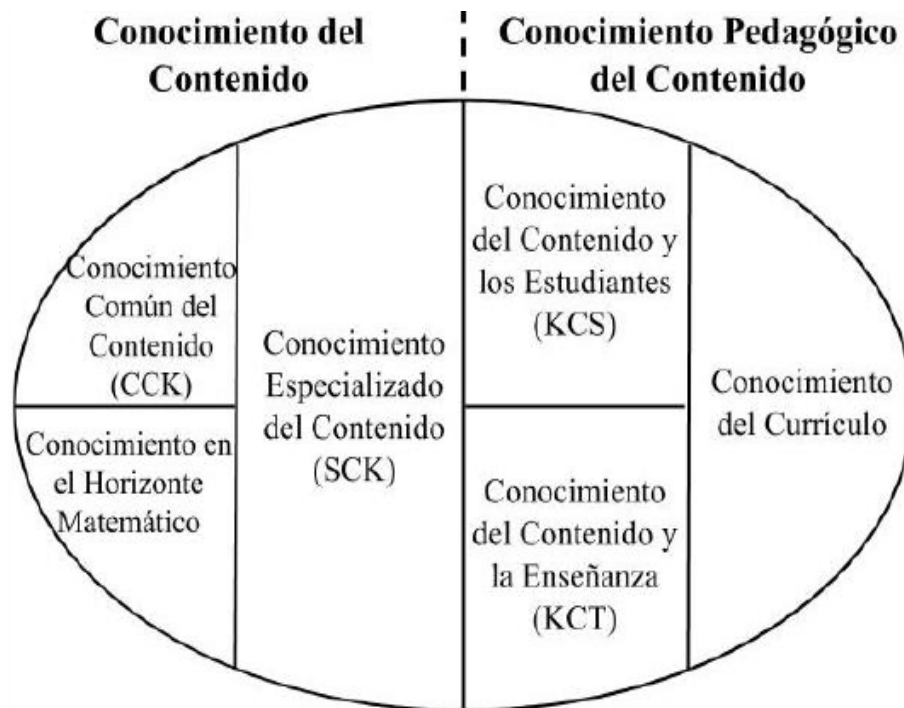


Ilustración 1. Esquema o representación ha sido extraída de Hill, Ball y Schilling (2008). Véase en bibliografía.

En el grupo de la Universidad de Huelva se han desarrollado varias investigaciones que usan este modelo con diferentes propósitos: Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras (2013); Ribeiro (2010); Ribeiro y Carrillo (2011); Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2012); Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010); Sosa (2011); Sosa y Carrillo (2010), entre otras.

Tras utilizar con anterioridad el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, o MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008), este grupo de investigadores comenzó a cuestionarse este modelo, llegando a idear y crear uno nuevo utilizando como base el MKT. A este nuevo modelo lo denominaron (Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge), MTSK en adelante.

Básicamente se quería enfocar la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas desde otra perspectiva diferente. Es entonces cuando aparece el conocimiento especializado del profesor de matemáticas o MTSK. Este modelo hace referencia según Rojas, Flores y Carrillo (2015), es un modelo analítico que nos

posibilita hacer una relación entre el conocimiento especializado que posee el profesor, teniendo en cuenta las diferencias que existen entre el conocimiento matemático del mismo y el conocimiento didáctico específico.

Según Escudero, Flores y Carrillo (2012), el MTSK nos permite, en cierta manera, hacer una diferencia relevante entre el conocimiento de pedagogía y psicología general y el conocimiento especializado del profesor de otra materia y del conocimiento específico del profesor de matemáticas.

El MTSK parte de los dos grandes dominios del MKT. En lo que se refiere a los tres subdominios del conocimiento matemático, tenemos los siguientes enfoques:

- Conocimiento de los temas matemáticos (KOT): no solo hace referencia a los temas que se dan en el área de matemáticas. En este enfoque se incluyen los conceptos, procedimientos, los significados y ejemplos sobre el tema en concreto. Es importante pues, que el profesor tenga un nivel adecuado a la enseñanza de las matemáticas, es decir, un nivel mucho superior al del alumnado para poder resolver posibles cuestiones.
- Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): este enfoque tiene muy en cuenta el conocimiento del profesor acerca de las conexiones que tienen los temas o bloques que se dan en el área de matemáticas. Debe ser capaz de relacionar conceptos de unos temas con otros e incluso con conceptos de otros niveles educativos.
- Conocimiento de la práctica matemática (KPM): el profesor debe tener conocimiento de cómo se desarrolla el conocimiento matemático, es decir, cómo crear o producir en Matemáticas, razonar, demostrar, saber qué es definir, usar definiciones, etc.

Por otro lado, presentamos los tres últimos subdominios del MTSK. Estos hacen referencia al dominio del conocimiento didáctico del contenido:

- Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM): en este enfoque se incluye el conocimiento que debe tener el profesor acerca del proceso

de aprendizaje del alumnado, así como los posibles errores y dificultades que tengan estos ante cualquier concepto.

- Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): este subdominio hace referencia al conocimiento que posee el profesor para utilizar distintos tipos de materiales y formas o maneras de enseñar el contenido y los conceptos a los alumnos. Según Flores, Montes, Carrillo, Contreras, Muñoz-Catalán y Liñán (2016), “los ejemplos y representaciones del contenido son considerados desde el punto de vista de su potencial para el aprendizaje (a diferencia de las representaciones consideradas en el conocimiento del tema, desde el punto de vista de su potencial matemático)”. (p.213).
- Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): hace referencia a los contenidos descritos en el currículo de cada país, los cuales nos determinan por niveles y etapas lo que los alumnos deben aprender.

A continuación, se muestra un esquema orientativo del MTSK y sus subdominios.

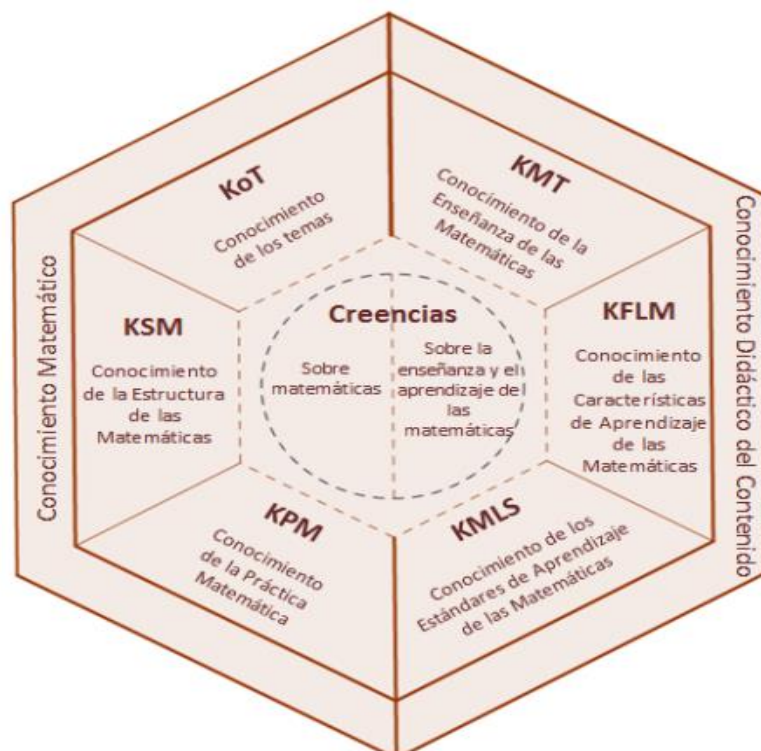


Ilustración 2. Esquema o representación extraída de Carrillo et al., (2013). Véase en bibliografía.

2.2.2 INVESTIGACIÓN SOBRE CONCEPCIONES DEL PROFESOR

Para comenzar este punto, nos centraremos en describir cuáles son los paradigmas contemporáneos principales de la investigación didáctica, los cuales servirán como pieza clave para la creación de diversas tesis y trabajos de investigación, los cuales detallaremos más adelante. Los cuatro paradigmas principales son:

- Eficacia docente y características personales del profesor. El modelo presagio-producto: esta investigación tenía como objetivo determinar las características psicológicas y físicas del profesor, así como determinar y buscar cómo es un profesor eficaz.
- Eficacia docente y comportamiento del profesor. El modelo producto: esta investigación se basa principalmente en determinar cómo son de eficaces los materiales y métodos que utiliza el profesor a la hora de enseñar matemáticas.
- Eficacia docente y pensamiento del profesor. El modelo mediacional centrado en el profesor: esta investigación se basa en la toma de decisiones del profesor durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Eficacia docente y contexto de enseñanza. El modelo ecológico: se basa principalmente en las relaciones y comportamiento del alumnado y el docente en el aula.

Como hemos comentado anteriormente, en relación con estos paradigmas se han elaborado varias tesis, trabajos y proyectos de investigación, lo que ha dado lugar a diversas publicaciones (por ejemplo, Thompson, 1992; Ponte, 1995; Contreras, Climent y Carrillo, 1999).

Nos centraremos ahora en el concepto de concepción del profesor. Es importante destacar, en primer lugar, a qué nos referimos cuando hablamos de concepciones. Según Thompson (1992), “las concepciones son el consciente o inconsciente conjunto de creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias concernientes a la Matemática” (p. 132). Por otro lado, según Ponte (1994), “las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas y ligadas a ellas

están las actitudes, las expectativas y el entendimiento que cada sujeto tiene de lo que constituye su papel en una situación dada” (p. 195).

Teniendo en cuenta pues diferentes definiciones sobre el significado de una concepción, podemos decir que hace referencia a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que posee el docente. Según Contreras, Climent y Carrillo (1999), son un conjunto de pensamientos y posicionamientos que posee el profesor, después de un proceso de investigación de este, un análisis de las observaciones, los documentos y las opiniones respecto a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

La puesta en práctica de la acción docente, el contenido del área a enseñar, la metodología, la evaluación y los recursos que se utilice en su ejercicio como profesor, están ligada a las concepciones que este posea. Debemos tener muy en cuenta que estas concepciones van a jugar un papel relevante en la adquisición de los contenidos del alumnado. Es por ello por lo que se piensa, a veces, que hay concepciones que pueden llegar a ser perjudiciales en el alumnado ya que, de manera consciente o inconsciente, según Carrillo, Climent y Contreras (1998), el docente puede transmitir a sus alumnos cierta información, de la cual puede no estar convencido. Por lo tanto, se puede afirmar que es importante el papel de las concepciones del profesional, ya sea de forma beneficiosa o perjudicial.

Por otro lado, siguiendo con las concepciones del profesorado, según Carrillo y Contreras (1994, 1995), se determina la existencia de una relación entre la concepción de la matemática y la tendencia didáctica de un profesor, o que la capacidad de un profesor para resolver problemas está ligada a sus concepciones y conocimiento sobre las matemáticas. Sin embargo, ¿qué es lo que entendemos por tendencias didácticas? Pues bien, según Porlán (1995), las tendencias didácticas hacen referencia al desarrollo de la enseñanza que lleva a cabo el profesor para poner en práctica las actividades en el aula, las cuales nos permiten determinar la realidad, cómo intervenir en ella y transformarla.

En lo que se refiere a las tendencias didácticas que utiliza el profesor, existen cuatro tipos. Según Porlán (1989), se pueden diferenciar: la tendencia tradicional, la

tendencia tecnológica, y la tendencia espontaneísta e investigativa. A continuación, se describirán cada una de ellas para determinar sus características:

- La Tendencia Tradicional: esta tendencia se basa en la enseñanza tradicional, en la cual el profesor pone en marcha una metodología rígida, de la cual no se sale en ningún momento, basada en el aprendizaje memorístico de conocimientos y conceptos del área. La evaluación se realiza mediante un examen cuyo fin es evaluar la capacidad que tiene el alumnado de retener información en un corto periodo de tiempo.

Con respecto a este apartado, Porlán (1995), afirma que:

La transmisión verbal de conocimiento es la forma habitual de enseñar en los centros educativos. Sin embargo, y a pesar de ello, se afirma que esta manera de enseñar, paradójicamente, no consigue, en gran parte de los casos, aquello que persigue: un aprendizaje adecuado de los alumnos (p. 146).

Las matemáticas están orientadas, según Contreras (1998), para que los alumnos adquieran conceptos, con los que conocerán un "panorama matemático" que el profesor espera que aprendan; esto significa que su aprendizaje se realiza utilizando la memoria, que se lleva a cabo en un modelo tradicional.

- La Tendencia Tecnológica: esta tendencia da mucha importancia a los objetivos que el profesor quiera enseñar. Estos deben estar planteados de manera ordenada, de general a específico. Aunque esta tendencia se evada un poco de lo tradicional, pues el profesor construye el conocimiento de los alumnos mediante situaciones expuestas, sigue habiendo aprendizaje memorístico. Sin embargo, también utilizamos la lógica.
- La Tendencia Espontaneísta: esta tendencia se fija y quiere poner especial atención en los intereses que manifiesta el alumnado mediante la manipulación de instrumentos. Al profesor le interesa que el alumno aprenda a través del descubrimiento.

- La Tendencia Investigativa: esta tendencia intenta, como su propio nombre indica, promover la adquisición de conocimientos a través de la investigación. Se presta igual atención a los objetivos, contenidos y actitudes frente a las matemáticas. El alumno tiene que sentir que es consciente de lo que va aprendiendo y relacionarlo con sus ideas previas. La tendencia investigativa, según Contreras (2009), tiene como objetivo principal de enseñanza la investigación, la cual permite que los alumnos puedan trabajar en grupo, así unos aprenden de otros, así como analizar y determinar cuáles han sido los resultados tras lo que han ido aprendiendo por descubrimiento.

Sin embargo, según afirman Carrillo (1998) y Climent (2005), las tendencias tradicional y tecnológica están ligadas a la concepción platónica o instrumentalista de la matemática y la concepción de las matemáticas sobre la resolución de problemas se acerca más a las tendencias didácticas espontaneísta e investigativa.

3. METODOLOGÍA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO

Tras la recopilación de información en los apartados anteriores a través de referencias bibliográficas, hemos visto y desarrollado de manera general las características más relevantes sobre los dos aspectos fundamentales del desarrollo profesional del docente: las concepciones y el conocimiento del docente. Esto nos servirá como base para realizar nuestro estudio y alcanzar nuestro objetivo de análisis.

3.1 OBJETIVO

El objetivo de nuestro trabajo de investigación es determinar el conocimiento especializado y las concepciones de un profesor de matemáticas de Educación Primaria, concretamente en el campo de la geometría.

3.2 METODOLOGÍA Y ESTUDIO DE CASO

En cuanto a la metodología a utilizar en una investigación científica, cabe destacar que puede diferenciarse comúnmente en dos tipos de análisis: metodología mediante análisis cuantitativo y metodología mediante análisis cualitativo. Cada uno de estos modos de investigación posee determinadas características que los diferencian entre sí. Según Martínez (2006), describe la metodología cuantitativa como:

El contraste de teoría(s) ya existente(s) a partir de una serie de hipótesis surgidas de la misma, siendo necesario obtener una muestra, ya sea de forma aleatoria o discriminada, pero representativa de una población o fenómeno objeto de estudio. Por lo tanto, para realizar estudios cuantitativos es indispensable contar con una teoría ya construida, dado que el método científico utilizado en la misma es el deductivo (p. 169).

Martínez (2006) describe, más adelante, el modelo de metodología cualitativa:

La construcción y generación de una teoría a partir de una serie de proposiciones extraídas de un cuerpo teórico que servirá de punto de partida al investigador, para lo cual no es necesario extraer una muestra representativa, sino una muestra teórica conformada por uno o más casos (p.169).

Teniendo en cuenta el tema de nuestra investigación, nos hemos decantado por realizar una investigación de carácter cualitativo ya que, en cada caso, cada profesor posee diversas concepciones, creencias, actitudes y aptitudes en lo referente a la enseñanza de la geometría. Nos ha parecido que, siguiendo un método de análisis cualitativo mediante un estudio de caso, podríamos conseguir sonsacar mucha más información útil, ya que el trabajar con un solo caso nos ofrecía la oportunidad de adentrarnos más en los aspectos que atañen a esta investigación.

3.3 HERRAMIENTAS Y PROCEDIMIENTOS

Para comenzar comenzaremos definiendo qué es un estudio de caso. Cebreiro López y Fernández Morante (2004) afirman que es conveniente desarrollar un estudio de caso "cuando el objeto que se quiere indagar está difuso, es complejo,

escurridizo o controvertido. Es decir, para analizar aquellos problemas o situaciones que presentan múltiples variables y que están estrechamente vinculados al contexto en el que se desarrollan" (p. 667). Según Yacuzzi (2005), los casos son particularmente válidos cuando se presentan preguntas del tipo "cómo" o "por qué", cuando el investigador tiene poco control sobre los acontecimientos y cuando el problema a estudiar es incipiente. Stake (2005), citando a Louis Smith, uno de los primeros etnógrafos educativos, define el caso como "un sistema acotado", con lo que insistía en su condición de objeto más que de proceso.

El estudio de casos presenta diferentes modalidades, ya que este se adapta a cualquier realidad y contexto. Stake (2005) plantea tres modalidades de estudio de casos en función a sus finalidades. Debido a la naturaleza de nuestro análisis realizaremos un estudio de caso intrínseco, también llamado de caso único, ya que pretendemos analizar un caso aislado y particular, y no pretendemos construir una teoría generalizada.

El estudio del caso se ha llevado a cabo a través de una entrevista. Primeramente, se planteó recopilar los datos a modo de cuestionario. Sin embargo, pensamos que sería más conveniente realizarlo mediante otra herramienta de recolección de datos, una que permitiera sonsacar la máxima información en el tiempo del que se disponía, en la que se daría libertad al sujeto analizado para expresarse abierta. Se decidió recurrir al método de la entrevista. De esta manera, el profesor puede expresar de forma más libre y extensa lo que piense acerca de cada una de las preguntas que se le realizan.

El sujeto de estudio al que se le realizó la entrevista es un profesor sevillano, de la localidad de Estepa. Este profesor ha ejercido e impartido clases en todas las etapas de Educación Primaria y sigue ejerciendo como docente. El profesor se encuentra en la etapa final en su carrera como docente, ya que acabó sus estudios en el año 1983. Primeramente, es necesario aclarar que, en esa época, los estudios para profesor de educación primaria eran diferentes a los de hoy en día. Con el antiguo plan de estudios universitarios en el campo de magisterio, la titulación cursada por este profesor tenía el nombre de "Profesorado de Educación General Básica

Especializada en Matemáticas y Ciencias Naturales”. Es importante destacar este aspecto, ya que, en aquel entonces, existían las especialidades de lenguas y ciencias, pudiendo un profesor de Educación Primaria especializarse en las matemáticas. Sin embargo, en las titulaciones actuales no existe esta especialización, si no que se imparten aspectos más generales en ese ámbito. Es por eso por lo que, en este caso, el análisis que vamos a realizar podría variar si nos refiriéramos a un profesor del antiguo plan de estudios o a uno del actual. En general, podemos destacar de él que es una persona enamorada de su profesión y es, según hemos podido intuir en su forma de expresarse, un apasionado de las matemáticas.

El nombre del centro y del profesor que se ha prestado a realizar esta entrevista para la investigación que estamos llevando a cabo, permanecerá de forma anónima para conservar la privacidad.

Como se ha comentado con anterioridad, la herramienta que se va a llevar a cabo para el análisis cualitativo de este proyecto de investigación es estudio de caso llevado a cabo mediante una entrevista. Esta entrevista está compuesta por 18 preguntas, de mayor o menor extensión, referentes a aspectos característicos de los dominios y subdominios del modelo MTSK. Esto no solo nos va a ayudar a determinar los conocimientos del profesor sobre la geometría, sino también sobre sus concepciones. Son preguntas abiertas en las que el entrevistado tiene total libertad para razonar y extender sus respuestas. La entrevista fue de carácter oral, lo que ayuda a que el entrevistado sienta una sensación de libertad a la hora de extenderse en sus respuestas.

A continuación, se detallarán todas las preguntas de la entrevista que se le han realizado al profesor:

ENTREVISTA SOBRE LAS CONCEPCIONES Y EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR (MTSK)	
PREGUNTA 1	¿Qué son, para usted, las matemáticas?
PREGUNTA 2	¿Qué función tienen las matemáticas?
PREGUNTA 3	¿Qué es, para usted, la geometría?
PREGUNTA 4	¿Qué función tiene la geometría?
PREGUNTA 5	¿Cuál es la importancia de que el conocimiento especializado del profesor en la geometría sea sustancialmente mayor al que se quiere impartir al alumnado independientemente de la etapa en la que se encuentre?
PREGUNTA 6	¿Es importante que el profesor conozca aspectos de un tema concreto de geometría, aunque estos nunca se lleguen a impartir?
PREGUNTA 7	¿Es importante tener en cuenta o haber enseñado con anterioridad otros contenidos matemáticos para la enseñanza de la geometría?
PREGUNTA 8	¿Considera usted favorable la enseñanza de contenidos de la geometría en correlación con otros contenidos transversales?
PREGUNTA 9	¿Cuál es la diferencia, según su criterio, entre una demostración, una prueba y una comprobación matemática?
PREGUNTA 10	¿Qué importancia tiene la geometría para el alumnado de Educación Primaria?
PREGUNTA 11	¿Cuáles son las dificultades más comunes que presenta el alumnado en el estudio de la geometría?
PREGUNTA 12	¿Considera importante realizar cambios en las tácticas de enseñanza de la geometría dependiendo del contexto del aula en la que se imparta?
PREGUNTA 13	¿Qué técnicas o estrategias suele utilizar para la enseñanza de la geometría?
PREGUNTA 14	¿Utiliza material específico de algún tipo para la enseñanza de la geometría?

PREGUNTA 15	¿Qué importancia tiene adaptar el modo de presentar a cada una de las etapas educativas en la enseñanza de la geometría?
PREGUNTA 16	¿Suele plantear usted objetivos extracurriculares a la hora de enseñar geometría?
PREGUNTA 17	¿Le parece correcta la estructuración de los contenidos de la geometría en cada una de las etapas de la Educación primaria según el marco normativo?
PREGUNTA 18	¿Piensa que se le da suficiente importancia a la enseñanza de la geometría en el currículo vigente de Educación Primaria? En caso negativo, explique qué haría usted para mejorarla.

La entrevista ha sido transcrita paso a paso y puede verse en el apartado de Anexos de este proyecto (ANEXO 1).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este apartado se procederá a analizar profundamente la entrevista realizada, con el fin de obtener la mayor cantidad de información relacionada con los dominios y subdominios del modelo MTSK, así como de las creencias que el profesor externalice y nos permita determinar que tendencia educativa sigue.

Aunque a la hora de idear las preguntas que se realizaron en la entrevista, cada una de ellas se pensó de tal manera que fuera dedicada a un subdominio, tras la puesta en práctica de la entrevista descubrimos que en una misma pregunta se podían ver reflejadas algunas ideas referentes a otros subdominios a los que no iba dirigida la pregunta. Esto es un hecho muy favorable, ya que se dejan claros los beneficios de un método de estudio como es la entrevista, mediante la cual, gracias a la libertad de respuesta del entrevistado, podemos obtener datos de toda índole.

Para el análisis de esta entrevista, se ha optado por estudiar cada uno de los dominios y subdominios del MTSK, de forma individualizada y extrayendo información de ellos en cada una de las preguntas, en vez de analizar pregunta por pregunta, ya

que lo que nos puede ser útil para un mismo subdominio se puede encontrar en preguntas aparentemente diferenciadas.

4.1 ANÁLISIS DE LOS DOMINIOS Y SUBDOMINIOS DEL MTSK

A continuación, seguiremos desarrollando la información obtenida de cada uno de los dominios y subdominios del MTSK. Empezaremos con el dominio del **Conocimiento Matemático o MK**. Este es un conocimiento profundo matemático en sí, de su estructura y de cómo se procede y produce en matemáticas.

4.1.1 Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

El primero de los subdominios del MK que vamos a tratar es el Conocimiento de los Temas Matemáticos o KoT, subdominio describe el conocimiento por parte del docente de los temas matemáticos que se tratan en la escuela y la importancia de estos y de la forma de enseñarlos. Podemos abstraer información sobre este dominio en varias preguntas. En las primeras preguntas se puede observar como el profesor tiene un gran dominio en lo que al concepto del conjunto de la matemática se refiere, poniendo, además, gran entusiasmo y dedicación en sus explicaciones.

En las dos primeras preguntas se le plantea el significado de las matemáticas como concepto y su función, a lo cual da una explicación bastante empírica del objetivo primordial de estas. Un ejemplo de ello lo encontramos en las siguientes frases:

“...es la base de cualquier ciencia, tanto en la investigación como en la propia enseñanza, ya que es imposible investigar cualquier ciencia sin matemáticas.”

“Es una herramienta indispensable para investigar cualquier ciencia, para entender la ciencia, para enseñarla. Es una herramienta también de uso cotidiano por todas las personas dependiendo de su nivel de conocimiento y de los problemas que tengan que resolver.”

Podemos observar además como en posteriores preguntas. Por ejemplo, en la tercera, nos refleja que conoce aspectos de la historia y evolución de las matemáticas:

“La geometría es una rama de la matemática muy importante. Tan importante que junto con la aritmética quizás sea de las ramas más antiguas en la matemática.”

“Es una rama antiquísima que nace al mismo tiempo que toda la matemática”.

Esto se ve matizado en la cuarta pregunta, cuando describe la evolución que ha sufrido la geometría a lo largo de su historia.

“La geometría, durante muchos siglos se ha basado exclusivamente en los métodos, digamos, imaginables: en objetos planos o con volumen. Sin embargo, en los últimos siglos se ha empezado a investigar geometría, digamos, no sensible o no perceptible por los sentidos, o geometría abstracta.”

Los ejemplos anteriores pueden ser, por otro lado, relacionados con el conocimiento pedagógico general del profesor, o con el conocimiento general, ya que son aspectos que no tienen mucha relación con el tema de matemáticas

Mas adelante, en la pregunta número nueve, podemos ver como sabe diferenciar claramente entre los conceptos de demostración, prueba y comprobación matemática, lo que si podemos relacionar directamente con el subdominio KoT:

“La prueba consiste en considerar un número limitado de casos que pueden ser números u otras estructuras, y con ese número limitado de datos, intentar probar la validez de algo. El comprobar, entiendo que sería, en caso de tener un número finito de casos posibles, probar con todos. Entonces ya lo hemos comprobado, porque hemos probado con todos los casos posibles. Y la demostración es ya un nivel superior ya que lo que consigue es darle validez indudable al teorema, a la hipótesis o a la estructura que tengamos delante. Al demostrarlo lo que damos es una validez universal.”

En la pregunta once el profesor demuestra que posee conocimientos sobre los temas de geometría que imparte en la escuela, como por ejemplo el origen de los nombres de los polígonos, o incluso de su clasificación.

“Podemos decir “pentágono”: “penta” en griego es cinco, que para nosotros es obvio ya que tiene cinco lados.”

“En la primaria, los cuadriláteros casi nos vemos obligados a enseñarlos en categorías independientes, es decir, el rombo, el cuadrado... y lógicamente nosotros sabemos que el cuadrado también es rombo.”

4.1.2 Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

A continuación, se analizará el siguiente subdominio del MK, llamado Conocimiento de la estructura matemática o KSM. Este subdominio recoge el conocimiento del profesor sobre las relaciones entre los contenidos matemáticos y de su estructuración. El profesor ya realiza una breve indicación relacionada con el KSM en la sexta pregunta, destacando que la matemática es una ciencia que comprende multitud de ramas y temas interrelacionados. A continuación, recogemos algunos fragmentos de entrevista en los cuales observamos algunas pinceladas sobre este subdominio:

“Una de las cosas que te sorprende cuando empiezas a estudiar a cierto nivel la matemática, es la relación íntima que existe entre muchísimos terrenos, muchísimos aspectos o asuntos.”

“La matemática no está formada por compartimentos estancos. Son compartimentos que se comunican y se relacionan mucho más de lo que nos pensamos.”

“...todas las ramas y todos los campos están conectados unos con otros.”

En la sexta pregunta también podemos observar como defiende la relación de la geometría con otros temas

“Ese conocimiento de ese tema que no vas a impartir, inconscientemente, te va a beneficiar en otros asuntos, o te va a dar la clave para poder explicar algo que no sospechabas que tuviera una relación, ni remota, con lo que estás dando.”

Mas adelante, en la pregunta diecisiete, cuando el profesor está realizando una crítica a la forma en la que está planteada la enseñanza de la geometría en la escuela actual, también podemos observar como defiende el carácter conectivo de la geometría con otras ramas de la matemática.

“Quizás se debería profundizar más. Cuando digo profundizar no me refiero a nivel de contenidos. Lo que si echo en falta es que no se conecta mucho con otras ramas, con otros aspectos de la matemática con los que podría conectar perfectamente, y se podría dar de una manera más interdisciplinar”.

Cabe destacar que los fragmentos propuestos desvelan algunas pinceladas sobre el KSM, ya que podemos extraer ideas generales y no concretas que demuestren este subdominio.

4.1.3 Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Pasamos ahora a mostrar la información obtenida acerca del subdominio del MK denominado: el Conocimiento de la práctica matemática o KPM. Este es el conocimiento de cómo se genera el conocimiento matemático y las reglas y sintaxis de la disciplina. Con el fin de sonsacar el nivel de conocimiento de la practica matemática que posee este profesor, se le planteó una pregunta (la novena) en la que se le pedía que nos diferenciara entre una demostración, una prueba y una comprobación matemática. Todos estos conceptos tienen un determinado significado en las ciencias matemáticas y, por lo tanto, se pretendía determinar el conocimiento del docente acerca de esta terminología. Este describió y diferenció cada termino detalladamente. Este conocimiento también lo podemos deducir de la pregunta once, cuando habla de cómo enseñar la terminología de la geometría. Para su mejor entendimiento, plasmamos un fragmento de entrevista que lo recoge:

“La prueba consiste en considerar un número limitado de casos que pueden ser números u otras estructuras, y con ese número limitado de datos, intentar probar la validez de algo. El comprobar, entiendo que sería, en caso de tener un número finito de casos posibles, probar con todos. Entonces ya lo hemos comprobado, porque hemos probado con todos los casos posibles. Y la demostración es ya un nivel superior ya que lo que consigue es darle validez indudable al teorema, a la hipótesis o a la estructura que tengamos delante. Al demostrarlo lo que damos es una validez universal.”

“Podemos decir “pentágono”: “penta” en griego es cinco”

A continuación, empezaremos a detallar la información obtenida referente al segundo dominio del modelo MTSK: el **Conocimiento Didáctico del Contenido, o PCK**. En este se reconoce el conocimiento de un docente acerca del contenido como objeto de enseñanza y aprendizaje.

4.1.4 Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

El primero de los subdominios del PCK que vamos a tratar es el Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Este subdominio comprende conocer las dificultades, inquietudes y gustos de los alumnos acerca de los contenidos matemáticos. En la pregunta once, el profesor describe algunas de las dificultades que más suelen sufrir los alumnos de Educación Primaria en el aprendizaje de la geometría. Se refleja a continuación:

“Podemos decir “pentágono”: “penta” en griego es cinco, que para nosotros es obvio ya que tiene cinco lados, pero para ellos, entenderlo, es más difícil.”

“También hay otro asunto que es la clasificación. Hay una dificultad en la clasificación que se ve muy claro, por ejemplo, en los cuadriláteros.”

En la pregunta quince también podemos observar como el profesor relaciona la forma de enseñar la geometría con el nivel y las dificultades de los alumnos. A continuación, se muestra el fragmento que lo refleja:

“No es lo mismo tocar el tema de los poliedros en un nivel que en otro. Al principio habrá que tocar el tema a un nivel más sensorial, con la visualización, con el tacto.”

4.1.5 Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este es, quizá, el subdominio del PCK, y del MTSK en general, del que más información hemos podido extraer de toda la entrevista. Es un subdominio del PCK denominado Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas o KMT, el cual considera el conocimiento que un docente tiene sobre los modos de representar el contenido y de los recursos y materiales que puede utilizar. Podemos encontrar información de

este subdominio, por ejemplo, en la quinta pregunta. En esta pregunta, el profesor defiende y argumenta la importancia que tiene que el conocimiento de un docente sea mayor al que se imparte al alumnado.

“El profesor tiene que tener un conocimiento mucho más profundo de lo que tiene que impartir, ya que de ese conocimiento más profundo es de donde van a salir luego muchos factores y muchas conclusiones que te van a ayudar a dar clase.”

Según él, un docente debe de tener un conocimiento sustancialmente mayor al que, como objetivo, deban adquirir los alumnos sea cual sea la disciplina que se esté tratando.

“El profesor, tanto en geometría como en cualquier otro aspecto o tema, tiene que tener una formación mucho más completa del temario que está impartiendo, independientemente de la etapa que sea.”

En la sexta pregunta, destaca la importancia de haber enseñado algún contenido matemático con anterioridad, y de sus beneficios a corto y largo plazo, tanto personalmente como en el ámbito docente.

“El haber estudiado y enseñado otro aspecto u otra rama te va a enriquecer a la hora de enseñar la geometría, ya que adquieres experiencia, no solo como docente en general, si no experiencia docente en matemática.”

En la octava pregunta, podemos observar como considera de gran importancia la enseñanza de los contenidos matemáticos de forma transversal y de los beneficios que esto puede traer a los alumnos.

“La transversalidad es una de las bases del éxito de la enseñanza, ya que abarca o implica a otras asignaturas, otras áreas, otros campos. La geometría se presta a la manipulación, a la construcción y es favorable incluirla en aquellas actividades que lógicamente permitan incluirlas.”

Se puede observar como en la pregunta once, el profesor argumenta que el docente debe tener un conocimiento superior al que se quiere impartir, pero puede adaptarlo a las condiciones y el nivel del grupo al que se imparta.

“... y lógicamente nosotros sabemos que el cuadrado también es rombo, pero sin embargo tenemos que enseñarlo como si fueran cosas independientes. No podemos explicárselo a los niños así.”

En la pregunta trece el profesor indica que en la geometría se puede dar uso a multitud de técnicas manipulativas, las cuales con más difíciles de usar en otras ramas.

“La geometría se presta especialmente a eso, a la manipulación, a la construcción, a la medición práctica. En todo lo que se pueda hay que procurar aprovechar el carácter manipulativo y sensorial que la geometría tiene.”

Más adelante, en la pregunta catorce, nos da algunos ejemplos de recursos o materiales que pueden utilizarse comúnmente en la enseñanza de la geometría.

“Además del material tradicional de dibujo técnico, que se ha utilizado siempre en la enseñanza de la geometría (...) también utilizo cajas de cuerpos geométricos, puzzles tridimensionales, (...) piezas poligonales y formas de poliedros tanto regulares o irregulares”

A continuación, en la pregunta quince, podemos ver como el profesor establece una relación entre el KMT y el KFLM, ya que relaciona directamente la forma de representar y enseñar la geometría y qué recursos utilizar con las características del alumno, su nivel y sus dificultades.

“No es lo mismo tocar el tema de los poliedros en un nivel que en otro. Al principio habrá que tocar el tema a un nivel más sensorial, con la visualización, con el tacto.”

En la pregunta quince podemos ver como desarrolla el KMT indicando que hay que adaptar el método y la técnica de enseñanza al nivel y características de los alumnos. Ejemplifica este hecho teniendo en cuenta el tema de los poliedros, para los que en su enseñanza se ha de comenzar utilizando unas técnicas más sensoriales e ir evolucionando a un método más descriptivo cuando los alumnos vayan adquiriendo nuevas herramientas de cálculo.

“En geometría, como en cualquier otro tema tienes que tener en cuenta la etapa y el nivel en el que vas a desarrollar ese tema. En el caso de la geometría, va desde lo

sensorial hasta lo que puede ser; en las últimas etapas, el cálculo concreto de determinados parámetros.”

4.1.6 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Finalmente, toca el turno del último de los subdominios del PCK que vamos a tratar, el cual se denomina KMLS, o Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, que no es más que el conocimiento que el docente posee acerca de lo que debe aprender el estudiante en cada determinado momento de su etapa educativa.

En lo referente al marco normativo, algo que tiene mucho que ver con este subdominio, el profesor hace una crítica a la estructuración de la geometría y al modo de enseñarla que propone el currículo. Él defiende que la enseñanza de la geometría debería de ser más profunda, no solo en contenidos si no que se conectara más con otras ramas de la matemática, ya que como se ha analizado con anterioridad en el apartado del subdominio del KSM, en el dominio del MK, el profesor argumentaba que las matemáticas no son “compartimentos estancos” si no que todos sus temas estaban interrelacionados y deberían enseñarse como tal. Podemos verlo en la pregunta diecisiete.

“Quizás se debería profundizar más. Cuando digo profundizar no me refiero a nivel de contenidos. Lo que si echo en falta es que no se conecta mucho con otras ramas, con otros aspectos de la matemática con los que podría conectar perfectamente, y se podría dar de una manera más interdisciplinar”

4.2 ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DEL PROFESOR

El profesor analizado, a largo de la entrevista, ha reflejado en diversas ocasiones opiniones y creencias, las cuales vamos a extraer para analizarlas y determinar las tendencias didácticas que describía Porlán (1989), las cuales se pueden diferenciar en:

la tendencia tradicional, la tendencia tecnológica, y la tendencia espontaneísta e investigativa, las cuales han sido explicadas anteriormente.

Estas concepciones no solo pueden ser relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en sí, si no que pueden ser identificadas como conocimiento pedagógico general del profesor, ya que son opiniones acerca de la didáctica en general.

En la pregunta número cinco el profesor da su opinión acerca del nivel de conocimiento que ha de tener un profesor en relación con el que poseen sus alumnos.

“El profesor tiene que tener un conocimiento mucho más profundo de lo que tiene que impartir, ya que de ese conocimiento más profundo es de donde van a salir luego muchos factores y muchas conclusiones que te van a ayudar a dar clase.”

Esta respuesta refleja un gran interés por parte del profesor de que sus alumnos por que sus alumnos obtengan un aprendizaje significativo de sus explicaciones, ya que, según él, a mayor nivel de conocimiento del docente, mayor será su capacidad de guiar al alumno en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

El profesor vuelve a opinar acerca de este asunto un poco más adelante:

“El profesor, tanto en geometría como en cualquier otro aspecto o tema, tiene que tener una formación mucho más completa del temario que está impartiendo, independientemente de la etapa que sea.”

En preguntas posteriores podemos ver la actitud que el profesor muestra cuando, en la enseñanza de cierta materia, el nivel de los alumnos no es lo suficiente avanzado como para entender algún punto en su totalidad. En este caso el profesor defiende que los conceptos hay que enseñarlos yendo de lo general a lo particular.

“... y lógicamente nosotros sabemos que el cuadrado también es rombo, pero sin embargo tenemos que enseñarlo como si fueran cosas independientes. No podemos explicárselo a los niños así.”

“Podemos decir “pentágono”: “penta” en griego es cinco, que para nosotros es obvio ya que tiene cinco lados, pero para ellos, entenderlo, es más difícil.”

Este modo de pensar del profesor se puede acercar a la Tendencia didáctica Tecnológica, la cual defiende que los contenidos deben plantearse de manera ordenada, de lo general a lo específico. También se relaciona con esta Tendencia el hecho de que existan aspectos de la enseñanza de la geometría cuyo aprendizaje sea memorístico como el hecho de que tengan que aprender que “penta” es cinco sin tener el nivel de conocimiento adecuado para saber que es un nombre que proviene del latín.

En preguntas posteriores se le pregunta al profesor acerca de la transversalidad en la enseñanza de las matemáticas, a lo que este da su opinión:

“La transversalidad es una de las bases del éxito de la enseñanza, ya que abarca o implica a otras asignaturas, otras áreas, otros campos. La geometría se presta a la manipulación, a la construcción y es favorable incluirla en aquellas actividades que lógicamente permitan incluirlas.”

El profesor defiende que la transversalidad es una de las claves del éxito de la enseñanza moderna, hecho que lo separa del modo de pensar que defiende la Tendencia Tradicional. Esta tendencia se basa en que la metodología del profesor debe ser rígida, y no salirse de lo estipulado en el área que se está impartiendo. Este modo de pensar también podemos observarlo más adelante en una de sus respuestas, cuando se le pregunta por la necesidad de hacer cambios y adaptaciones en las técnicas de enseñanza de la geometría dependiendo del nivel y contexto de los alumnos:

“Es indispensable hacer cambios, ya que en geometría como en cualquier otro asunto o tema que estés enseñando tienes que introducir cambios para adaptarte a la realidad del aula.”

Más adelante se le realizan cuestiones acerca de su opinión de la manera en la que se plantea la geometría en la enseñanza de la matemática en el día de hoy y la importancia que se le da a esta:

“La geometría viene al final de todo y por eso normalmente se programa para el último periodo de curso y muchas veces se queda sin dar.”

“Yo creo que se le da menos importancia de la que tiene.”

“Va a servir muchísimo para otras disciplinas y para otras materias como pueden ser la física y la química.”

“Se debería de introducir como complemento para trabajar otros temas en matemáticas. Creo que habría que incluirla más a lo largo del año.”

En otras respuestas podemos ver como el profesor posee concepciones que lo acercan también a la Tendencia Investigativa, ya esta tiene como objetivo principal el aprendizaje investigativo en grupos colaborativos, en los que los alumnos puedan aprender unos de otros:

“Es muy importante también el trabajo en grupo, ya que los alumnos disfrutan mucho construyendo en equipo.”

El profesor se podría encontrar a medio camino entre la tendencia Tradicional/Tecnológica y la Tendencia Investigativa, sin llegar a encasillarse en ninguna de ellas. Podemos ver un ejemplo claro en la siguiente afirmación:

“La geometría se presta a la manipulación, a la construcción y es favorable incluirla en aquellas actividades que lógicamente permitan incluirlas.”

En esta respuesta se ven reflejados aspectos de la Tendencia Investigativa, ya que el profesor ve favorable la aplicación de un modo inmersivo, investigativo y manipulativo de aprender geometría, pero no lo puede abarcar a todos sus temas o ámbitos, aclarando que, en algunos, en su opinión no se podrían incluir.

5. CONCLUSIONES

Hemos analizado con detenimiento la entrevista, estableciendo como indicadores y referentes los diferentes dominios y subdominios del modelo MTSK con el fin de obtener información sobre los factores que intervienen en el conocimiento especializado de nuestro docente.

En cuanto a las creencias o concepciones del profesor, podemos decir, como bien hemos comentado con anterioridad, que este podría encontrarse entre una Tendencia Tradicional/Tecnológica y una Tendencia Investigativa, ya que mezcla características de todas ellas, pero no se llega a encasillar en ninguna.

Como se ha podido observar, el profesor deja ver claramente en sus respuestas indicios que nos marcan aspectos fundamentales de los distintos tipos de conocimiento que marca este modelo, tanto en lo referente al Conocimiento Matemático en sí, como al Conocimiento Didáctico de las Matemáticas. Gracias a sus detalladas respuestas hemos obtenido una información amplia de cada uno de los subdominios. Claramente, el subdominio del cual hemos podido sonsacar más información ha sido del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), ya que numerosas respuestas del profesor eran muy detalladas a la hora de describir el modo de representar los contenidos que impartía, así como los materiales y recursos que suele utilizar. También hemos podido extraer bastante información acerca del subdominio KFLM. El subdominio del que hemos podido extraer menos información es el del Conocimiento de los temas Matemáticos (KoT) y del Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), ya que en muy pocas respuestas se han visto reflejados. Quizá hubiera sido buena idea haber planteado algunas preguntas más que estuvieran enfocadas a estos subdominios. Podemos afirmar entonces que hemos obtenido más información del dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), que del Conocimiento Matemático (MK) ya que la entrevista había sido enfocada a la docencia de las matemáticas en sí y no tanto a que el profesor reflejara sus conocimientos matemáticos.

En lo personal, pienso que el nivel de conocimiento que muestra este profesor en basándonos en todos los dominios del modelo MTSK es bastante alto, y esto se puede deber a la cantidad de años que lleva ejerciendo como docente, y a la pasión que siente por las matemáticas, y que así me transmitía personalmente en la entrevista. Recordemos que sus estudios universitarios estaban mucho más enfocados a las matemáticas de lo que son los actuales. Existía por así decirlo una especialidad en las matemáticas. Esto provoca que el profesor esté ejerciendo una labor por la cual siente verdadero gusto y pasión. De ahí podríamos plantearnos otra incógnita que daría oportunidad a otro estudio: ¿Son los profesores de matemáticas más antiguos, los que optaron por especializar su carrera concretamente en las matemáticas y las ciencias, más predeterminados y eficaces en la enseñanza de esta que un profesor de primaria de hoy en día que, quizá, no sienta ese gusto y esa pasión? Yo personalmente pienso

que si y, con el ejemplo de este profesor defendiendo mi argumento. Aunque es un docente con bastantes años en la escuela, no sigue una corriente tradicionalista, se preocupa por la innovación, e intenta inculcar en sus alumnos el gusto y la pasión por las matemáticas, a la vez que les explica la importancia que tiene esta para el desarrollo de sus vidas.

BIBLIOGRAFÍA

- Alexander, P., Schallert, D. y Hare, V. (1991). Coming to Terms: How Reserchers in Learning and Literacy talk about knowledge. *Review of Educational Research*, Vol 61, nº. (3).
- Alsina, C., Fortuny, J. y Perez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO*. Madrid, España: Síntesis.
- Andonegui, M. (2006). Desarrollo del pensamiento matemático. Cuaderno N° 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5).
- Brown, C.C. y Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher, en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York: McMillan.
- Carrillo, J., Climent, N. y Contreras, L.C. (1998). Teacher's beliefs: starting point for profesional development. *Proceedings of CIEAEM 50*. Neuchatel, Suiza: CIEAEM.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las ciencias* 25 (1).
- Cardeñoso, J.M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

- Cebreiro López, B. y M. C. Fernández Morante (2004) "Estudio de casos", en F. Salvador Mata, J. L. Rodríguez Diéguez y A. Bolívar Botia, Diccionario enciclopédico de didáctica. Málaga, Aljibe
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* (Tesis Doctoral). Michigan University: Michigan.
- Climent, N.; Romero Cortés, J.; Carrillo, J.; Muñoz Catalán, M.; & Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1)
- Contreras, L. (1998). Resolución de problemas. Un análisis explicatorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva: Huelva, España. Recuperado el 27 de abril de 2018 de: <http://www.rabida.uhu.es/handle/10272/2953>
- Contreras, L.C., Climent, N. y Carrillo, J. (1999). Teachers' beliefs on problema solving ans mathematics education. En K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (Eds.), *On Research in Mathematics Teacher Education. From a Study of Teaching Practises to Issues in Teacher Education.* (Chapr. 2). University of Osnabrück, Osnabrück.
- Contreras, L.C. (2009). Concepciones, creencias y conocimiento. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencia y Tecnología.* Recuperado el 27 de abril de 2018 de: <http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/Vol%201%20Num%201.htm>
- Escudero, D., Flores, E. y Carillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y Flor M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* Cinvestav: México DF.
- Estepa, J. (2000). El conocimiento profesional de los profesores de ciencias sociales. En J. Pagès, J, Estepa y G, Travé (Eds.), *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales.* Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

- Flavell, J. (1992). *Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive Developmental Inquiry*, en: T. Nelson (Ed.), *Metacognition: Core Readings*. Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Flores, E., Montes, M.A., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M.C. y Liñán, M.M. (2016). El papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemáticos. *Bolema: Rio Claro (SP)*, Vol. (30), nº. 54.
- Fouz, F y De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo por la geometría*. Recuperado el 27 de abril de 2018 de: <http://www.divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf>
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol (29), nº 4.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp.295-384). Sevilla: Alfar.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.
- Jaworski, B. (1998). Developing mathematics teaching. Teachers, teacher education: A conference as a learning environment. En K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (Eds.), *European Research in Mathematics Education I.III. On Research in Mathematics Teacher Education*. Forschungs institute für Mathematik didaktik. Osnabrück, Alemania.
- Ley orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). *Boletín Oficial del Estado*, nº 295, 2013, 10 de diciembre.

- Martínez, M. (1994). *Aprendizaje de las matemáticas y formación docente*. (Grado de Maestría en Enseñanza Superior). Universidad Autónoma de Nuevo León. Monterrey, México.
- Martínez Carazo, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión*, (20)
- Ponte, J. P. (1994). Mathematics teacher's professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (vol 1, pp. 195 – 210). Lisboa, Portugal.
- Porlán, R. (1989). Teoría del conocimiento, teoría de la enseñanza y desarrollo profesional. (Tesis Doctoral). Universidad de Sevilla. Sevilla, España.
- Porlán, R. (1995). *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*. (2ª ed.). Sevilla: Díada Editora.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Consultado en <http://www.rae.es/matematicas>
- Real Decreto 126/2014, del 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE núm. 52, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, España, 1 de marzo de 2014.
- Ribeiro, C. M. (2010). O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1º. ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação da suas aulas de matemática. Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. In M. M. Rodríguez, G. F. García, L. J. Blanco & M. P. Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-521). Ciudad Real: SEIEM, Universidad Castilla-La Mancha.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J. & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do profesor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15(2)

- Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Rio Claro (SP), Vol. (29)*, nº 51.
- Ruíz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), pp. (10-11).
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. Traducción castellana (2005): Conocimiento y enseñanza: fundamento de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2).
- Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*. Recuperado el 28 de abril de 2018de: <https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>
- Sosa, L. (2011). Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos. Tesis doctoral publicada en <http://hdl.handle.net/10272/4509>
- Sosa, L. & Carrillo, L. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida, España: SEIEM.
- Stake, R. E. (2005) *Investigación con estudio de casos*. Madrid, Morata.
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Zacatecas: México.
- Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: McMillan.

- Torres, E. (2015). El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press: Londres.
- Vargas, G y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría. UNICIENCIA Vol. 27, N° 1.
- Yacuzzi, E. (2005). El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación (No. 296). Serie Documentos de Trabajo. Buenos Aires: Universidad del CEMA.
- Yin, R.K. (1984/1989). *Case Study Research: design and Methods*, Applied social Research Methods Series, Newbury Park CA: Sage.

ANEXOS

ANEXO 1

ENTREVISTA SOBRE LAS CONCEPCIONES Y EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK)

1. ¿Qué son, para usted, las matemáticas?

“Bueno, las matemáticas para mi han sido muchas cosas. Han sido mi profesión durante toda la vida, me han gustado mucho y han sido, digamos, un placer combinado también con una dificultad, porque a veces son complejas. Me ha gustado siempre mucho aprender y enseñar matemáticas. También es la base de cualquier ciencia, tanto en la investigación como en la propia enseñanza, ya que es imposible investigar cualquier ciencia sin matemáticas y para la vida diaria es también, evidentemente, una herramienta de uso cotidiano, al menos ciertos conceptos básicos. En ese aspecto también me he servido de la matemática en mi vida diaria como cualquier persona, cuando me ha hecho falta para resolver problemas cotidianos.”

2. ¿Qué función tienen las matemáticas?

“Bueno, vale todo lo que he dicho en la pregunta anterior, lógicamente quitando todos los aspectos que son exclusivamente personales, como el hecho de que haya sido mi profesión o el hecho de que me haya gustado aprender y enseñar las matemáticas. Todo lo demás es válido en esta pregunta. Es una herramienta indispensable para investigar cualquier ciencia, para entender la ciencia, para enseñarla. Es una herramienta también de uso cotidiano por todas las personas dependiendo de su nivel de

conocimiento y de los problemas que tengan que resolver; pero diariamente están usando herramientas matemáticas para resolver esos problemas.”

3. ¿Qué es, para usted, la geometría?

“La geometría es una rama de la matemática muy importante. Tan importante que junto con la aritmética quizás sea de las ramas más antiguas en la matemática. Y para mí, como maestro, ha sido importante porque el estudio de la geometría va asociado al desarrollo general de la matemática. Es decir, la matemática empieza siendo aritmética y geometría básicamente. El estudiar la evolución de la geometría a mí, personalmente, me ha servido para valorar el trabajo de los matemáticos antiguos, de métodos que hoy en día ya no se usan, pero que tienen un gran valor estético y un gran valor didáctico. La verdad es que es una rama que, personalmente, a mí, me ha gustado siempre.”

4. ¿Qué función tiene la geometría?

“Yo creo que podemos hablar de tres aspectos. El primero: ¿qué importancia tiene en la matemática?, segundo: ¿qué importancia tiene en la enseñanza de la matemática?, y tercero: ¿qué importancia tiene en la vida diaria?

Respecto a la matemática, la geometría, durante muchos siglos se ha basado exclusivamente en los métodos, digamos, imaginables: en objetos planos o con volumen. Sin embargo, en los últimos siglos se ha empezado a investigar geometría, digamos, no sensible o no perceptible por los sentidos, o geometría abstracta. La verdad es que para la matemática ha sido importante, incluso ahora que parece que, desde fuera, queda un poco olvidada. Pero no es así, ya que la investigación de esos espacios y de esas estructuras que no son perceptibles por los sentidos, es un campo que está dando muchos frutos a nivel teórico, que está abriendo nuevos horizontes y que se aprovecha luego en otras ramas. Respecto a la enseñanza de las matemáticas, es muy importante por lo que he dicho antes. Explicando la geometría, los alumnos perciben cual ha sido la evolución de la historia de la matemática en general, ya que la geometría ha estado ahí desde siempre. Es una rama antiquísima que nace al mismo tiempo que toda la matemática.

Luego, en la vida diaria, también es importante porque estamos continuamente manejando formas y cuerpos y, lógicamente, el conocimiento de esas formas tiene mucha utilidad.”

5. ¿Cuál es la importancia de que el conocimiento especializado del profesor en la geometría sea sustancialmente mayor al que se quiere impartir al alumnado independientemente de la etapa en la que se encuentre?

“Es muy importante, yo diría que decisiva y fundamental. El profesor tiene que tener un conocimiento mucho más profundo de lo que tiene que impartir, ya que de ese conocimiento más profundo es de donde van a salir luego muchos factores y muchas conclusiones que te van a ayudar a dar clase. Es decir, no se puede dar clase o enseñar bien algo que se no se domina. El profesor, tanto en geometría como en cualquier otro aspecto o tema, tiene que tener una formación mucho más completa del temario que está impartiendo, independientemente de la etapa que sea. Entre otras cosas, por ejemplo, siempre te vas a encontrar, afortunadamente, alumnos que van a preguntarte o a consultarte, te van a decir algo que han imaginado o pensado, y tú, evidentemente tienes que saber responderle. No te puedes quedar solo con lo que estas enseñando, tienes que saber mucho más, tanto de geometría o de lo que sea.”

6. ¿Es importante que el profesor conozca aspectos de un tema concreto de geometría, aunque estos nunca se lleguen a impartir?

“Es muy importante porque una de las cosas que te sorprende cuando empiezas a estudiar a cierto nivel la matemática, es la relación íntima que existe entre muchísimos terrenos, muchísimos aspectos o asuntos, que tú cuando, en etapas anteriores estabas estudiando esto mismo a otro nivel, no sabías que pudieran estar conectados. El hecho de que no vaya a impartir un contenido concreto de geometría, o del tema que sea, no significa que no te tomes interés por él. Ese conocimiento de ese tema que no vas a impartir, inconscientemente, te va a beneficiar en otros asuntos, o te va a dar la clave para poder explicar algo que no sospechabas que tuviera una relación, ni remota, con

lo que estás dando. A mí me ha pasado muchas veces que estaba explicando algo a los alumnos y me he dado cuenta de que se conectaba con otros asuntos previos o con otros asuntos de otra materia u otro aspecto de las matemáticas que ni siquiera se imparten en los colegios. Llega el momento en el que se te enciende la bombillita y resulta que algo que tu habías estudiado antes, te ilumina, te da más luz para entender lo que estas explicando. La matemática no está formada por compartimentos estancos. Son compartimentos que se comunican y se relacionan mucho más de lo que nos pensamos.

7. ¿Es importante tener en cuenta o haber enseñado con anterioridad otros contenidos matemáticos para la enseñanza de la geometría?

“Si. Es importante por lo que hemos comentado anteriormente. La matemática no está formada por compartimentos estancos, si no que todas las ramas y todos los campos están conectados unos con otros. Entonces el haber estudiado y enseñado otro aspecto u otra rama te va a enriquecer a la hora de enseñar la geometría, ya que adquieres experiencia, no solo como docente en general, si no experiencia docente en matemática. Porque la matemática, como he dicho anteriormente, no son terrenos aislados, si no que están conectados íntimamente más de lo que nos pensamos. Cualquier experiencia que adquieras en otro campo te va a servir.

8. ¿Considera usted favorable la enseñanza de contenidos de la geometría en correlación con otros contenidos transversales?

“Si, es favorable, porque cuando trabajas contenidos transversales, se van a producir una serie de beneficios. Los alumnos cambian de actividad si consigues incluir la geometría en cualquier actividad transversal. Cambian, pero sin darse cuenta, van a estar trabajando la geometría también. A parte de eso, la transversalidad es una de las bases del éxito de la enseñanza, ya que abarca o implica a otras asignaturas, otras áreas, otros campos. La geometría se presta a la manipulación, a la construcción y es favorable incluirla en aquellas actividades que lógicamente permitan incluirlas.”

9. ¿Cuál es la diferencia, según su criterio, entre una demostración, una prueba y una comprobación matemática?

“Supongo que la pregunta se refiera a un teorema o una estructura que se pretende o bien demostrar o bien probar o comprobar. O creo que la prueba consiste en considerar un número limitado de casos que pueden ser números u otras estructuras, y con ese número limitado de datos, intentar probar la validez de algo. El comprobar, entiendo que sería, en caso de tener un número finito de casos posibles, probar con todos. Entonces ya lo hemos comprobado, porque hemos probado con todos los casos posibles. Y la demostración es ya un nivel superior ya que lo que consigue es darle validez indudable al teorema, a la hipótesis o a la estructura que tengamos delante. Al demostrarlo lo que damos es una validez universal.”

10. ¿Qué importancia tiene la geometría para el alumnado de Educación Primaria?

“Yo creo que es muy importante, pero si se sabe aprovechar. Porque en primaria el alumno tiene un pensamiento más concreto, menos abstracto que por ejemplo en secundaria, lógicamente por la edad, y si hay algo que se presta precisamente al trabajo concreto, es la geometría, las figuras, los polígonos, las construcciones, el dibujar polígonos, el dibujar figuras. Y todo esto, bien aprovechado es muy importante, porque se adapta muy bien a lo que son las características del alumnado de primaria, con el que hay que trabajar a un nivel mucho más concreto que por ejemplo en secundaria, que ya puedes y tienes que extenderte en otros terrenos más abstractos. Pero lógicamente hay que saber aprovecharlo. Digamos que esa una rama de las matemáticas que se presta a fácilmente a trabajarla con niños de primaria.”

11. ¿Cuáles son las dificultades más comunes que presenta el alumnado en el estudio de la geometría?

“Algunas veces son dificultades que tarda uno en captar. Una muy curiosa es la de los nombres de la geometría elemental. Muchos tienen un origen griego. Nombres que, a los niños, lógicamente les cuesta trabajo comprender, ya que no son términos que se

utilicen en el lenguaje cotidiano. Podemos decir “pentágono”: “penta” en griego es cinco, que para nosotros es obvio ya que tiene cinco lados, pero para ellos, entenderlo, es más difícil. El niño tiene que aprender a sobrepasar esa dificultad en la terminología. Hay muchos términos que son de origen griego. También hay otro asunto que es la clasificación. Hay una dificultad en la clasificación que se ve muy claro por ejemplo en los cuadriláteros. En la primaria, los cuadriláteros casi nos vemos obligados a enseñarlos en categorías independientes, es decir, el rombo, el cuadrado... y lógicamente nosotros sabemos que el cuadrado también es rombo, pero sin embargo tenemos que enseñarlo como si fueran cosas independientes. No podemos explicárselo a los niños así. En ese aspecto tenemos que explicarlo “en falso”, es decir una cosa es un cuadrado y otra cosa es un rombo, cuando realmente todos los cuadrados son rombos, pero no todos los rombos son cuadrados. Por eso a menudo hay problemas en la clasificación.”

12. ¿Considera importante realizar cambios en las tácticas de enseñanza de la geometría dependiendo del contexto del aula en la que se imparta?

“No solo es importante, sino que es indispensable hacer cambios, ya que en geometría como en cualquier otro asunto o tema que estés enseñando tienes que introducir cambios para adaptarte a la realidad del aula. Todas las aulas no son iguales ni todos los grupos son iguales ni todos los colegios son iguales. Evidentemente tienes que adaptarte, pero en geometría y en cualquier otro asunto. Lo primero que tienes que hacer es ver con qué realidad tienes que trabajar, qué características tiene el colegio y los alumnos, de qué medios dispones. En conclusión, todos los factores que influyen en el aprendizaje. Lo que te sirve en un contexto o lo que te funciona con un grupo resulta que no te funciona o es contraproducente en otro.

13. ¿Qué técnicas o estrategias suele utilizar para la enseñanza de la geometría?

“Esta pregunta es muy complicada, pues las técnicas y estrategias tienen que estar en función, lógicamente, del nivel del que estemos hablando. No es lo mismo en primero de primaria que en sexto. En la geometría, aparte de lo que es común, como la exposición y el trabajo individual que puedan hacer los alumnos, se intenta incidir en carácter

sensorial, en el carácter manipulativo, constructivo que tiene la geometría. Eso permite utilizar estrategias distintas a las que puedas utilizar en otros temas, por ejemplo, es fundamental la construcción, el dibujo, todo lo que los alumnos puedan comprobar de manera métrica, tanto con figuras en clase, como con objetos en casa. Por ejemplo, la longitud de la circunferencia la pueden medir con una cinta métrica de costurera, con un bote o un cubo de agua. La geometría se presta especialmente a eso, a la manipulación, a la construcción, a la medición práctica. En todo lo que se pueda hay que procurar aprovechar el carácter manipulativo y sensorial que la geometría tiene. Es muy importante también el trabajo en grupo, ya que los alumnos disfrutan mucho construyendo en equipo.

14. ¿Utiliza material específico de algún tipo para la enseñanza de la geometría?

“Además del material tradicional de dibujo técnico, que se ha utilizado siempre en la enseñanza de la geometría, como pueden ser la regla, la escuadra, el cartabón, el transportador de ángulos, el compás, etcétera, también utilizo cajas de cuerpos geométricos, puzzles tridimensionales que se pueden montar con diferentes piezas poligonales y formas de poliedros tanto regulares o irregulares. También utilizo recursos de internet, en los que hoy en día se pueden buscar desde desarrollos de poliedros, hasta ideas o experiencias escolares que se hayan hecho. También la pizarra digital es de gran ayuda. Incluso el teodolito o la cinta métrica para hacer prácticas en el exterior. La propia pista de deporte es un campo estupendo a la hora de dar una clase al aire libre sobre polígonos o sobre medidas de longitudes.

15. ¿Qué importancia tiene adaptar el modo de presentar a cada una de las etapas educativas en la enseñanza de la geometría?

“Hay que adaptar la geometría a las etapas educativas. No es lo mismo tocar el tema de los poliedros en un nivel que en otro. Al principio habrá que tocar el tema a un nivel más sensorial, con la visualización, con el tacto. En otras etapas podremos entrar ya en una geometría más descriptiva, hablando de vértices, de caras o de lo que es un ángulo.

Llega un momento en el que cuando los alumnos tienen ya unas herramientas de cálculo, pueden entrar en el cálculo de superficies y de volúmenes, sencillos, evidentemente como el área o la longitud, o un volumen sencillo.

16. ¿Suele plantear usted objetivos extracurriculares a la hora de enseñar geometría?

“Sí, cuando se puede, y explico por qué. Se puede cuando las características del curso lo permiten, cuando la programación del curso va lo suficientemente desahogada como para poder introducir algún objetivo que no estaba previsto al principio y cuando se vea que puedes trabajar ese objetivo con ese curso. También es importante que la temporalización te dé un respiro para introducir algo que no estuviera en el currículo previsto, y hacerlo con vistas al futuro para poder introducir aspectos del curso siguiente y trabajar algo que no estaba previsto, lo cual es muy motivante para los alumnos.”

17. ¿Le parece correcta la estructuración de los contenidos de la geometría en cada una de las etapas de la Educación primaria según el marco normativo?

“Yo creo que es mejorable. Quizás se debería profundizar más. Cuando digo profundizar no me refiero a nivel de contenidos. Creo que los contenidos que se ajustan a las necesidades del alumnado, incluso a la preparación posterior para la secundaria. Lo que si echo en falta es que no se conecta mucho con otras ramas, con otros aspectos de la matemática con los que podría conectar perfectamente, y se podría dar de una manera más interdisciplinar, entre las propias matemáticas para entendernos. Aparte de esto en las propias leyes, en los propios libros de texto, los maestros también caemos en ese error. La geometría viene al final de todo y por eso normalmente se programa para el último periodo de curso y muchas veces se queda sin dar.”

18. ¿Piensa que se le da suficiente importancia a la enseñanza de la geometría en el currículo vigente de Educación Primaria? En caso negativo, explique qué haría usted para mejorarla.

“Yo creo que se le da menos importancia de la que tiene. Porque la geometría, aparte de lo que hemos comentado ya en otras preguntas, va a servir muchísimo para otras disciplinas y para otras materias como pueden ser la física y la química, donde se está trabajando constantemente con estos aspectos. Es fundamental tener buena base en geometría para poder trabajar con estas materias. ¿Qué es lo que yo haría? Como hemos dicho ya antes, la geometría se presta a trabajar en multitud de temas y terrenos, como en la aritmética. Pienso que se debería tratar mejor, ya que no costaría mucho trabajo ni habría que ampliar mucho los conceptos, ya que, a nivel de contenido está más o menos ajustado. Pero si se debería de introducir como complemento para trabajar otros temas en matemáticas. Creo que habría que incluirla más a lo largo del año, independientemente de que se toque también luego específicamente en algunos temas en exclusiva.”