Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

# Análisis de la influencia de la radiación térmica en los procesos de convección de Rayleigh-Benard

Autor: Ángel Enrique Boyer Varela
Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018

Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

# Análisis de la influencia de la radiación térmica en los procesos de convección de Rayleigh-Benard

Autor:
Ángel Enrique Boyer Varela

Tutor:
Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor
Profesor titular

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2018

# Índice general

# Índice de figuras

# Índice de cuadros

6

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Objetivos y descripción del proyecto

El objetivo principal de este trabajo es la obtención de un modelo simple para resolver numéricamente cómo afecta el aporte de transferencia de calor por radiación en los movimientos debidos a transferencia de calor por convección. Este último ha sido ampliamente estudiado e incluso se han realizado hasta el momento Proyectos de Fin de Carrera en esta misma escuela de Ingeniería (Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Sevilla) que servirán de apoyo para este trabajo y que se pueden encontrar como recurso electrónico en el catálogo de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla, como son [1] y [7].

La principal incorporación que se quiere incluir es, por tanto, la adición del término de adición de calor por radiación al problema de convección, pues el problema de convección natural en cavidades ha sido ampliamente estudiado, despreciando los efectos de la radiación, que en realidad en muchas situaciones no es despreciable. El interés de este problema surge precisamente debido a que el problema de convección en un fluido encerrado en cavidades ha sido profundamente estudiado, pero ha sido práctica habitual despreciar los efectos de la contribución del calor por radiación, siendo en realidad un problema de una gran relevancia en diversas aplicaciones ingenieriles, como colectores solares, combustiones o el procesado de materiales (por ejemplo en la formación y crecimiento del vidrio), donde la radiación puede interactuar fuertemente con la convección natural. Se trata un problema que por su enorme complejidad apenas ha sido posible estudiar más allá de documentos en los que se usan ecuaciones linealizadas y una gran cantidad de hipótesis simplificativas, como es el trabajo de R. M. Goody, *The influence of radiative transfer on cellular convection* [8], quien fue uno de los pioneros en la investigación del efecto de la radiación en la transición de una capa de fluido calentada por debajo mediante las aproximaciones ópticamente fina y gruesa para cuerpos con contornos libres negros, y otros que se usarán posteriormente. Afortunadamente, gracias al uso de ordenadores modernos y programas que permiten realizar un gran número de cálculos numéricos como el aquí usado MATLAB, a partir de modelos de radiación más o menos sofisticados (en cualquier caso debido a la gran complejidad de su estudio siempre hay aproximaciones) se ha podido estudiar con mayor profundidad este problema, a través de métodos numéricos y las hipótesis comentadas. Más adelante se profundizará en este tema, pero se puede adelantar que tras investigaciones (Yang, 1986) es sabido que debido al acoplamiento de la energía y la cantidad de movimiento, la radiación puede no solo alterar el campo de temperaturas si no también al fluido. Además, en la literatura se pueden encontrar más documentos que investigan este problema incluyendo modelos de incluyendo radiación, como [2], cuyo modelo de condiciones de contorno es muy completo, pero es discutible el uso que se hace de la aproximación de Boussinesq, pues las diferencias de temperaturas entre las paredes que utiliza es elevada, lo que contradice una de las hipótesis de dicha aproximación. Por otro lado, el problema de convección fue estudiado también sin considerar y considerando la radiación, mediante una aproximación de medio transparente y opaco, en el caso de temperatura impuesta en las paredes verticales, influyendo por tanto la gravedad, en cavidades cuadradas, considerando gravedad normal y gravedad baja por M. Kassemi y M. H. N. Naraghi [3]. A su vez, la influencia de la radiación, pero acoplada en este caso con la conducción, se estudió de forma numérica en aplicaciones de aislamientos de edificios mediante un método de diferencias finitas (distinto al método aquí usado), por Thomas Blomberg [4]. Asimismo, un estudio reciente [5] (2014) se debe a E. Abbasi-Shavazi, G.O. Hughes y J.D. Pye, motivados por el desarrollo de tecnología para obtener energía a partir de la radiación solar, han puesto su empeño en obtener resultados cuya aplicabilidad permita obtener temperaturas de trabajo y eficiencias más altas en los sistemas termosolares.

El último trabajo mencionado es un ejemplo magnífico de posible aplicación dentro del ámbito del problema tratado en este Trabajo de Fin de Curso. Para lograrlo, han investigado mediante modelos numéricos y apoyos experimentales cómo obtener mejores instalaciones concentradoras de energía solar, mediante el uso de recibidores cilíndricos ver figura 1.1 para disminuir las pérdidas por radiación y convección en comparación con respecto a cilindros volumétricos. En este documento se ha concluido que además de perderse energía en forma de radiación por intercambio de calor con el entorno, las pérdidas de calor por convección son las de mayor complejidad, siendo fuertemente influenciada por la radiación local dentro de las paredes de la cavidad.

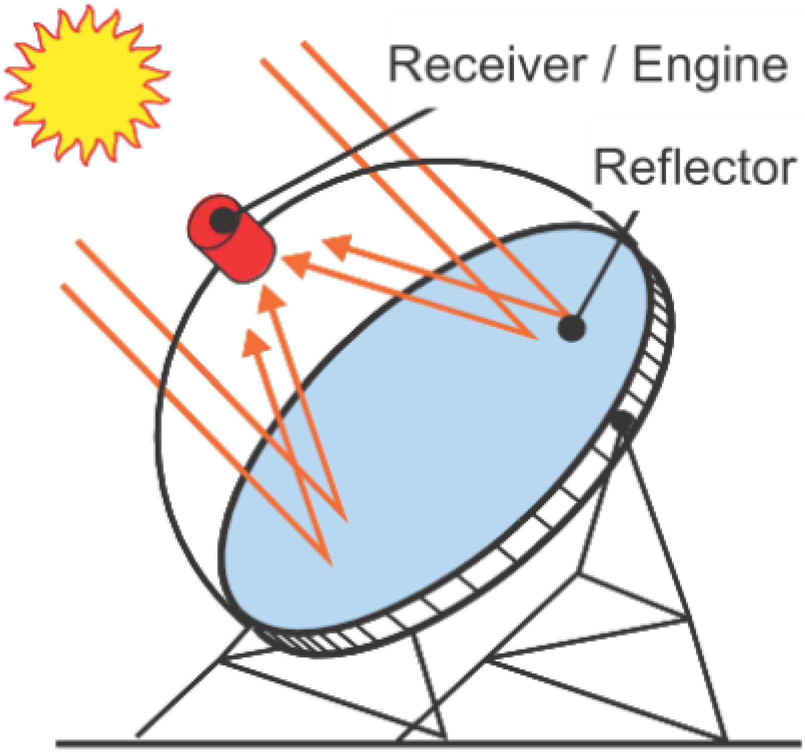



Figura 1.1: Esquema de un sistema concentrador de energía solar. Tomada de [5].

Una vez expuesta la principal motivación de este proyecto, se van a explicar conceptos esenciales para el trabajo, se obtendrán ecuaciones apropiadas según las hipótesis que se utilicen y se desarrollarán programas para resolverlas. La aplicación de dichos programas de cálculo numérico se enfocará especialmente a la obtención de un modelo simplificado pero realista de este problema.

## 1.2. Concepto de convección. Convección forzada y natural

La **transferencia de calor por convección**, o simplemente, **convección** es un proceso de transporte de calor, entre fluidos o dentro de un mismo fluido, debido a su movimiento . Adicionalmente, se denomina convección al intercambio de calor entre una superficie sólida y un fluido [9] en movimiento relativamente a ella.

El estudio de la convección requiere del uso de la teoría que otorgan la *Mecánica de Fluidos* y la *Transmisión de calor*, asignaturas abordadas durante los Grados en Ingeniería, y, particularmente, en el Grado en Ingeniería Aeroespacial, en los cursos de 2$^o$ y 3$^o$, a través de *Mecánica de Fluidos I* y *II* y *Termodinámica*, respectivamente.

Dentro de las posibilidades de la forma en que se produce la convección, se puede encontrar la **convección forzada** y la **convección natural**. La primera de ellas se produce mediante el uso de un objeto externo que la provoca, como, por ejemplo, una bomba hidráulica o un ventilador. La segunda, en cambio puede tener lugar por la simple diferencias de temperaturas entre zonas del fluido, de manera que es buscada, de forma natural, la homogenización de dicho campo de temperaturas. Además, dentro de la categoría de convección forzada, se puede hallar la convección forzada externa e interna.

Para desarrollar la última idea del párrafo previo, se puede decir que la diferencia está en la ausencia o posibilidad de libre crecimiento de la capa límite formada por la presencia de una corriente en contacto con una superficie, o no. Es decir, si dicha capa no está confinada (puede crecer indefinidamente), se denomina convección forzada externa, como es el caso más típico de capa límite formada por una corriente fluida y una placa plana, ya sea lisa o rugosa. En caso contrario, si la capa está confinada, por ejemplo creciendo dentro de un tubo o un conducto, se denomina convección forzada interna. Se recomienda al interesado en profundizar en este tema, la lectura de [10].

## 1.3. Convección en la atmósfera

Una definición más general sobre lo que significa convección, es todo aquel movimiento debido a variaciones de densidad por la presencia de un campo gravitacional constante. Consecuentemente, bajo esta perspectiva, se puede decir que casi toda la energía cinética de la atmósfera y de los océanos y la mayor parte de los sistemas fluidos conocidos que existen en el universo, suceden por medio de la convección. A pesar de todo esto, en las ciencias atmosféricas generalmente se utiliza una definición algo más restrictiva, que abarca solo circulaciones térmicas a una escala relativamente pequeña que resultan de la acción de la gravedad en una distribución vertical[1] de masa. Incluso bajo esta segunda definición, la convección acoge a una enorme variedad de fenómenos en las atmósferas de los planetas.

En cuanto a la convección en la atmósfera terrestre, la naturaleza de la convección está fuertemente afectada por la influencia de cambios de estado del agua, que causa mayoritariamente la formación de nubes y precipitaciones y su movimiento en la atmósfera. Un aspecto interesante de esta convección húmeda es su organización en diferentes escalas, desde microescalas turbulentas a nivel de agrupaciones de corrientes convectivas de nubes que dan lugar a borrascas y huracanes que alcanzan cientos de kilómetros[11].

## 1.4. Transferencia de calor en el sol. Zonas de radiación y convectiva

La fuente de energía en el sol es debida a las reacciones nucleares que tienen lugar en su núcleo. Allí, gracias a temperaturas de 15 millones (K), se fusionan núcleos de átomos de hidrógeno originando átomos de helio. La energía producida en este proceso avanza hacia afuera, primero en forma de *energía de radiación* llamada fotones; es lo que se denomina *zona de radiación*. Después, la energía se transporta hacia arriba, a través de gases solares calentados por los mencionados fotones. Es este tipo de transporte de energía el que se conoce como *convección solar*. La relevancia de esta zona convectiva (ver figura 1.2) en el sol reside en que gracias a los movimientos de convección, se generan en el interior del sol sus campos magnéticos (lo que se observa en la superficie solar como manchas negras) y circulación de corrientes de gas caliente, llamadas **protuberancias** (*prominences* en inglés). Finalmente, existe una fina capa solar llamada fotosfera, que es la parte observable

[1]Vertical usado en el sentido de dirección radial con respecto a la Tierra.

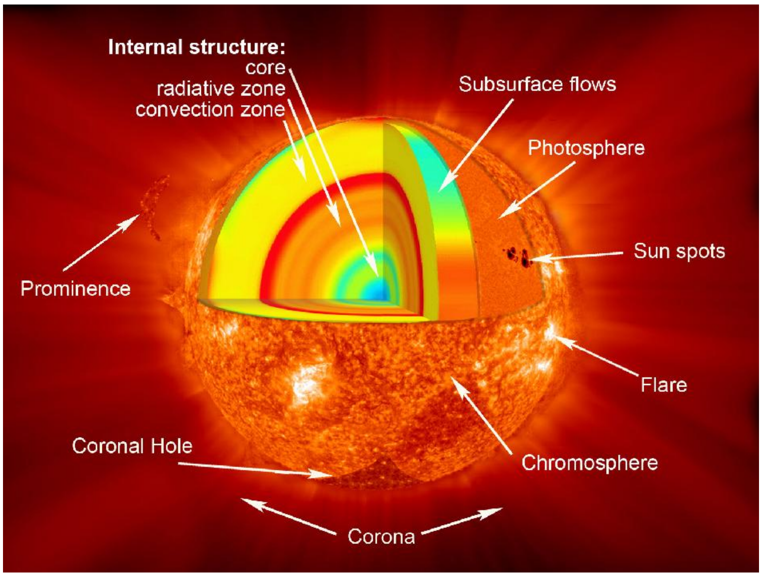



Figura 1.2: Capas solares

desde la Tierra con nuestra propia vista, de la que escapa la mayor parte de la energía que se percibe como luz. En esta superficie, se pueden observar celdas convectivas, representadas en la imagen 1.3.

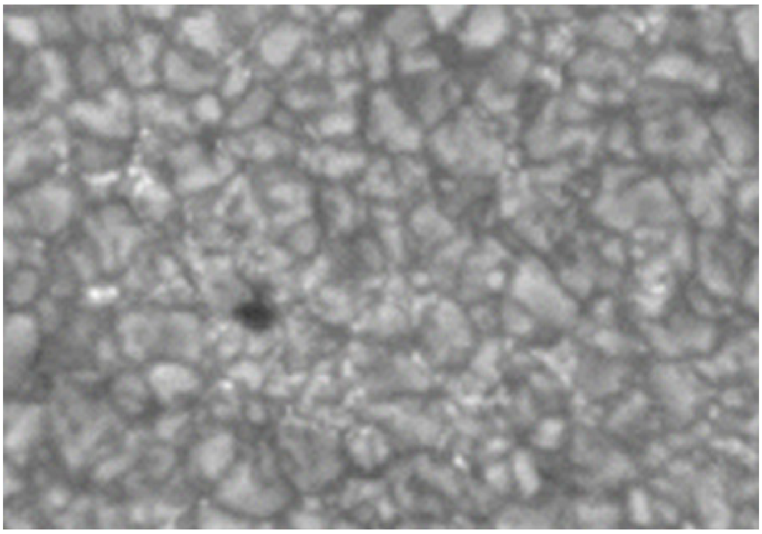


Figura 1.3: Celdas convectivas en la superficie del sol, imagen cortesía de NASA.

Se entrará ahora en detalles sobre las zonas de radiación y la convectiva. La primera de ellas se extiende desde el núcleo del sol hasta la capa de interfaz (transición) o **tacoclina** (cuya principal importancia es que se cree que aquí se genera el campo magnético solar), que es aproximadamente desde el 25 % de la distancia a la superficie hasta el 70 % de dicha distancia. Como es evidente, el método de transferencia de energía es por radiación, es decir, que la energía generada en el núcleo es transportada por fotones que rebotan de partícula a partícula a través de esta zona. Aunque los fotones se desplazan a la velocidad de la luz, debido a la enorme densidad de esta zona, colisionan tantas veces que se necesitan hasta millones de años para que alcancen la antes mencionada tacoclina, cuya densidad es unas 100 veces menor (de 20 $g/cm^3$ a unos 0.2 $g/cm^3$). También disminuye la temperatura desde uno 7 millones de °C hasta unos 2 millones de °C. El modelado de la radiación resulta extremadamente complejo y por ello, como se verá detalladamente en el capítulo siguiente, se recurrirá al uso de dos aproximaciones para situaciones extremas denominadas **ópticamente fina** o transparente y **ópticamente gruesa** u opaca.

Después se encuentra la zona de convección, que es la más externa del interior del sol. En su base, las temperaturas son de unos de 2 millones de °C. Esta este temperatura es lo suficientemente "baja"para que los iones más pesados (como los de oxígeno, calcio o hierro) puedan retener algunos de sus electrones. Esto provoca que el material se haga tan opaco que la radiación apenas puede pasar. Así, este calor se queda atrapado y será finalmente el responsable de que el fluido se convierta en inestable y empiece la convección. Estrictamente, esto sucederá si el gradiente de temperatura consigue superar al gradiente adiabático. Este último se puede entender como la tasa a la que la temperatura caería si un volumen fluido subiera (se alejara radialmente del núcleo) sin adición de calor. Dichos movimientos convectivos transportan el calor rápidamente a la superficie y, por tanto, el fluido se expande y se enfría. Estos movimientos convectivos se pueden observar como **gránulos** o **supergránulos** y representan un claro ejemplo de las llamadas *celdas de Bénard*.

## 1.5. Estructura del trabajo

En este trabajo se estudia de forma teórica y con la obtención de resultados numéricos, las modificaciones debidas a la interacción de la radiación en el problema de convección natural de Rayleigh-Bénard en una cavidad rectangular, tanto por parte del medio como por parte de las paredes de dicha cavidad.

En el capítulo 2, se explican cuáles son los mecanismos físicos de la radiación y qué se entiende por medio participativo y la aproximación de ese medio cuándo se puede considerar transparente y cuándo se puede considerar opaco. Después, se introducen las ecuaciones del problema teneiendo en cuenta los términos que se deben a la radiación, exponiéndolo posteriormente de forma comparativa las del problema de convección natural sin influencia de la radiación. Además, con una serie de hipótesis sobre el campo de temperatura que están en buen acuerdo con la hipótesis de Boussinesq, se expone el proceso mediante el cual se deducen dichos términos.

En el tercer capítulo, se desarrolla el método numérico usado para resolver las ecuaciones del segundo capítulo. Este método es básicamente el método de colocación mediante interpolantes de Lagrange usando nodos de Chebyshev para casos bidimensionales, es decir para el caso en que las incógnitas del problema dependan de dos coordenadas espaciales. En este mismo capítulo, se explica detalladamente el proceso que se ha de seguir para la imposición numérica de las condiciones de contorno. A su vez, se presentan los códigos principales desarrollados para la resolución de los problemas. También es destacada la explicación facilitada del modelado que se ha seguido para reproducir el comportamiento radiativo de las paredes de la cavidad del problema, junto con los programas expuestos.

Después, en el cuarto capítulo, se presentan los principales resultados obtenidos para el problemas en el que solo se considera participación del medio en la radiación, comparando algunos resultados con la referencia [8], en el caso en que las condiciones de contorno sean las de paredes horizontales con temperatura impuesta y paredes verticales adiabáticas, y viceversa.

Similarmente al anterior, se sigue la misma línea en el quinto capítulo, pero considerando en este caso que solo las paredes participan en la radiación. En esta ocasión, para el caso de paredes verticales adiabáticas se han comparado resultados con [23] y para paredes horizontales adiabáticas, con la referencia [24].

Por último, en el capítulo 6 se exponen algunas conclusiones sobre el trabajo y qué se podría hacer en desarrollos futuros para profundizar en el estudio del tema abordado.

# Capítulo 2

# Formulación del problema

## 2.1. Mecanismos físicos de la radiación y medio participante

Todos los cuerpos emiten radiación en todas las direcciones, con distinta intensidad, a su alrededor a través de ondas electromagnéticas (fotones) debido a la conversión de la energía interna del cuerpo en radiación, por la agitación molecular y atómica que tiene asociadas. La **radiación térmica** es una forma de emisión electromagnética y, por tanto, puede propagarse por el vacío. Ejemplos usuales de radiación son la que llega a la Tierra proveniente del sol o la disipación de calor desde un objeto incandescente. Así, el calor es transmitido entre objetos distanciados con diferente temperatura.

El intercambio de radiación depende de la temperatura y del estado de la superficie emisora. En el caso de líquidos y sólidos solo una fina capa participa en la radiación, sobre todo en los sólidos donde el fenómeno puede considerarse totalmente superficial. Aunque, realmente, también depende del grosor de la capa y de la presión en el caso de cuerpos semitransparentes como el vidrio. En el caso de gases, la emisión y absorción de radiación pueden considerarse efectos volumétricos.

Cuando la radiación llega a un cuerpo, este puede absorber parte, reflejar parte y dejar pasar el resto. La parte que se absorbe es, lógicamente, la que se transforma en calor. La fracción (es decir la parte entre el total) de cada una de las partes se denominan, respectivamente, absortividad, reflectividad y transmisividad. Si un cuerpo tiene una transmisividad igual a la unidad, su reflectividad y absortividad serían nulas y la radiación incidente atravesaría por completo al cuerpo sin absorberse ni reflejarse nada. Esto es lo que se conoce como **cuerpo transparente**. Por ejemplo, el aire es un gas que se puede considerar casi transparente, lo que no sucede con gases poliatómicos como el dióxido de carbono $CO_2$ o el metano $CH_4$, que tienen capacidad de absorber parte de la radiación incidente. En contraste, un cuerpo cuya transmisividad sea nula, es un **cuerpo opaco** y por tanto el total de la radiación que le llega puede ser parcialmente reflejada y parcialmente absorbida. En definitiva, un cuerpo de este tipo, si tiene buena reflectividad, tendrá baja absortividad y viceversa. Además, se define la dispersión (*scattering* en inglés) como el cambio de dirección con respecto a la de propagación de la radiación sin pérdida de energía. Por otro lado, se define de forma necesaria una magnitud llamada radiosidad $\boldsymbol{J}$ que representa a a la cantidad de energía de radiación que abandona un cuerpo por unidad de área y tiempo teniendo en cuenta todas las direcciones; es decir, esta magnitud tiene en cuenta la suma de la intensidad emitida y reflejada. Una vez definidos estos conceptos, se procede a explicar qué se entiende por **medios participativos** y cuáles son sus propiedades.

Considérese una intensidad $I_\nu$ que se propaga a través de un medio en una dirección particular. Cuando atraviesa un elemento de espesor $dS$, se atenúa por la absorción y dispersión debidas a la influencia del medio. La pérdida de intensidad en dicho elemento viene dada por

$$dI_{\nu,\ atenuacion} = -\beta_\nu I_{\nu,\ atenuacion}(S)dS, \tag{2.1}$$

donde $\beta_\nu$ es el coeficiente de atenuación, que se puede demostrar que coincide con el inverso del camino libre medio y que es la suma de dos coeficientes: $\beta_\nu = \kappa_\nu + \sigma_{s\nu}$, con unidades de longitud inversa $m^{-1}$. El primero $\kappa_\nu$ (véase [8]) corresponde al coeficiente de absorción y el segundo $\sigma_{s\nu}$ al coeficiente de dispersión. Un medio que es capaz de influir en la transferencia de radiación de esta manera, dispersándola o absorbiéndola, es lo que se conoce como un medio participativo (o *participating medium* en inglés) [13].

Se quiere hacer hincapié en que el estudio de la radiación es altamente complejo, y para poder obtener modelos que reproduzcan resultados, siempre es necesario realizar una serie de hipótesis simplificativas que permitan obtener soluciones, tanto para reducir la dificultad de las ecuaciones involucradas como las condiciones de contorno del problema. En el caso de este trabajo, al tenerse como condición de contorno paredes aisladas en la cavidad en el caso de que dicha pared no tenga temperatura impuesta (o lo que es lo mismo, es desconocida a priori), habría que tener en cuenta que en dichas paredes, la suma del calor que se reciba o emita por convección más el calor que se reciba o emita por radiación, sea nula (ver figura 2.1). Esta condición de contorno, denominada condición de contorno de convección-radiación, surge de la suposición de que la cavidad en la que está encerrado el fluido está en contacto (por fuera de la cavidad) con un material aislante. Así, en esta situación no aparecen términos de convección en la condición de contorno, con la consecuencia de que habría que modelar de alguna manera ese calor intercambiado en forma de radiación que aparece en la figura mencionada como $q_r$ y está representado con flechas no rectas (el término de calor por convección entre el fludio y la pared sería simplemente $-K\partial T/\partial z$ o $-K\partial T/\partial x$, dependiendo de si la pared aislada es horizontal o vertical respectivamente). En otros trabajos, como *The influence of radiative transfer on cellular convection* o en trabajos donde se ha estudiado la influencia de la radiación en procesos de convección en un fluido encerrado entre dos esferas concéntricas, este término ni si quiera se plantea, pues la cavidad es infinita en el primer caso y en el segundo no hay paredes laterales (por ejemplo eso sucedería en una atmósfera estelar).

De este modo, el objetivo es al menos poder ilustrar de forma cualitativa el efecto que la radiación tiene en los procesos de convección de Rayleigh-Bénard y, en cualquier caso, debido a la enorme dificultad que supone siempre el estudio de la radiación, en cualquier documento en el que se estudien procesos en los que tenga relevancia, nunca se encuentran exentos de hipótesis que permitan obtener resultados que no dejan de ser aproximaciones, con menor o mayor grado de exactitud.

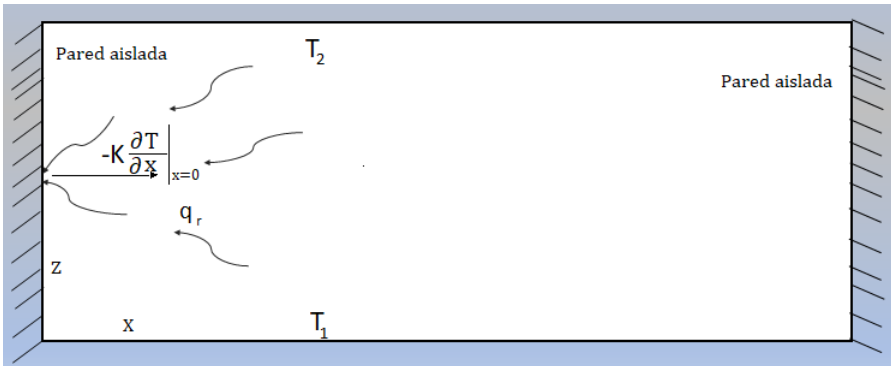



Figura 2.1: Balance de calor en una pared lateral de la cavidad (aislada). El color que recubre a la cavidad está representando al material aislante mencionado.

## 2.2. Ecuaciones del problema de convección con flujo de radiación. Aproximaciones

### 2.2.1. Ecuaciones del problema de convección con radiación. Camino libre medio

Supóngase que el paralelepípedo de la figura 2.4 recibe un flujo de calor por radiación $RH$, del inglés *radiative heating*, en su pared horizontal inferior $z = 0$ y que el fluido dentro de él es capaz de absorber y emitir radiación térmica. Una solución completa para este problema sería extremadamente compleja, por lo que se van a utilizar las aproximaciones, una apropiada para medios opacos y otra para medios transparentes.

En esta sección, se va a exponer la ecuación de la energía completa, teniendo en cuenta el calor que se transmite por conducción y radiación. De este modo, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\nabla^2 T + \frac{RH}{\rho_0 c_p}, \tag{2.2}$$

donde $\alpha = K/(\rho_0 c_p)$, es la difusividad térmica.

La complejidad del asunto reside en que es necesario modelar el término $RH$ para poder trabajar con el nuevo sistema. Para ello, se recurre en la sección próxima al uso de dos aproximaciones relacionadas con el valor del coeficiente de absorción $\kappa_\nu$, o mejor dicho, con el valor inverso de dicho coeficiente, denominado **camino libre medio** y comparado con la dimensión $H$ de la cavidad en la que se mueve el fluido. Entiéndase dicha magnitud $\kappa^{-1}$ como la distancia que recorren las partículas de una onda electromagnética, en media, entre colisiones con las partículas del medio que atraviesa. Dicha magnitud puede ser *muy pequeña* (las partículas colisionarían con una alta frecuencia al atravesar un medio) o *muy grande* (las partículas tienen prácticamente vía libre e incluso una alta fracción de ellas podría llegar a atravesar el medio sin colisionar). Ambas situaciones, que se desarrollarán en las siguientes secciones, se pueden encontrar en medios como la atmósfera del Sol . Por ejemplo, en la zona de radiación y en la base de la zona de convección en el sol, los fotones rebotan en incontables ocasiones antes de atravesar dicha zona, por lo que se puede entender que en esta zona el medio es ópticamente grueso. Sin embargo, si se avanza hacia la fotosfera del sol, tan solo unos cientos de kilómetros dentro de ella, el medio pasa de opaco a transparente [14].

Una vez se ha definido el coeficiente de absorción $\kappa_\nu$, se hace necesario explicar qué se entiende por **profundidad óptica** (*optical depth/thickness* en inglés). Este parámetro describe cuánta absorción tiene lugar cuando la luz atraviesa un medio absorbente, por ejemplo, la atmósfera solar. Considérese como un haz de fotones la luz emitida por un emisor hacia una superficie, algunos de los cuales pueden ser absorbidos por el medio que atraviesan para llegar hasta ella. La probabilidad infinitesimal $dp_\nu$ de un fotón emitido a una frecuencia $\nu$ en una rebanada de espesor $ds$ (ver figura 2.2), es directamente proporcional a dicho espesor:

$$dp_\nu = \kappa_\nu ds \Rightarrow \kappa_\nu = \frac{dp_\nu}{ds}. \tag{2.3}$$

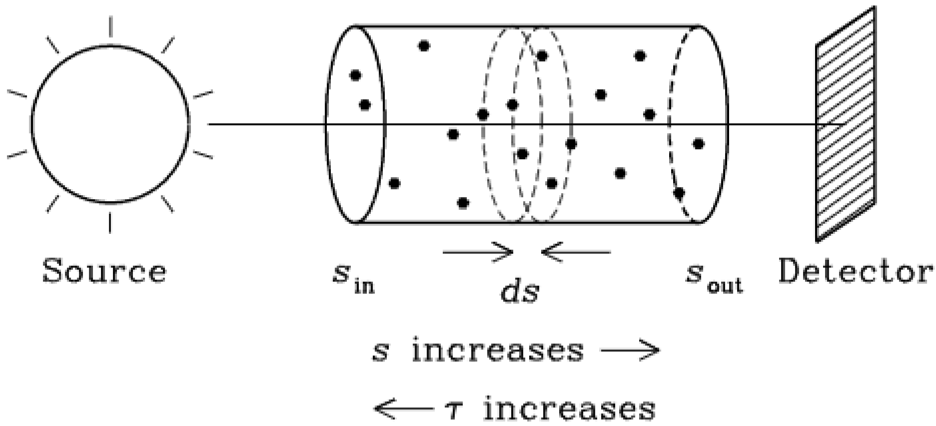



Figura 2.2: Esquema del emisor, medio y superficie detectora. Imagen extraída de: https://www.cv.nrao.edu/course/astr534/Radxfer.html

Entonces, esto significa que la probabilidad de absorción no es constante. Para ilustrar esto, téngase en mente que a medida que la luz viaja, algunos fotones son absorbidos, de tal modo que a mayor distancia del emisor, menor será la cantidad de fotones restantes, con lo que la probabilidad de absorberlos aumentará de forma no lineal con el grosor de la rebanada.

La fracción de la intensidad perdida debida solo a la absorción durante un desplazamiento infinitesimal (ver ecuación 2.1) viene dada por:

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -dp_\nu = -\kappa_\nu. \tag{2.4}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación a lo largo de todo el camino, se obtiene la cantidad de intensidad al final de este, en función de la intensidad inicial.

$$I_{\nu f} = I_{\nu 0} e^{-\int_0^{s_f} \kappa_\nu(s')ds}, \tag{2.5}$$

donde la cantidad del exponente $\tau_\nu$,

$$\tau_\nu = -\int_0^{s_f} \kappa_\nu(s')ds', \tag{2.6}$$

se denomina **profundidad óptica**. Si $\tau_\nu << 1$, la intensidad a la frecuencia $\nu$ permanece prácticamente constante, y se puede decir que el medio es **ópticamente fino** o **transparente**, mientras que si $\tau_\nu >> 1$, la intensidad $I_\nu$ cae rápidamente, absorbiéndose los fotones por el medio de forma inmediata y se considera que este medio es **ópticamente grueso** u **opaco**. En las siguientes secciones se desarrollarán estas ideas.

### 2.2.2. Ecuaciones de Kourganoff

La ecuación que gobierna en las variaciones de intensidad de radiación en una dirección $\vec{s}$ fue expuesta por Kourganoff (1952) [15]:

$$\frac{dI(\vec{s})}{ds} = \kappa[B - I(\vec{s}0)], \tag{2.7}$$

donde $I(\vec{s})$ es la intensidad de radiación in la dirección de $\vec{s}$, $B$ es la intensidad de Planck de un cuerpo negro[1], $ds$ es un desplazamiento infinitesimal en la dirección $\vec{s}$ y en $\kappa$ se ha omitido el subíndice. El flujo de calor por radiación $RH$ es:

$$RH = -\int_{4\pi} \frac{dI(\vec{s})}{ds} d\omega, \tag{2.8}$$

donde $\omega$ representa a un elemento de ángulo sólido. Al ser isotrópica la intensidad de radiación de un cuerpo negro, se tiene, de la combinación de la ecuaciones anteriores:

$$RH = -4\pi\kappa B + \kappa \int I(\vec{s})d\omega. \tag{2.9}$$

El primer término de 2.9 representa pérdidas de calor por emisión de radiación térmica en el punto del fluido a la temperatura local, ya que $B$ depende de la temperatura según la ley de Stefan, ecuación 2.10:

$$B = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \tag{2.10}$$

donde $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

El segundo término de 2.9 representa el calor absorbido en el punto del fluido y emitido desde otros puntos del fluido y su contorno.

Se puede demostrar que las dimensiones de las celdas convectivas formadas en el seno de la cavidad, son del orden de $H/a$, siendo $a$ un parámetro adimensional de orden unidad cuyos valores típicos se pueden consultar en Pellew & Southwell [16] y siendo $H$ una dimensión característica de la cavidad. Por tanto, comparando los valores de el camino libre medio $\kappa^{-1}$ y $H/a$ se pueden obtener las aproximaciones tratadas en las próximas dos subsecciones.

### 2.2.3. Aproximación ópticamente fina o transparente

El primero de los casos abordados es aquel en el que se cumple que el orden del camino libre medio es mucho mayor que el orden del tamaño de la celda convectiva, es decir, si se cumple que $\kappa^{-1} >> H/a$ o

[1] Aproximación física ideal que hace referencia a un cuerpo capaz de absorber toda la radiación electromagnética que le llega, independientemente de su frecuencia o ángulo de incidencia.

alternativamente $\kappa^{-1}H << a$. En este caso, la ecuación 2.9, con el uso de la ecuación de Stefan-Boltzmann 2.10 se reduce a:

$$RH = -4\kappa\sigma T^4, \tag{2.11}$$

donde $T$ es la temperatura. Seguidamente, es necesario introducir este término en la ecuación de la energía 2.2. Antes de ello, conviene aclarar que la diferencia de temperaturas entre las paredes inferior y superior, $T_1$ y $T_2$ respectivamente, varían relativamente poco, es decir, se cumple que:

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} << 1; \ \frac{T_1 - T_2}{T_2} << 1. \tag{2.12}$$

Por tanto, el campo de temperaturas se puede modelar como una temperatura de equilibrio $T_e$ dependiente de las coordenadas $x$ y $z$ más una perturbación $T'$ debida al movimiento dependiente de las coordenadas espaciales y el tiempo. Además, esta temperatura de equilibro se puede descomponer a su vez como la suma de la temperatura media $T_m = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$ más una temperatura de perturbación de equilibrio dependiente de $x$ y $z$, $Te'(x, z)$. En resumen:

$$T(x, z, t) = T_e(x, z) + T'(x, z, t); \ \mathrm{donde\ T' << T,\ T_e} \tag{2.13}$$

$$Te(z) = T_m + T_e'(x, z); \ \mathrm{donde\ T_e' << T_m,\ T_e} \tag{2.14}$$

El sistema de ecuaciones a resolver sería el conformado por las ecuaciones:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial\left(p_m/\rho_0\right)}{\partial x} + \nu\nabla^2 v_x; \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial\left(p_m/\rho_0\right)}{\partial y} + \nu\nabla^2 v_y; \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial\left(p_m/\rho_0\right)}{\partial z} + g\beta(T - T_m) + \nu\nabla^2 v_z; \tag{2.18}$$

$$\rho_0 c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = K\nabla^2 T + RH, \tag{2.19}$$

donde $RH$ es el término correspondiente al calor intercambiado por radiación, como se dijo en el apartado anterior.

Dicho sistema 2.15-2.19 habrá que resolverlo bajo las condiciones de contorno siguientes, que se corresponden con paredes verticales aisladas y horizontales con temperaturas impuestas $\mathrm{T_1}$ y $\mathrm{T_2}$:

$$K\left.\frac{\partial T_e}{\partial x}\right|_{x=0,L} \pm \epsilon\sigma(T_m^4 - T_e^4) = 0, \tag{2.20}$$

$$T(z=0) = T_1 \Rightarrow \ T_e' = T_1 - T_m = \frac{T_1 - T_2}{2}, \tag{2.21}$$

$$T(z=L)=T_1 \Rightarrow\ T'_e = T_2 - T_m = -\frac{T_1-T_2}{2}, \tag{2.22}$$

donde $\epsilon$ es la emisividad del fluido.

Si en la última ecuación se introducen las relaciones 2.13 y 2.14, se separa el problema de equilibrio y de movimiento, respectivamente, se obtienen las ecuaciones:

$$K\nabla^2 T'_e - 16\kappa\sigma T_m^3 T'_e = 4\kappa\sigma T_m^4 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v_x \frac{\partial (T'+T_e)}{\partial x} + v_z \frac{\partial (T'+T_e)}{\partial z} = \frac{1}{\rho c_p}\left(K\nabla^2 T' - 4\kappa\sigma T_m^4 - 4\kappa\sigma T_m^3 T'\right) \tag{2.24}$$

Se introducen las variables adimensionales siguientes:

$$\lambda = \frac{16\sigma\kappa T_m^3 H^2}{K};\ Rc = \frac{4\epsilon H\sigma T_m^3}{K} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered} x = x^* H;\ z = z^* H;\ t = \frac{H^2}{\alpha};\ v_x = \frac{\alpha}{H} v_x^*;\ v_z = \frac{\alpha}{H} v_z^*;\ \Delta\bar{T} = \frac{T_1-T_2}{T_m} \\ \theta_e = \frac{T'_e}{T_m};\ T' = \frac{\Delta\bar{T} T_m T^*}{Ra};\ T'_e = \frac{\Delta\bar{T} T_m T_e^*}{Ra}; \end{gathered} \tag{2.26}$$

y la llamada función de corriente $\Psi^*$, que se define:

$$v_x^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*};\ v_z^* = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*}, \tag{2.27}$$

que automáticamente satisface la ecuación 2.15 en el caso 2D en el plano $xz$.

Introduciendo las variables adimensionales anteriores, tomando el caso bidimensional en el plano $xz$, derivado la ecuación 2.16 con respecto a $z^*$ y la ecuación 2.18 con respecto a $x^*$ y restándolas, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\nabla^2 \partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\nabla^2 \partial \Psi}{\partial z} &= \\ Pr\nabla^4 \Psi - Pr\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{PrRa}{\Delta\bar{T}}\frac{\partial \theta_e}{\partial x}&, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} &= \\ -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \theta_e}{\partial x} - \frac{\Psi}{\partial x}\frac{\partial \theta_e}{\partial z}\right)\frac{Ra}{\Delta\bar{T}} + \nabla^2 T - \lambda T&, \end{aligned} \tag{2.29}$$

donde se han omitido los superíndices * por comodidad.

Por otro lado, la ecuación que satisface la ecuación de equilibrio 2.23se reduce a:

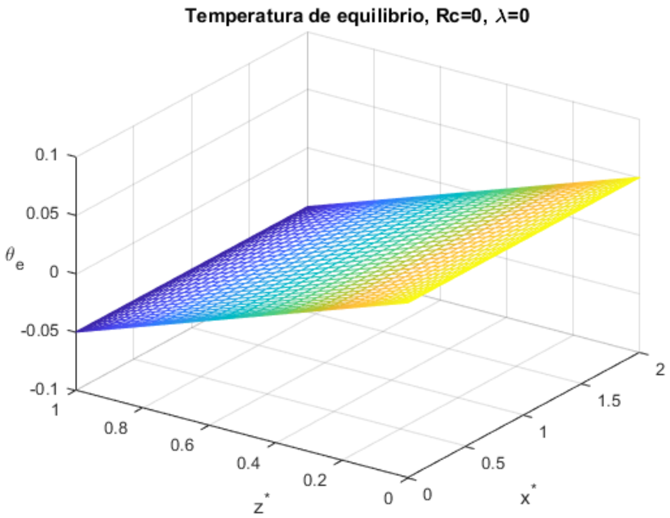
$$\frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial z^{*2}} - \lambda\theta_e = \frac{\lambda}{4}, \tag{2.30}$$

cuyas condiciones de contorno a satisfacer, en variables adimensionales se expresan:

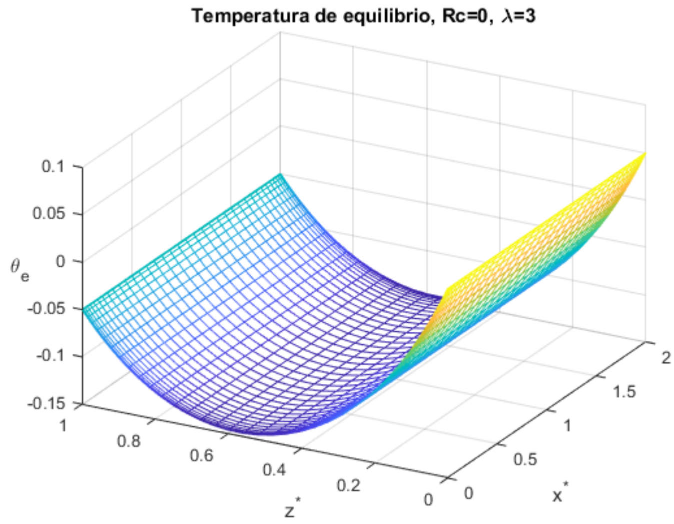
$$\left.\frac{\partial \theta_e}{\partial x^*}\right|_{x^*=A}^{x^*=0} = 0, \tag{2.31}$$

$$\theta_e|_{x^*=A}^{x^*=0} = \pm\frac{\Delta\bar{T}}{2} \tag{2.32}$$

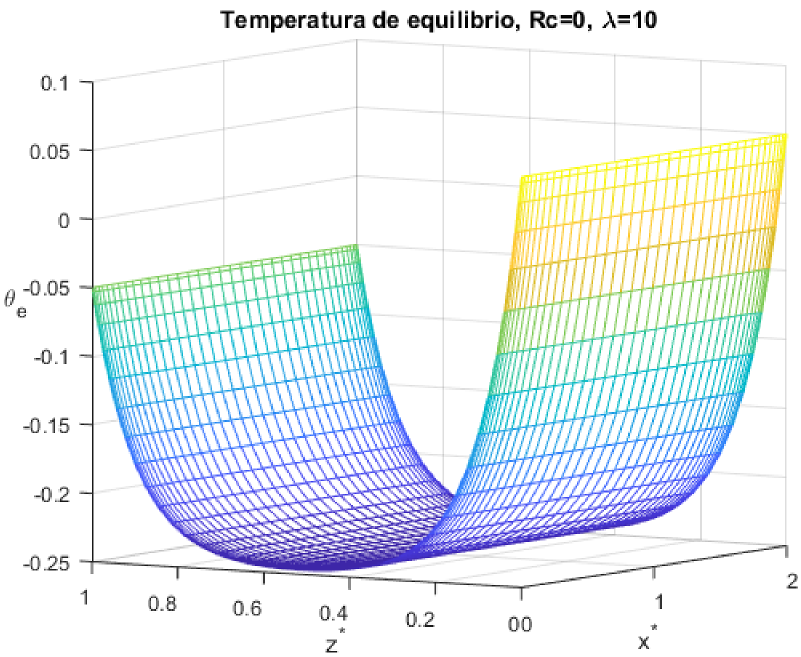
habiéndose asumido el caso en que no influyen las paredes (Rc nulo), pues la influencia de esta se considera a partir del capítulo 3. La ecuación 2.30 es una ecuación diferencial que se resolverá por el *método de colocación*, explicado en el capítulo 3 **Método numérico**, cuyos resultados para distintos valores del parámetros $\lambda$ se representan en las figuras de 2.3. Para ello, será necesario aplicar las condiciones de contorno de temperatura de equilibrio 2.31 y 2.32.




(a) (a) $\lambda = 0$, Rc=0




(b) (b) $\lambda = 3$, Rc=0




(c) (c) $\lambda = 10$, Rc=0

Figura 2.3: Solución de la temperatura de equilibrio $\theta_e$ con parámetro de radiación-conducción $Rc$ nulo para 3 valores del parámetro $\lambda$.

Por su parte, el problema de movimiento 2.28-2.29 queda determinado si se añaden las condiciones de contorno apropiadas:

$$\text{Para t}^* = 0;\ 0 \leq x^* \leq \frac{H}{L},\ 0 \leq z^* \leq 1 \rightarrow \Psi^* = \Psi_0^*(x^*, z^*),\ T^* = 0, \tag{2.33}$$

$$\text{Para x}^* = 0 \ \text{ y x}^* = \text{L/H} = \text{A} \rightarrow \Psi^* = 0,\ \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0,\ \left.\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=A}^{x^*=0} = \pm RcT^*, \tag{2.34}$$

$$\text{Para z}^* = 0 \ \text{ y z}^* = 1 \rightarrow \Psi^* = 0,\ \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0,\ T^* = 0, \tag{2.35}$$

donde las condiciones de contorno 2.34 y 2.35 se corresponden al caso en el que las paredes inferior y superior son **rígidas**, es decir, la componente horizontal del campo de velocidades es nula $v_x = -\partial\Psi^*/\partial z = 0$. En el apartado de **Condiciones de contorno** dentro del capítulo de **Método numérico** se verán el caso de ambas paredes libres y el de pared inferior rígida y superior libre.

Las ecuaciones 2.28 y 2.29 se resolverán numéricamente en los siguientes capítulos, teniendo en cuentas las condiciones de contorno e inicial que se acaban de exponer.

### 2.2.4. Aproximación ópticamente gruesa u opaca

El segundo caso abordado es aquel en el que el camino libre medio $\kappa^{-1}$ es de un orden muy inferior al orden de magnitud de la altura de la cavidad. Dicha condición puede ser expresada matemáticamente como $\kappa * h >> a$, donde $h$ representa la altura de la cavidad en la que se mueve el fluido y $a$ es un número característico al que ya se ha hecho referencia en el apartado anterior. Recuérdese que dicho número es de orden unidad [16]. Siguiendo la misma estructura que con anterioridad, en primer lugar se tiene, a partir de una ecuación 2.9, para valores altos de $\kappa$, se puede desarrollar $RH$ en series de potencias en términos de $\kappa^{-2}$ una solución formal de dicha ecuación viene dada por Goody (ec. 13 del documento) [8]:

$$I(\vec{s}) = e^{-\kappa s} \int_q^s \kappa e^{\kappa\sigma} B(\sigma) d\sigma, \tag{2.36}$$

donde la contribución del límite inferior se debe determinar a partir de las condiciones de contorno, pero dichas condiciones de contorno solo contribuyen de manera apreciable a distancias menores que $\kappa^{-1}$ del contorno, por lo que se puede despreciar su contribución fuera de dichas regiones.

Si se integra de forma reiterada la ecuación anterior, se obtiene que:

$$I(\vec{s}) = B - \kappa^{-1}\frac{dB}{ds} + \kappa^{-2}\frac{d^2B}{ds^2} - \kappa{-}3\frac{d^3B}{ds^3}... \tag{2.37}$$

Entonces, usando la ecuación 2.8 y sabiendo que

$$\frac{dB}{ds} = \mu_1\frac{\partial B}{\partial x} + \mu_2\frac{\partial B}{\partial y} + \mu_3\frac{\partial B}{\partial z}, \tag{2.38}$$

donde $\mu_1,\ \mu_2\ y\ \mu_3$ son los cosenos direccionales de $\vec{s}$.

Al realizar las integrales de 2.37 y utilizar la ecuación de Stefan-Boltzmann 2.10, se obtiene que el término de transferencia de energía por radiación $RH$ para la aproximación opaca es:

$$H(s) = \kappa^{-1}\frac{4\sigma}{3}\nabla^2 T^4. \tag{2.39}$$

Para realizar desarrollar la ecuación 2.39 es necesario desarrollar cómo va a ser el campo de temperaturas de manera cualitativa mediante el uso de una serie de hipótesis sobre dicho campo , análogas a las del apartado anterior:

$$T(\vec{x},t) = T_e(\vec{x},t) + T'(z);\ \text{donde } \mathrm{T'} << \mathrm{T},\ \mathrm{T_e} \tag{2.40}$$

$$Te(z) = T_m + T_e'(z);\ \text{donde } \mathrm{T_e'} << \mathrm{T_m},\ \mathrm{T_e} \tag{2.41}$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} << 1;\ \frac{T_1 - T_2}{T_2} << 1; \tag{2.42}$$

De esta manera, introduciendo 2.40 y 2.41 en la ecuación de la energía 2.2 (2D) se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T + \frac{16\sigma}{3\kappa} \nabla \cdot (Te^3 \nabla Te + Te^3 \nabla T' + 3Te^2 T' \nabla Te), \tag{2.43}$$

donde se ha hecho $T^3 \cong Te^3 + 3Te^2T'$ y se han despreciado los productos entre variaciones.

Para hallar $Te(z)$, se impone el estado estático en la ecuación anterior:

$$\vec{v} = \vec{0};\ T' = 0; \tag{2.44}$$

se determina que se cumple:

$$\frac{d}{dz}\left(\alpha \frac{dTe}{dz} + \frac{16\sigma}{3\kappa} Te^3 \frac{dTe}{dz}\right) = 0, \tag{2.45}$$

y en virtud de la hipótesis 2.41, si se sustituye $Te^3$ por $Tm^3$, se tiene que:

$$\frac{dTe}{dz} = C. \tag{2.46}$$

De esta forma, aplicando las condiciones de contorno $T(0) = T_1$ y $T(H) = T_2$, se obtiene definitivamente $Te(z)$:

$$Te(z) = \frac{T_2 - T_1}{H} z + T_1. \tag{2.47}$$

Entonces, la ecuación de la energía se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + v_x \frac{\partial T'}{\partial x} + v_z \frac{\partial T'}{\partial z} &= \\ \cancel{\alpha \nabla^2 Te} + \cancel{\frac{16\sigma}{3\kappa} \nabla^2 \left(\frac{Te^4}{4}\right)} + \nabla^2 T' \\ + \frac{16\sigma}{3\kappa}(2\nabla Te^3 \cdot \nabla T' + Te^3 \nabla^2 T' + 3T'(2Te \nabla Te \cdot \nabla Te + \cancel{Te^2 \nabla^2 Te}), \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde se han utilizado las ecuaciones 2.45 y 2.47 para la cancelación de términos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T' + v_z \frac{T_2 - T_1}{H} &= \\ \left(\alpha + \frac{16\sigma}{3\kappa\rho_0 c_p} Tm^3\right) \nabla^2 T' + \frac{32\sigma}{3\kappa\rho_0 c_p} Tm^2 \frac{T_2 - T_1}{H} \frac{\partial T'}{\partial z} + T' \left(\frac{T_2 - T_1}{H}\right)^2 \frac{32\sigma}{3\kappa\rho_0 c_p} Tm \end{aligned} \tag{2.49}$$

En la ecuación anterior, a través de la inspección de los órdenes de magnitud de los términos a mano derecha, teniendo en cuenta que las variaciones de temperatura se supusieron mucho menores que los valores de estas, ver 2.42, se observa que el primero de ellos es de orden superior a los de los demás, por lo que es posible retener solo dicho término a fin de obtener una ecuación menos compleja y que ilustrará de una manera muy intuitiva los cambios que existen entre la ecuación propia del problema de convección de Rayleigh-Bénard con aproximación de Boussinesq y el mismo problema pero teniendo en cuenta la aportación de la radiación en un medio que se puede considerar opaco. Se quiere recalcar aquí que en todo momento el desarrollo es consistente con las hipótesis realizadas sobre el campo de temperaturas, hipótesis que a su vez están de acuerdo con la hipótesis de Boussinesq de considerar tan solo pequeñas variaciones de densidad y que esta magnitud es tan solo función de la temperatura. De este modo, la ecuación de la energía se reduce a:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T' + v_z \frac{T_2 - T_1}{H} = \alpha \left(1 + \chi\right) \nabla^2 T', \tag{2.50}$$

donde $\chi = \dfrac{16\sigma}{3\kappa\rho_0 c_p \alpha} Tm^3$ es el parámetro adimensional que utiliza Goody [8].

Finalmente, si se introducen las variables adimensionales siguientes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} = (1+\chi)\nabla^2 T - Ra\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{2.51}$$

donde se ha omitido de nuevo el superíndice $^*$ de las variables y el operador $\nabla^{*2}$ por comodidad y se ha obtenido la ecuación sin dimensiones que se buscaba.

Obsérvese que la única diferencia entre las ecuaciones de Saltzman ([1], capítulo 2) y las ecuaciones equivalentes para este apartado 2.51 y la anteriormente expuesta es el término $\chi\nabla^2 T^*$. Esto hace pensar que, redefiniendo la ecuación anterior 2.51:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z}\right]\frac{1}{1+\chi} = \nabla^2 T - \hat{Ra}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{2.52}$$

donde $\hat{Ra}$ es $\dfrac{Ra}{1+\chi}$, lo único que cambie al utilizar esta aproximación con respecto al caso de convección, es que el número de Rayleigh crítico tenga que tener un valor tal que se cancele el término $(1+\chi)$, cumpliéndose entonces que:

$$Ra_c^{opaco}(A) = Ra_c^{c.\ natural}(1+\chi) \tag{2.53}$$

A este mismo resultado se llega, con la salvedad de que se utilizan desde un principio ecuaciones linealizadas, en el libro de Goody (1956) [8] (pgs. 434).

Es por ello se dejará a un lado este caso, por considerarse trivial: no hay más que tener en cuenta los párrafos anteriores para extrapolar los resultados del problema de convección natural a este caso de aproximación de medio ópticamente grueso. De esta forma, se pondrá la atención de este trabajo en la obtención de resultados con aproximación de medio ópticamente

## 2.3. La convección de Rayleigh-Bénard. Aproximación de Boussinesq

En esta sección, se va a desarrollar de forma sucinta, qué se entiende por convección de Rayleigh-Bénard, sin considerarse efectos de radiación.

Considérese un fluido confinado en un paralelepípedo con dimensiones, de forma general, distintas en cada coordenada cartesiana. Dicho fluido se supone sometido a la acción de la gravedad, con una temperatura

$T_1$ en su base inferior (plano z=0) y una temperatura $T_2$ en su pared superior (plano z=H), donde $T_1 > T2$. Además, las paredes verticales (planos x=0 y x=L), están aisladas. En la figura (2.4) se esquematiza la situación descrita.

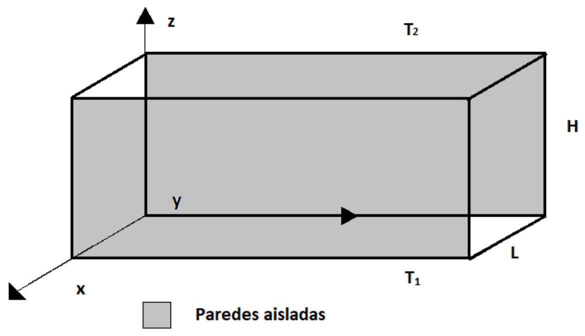



Figura 2.4: Representación del paralelepípedo que contiene el fluido y de las condiciones de contorno del problema.

En principio, las ecuaciones de las que habría que hacer uso serían las ecuaciones completas de Navier-Stokes (ecuaciones 2.54, 2.55 y 2.55), típicas de la Mecánica de Fluidos:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu(\frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2\vec{v}); \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0. \tag{2.55}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho\dot{q} + \nabla \cdot (K\nabla T) - p\nabla \cdot \vec{v} \tag{2.56}$$

Donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla$ es la derivada sustancial y $\dot{q}$ es el aporte externo de calor por unidad de masa y tiempo.

Sin embargo, no pueden ser resueltas de forma general por su enorme complejidad. Es por ello que se van a introducir una serie de hipótesis simplificadoras para obtener lo que se conoce como *aproximación de Boussinesq*, que es válida siempre que las variaciones relativas de densidad en el proceso sean pequeñas (veáse [1] para ver el desarrollo completo). Dichas hipótesis son:

- La densidad se considera constante e igual a la que se tome como referencia $\rho_0$, excepto en la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento 2.54, donde depende linealmente de la diferencia de temperaturas:
$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0[1 - \beta(T(\vec{x}, t) - T_0)], \tag{2.57}$$
donde $\beta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial T}|_p$ es el coeficiente de expansión térmica y esta relación se obtiene de linealizar la ecuación de estado para $\rho$ en función de $T$ y $p$ y se ha hecho uso de que en movimientos como en el de la convección de Rayleigh-Bénard se puede demostrar que la influencia de las variaciones de presión en la variaciones de densidad son despreciables.

- Todas las propiedades del fluido se consideran constantes y tomadas a la temperatura y densidad de referencia. Esta aproximación se considera válida si la diferencia de temperaturas entre las paredes horizontales es lo suficientemente pequeña como para no provocar una variación superior al 10 % en dichas propiedades.

- Los términos de disipación viscosa son despreciables.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, las ecuaciones 2.54, 2.55 y 2.56 se reducen, expresadas de forma desarrollada, a las siguientes:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial\left(p_m/\rho_0\right)}{\partial x} + \nu\nabla^2 v_x; \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial\left(p_m/\rho_0\right)}{\partial y} + \nu\nabla^2 v_y; \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial\left(p_m/\rho_0\right)}{\partial z} + g\beta(T-T_0) + \nu\nabla^2 v_z; \tag{2.61}$$

$$\rho_0 c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = K\nabla^2 T \tag{2.62}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $\beta$ el antes mencionado coeficiente de expansión térmica, K la conductividad térmica del fluido, las variables con el subíndice 0 representan a los valores de referencia y $p_m$ son las variaciones de presión asociadas al movimiento.

El sistema de ecuaciones 2.58-2.62 es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales tanto para las coordenadas espaciales como para el tiempo. Por tanto, requieren de condiciones de contorno e iniciales respectivamente para poder ser resuelto. Dichas condiciones de contorno e iniciales se pueden extraer del principio de esta sección. A saber:

$$\text{Para t} = 0,\ 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le B,\ 0 \le x \le H \Rightarrow v_x = v_y = v_z = 0,\ T = T_0. \tag{2.63}$$

$$\text{Para x} = 0 \text{ y x} = \text{L} \Rightarrow v_x = v_y = v_z = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{2.64}$$

$$\text{Para y} = 0 \text{ e y} = \text{B} \Rightarrow v_x = v_y = v_z = 0,\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{2.65}$$

$$\text{Para z} = 0 \ / \text{ z} = \text{H} \Rightarrow v_x = v_y = v_z = 0,\ T = T_1 \ / \ T = T_2. \tag{2.66}$$

## 2.4. Resultados principales del trabajo

En lo que sigue, se va a poner la atención principalmente en dos casos diferenciados: un caso en el que el medio es participativo (con aproximación transparente), $\lambda > 0$, pero las paredes no tienen capacidad de absorber ni emitir radiación $\epsilon = 0 \Rightarrow \text{Rc} = 0$ y caso en el que las paredes son capaces de emitir y absorber radiación, $\text{Rc} > 0$, pero sin tener en cuenta la participación del medio. Por otro lado, el caso opaco, por su trivialidad, no se va a estudiar más allá del cálculo de algún resultado aislado para corroborar la teoría desarrollada.

# Capítulo 3

# Método numérico

En este capítulo se pretende dar una explicación de los procedimientos seguidos para resolver numéricamente los problemas planteados en el capítulo anterior **Formulación del problema**. En primer lugar, se va a explicar el método de colocación para problemas en una dimensión y se generalizará la idea para problemas 2D. Después, se va a explicar cómo se han discretizado las ecuaciones y cómo se ha implementado en el ordenador el método explicado. Además, se añade un extracto de los códigos principales utilizados en el programa MATLAB 2017a.

## 3.1. Método de colocación en problemas 2D

En este apartado se describirá de forma breve (pues no es el objeto principal de este trabajo dado que hay otros que se pueden consultar y en los que se describe con alto grado de detalles, como [1]) el método de resolución numérico que se va a utilizar para obtener los resultados tanto del problema de convección de Rayleigh-Bénard sin radiación como con radiación. Se trata del *método de colocación*. En este caso que nos ocupa, solo se tiene interés en el uso de este método para ecuaciones que involucren variables que dependen de dos dimensiones. Para esto, se van a explicar los conceptos básicos de este método y después su aplicación para la obtención de resultados de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El método se basa en el uso de una combinación lineal de funciones conocidas (en este caso los interpolantes de Lagrange) multiplicadas por coeficientes a determinar mediante la sustitución de las funciones y sus derivadas en las ecuaciones diferenciales del problema a resolver y la imposición del cumplimiento de las condiciones de contorno en unos puntos del dominio conocidos como puntos de colocación.

En el caso en el que una función $\Phi$ dependa de dos variables espaciales $x$ y $z$, por ejemplo, definida dentro de un intervalo rectangular $[x_1, x_{N_x}] \times [z_1, z_{N_z}]$, siendo conocida en los puntos $(x_m, z_n)$ dentro de ese intervalo, que se denominarán nodos, y en particular, serán los **nodos de Chebyshev** (ver [17]) los que se usarán en el método:

$$x_m = \frac{x_{N_x} + x_1}{2} - \frac{x_{N_x} - x_1}{2} \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{N_x - 1}\right);\ i = 1, ..., N_x \tag{3.1}$$

Es posible utilizar funciones que aproximan la solución completa, llamadas funciones interpolantes, que como se mencionó en el párrafo anterior, se utilizarán los interpolantes de Lagrange, cuya expresión para cada una de las variables $x$ y $z$, vendría dada por, respectivamente:

$$L_{x,m}(x) = \prod_{j=1}^{N_x} \frac{x - x_j}{x_m - x_j};\ L_{z,n}(z) = \prod_{j=1}^{N_z} \frac{z - z_j}{z_n - z_j};\ \forall j \neq m;\ j \neq n, \tag{3.2}$$

donde se observa que $L_{x,m}(x_i) = \delta_{mj}$ y $L_{z,n}(z_j) = \delta_{nj}$, siendo $\delta_{mj}$ y $\delta_{nj}$ la función delta de

Kronecker[1] y la aproximación de la función incógnita vendría dada por el doble sumatorio:

$$\Phi(x,z) = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_z} L_{x,m}(x) L_{z,n}(z) \Phi(x_m, z_n), \tag{3.3}$$

donde las funciones $L_{x_m}(x)$ y $L_{z_n}$ son conocidas y los valores $\Phi(x_m, z_n)$ son los valores conocidos, en los nodos de Chebyshev, de la función a determinar.

De esta forma, las derivadas parciales de $\Phi$ se pueden aproximar mediante las expresiones:

$$\Phi_x(x,z) = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_z} L'_{x_m}(x) L_{z_n}(z) \Phi(x_m, z_n), \tag{3.4}$$

$$\Phi_z(x,z) = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L_{x,m}(x) L'_{z,n}(z) \Phi(x_m, z_n), \tag{3.5}$$

donde las expresiones $L_{x,m}(x)'$ y $L_{z,n}(z)'$ se calcularían derivando las expresiones 3.2 y sucesivamente se haría para obtener aproximaciones de las derivadas de $\Phi$ del orden que se requiera.

Es conveniente en este punto introducir el uso de un solo índice $I = (i-1) * N_z + j$ que sea capaz de relacionarse de forma unívoca en cualquiera de las direcciones $I \rightleftarrows (i,j)$, donde $i = 1, ..., N_x$ $y$ $j = 1, ..., N_z$, de tal forma que las relaciones 3.4 y 3.5 se puedan expresar de forma matricial. En efecto, en dichas expresiones se obtienen matrices de tamaño $N_t \times N_t$, (donde $N_t = N_x \times N_z$):

$$D_x(I,K) = L'_{x,m}(x_i) L_{z,n}(z_j);\ D_z(I,K) = L_{x,m}(x_i) L'_{z,n}(z_j);\ \text{donde } I, K = 1, ..., N_t; \tag{3.6}$$

y la función $\Phi$ por tanto se puede expresar vectorialmente:

$$\Phi(I) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{N_t} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Para entender mejor lo anterior, obsérvese que:

$$L_{px} = \begin{pmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & ... & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & ... & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & ... & L'_N(x_N) \end{pmatrix}; \tag{3.8}$$

De esta manera, se tiene:

[1] La función delta de Kronecker se define, para dos subíndices $i$, $j$: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si i = j}, \\ 0 \text{ si i} \neq \text{j}, \end{cases}$ es decir, en forma matricial una matriz con unos en la diagonal y ceros en el resto de términos, por tanto la matriz identidad si fuera cuadrada.

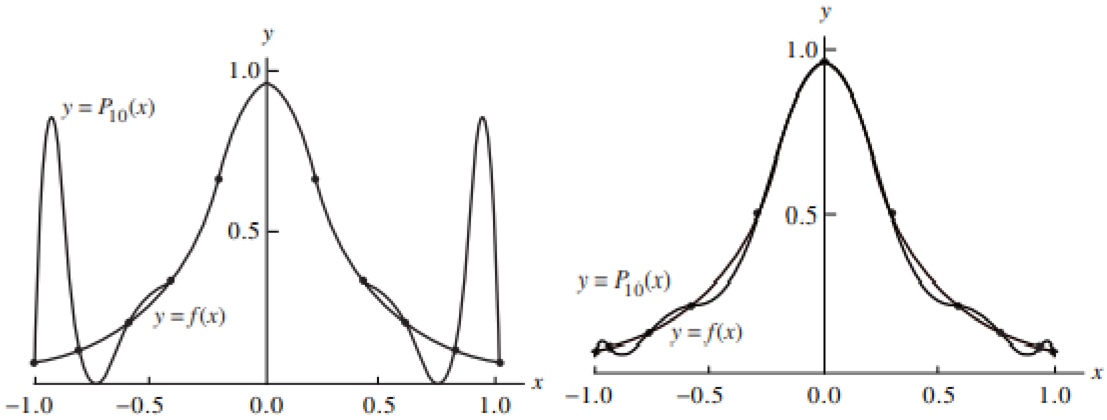



Figura 3.1: Ejemplo de función aproximada por interpolación usando nodos equiespaciados (a la izquierda) y nodos de Chebyshev (a la derecha). Obsérvense las grandes diferencias de precisión entre un método y otro cuando es necesario usar polinomios de grado alto, es decir, cuando el número de nodos crece. Imagen tomada de [20]

$$D_x = \begin{pmatrix} L'_{x_1}(x_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & L'_{x_{N_x}}(x_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_{x_1}(x_{N_x})\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & L'_{x_{N_x}}(x_{N_x})\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

donde las submatrices que se observan serían matrices identidad de tamaño $N_z \times N_z$, como se vio en 3.2 y análogamente para $D_z$:

$$D_x = \begin{pmatrix} L'_{z_1}(z_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & L'_{z_{N_z}}(z_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_{z_1}(z_{N_z})\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & L'_{z_{N_z}}(z_{N_z})\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

donde las submatrices son identidad pero ahora de tamaño $N_x \times N_x$.

Como se dijo anteriormente, la para la elección de los nodos se usarán los nodos de Chebyshev porque estos permiten reducir los errores que se generan cuando el número de nodos crece. En la siguiente figura 3.1 se expone un ejemplo en el que se aproxima una función mediante un polinomio de grado 10, usando nodos equiespaciados y nodos de Chebyshev:

Una vez expuestas todas estas ideas, se ha llegado a un punto en el que la resolución de un sistema con funciones cuyas derivadas parciales aparezcan ha quedado reducido a un sistema de ecuaciones algebraico en forma matricial.

En la siguiente sección se detalla cómo se va a utilizar el método explicado para resolver las ecuaciones Saltzmann para la convección y el sistema equivalente obtenido en el capítulo 2 para los casos de radiación con aproximación transparente y opaco.

## 3.2. Resolución numérica

En esta sección se va a explicar de qué manera se han discretizado las ecuaciones 2.28 y 2.29 para aproximar las derivadas espaciales y las derivadas con respecto al tiempo, que se aproximarán mediante **diferencias regresivas**. Dichas ecuaciones son las que se obtuvieron en el apartado 2.2.3. Posteriormente, se verá que solo hay que introducir ligeros cambios en los programas para tener en cuenta distintas condiciones de contorno y según si se quiere estudiar el caso de temperatura impuesta en las paredes horizontales o en las paredes verticales y paredes rígidas o libres.

Para discretizar las ecuaciones anteriores a la hora de desarrollar códigos numéricos y obtener soluciones aproximadas, se van a introducir las siguientes aproximaciones para las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial}{\partial x^*}F \cong D_x * F; \quad \frac{\partial}{\partial z^*}F \cong D_z * F; \quad \nabla^2 F \cong (D_x^2 + D_z^2) * F = D_L * F; \quad \nabla^4 F \cong D_L^2 * F, \tag{3.9}$$

donde $F$ representa a $\Psi$ o a $T^*$ mientras que para las derivadas con respecto al tiempo se utiliza el *Método de Diferencias regresivas* ([18], capítulo 1), por lo que los términos en los que aparece $\frac{\partial F}{\partial t^*}$, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial t^*} = \frac{F|_{tn} - F_{tn-1}}{h_t}; \ \mathrm{donde h_t} << 1. \tag{3.10}$$

Por último, téngase en cuenta que en las ecuaciones aparecen productos entre las derivadas de las funciones $\Psi^*$ y $T^*$, siendo estos productos términos de carácter no lineal si se sustituyen de forma directa por $\Psi^*|_{tn}$ y $T^*|_{tn}$, respectivamente, por lo que en dichos términos se realizarán las aproximaciones:

$$\Psi^*|_{tn} \approx \Psi^*|_{tn-1}; \ T^*|_{tn} \approx T^*|_{tn-1}, \tag{3.11}$$

que serán válidas siempre que $h_t$ sea lo *suficientemente pequeño*.

Teniendo en mente todo lo expuesto con anterioridad, se está en condiciones de escribir qué ecuaciones se obtienen finalmente para poder ser implementadas en un lenguaje de programación que permita resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera práctica (MATLAB en este caso). Así, se tiene:

$$\begin{aligned} &D_L * \frac{Psi - Psinm1}{h_t} + \underbrace{D_z * Psinm1 * D_x * D_L * Psinm1 - D_x * Psi * D_z * D_L * Psi}_{NLPSI} = \\ &PrD_L^2 Psi - PrD_x Tp - Pr * Ra/DeltaTb * DxThetae; \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &\frac{Tp - Tpnm1}{h_t} + \underbrace{D_z * Psinm1 * D_x * Tpnm1 - D_x * Psinm1 * D_z * Tpnm1}_{NLT} = \\ &-(D_z * Psi * D_x * Thetae - D_x * Psi * D_z * Thetae) * Ra/DeltaTb + D_L * Tp - lambda * Tp, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde se han utilizado los nombres de las variables que se les ha dado en el código y donde los términos $NLPSI$ y $NLT$ reciben esos nombres pues corresponden con términos que serían *no lineales* si no se hubiera realizado en ellos las aproximaciones $\Psi^*|_{tn} \approx \Psi^*|_{tn-1}$y $T^*|_{tn} \approx T^*|_{tn-1}$.

De esta manera, se tiene un sistema de ecuaciones, donde los vectores:

$$Psi = \begin{pmatrix} Psi_1 \\ \vdots \\ Psi_{N_t} \end{pmatrix}$$

$$Tp = \begin{pmatrix} Tp_1 \\ \vdots \\ Tp_{N_t} \end{pmatrix}$$

son las $2 \times N_t$ incógnitas de un sistema de $2 \times N_t$ ecuaciones, cuya forma compacta escrita se obtiene a partir de las ecuaciones 3.12 y 3.13 y se verá implementada en la matriz del sistema en el código que se adjunta más adelante.

**Convección: programa para la convección.** Si se quieren obtener resultados para el caso de convección pura sin tener en cuenta efectos de radiación, tan solo hay que hacer en el programa las variables lambda y Rc nulas. En los resultados que se expongan en los próximos apartados, se reproducen los obtenidos en [1] y se comparan con resultados que se obtengan con valores no nulos de las variables anteriores.

### 3.2.1. Condiciones de contorno e inicial. Problema con paredes no participativas

En el apartado anterior se ha explicado cómo se discretizan las variables de las ecuaciones que aparecen en el problema de radiación-convección. En este, se expone cómo se han impuesto numéricamente las condiciones de contorno e inicial en el problema de radiación en el que el medio participa, $\lambda > 0$, pero las paredes no absorben radiación, $Rc = 0$.

El cumplimiento de dichas condiciones no es trivial. Esto es debido a que se tienen condiciones de contorno sobre las derivadas de $\Psi^*$ y $T^*$ a la vez que sobre las propias funciones, por ejemplo, para el caso de bordes rígidos/rígidos. Al no ser posible imponer dos valores distintos a la vez sobre los vectores solución de $\Psi^*$ y $T^*$, la forma de resolver este conflicto es imponer las condiciones de contorno de las funciones sobre los puntos que se encuentran sobre los contornos, mientras que para las condiciones sobre las derivadas se usan los puntos de los subcontornos. En definitiva, los pasos a seguir serían:

- Antes que nada es esencial aclarar cuáles son los valores de los índices $I$ para cada pared del contorno. A saber:

$$I = \begin{cases} (i-1)*Nz+1 \text{ si } z^*=0 \\ (i-1)*Nz+Nz = i*Nz \text{ si } z^*=1 \\ j \text{ si } x^*=0 \\ (Nx-1)*Nz+j \text{ si } x^*=L/H \end{cases} \quad \text{donde i} = 1,...,\text{Nx y j} = 1,...,\text{Nz} \tag{3.14}$$

- Ahora, en primer lugar, debido a que Matlab trabaja de forma mucho más eficiente "llenandoçolumnas que filas, se transponen todos los vectores y matrices que forman parte del sistema general.

- En segundo lugar, para imponer las condiciones de $\Psi^*$, en el caso de que se esté estudiando el caso de *paredes horizontales* rígidas se procede de la siguiente forma: se anula en las matrices (transpuestas) APSI_tr, ATp_tr, BPSI_tr y BTp_tr las columnas cuyo índice $I$ corresponde con el de los puntos de los contornos horizontales. Posteriormente, se impone un valor unidad en los elementos APSI_(I,I) , así se impone que $\Psi_I^* = 0$ una vez que se transponga de nuevo la matriz original del sistema. Análogamente se procede para imponer que $T^* = 0$ en los contornos horizontales: se impone que los elementos BT_tr(I,I)=1. Además, para asegurar que para todo instante $t$ se cumplen las condiciones de contorno, se crean dos *factores de condiciones de contorno* o *boundary condition factors*, BCF_PSI_tr y BCF_Tp_tr cuyo valor es nulo para todo índice $I$ perteneciente a cualquier punto de los contornos horizontales.

- Ahora hay que imponer que en las *paredes verticales* la derivada de $T^*$ es nula y que $\Psi^*$ es también nula. Entonces, tal y como se hizo en el punto anterior, se impone en los puntos de los contornos verticales que las columnas de las matrices (transpuestas) APSI_tr, ATp_tr, BPSI_tr y BT_tr cuyo índice sea $I$, sean nulas. Posteriormente, se hacen igual a la unidad los elementos APSI_tr(I,I) para imponer $\Psi_I^* = 0$

tras la transposición de la matriz del sistema. Para imponer que $\dfrac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0$ se hace BT_tr(:,I)=Dx_tr(:,I). Se hacen nulos también los términos BCF_PSI_tr(I) y BCF_Tp_tr(I).

- Por último, quedaría imponer la condición de que las paredes horizontales y verticales son rígidas, por lo que habría que imponer en los puntos del contorno que las velocidades $v_x^*$ y $v_z$ son nulas, respectivamente. Para ello, teniendo en cuenta que $v_x^* = -\partial\Psi^*/\partial z$ y $v_z^* = \partial\Psi^*/\partial x$, en principio habría que proceder como en los dos puntos anteriores para imponer condiciones de contorno. Sin embargo, no queda más remedio que hacer uso de los puntos del subcontorno, pues los del contorno ya están utilizados. Para ello, se anulan los las columnas de todas las matrices que componen la matriz completa del sistema con índices $I$ pertenecientes a dichos subcontornos, donde es evidente que las esquinas son comunes a los horizontales y verticales y en este caso se han incluido en los primeros. En el caso de subcontorno inferior se tiene $I = (i-1) * Nz + 2$ y en el superior $I = (i-1) * Nz + Nz - 1$ con $i = 2 : Nx - 1$, mientras que para los subcontornos izquierdo y derecho, se tiene, respectivamente, $I = Nz + j$ y $I = (Nx-2) * Nz + j$, donde $j = 3 : Nz - 2$. Después, en la matriz APSI_tr, se impone en las columnas del subcontorno vertical es igual a la columna con el mismo índice de la matriz Dz_tr y en las horizontales se hacen igual a las columnas de Dx_tr. Con todo esto ya se tienen impuestas las condiciones de contorno. En el siguiente punto se discute qué se ha de hacer si se tiene alguna pared libre (sin esfuerzos tangenciales) en vez de paredes rígidas.

- En el caso de tener una pared libre, por ejemplo la horizontal inferior, los esfuerzos tangenciales han de ser nulos en la pared:

$$\tau = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^*}\right|_{z^*=0} = 0 \tag{3.15}$$

  Por tanto, si los esfuerzos son nulos, habrá que imponer, en vez de lo dicho en el punto anterior, en el que se habló del caso rígido-rígido en los contornos horizontales, que la columna con índice $I$ perteneciente al subcontorno horizontal de la matriz APSI_tr es igual a la columna del mismo índice de la matriz que proporciona la segunda derivada con respecto de $z$, Dz2_tr. Análogamente se haría con la pared horizontal superior o, en el caso de paredes libres verticales, en cuyo caso se necesitaría igualar las columnas correspondientes a las de la matriz que proporciona la segunda derivada con respecto $x$, Dx2_tr.

- Para las condiciones iniciales, se ha usado una función de corriente que cumpla con las condiciones de contorno y lo mismo se ha hecho con el campo de temperaturas (ver [1], capítulo 4):

$$\Psi^*(x, z, t=0) = 0.0005 x^{*2} (x^*_{max} - x^*)^2 z^{*2} (z^*_{max} - z^*)^2 \cos\left(\frac{\pi x^* z^*}{5 x^*_{max} z^*_{max}}\right) \tag{3.16}$$

$$T^*(x, z, t=0) = 0 \tag{3.17}$$

A continuación se muestran los códigos principales que se han utilizado para resolver el problema de convección sin radiación con paredes horizontales rígidas. A partir de él, con las modificaciones explicadas en las condiciones de contorno y cambiando las ecuaciones según se expuso en la sección de resolución numérica en función de la aproximación de radiación que se quiera estudiar, es suficiente para obtener nuevos códigos que permitan efectivamente resolver los problemas.

### Programa básico

Se utiliza el siguiente programa como base y ciertas modificaciones para resolver los distintos apartados.

```

%_____PARAMETROS_____%
Pr=0.73;

%Ra=1565+1000-500-300+200+50+500-1000;
DeltaTb=0.1; Rc=0;
Ra=8800+15;
```

```
lambda_G=5; lambda=lambda_G^2;

dt=0.0001;
%______GEOMETRIA_____%

zmin=0; zmax=1;

Nz=30

xmin=0; xmax=.5;

Nx=30

tic

[Lpx,Dx,Nx,xch]=matricesx(Nx,Nz,xmin,xmax);
[Lpz,Dz,Nz,zch]=matricesz(Nz,Nx,zmin,zmax);
%_____MATRICES____%
 Nt=Nz*Nx;

DL=Dx*Dx+Dz*Dz;
DL2=DL*DL;
DxDL=Dx*DL;
DzDL=Dz*DL;
Dz2=Dz*Dz;

%%SPARSE
DL=sparse(DL);
DL2=sparse(DL2);
DxDL=sparse(DxDL);
DzDL=sparse(DzDL);
Dz2=sparse(Dz2);

%%TRANSPUESTAS
DL_tr=DL'; DL2_tr=DL2'; DxDL_tr=DxDL';
DzDL_tr=DzDL'; Dz2_tr=Dz2'; Dx_tr=Dx';
Dz_tr=Dz';

%%%%SOLUCION EQUILIBRIO %%%%
Ae=DL-lambda*eye(Nt);
be=lambda*ones(Nt,1)/4;

% Modificaciones de Ae y be debidas a condiciones de contorno:
% Contornos horizontales (insulated)

Ae_tr=Ae'; be_tr=be';
for i=2:Nx-1,
     I1=(i-1)*Nz+1;
     I2=(i-1)*Nz+Nz;
% Radiacion conveccion horiz.
%      Ae(I1,:)=Dz_tr(I1,:); Ae(I1,I1)=Ae(I1,I1)-Rc;  be(I1,1)=0;
%      Ae(I2,:)=Dz_tr(I2,:); Ae(I2,I2)=Ae(I2,I2)+Rc;  be(I2,1)=0;
% Temperatura impuesta horiz.
    Ae_tr(:,I1)=0; Ae_tr(I1,I1)=1; be_tr(1,I1)=DeltaTb/2;
    Ae_tr(:,I2)=0; Ae_tr(I2,I2)=1; be_tr(1,I2)=-DeltaTb/2;
end
% Contornos verticales (imposed temperature):
%
for j=1:Nz,
    I1=j;
    I2=(Nx-1)*Nz+j;
```

```
      Ae_tr(:,I1)=Dx_tr(:,I1); Ae_tr(I1,I1)=Ae_tr(I1,I1)-Rc;  be_tr(1,I1)=0;
      Ae_tr(:,I2)=Dx_tr(:,I2); Ae_tr(I2,I2)=Ae_tr(I2,I2)+Rc;  be_tr(1,I2)=0;
end
%
Ae=Ae_tr'; be=be_tr';
Thetae=Ae\be;

DxThetae=Dx*Thetae; DzThetae=Dz*Thetae;
 for j=1:Nz,
 Thetaemat(1:Nx,j)=Thetae(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
 end
for I=1:Nt,
    aux1(I,:)=Dz(I,:)*DxThetae(I,1);
    aux2(I,:)=Dx(I,:)*DzThetae(I,1);
end
for j=1:Nz,
   xmat(1:Nx,j)=xch(1:Nx)'; zmat(1:Nx,j)=zch(j);
end
mesh(xmat,zmat,Thetaemat)

%_____CONDICIONES DE CONTORNO_____%
%Definimos las matrices necesarias:
APSI=DL-dt*Pr*DL2;
AT=dt*Pr*Dx;
BPSI=Ra/DeltaTb*dt*(aux1-aux2);
BT=eye(Nt)*(1+dt*lambda)-dt*DL;
%Factor de condiciones de contorno
FBC_PSI=ones(Nt,1);
FBC_T=ones(Nt,1);

APSI_tr=APSI'; AT_tr=AT'; BPSI_tr=BPSI'; BT_tr=BT';
FBC_PSI_tr=FBC_PSI'; FBC_T_tr=FBC_T';

%Ponemos las condiciones que hacen Psi y T igual a cero. Esto se da en
%contornos horizontales:
for i=2:(Nx-1)
    %Contornos de abajo
    I=(i-1)*Nz+1;
    %Imponemos Psi y T:
    %psi=0
     APSI_tr(:,I)=0;   APSI_tr(I,I)=1;  FBC_PSI_tr(1,I)=0;  AT_tr(:,I)=0;
    %T=0
      BPSI_tr(:,I)=0;   BT_tr(:,I)=0;  BT_tr(I,I)=1;  FBC_T_tr(1,I)=0;
%     % ConRad
%      BPSI_tr(:,I)=0;  BT_tr(:,I)=Dz_tr(:,I);      BT_tr(I,I)=BT_tr(I,I)-Rc;  FBC_T_tr(1,I)
    =0;
    %Contorno superior
    I=(i-1)*Nz+Nz;
    %psi=0
     APSI_tr(:,I)=0;   APSI_tr(I,I)=1;  FBC_PSI_tr(1,I)=0;  AT_tr(:,I)=0;
    %T=0
     BPSI_tr(:,I)=0;   BT_tr(:,I)=0;  BT_tr(I,I)=1;  FBC_T_tr(1,I)=0;
%     % ConvRad
%      BPSI_tr(:,I)=0;  BT_tr(:,I)=Dz_tr(:,I);      BT_tr(I,I)=BT_tr(I,I)+Rc;  FBC_T_tr(1,I)
    =0;
end
%
%Ahora vamos a contornos verticales
for j=1:Nz
%Contornos de izq
    I=j;
```

```
    %Imponemos Psi y T:
     %psi=0
     APSI_tr(:,I)=0;   APSI_tr(I,I)=1;  FBC_PSI_tr(1,I)=0;  AT_tr(:,I)=0;
     %dT/dx=0
     BPSI_tr(:,I)=0;   BT_tr(:,I)=Dx_tr(:,I); BT_tr(I,I)=BT_tr(I,I)-Rc;    FBC_T_tr(1,I)=0;
     %T=0
%      BPSI_tr(:,I)=0;   BT_tr(:,I)=0; BT_tr(I,I)=1;    FBC_T_tr(1,I)=0;
%Contornos de dcha
    I=(Nx-1)*Nz+j;
    %Imponemos Psi y T:
     %psi=0
     APSI_tr(:,I)=0;   APSI_tr(I,I)=1;  FBC_PSI_tr(1,I)=0;  AT_tr(:,I)=0;
     %dT/dx=0
     BPSI_tr(:,I)=0;   BT_tr(:,I)=Dx_tr(:,I); BT_tr(I,I)=BT_tr(I,I)+Rc;    FBC_T_tr(1,I)=0;
%      %T=0
%       BPSI_tr(:,I)=0;   BT_tr(:,I)=0; BT_tr(I,I)=1;    FBC_T_tr(1,I)=0;
end
%Falta por aplicar velocidades nulas en las paredes. Para ello, se usan las
%filas correspondientes a los subcontornos de abajo.
%Contornos horizontales d^2psi/dz^2=0
for i=3:(Nx-2)
    K=(i-1)*Nz+2;
     APSI_tr(:,K)=Dz_tr(:,(K-1));  FBC_PSI_tr(1,K)=0;  AT_tr(:,K)=0;
     K=(i-1)*Nz+Nz-1;
     APSI_tr(:,K)=Dz_tr(:,(K+1));  FBC_PSI_tr(1,K)=0;  AT_tr(:,K)=0;
end
%Contornos verticales dpsi/dx=0
for j=2:(Nz-1)
    K=(2-1)*Nz+j;
     APSI_tr(:,K)=Dx_tr(:,(K-Nz));  FBC_PSI_tr(1,K)=0;  AT_tr(:,K)=0;
     K=(Nx-2)*Nz+j;
     APSI_tr(:,K)=Dx_tr(:,(K+Nz));  FBC_PSI_tr(1,K)=0;  AT_tr(:,K)=0;
end

APSI=APSI_tr'; AT=AT_tr'; BPSI=BPSI_tr'; BT=BT_tr';
FBC_PSI=FBC_PSI_tr'; FBC_T=FBC_T_tr';

%Formamos la matriz del sistema:
Asyst=[APSI AT; BPSI BT];
Asystm1=Asyst\eye(size(Asyst));
toc
for i=1:Nx,
      for j=1:Nz,
          I=(i-1)*Nz+j;
          Psi(I,1)=0.05*xch(i)^2*(xmax-xch(i))^2*zch(j)^2*(zmax-zch(j))^2;
          T(I,1)=0.05*sin(3*pi*zch(j));
      end
  end
AbPsi=sparse([DL, zeros(Nt,Nt)]);
AbT=sparse([zeros(Nt,Nt), speye(Nt)]);
[X, Z]=meshgrid(xch,zch);
Ntime=5e5;
  for nt=1:Ntime,
       nt;
       t=nt*dt;
       %tic
       bNLPsi(1:Nt,1)=(-(Dz*Psi).*(DxDL*Psi)+(Dx*Psi).*(DzDL*Psi))*dt-Pr*Ra/DeltaTb*dt*
           DxThetae;
       %tiempo1=toc

       bNLT(1:Nt,1)=(-(Dz*Psi).*(Dx*T)+(Dx*Psi).*(Dz*T))*dt;
```

```
188
189         bLinPsi(1:Nt,1)=AbPsi*[Psi ; T];
190         bLinT(1:Nt,1)=AbT*[Psi ; T];
191         bsyst(1:(2*Nt),1)=[FBC_PSI.*(bNLPsi+bLinPsi); FBC_T.*(bNLT+bLinT)];
192         bn=Asystm1*bsyst; Psi=bn(1:Nt,1);  T=bn((Nt+1):(2*Nt),1);
193
194         if nt==10 || nt==Ntime*0.2 || nt==Ntime*0.4 || nt==Ntime/2 || nt==Ntime*0.6 || nt==
                Ntime*0.8 || nt==Ntime
195         nt
196         for j=1:Nz,
197           Psimat(1:Nx,j)=Psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); Tmat(1:Nx,j)=T(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
198           Tphysmat(1:Nx,j)=-1/2+Thetaemat(1:Nx,j)/DeltaTb+Tmat(1:Nx,j)/Ra;
199         end
200          subplot (2,2,1)
201          contour (X, Z, Psimat')
202          subplot (2,2,2)
203          contour (X, Z, Tphysmat')
204          Tmat_c(nt)=Tmat(ceil(Nx/2),ceil(Nz/2));
205          Tmat_max=max(abs(Tmat_c(1:nt)));
206          subplot (2,2,3)
207          plot((1:nt)*dt,Tmat_c(1:nt)/Tmat_max)
208          axis([0 Nt*dt -2 2])
209          subplot (2,2,4)
210          plot (Tphysmat(ceil(Nx/2),:),zch,'r')
211          axis([-2 2 0 1])
212          pause(0.00001)
213          hold off
214        end
215    end
```

A continuación se exponen también los códigos de los que hace uso el programa principal para obtener las matrices que permiten calcular las derivadas de forma numérica, *matricesx* (línea 6 y 7 del código). Es análogo para la variable $z$.

```
%%%SE OMITEN TILDES%%%%
%cambiar las condiciones como se desee
function [Lpx,Dx,Nx,x]=matricesx(Nx,Nz,x1,xn)
x=zeros(1,Nx); x(1)=x1; x(Nx)=xn;
%nodos de chebyshev
for cl=1:Nx
x(cl)=(x(Nx)+x(1))/2-(x(Nx)-x(1))/2*cos((cl-1)/(Nx-1)*pi);
end
%
%derivada interpolantes
num=0;
for j=1:Nx
    for i=1:Nx
        den=x(i)-x; den(i)=1; den=prod(den); flag=1;
        if i==j %la expresion es distinta cuando coinciden los dos indices, pues aparecen mas
            terminos en el numerador
             sumnum=0;
                 for k1=1:Nx
                     if k1~=i
                        num=x(j)-x; num(j)=1; num(k1)=1 ; sumnum=prod(num)+sumnum;
                     end
                 end
                 num=sumnum;
                 Lpx(j,i)=num/den;
         else
                num=(x(j)-x);
                num(j)=1; num(i)=1;
```

```
27                num=prod(num);
28                Lpx(j,i)=num/den;
29
30        end
31        Lpx(j,i)=num/den; %matriz con las derivadas de las funciones de Lagrange
32    end
33 end
34 Lpx;
35 Dx=kron(Lpx,eye(Nz));
36 end
```

Donde en la línea 35 aparece la función de Matlab *kron(A,B)*, que calcula el producto de Kronecker[2] de dos matrices [19], lo cual resulta muy eficiente para calcular una matriz de tamaño $(N_x \times N_z) \times (N_x \times N_z) = N_t \times N_t$, en el caso de $D_x$, y, análogamente, la matriz $D_z$, de tamaño $(N_z \times N_x) \times (N_z \times N_x) = N_t \times N_t$.

### 3.2.2. Condiciones de contorno e inicial en el problema con paredes participativas en la radiación

En esta sección se trata el problema en el que las paredes son capaces de emitir y absorber radiación (Rc $> 0$). Es destacable sin duda la manera en la que se ha modelado dicho intercambio de calor entre *elementos de pared*, habiéndose apoyado en la referencia [21] (veánse los capítulos 12 y 13) y [22] (especialmente sección 5.3). Las claves aquí proporcionadas relevantes para este estudio son:

- En primer lugar, dividir la superficie de las paredes en elementos de pared, que se han elegido de tal modo que están formados por el tramo comprendido entre el punto medio entre dos nodos consecutivos, excepto en el caso de ser el primer o último trozo de pared dentro de uno de los contornos verticales (u horizontales), es decir, si un trozo de pared está comprendido entre el nodo de una esquina y el anterior (o posterior en su caso), en cuyo caso el trozo de pared abarca desde el nodo en la esquina hasta el punto medio entre los dos nodos anteriores (o posteriores en su caso). Para una mejor explicación y entendimiento, ver figura 3.2. Además, se han considerado *superficies difusas*, entonces sus propiedades son independientes de la dirección, y *grises*, siendo entonces también independientes de las longitudes de onda, además de ser uniformes en cada trozo de superficie las radiaciones entrantes y salientes. Asimismo, como consecuencia directa de las dos hipótesis anteriores, en un material así descrito se tiene que su absortividad $\alpha_i$ es igual a su emisividad $\epsilon_i$.

[2] El producto de Kronecker de dos matrices A $(p \times q)$ y B $(m \times n)$ es una matriz de tamaño $(p \times m) \times (q \times n)$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} & \dots & a_{1q}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} & \dots & a_{pq}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

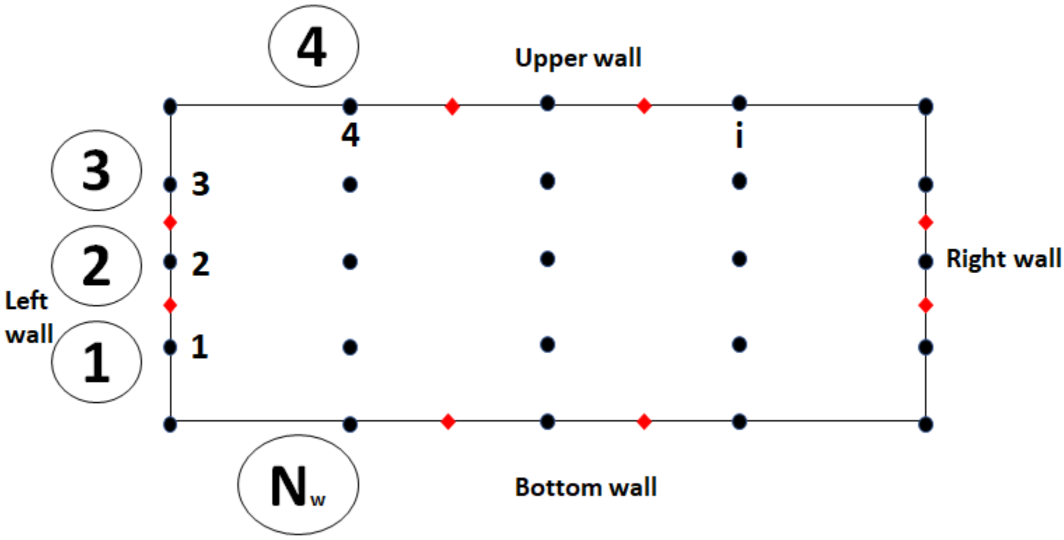



Figura 3.2: Representación esquemática explicativa sobre la división de los contornos horizontales y verticales en elementos de pared. Los índices de elementos en la pared son los representados dentro de un círculo, correspondiendo los otros números al índice de nodos de contornos, no incluyendo las esquinas. Obsérvese que el sentido seguido es horario y que habrá $2N_z + 2N_x - 8$ elementos de pared, por $N_w = 2N_z + 2N_x - 4$ nodos en los contornos.

- En segundo lugar, para tener en cuenta la orientación de las distintas divisiones que conforman las paredes, se tiene un parámetro que solo depende de la geometría de la cavidad, conocido como factor de de visión (ver figura 3.3) o de forma (*view or shape factor*):

  $F_{ij}$: *fracción de radiación que sale de la superficie i y llega directamente a la superficie j.*

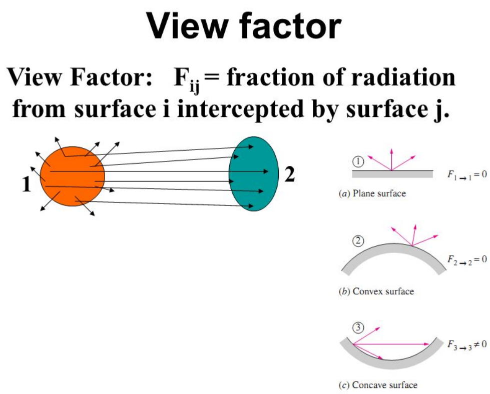



Figura 3.3: Factor de forma entre superficies.

Estos factores de forma cuentan con dos propiedades que se han usado, demostradas en la referencia citada (Cengel, 2006) [21]:

$$F_{ij}A_i = F_{ji}A_j, \tag{3.18}$$

conocida como **relación de reprocidad** y

$$\sum_{j}^{N_e} F_{ij} = 1, \tag{3.19}$$

donde $N_e$ es el número total de elementos de pared en la cavidad.

Además, se aporta la regla necesaria para el cálculo de los factores de forma para cavidades bidimensionales, que fue dada por **Hottel**, definida como:

$$F_{ij} = \frac{\sum L_c - \sum L_{nc}}{2 \times L_i}, \tag{3.20}$$

donde $L_c$ representa la longitud de cuerdas cruzadas, $L_{nc}$, la longitud de cuerdas no cruzadas y $L_i$, la longitud de cuerda de la superficie $i$, que se pueden ver en la figura 3.4.

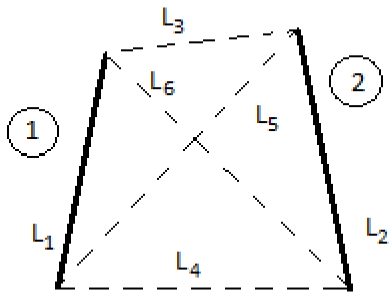



Figura 3.4: Determinación del factor de forma entre dos superficies: longitudes de cuerdas cruzadas ($L_5$ y $L_6$), no cruzadas ($L_3$ y $L_4$) y de las superficies ($L_1$ y $L_2$).

- En tercer lugar, teniendo en cuenta que la cantidad de radiación que sale de un cuerpo es la suma de su calor reflejado y del emitido, teniendo en cuenta las hipótesis del primer punto, la ecuación de Stefan-Boltzmann 2.10 y definición de radiosidad $\boldsymbol{J}$, se tiene que la radiosidad es igual a:

$$J_i = \epsilon_i \sigma T^4 + (1 - \epsilon_i) G_i, \tag{3.21}$$

donde el primer término representa la potencia radiativa de la superficie $i$ y $G_i = \sum_{j=1}^{N} J_j F_{ij}$ es la **irradiancia**, es decir, la potencia incidente en la superficie $i$ por unidad de área.

- El balance de energía en un elemento de pared puede obtenerse por un lado a partir de las radiosidades del resto, su propia radiosidad y la ganancia neta $Q_{ij}$ de calor por otros medios distintos a la radiación, como por ejemplo la convección. Este último, en el caso de una pared aislada, será igual a la pérdida neta de calor debida a la radiación que emite, dada por la ley de Stefan-Boltzman. El balance queda por tanto:

$$\frac{Q_i}{A_i} - J_i + \sum_{j=1}^{N} J_j F_{ij} = 0 \Rightarrow \frac{Q_i}{A_i} = \sum_{j=1}^{N} (J_i - J_j) F_{ij}.. \tag{3.22}$$

A su vez, el balance de energía neta en un elemento de pared también se puede calcular a partir de la energía que sale de ella y la energía que absorbe:

$$\frac{Q_i}{A_i} = \epsilon_i \sigma T_i^4 - \epsilon_i G_i A_i. \tag{3.23}$$

Tras exponer los puntos anteriores, se trata ahora de encontrar una ecuación que sirva como condición de contorno a cumplir por parte los elementos de pared, imponiéndola en los nodos. En los nodos pertenecientes a las paredes aisladas se conoce el calor que intercambian con el fluido por convección $Q_i/A_i$ y se les denotará por $i_c$ (o $j_c$), mientras que los nodos que pertenezcan a paredes con temperatura impuesta, se denotarán $i_T$ (o $j_T$). Consecuentemente, teniendo en cuenta que en los nodos cuya temperatura es conocida, si se sustituye la irradiancia en función de la radiosidad, se pueden calcular estas últimas mediante:

$$Ji = Arad_{ij}^{-1} b_i, \tag{3.24}$$

donde $Arad_{ij} = \delta_{ij} - F_{ij}(1 - \epsilon_i)$, y $b_i = \sigma \epsilon_i T_i^4$. Así se pueden determinar los valores del calor por unidad de área en dichos nodos:

$$\frac{Q_i}{A_i} = AQ_{ij} b_i, \tag{3.25}$$

donde $AQ_{ij} = \delta_{ij}-$. Ahora, usando 3.23 y la matriz $Arad_{ij}$ definida anteriormente, se calcula un vector con el calor neto en los elementos de pared $i_T$ ($T$ conocida),

$$\frac{Q_i}{A_i} = AQ_{ij} b_i,$$

donde $AQ = \delta_{ij} - \epsilon_i F_{ij} Arad_{ij}^{-}1$ es otra matriz que aparece en el código que se expondrá en la siguiente sección.

Finalmente, introduciendo la variable adimensional

$$\theta = \frac{T'}{T_m},$$

linealizando el campo de temperaturas en los nodos $T_i^4 \cong T_m^4 + 4T_m^3 T_i'$, usando todo lo anterior, se llega que la condición de contorno a satisfacer por los nodos en las paredes es:

$$-\left.\frac{\partial \theta'}{\partial n^*}\right|_{i_c} + \frac{R_c}{4}\sum_{\forall j_c} AQ_{i_c j_c}\epsilon_{j_c}\theta'_{j_c} = -Rc\sum_{\forall j} AQ_{i_c j} - R_c\sum_{\forall j_T} AQ_{i_c j_T}\epsilon_{j_T}\theta'_{j_T}, \tag{3.26}$$

donde $\partial/\partial n^*$ es la derivada con respecto a la dirección normal que apunta hacia dentro de la cavidad en cada tramo de pared, es decir, $\partial/\partial x^*$, $-\partial/\partial x^*$,$\partial/\partial z^*$,$-\partial/\partial z^*$, para la pared izquierda, derecha, inferior y superior respectivamente. Por otro lado, el parámetro adimensional $R_c$, denominado parámetro de radiación-convección, se ha definido como:

$$Rc = \frac{4T_m^3 \sigma H}{K} \tag{3.27}$$

En cuanto a las condiciones iniciales, como se observa en la siguiente sección, se ha optado por dejar la misma que anteriormente.

**Implementación numérica**

A continuación, se adjunta el código desarrollado para implementar la teoría del apartado anterior, para el caso de paredes verticales adiabáticas. Un código análogo es el que se ha utilizado para el caso de paredes horizontales adiabáticas:

```


clear all;
close all;
clc;
%_____PARAMETROS_____%
Pr=0.73;
Ra=2000; DeltaTb=0.1; Rc=50; lambda=0;
dt=0.001;
%______GEOMETRIA_____%

zmin=0; zmax=1;
%nodos de Chebyshev

Nz=20;
zch(1:Nz)=(zmax+zmin)/2-(zmax-zmin)/2*cos(((1:Nz)-1)*pi/(Nz-1));

xmin=0; xmax=1;
%nodos de Chebyshev

Nx=30;
```

```
xch(1:Nx)=(xmax+xmin)/2-(xmax-xmin)/2*cos(((1:Nx)-1)*pi/(Nx-1));
tic
%_____MATRICES____%
%Primero obtenemos las matrices Lpx y Lpz.
[Lpx,Dx,Nx,xch]=matricesx(Nx,Nz,xmin,xmax);
[Lpz,Dz,Nz,zch]=matricesz(Nz,Nx,zmin,zmax);

Nt=Nz*Nx;

Nwall=2*Nx+2*Nz-8;
kw1L=1; kw2L=Nz-2;
kw1U=Nz-1; kw2U=Nx+Nz-4;
kw1R=Nx+Nz-3; kw2R=Nx+2*Nz-6;
kw1B=Nx+2*Nz-5; kw2B=2*Nx+2*Nz-8;
for kw=1:Nwall,
   if  kw>=kw1L && kw<=kw2L,
        Iwall(kw)=kw+1; Iw1=Iwall(kw)-1; Iw2=Iwall(kw)+1;
    end
   if  kw>=kw1U && kw<=kw2U,,
        Iwall(kw)=(kw-kw1U+2)*Nz; Iw1=Iwall(kw)-Nz; Iw2=Iwall(kw)+Nz;
   end
   if  kw>=kw1R && kw<=kw2R,
        Iwall(kw)=Nx*Nz-(kw-kw1R+1); Iw1=Iwall(kw)+1; Iw2=Iwall(kw)-1;
   end
   if  kw>=kw1B && kw<=kw2B
        Iwall(kw)=(Nx-1)*Nz+1-(kw-kw1B+1)*Nz; Iw1=Iwall(kw)+Nz; Iw2=Iwall(kw)-Nz;

   end
    Iw=Iwall(kw);
    xwall(kw,1)=(X(Iw1)+X(Iw))/2; xwall(kw,2)=(X(Iw2)+X(Iw))/2;
    zwall(kw,1)=(Z(Iw1)+Z(Iw))/2; zwall(kw,2)=(Z(Iw2)+Z(Iw))/2;
    if (kw-kw1L)*(kw-kw1U)*(kw-kw1R)*(kw-kw1B)==0,
            xwall(kw,1)=X(Iw1);
            zwall(kw,1)=Z(Iw1);
    end
    if (kw-kw2L)*(kw-kw2U)*(kw-kw2R)*(kw-kw2B)==0,
            xwall(kw,2)=X(Iw2);
            zwall(kw,2)=Z(Iw2);
    end
%   [kw Iw Iw1 Iw2]
%   [kw Iwall(kw) Iw1 Iw2 xwall(kw,1) xwall(kw,2)]
%pause
end
%
% Emissivities and View factors by Hottel's rule
%
emiss(1:Nwall)=1;
for kw=1:Nwall,
    x1A=xwall(kw,1); x2A=xwall(kw,2);
    z1A=zwall(kw,1); z2A=zwall(kw,2);
    Long(kw)=sqrt((x2A-x1A)^2+(z2A-z1A)^2);
    for mw=1:Nwall,
    x1B=xwall(mw,1); x2B=xwall(mw,2);
    z1B=zwall(mw,1); z2B=zwall(mw,2);
    L1A1B=sqrt((x1A-x1B)^2+(z1A-z1B)^2);
    L2A2B=sqrt((x2A-x2B)^2+(z2A-z2B)^2);
    L2A1B=sqrt((x2A-x1B)^2+(z2A-z1B)^2);
    L1A2B=sqrt((x1A-x2B)^2+(z1A-z2B)^2);
    Fview(kw,mw)=(L1A1B+L2A2B-L1A2B-L2A1B)/2/Long(kw);
    end
    Fview(kw,kw)=0;
```

```
%     [(1:Nwall)' Fview(kw,:)']
%     [kw sum(Fview(kw,:))]
%     pause
end
Ident=eye(Nwall);
for kw=1:Nwall,
Femiss(kw,1:Nwall)=emiss(kw)*Fview(kw,:);
Arad(kw,1:Nwall)=Ident(kw,:)-(1-emiss(kw))*Fview(kw,:);
end
Aradm1=inv(Arad);
AQ=Ident-Femiss*Aradm1;
%
DL=Dx*Dx+Dz*Dz;
DL2=DL*DL;
DxDL=Dx*DL;
DzDL=Dz*DL;
%%%%%SOLUCION EQUILIBRIO %%%%%%
Ae=DL;
be=zeros(Nt,1);
%
% Modificaciones de Ae y be debidas a condiciones de contorno:
%
% Preparing BCs:
NwallT=2*(Nz-2);
NwallH=2*(Nx-2);
kwallH(1:NwallH)=[kw1L:kw2L, kw1R:kw2R];
nwallH(1:NwallH)=[ones(1,kw2L-kw1L+1), -ones(1,kw2R-kw1R+1)];
kwallT(1:NwallT)=[kw1U:kw2U, kw1B:kw2B];
TwallT(1:NwallT)=DeltaTb/2*[-ones(1,kw2U-kw1U+1), ones(1,kw2B-kw1B+1)];
BTaux=zeros(Nt,Nt); bTaux=zeros(Nt,1); normalH=zeros(Nt,Nt);
for kw=1:NwallH;
    ic=kwallH(kw); Ic=Iwall(ic);
    normalH(Ic,:)=nwallH(kw);
    for mw=1:NwallH
        jc=kwallH(mw); Jc=Iwall(jc);
        BTaux(Ic,Jc)=1/4*Rc*AQ(ic,jc)*emiss(jc);
    end
    bTaux(Ic, 1)=-Rc*sum(AQ(ic,:).*emiss(1,:));
    for nw=1:NwallT,
        jT=kwallT(nw);
        bTaux(Ic,1)=bTaux(Ic,1)-Rc*AQ(ic,jT)*emiss(jT)*TwallT(nw);
    end
end
for i=1:Nx,
     I1=(i-1)*Nz+1;
     I2=(i-1)*Nz+Nz;
% Temperatura impuesta horiz.
    Ae(I1,:)=0; Ae(I1,I1)=1; be(I1,1)=DeltaTb/2;
    Ae(I2,:)=0; Ae(I2,I2)=1; be(I2,1)=-DeltaTb/2;
end
% Contornos verticales (imposed heat flux):
%
for j=2:Nz-1,
    I1=j;
    I2=(Nx-1)*Nz+j;
% Radiacion conveccion horiz.
      Ae(I1,:)=-normalH(I1,:).*Dx(I1,:); Ae(I1,:)=Ae(I1,:)+BTaux(I1,:) ;be(I1,1)=bTaux(I1,1);
      Ae(I2,:)=-normalH(I2,:).*Dx(I2,:); Ae(I2,:)=Ae(I2,:)+BTaux(I2,:) ;be(I2,1)=bTaux(I2,1);
end
%
Thetae=Ae\be;
```

```
DxThetae=Dx*Thetae; DzThetae=Dz*Thetae;
 for j=1:Nz,
 Thetaemat(1:Nx,j)=Thetae(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
 end
for I=1:Nt,
    aux1(I,:)=Dz(I,:)*DxThetae(I,1);
    aux2(I,:)=Dx(I,:)*DzThetae(I,1);
end
for j=1:Nz,
   xmat(1:Nx,j)=xch(1:Nx)'; zmat(1:Nx,j)=zch(j);
end
mesh(xmat,zmat,Thetaemat)
%_____CONDICIONES DE CONTORNO_____%
%Definimos las matrices necesarias:
APSI=DL-dt*Pr*DL2;
AT=dt*Pr*Dx;
BPSI=Ra/DeltaTb*dt*(aux1-aux2);
BT=eye(Nt)*(1+dt*lambda)-dt*DL;
%Factor de condiciones de contorno
FBC_PSI=ones(Nt,1);
FBC_T=ones(Nt,1);

for i=1:Nx
    %Contornos de abajo
    I=(i-1)*Nz+1;
    %Imponemos Psi y T: i va desde 1:Nx
    %psi=0
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
    %T=0
    BPSI(I,:)=0;   BT(I,:)=0;  BT(I,I)=1;  FBC_T(I,1)=0;
    %Contorno superior
    I=(i-1)*Nz+Nz; %
    %psi=0
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
    %T=0
    BPSI(I,:)=0;   BT(I,:)=0;  BT(I,I)=1;  FBC_T(I,1)=0;
end
%
%Ahora vamos a contornos verticales
for j=2:Nz-1
%Contornos de izq
    I=j;
    %Imponemos Psi y DT/Dx (por eso j va desde 2 hasta Nz-1)
    %psi=0
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
    %dT/dx=0
    BPSI(I,:)=0;   BT(I,:)=-normalH(I,:).*Dx(I,:); BT(I,:)=BT(I,:)+BTaux(I,:);
    BT(I,I)=BT(I,I)-bTaux(I);    FBC_T(I,1)=0;
%Contornos de dcha
    I=(Nx-1)*Nz+j;
    %Imponemos Psi y T:
     %psi=0
     APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
     %dT/dx=0
     BPSI(I,:)=0;   BT(I,:)=Dx(I,:); BT(I,:)=BT(I,:)+BTaux(I,:);
     BT(I,I)=BT(I,I)-bTaux(I);    FBC_T(I,1)=0;
end
% velocidades nulas en las paredes, se usan las
%filas correspondientes a los subcontornos de abajo.
%Contornos horizontales dpsi/dz=0
for i=2:(Nx-1)
```

```
    K=(i-1)*Nz+2;
     APSI(K,:)=Dz((K-1),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
     K=(i-1)*Nz+Nz-1;
     APSI(K,:)=Dz((K+1),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
end
%Contornos verticales dpsi/dx=0
for j=3:(Nz-2)
     K=(2-1)*Nz+j;
     APSI(K,:)=Dx((K-Nz),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
     K=(Nx-2)*Nz+j;
     APSI(K,:)=Dx((K+Nz),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
end
%
%Formamos la matriz del sistema:
Asyst=[APSI AT; BPSI BT];
size(Asyst)
Asystm1=inv(Asyst);
%pause
for i=1:Nx,
      for j=1:Nz,
          I=(i-1)*Nz+j;
          Psi(I,1)=0.05*xch(i)^2*(xmax-xch(i))^2*zch(j)^2*(zmax-zch(j))^2;
          T(I,1)=0.05*sin(3*pi*zch(j));
      end
  end
AbPsi=sparse([DL, zeros(Nt,Nt)]);
AbT=sparse([zeros(Nt,Nt), speye(Nt)]);


[X, Z]=meshgrid(xch,zch);
%
figure
Ntime=5000;
  for nt=1:Ntime,
       t=nt*dt;
       bNLPsi(1:Nt,1)=(-(Dz*Psi).*(DxDL*Psi)+(Dx*Psi).*(DzDL*Psi))*dt-Pr*Ra/DeltaTb*dt*DxThetae;
       bNLT(1:Nt,1)=(-(Dz*Psi).*(Dx*T)+(Dx*Psi).*(Dz*T))*dt;
       bLinPsi(1:Nt,1)=AbPsi*[Psi ; T];
       bLinT(1:Nt,1)=AbT*[Psi ; T];
       bsyst(1:(2*Nt),1)=[FBC_PSI.*(bNLPsi+bLinPsi); FBC_T.*(bNLT+bLinT)];
       bn=Asystm1*bsyst; Psi=bn(1:Nt,1);  T=bn((Nt+1):(2*Nt),1);

       if nt==10 || nt==Ntime*0.2 || nt==Ntime*0.4 || nt==Ntime/2 || nt==Ntime*0.6 || nt==Ntime*0.8 || nt==Ntime
       nt
        for j=1:Nz,
         Psimat(1:Nx,j)=Psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); Tmat(1:Nx,j)=T(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
         Tphysmat(1:Nx,j)=-1/2+Thetaemat(1:Nx,j)/DeltaTb+Tmat(1:Nx,j)/Ra;
        end
        subplot (2,2,1)
        contour (X, Z, Psimat')
        subplot (2,2,2)
        contour (X, Z, Tphysmat')
        Tmat_c(nt)=Tmat(ceil(Nx/2),ceil(Nz/2));
        Tmat_max=max(abs(Tmat_c(1:nt)));
        subplot (2,2,3)
        plot((1:nt)*dt,Tmat_c(1:nt)/Tmat_max)
        axis([0 Nt*dt -2 2])
        subplot (2,2,4)
        plot (Tphysmat(ceil(Nx/2),:),zch,'r')
```

```
        axis([-2 2 0 1])
        pause(0.0001)
        hold off
        end
end
```

# Capítulo 4

# Medio participativo dentro de una cavidad con paredes con absorción de radiación nula

## 4.1. Paredes verticales adiabáticas

En esta sección se exponen resultados sobre el problema de convección con aproximación de medio transparente cuando las paredes que están aisladas no tienen capacidad de absorber o emitir radiación, es decir, cuando la emisividad de dichas paredes $\epsilon$ es nula (materiales como el oro pulido, el cobre pulido y el aluminio tienen emisividades casi nulas), condición que según el modelo desarrollado se corresponde con un valor **parámetro de radiación-convección** $Rc$ **nulo**, para cavidades con temperatura impuesta en las paredes horizontales y verticales adiabáticas y viceversa. En particular, se estudia cómo afecta aumentar la importancia del parámetro de radiación, $\lambda \uparrow$, al número de Rayleigh crítico para diferentes valores de la relación de aspectos $A = L/H$, donde $x_{max} = L$ y $z_{max} = H$ para una cavidad rectangular con paredes libres o rígidas, siendo $x$ la coordenada horizontal y $z$ la vertical (véase figura 2.4). Además, se estudia también cómo dicho parámetro influyen en la $\lambda_c$, el número de Nusselt, etc.

Este problema, como se expuso en el capítulo 2, está gobernado por las ecuaciones 2.28 y 2.29, bajo las condiciones de contorno 2.31 y 2.32.

### 4.1.1. Número de Rayleigh crítico: resultados fundamentales

Este apartado está dedicado al caso de paredes verticales adiabáticas, pues no existen una valor crítico del número de Rayleigh si las paredes con temperatura impuesta son las verticales, pues ya se ha comentado que siempre es inestable dicho problema.

Se tiene como objetivo estudiar cuál es el número de Rayleigh a partir del cual las perturbaciones iniciales se propagan de forma inestable, para el caso de cavidad con paredes horizontales libres en cavidades de gran relación de aspectos $A = 10$, ver 4.1, y compararlos con resultados obtenidos por Goody [8], como punto de partida para empezar nuevos estudios. De esta misma gráfica se toman los valores del parámetro $\lambda$, que se relaciona con el de la figura de tal forma que $\lambda = \lambda_G^2$.

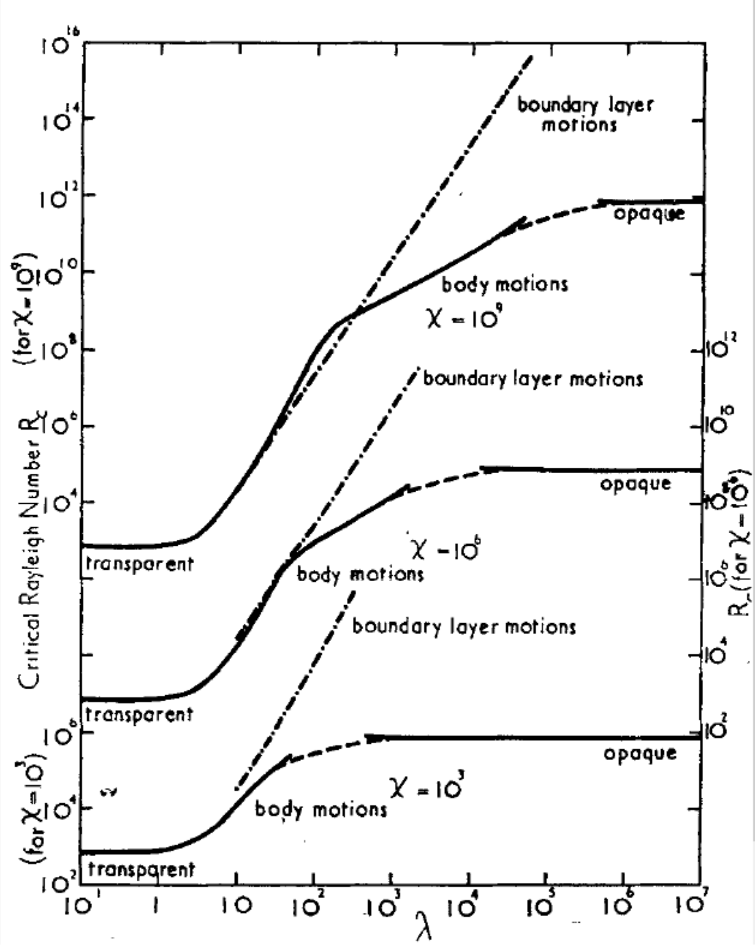



Figura 4.1: Gráfica tomada como referencia para elegir los valores de $\lambda_G = \lambda^2$, donde $\lambda_G$ es el parámetro que aparece en el eje horizontal. Los valores del número de Rayleigh crítico aquí mostrados, corresponden a los valores de la teoría lineal con paredes horizontales libres. Obsérvese también que se ha usado en esta gráfica una doble escala logarítmica. Es también notorio que los valores del parámetro $\chi$ influyen solo En el caso de radiación opaca, como es lógico después de lo visto en la teoría del capítulo 2 para el caso opaco. Se observa que los valores calculados siguen un comportamiento similar al que se produce en el lado izquierdo de las curvas, es decir, en el caso de radiación transparente, que es el de aumentar considerablemente el valor de $Ra_c$ cuando $\lambda_G \geq 10$. Imagen tomada de [8].

Así, los resultados de número de Rayleigh crítico en comparativa con los de Goody se muestran en la tabla 4.1:

| λ_G | Ra_c |
|---|---|
| 0 | 662 |
| 5 | 1553 |
| 10 | 5033 |

Cuadro 4.1: Tabla comparativa con los resultados de Goody de la figura 4.1.

Si se tiene en cuenta la escala logarítmica se observa que para los valores del parámetro de $\lambda_G$ tomados tienen el mismo comportamiento que los recogidos en la tabla, poniéndose de manifiesto el aumento de la estabilidad del fluido, ya que es capaz de emitir radiación a las paredes, estabilizándose con mayor rapidez.

Asimismo, para una cavidad con paredes horizontales rígidas con temperatura impuesta y paredes verticales adiabáticas, para una relación de aspectos $A = 2$, se muestra la influencia del parámetro de radiación $\lambda$ sobre el número de Rayleigh crítico para la misma cavidad en el problema de convección, cuyo resultado se puede consultar en [1], que obtuvo un valor de $\mathrm{Ra_c} = 2014$, frente a los que se han obtenido aquí, a saber:

| λ_G | Ra_c |
|---|---|
| 1 | 2170 |
| 5 | 3730 |
| 10 | 11793 |

Cuadro 4.2: Tabla comparativa del número de Rayleigh crítico con el caso de convección natural si se tiene en cuenta aproximación de medio transparente.

Obsérvese de nuevo como al aumentar el parámetro $\lambda_G$, aumenta la estabilidad del fluido y por tanto aumenta el número de Rayleigh crítico, siendo muy importante el aumento para números altos como $\lambda_G = 10 \Rightarrow \lambda = 100$. De esta manera, se reproduce el comportamiento que Goody obtuvo.

### 4.1.2. Variación del nº de Rayleigh crítico con la relación de aspectos. Influencia del medio

En este apartado se analiza cómo varía el número de Rayleigh crítico cuando las dimensiones de la cavidad pasan desde una relación de aspectos muy pequeña (A=0.5) hasta una relación de aspectos alta. Intuitivamente, antes de mostrar los resultados se puede comentar qué se espera obtener. A priori, una menor relación de aspectos, debido a la condición de paredes verticales rígidas, dificulta que se produzcan rollos de convección, por lo que el número de Rayleigh crítico a partir de el cual la convección sea posible, tendrá que aumentar, tanto más cuanto mayor sea la influencia de la presencia de las paredes verticales, esto es, a medida que la relación de aspectos disminuya. Por otro lado, se espera que comparando para los distintos valores de $\lambda$, aumenten los números de Rayleigh críticos, como se ha visto en el apartado anterior. A posteriori, se incluyen comentarios sobre dichos resultados y se justifican a partir de conclusiones y comparaciones con la teoría disponible.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para varios valores del parámetro $\lambda$ definido en la aproximación ópticamente fina, desde valores bajos en los que la radiación es inapreciable hasta valores *altos*, habiéndose usado la gráfica de Goody (figura 4.1) como referencia. De [8] (página 434), teniendo en cuenta que $\chi >> 1$, se obtiene la relación entre el parámetro de la figura, $\lambda_G$ y el del capítulo 2, $\lambda$:

$$\lambda = \lambda_G^2; \tag{4.1}$$

Según los resultados de Goody, el número de Rayleigh crítico aumenta a partir de $\lambda_G \sim 1$ por ser el valor a partir del cual la radiación comienza a tener peso cuando la relación de aspectos es grande (teóricamente infinita).

A continuación se muestra el número de Rayleigh crítico calculado en función de la relación de aspectos para varios valores de $\lambda_G$:

| λ_G \ A | 0.5 | 0.75 | 1 | 2 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 12125 | 4200 | | | | |
| 1 | 11815 | 4265 | 2270 | 2170 | 1960 | 1860 |
| 5 | 8810 | 5275 | 4720 | 3730 | 3350 | 3365 |
| 10 | 21185 | 16570 | 14795 | 11793 | 11080 | 10860 |

Cuadro 4.3: Número de Rayleigh crítico en función de A para varios valores del parámetro $\lambda_G$. Cavidad con paredes rígidas. Las celdas de la tabla que aparecen en color azul significan que no se ha calculado el valor correspondiente, por considerarse innecesario e irrelevante, pues ya fueron calculados en [1].

Se observa en la tabla anterior que para un valor de $\lambda$ dado, a medida que aumenta la relación de aspectos, el número de Rayleigh crítico disminuye, pues la influencia de la condición de contorno de rigidez o velocidad nula en las paredes, se atenúa, debido a que la separación entre ellas va en aumento. Además, si se fija una relación de aspectos, a mayor valor de $\lambda$, mayor valor de $\mathrm{Ra_c}$, a excepción del caso en el que la relación de aspectos es muy pequeña, A=0.5, donde dicho parámetro comienza a disminuir a partir del caso en el que se considera la participación del medio transparente, $\lambda > 0$, alcanza un mínimo para $\lambda_G = 5$ aproximadamente, y luego vuelve a aumentar. Probablemente, este último *comportamiento* se pueda explicar como que en primer lugar el efecto del rozamiento de las paredes rígidas disminuye al poder transmitirse energía por otro medio, por lo que el comportamiento inicialmente con $\lambda \uparrow$ es una disminución del número de Rayleigh crítico. En cambio, cuando el parámetro aumenta demasiado, la influencia sobre el medio provoca su rápida homogeinización, de tal forma que sea necesario un número de Rayleigh mayor para provocar inestabilidades en el fluido. En cualquier caso, para pequeñas relaciones de aspectos posiblemente se debería de tener en cuenta la participación de las paredes en la radiación, que es precisamente en lo que se centra el capítulo siguiente, el más importante del trabajo.

### 4.1.3. Número de Nusselt y perfiles de temperatura

El número de Nusselt $Nu$ sirve como medida de la relación entre el calor que se trasmite por convección (movimiento) y el calor que se transferiría si no existiese movimiento (equilibrio), por tanto sirve para generar una idea de cuánta importancia tiene, bajo determinados valores de los parámetros del problema, la convección a la hora de disipar calor.

Por tanto, el número de Nusselt local $Nu_L$ medido en la pared caliente ($x^* = 0$ o $z^* = 0$ dependiendo del problema) responde a la siguiente definición matemática:

$$Nu_L(x) = \frac{-K \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}}{-K \left.\frac{\partial T_e}{\partial z}\right|_{z=0}}; \tag{4.2}$$

Entonces, usando las variables adimensionales expuestas en la sección **Aproximación ópticamente fina o transparente**, se tiene::

$$Nu_L(x) = \frac{\left.\frac{\partial\left(\theta_e + \frac{\Delta \bar{T}}{Ra} T^*\right)}{\partial z^*}\right|_{z^*=0}}{\left.\frac{\partial \theta_e}{\partial z^*}\right|_{z^*=0}}. \tag{4.3}$$

Es conveniente también definir un número de Nusselt local medio, $\bar{Nu}_L$, definido como el calor intercambiado, teniendo en cuenta la convección, por el fluido a lo largo de la placa (por unidad de tiempo y de longitud $y$) y el calor intercambiado en equilibrio, también por unidad de tiempo y de longitud de la placa según $y$, que da como resultado:

$$\bar{Nu}_L = \frac{\int_0^A \left.\frac{\partial\left(\theta_e + \frac{\Delta \bar{T}}{Ra} T^*\right)}{\partial z^*}\right|_{z^*=0} dx^*}{\int_0^A \left.\frac{\partial \theta_e}{\partial z^*}\right|_{z^*=0} dx^*}, \tag{4.4}$$

Esta última definición es la que se expondrá en los resultados pare evitar un gran número de gráficos, a los que se recurre solo en caso de que se estime oportuno.

De esta manera, el número de Nusselt ha de variar con la influencia de la radiación. Para estudiarlo, se ha calculado, con los valores de la figura 4.1 de $\mathrm{Ra_c}$, el número de Nusselt medio en función de $\mathrm{Ra/Ra_c}$, comparándolo con el caso en el que no hay radiación, habiéndose recreado los resultados del número de Nusselt local obtenido por [1]:

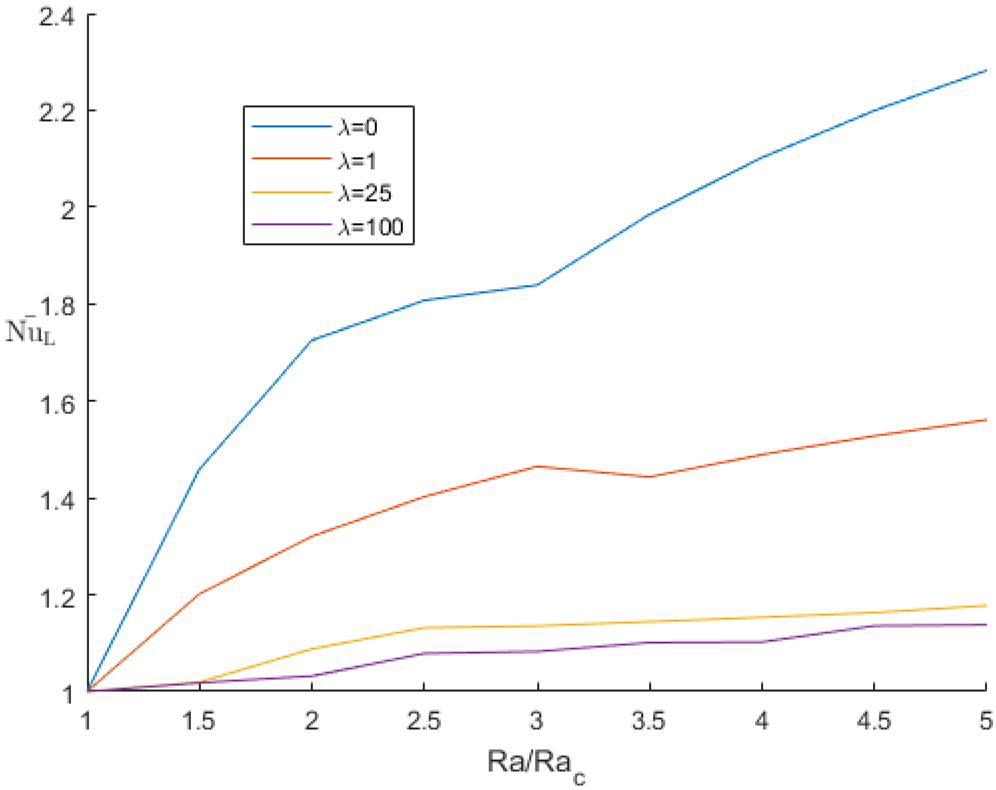
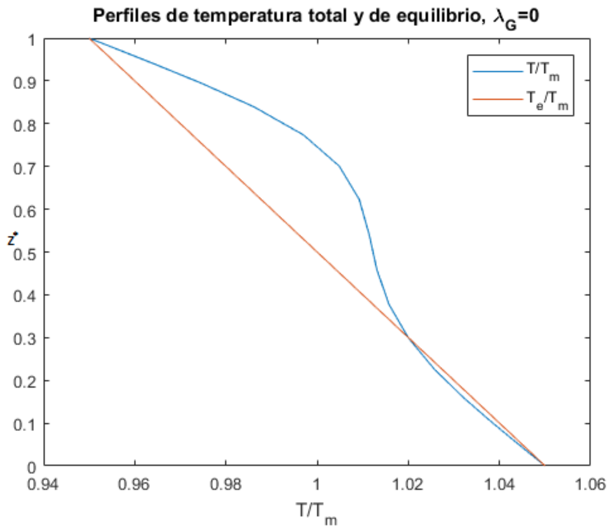


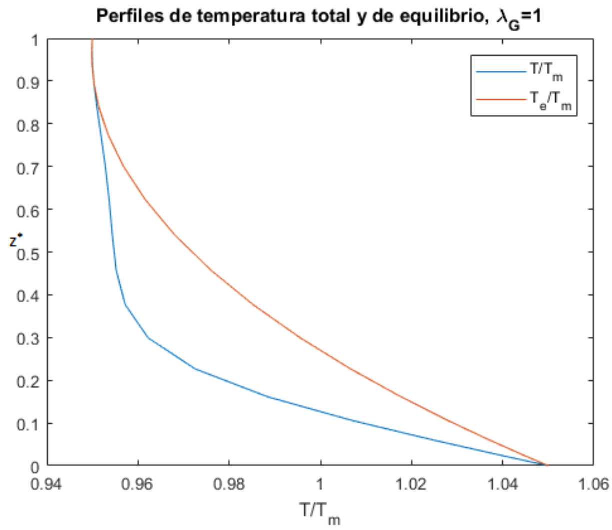

Figura 4.2: Número de Nusselt medio medido en la pared caliente, z=0, para el caso de convección natural, línea azul, ya resuelto en [1] y para los valores de $\lambda_G = 1$, $\lambda_G = 5$ y $\lambda_G = 10$.

En la figura anterior 4.2, se observa que el número de Nusselt local disminuye cuando $\lambda_G$ (o $\lambda$) aumenta. Téngase en cuenta que se tienen dos efectos que son contrapuestos en cuanto a su influencia en este número adimensional: por un lado, al aumentar el parámetro $\lambda$, el número de Rayleigh crítico aumenta, según se ha visto en la sección anterior, por lo que según esto, el calor disipado por movimientos convectivos, podría ser mayor (a mayor número de Rayleigh mayor intensidad de la convección); por otro lado, al aumentar el valor de $\lambda$, el medio cada vez tiene mayor capacidad de evacuar calor por radiación, por lo que el número de Nusselt debería disminuir. Consecuentemente, ha quedado claro, tras estos resultados, que el efecto homogeneizador de la radiación es superior al efecto de tener mayores valores de Rayleigh para cada punto calculado de las gráficas (ya que lo que se representa en el eje horizontal es el valor $\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c$, no Ra).

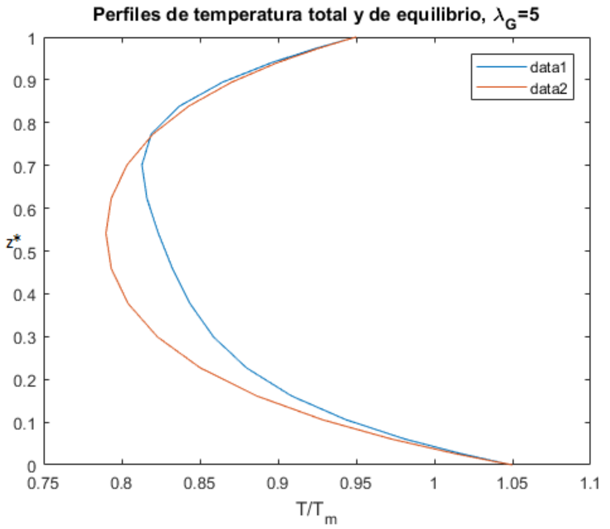
Se muestran a continuación los distintos perfiles de temperatura que se obtienen cuando cambia el parámetro de radiación $\lambda$.



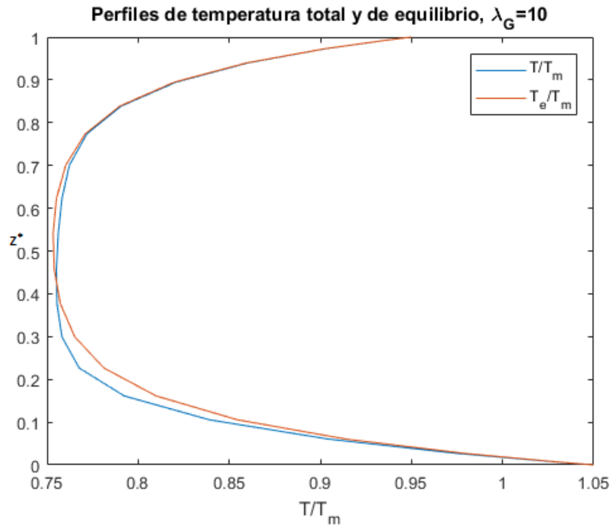

(a) (a) $\lambda_G = 0$




(b) (b) $\lambda_G = 1$




(c) (c) $\lambda_G = 5$




(d) (d) $\lambda_G = 10$

Figura 4.3: Perfiles de la temperatura y la de equilibrio, adimensionalizadas con la temperatura media, para varios valores de $\lambda$, fijando el parámetro $Ra/Ra_c = 2$ para cada caso.

En las figuras 4.3, donde se ha fijado la relación de aspectos en A=2, se observa en primer lugar que para $z^* = 0$ y $z^* = 1$ se tiene que $T_e/T_m = 0.95$ y $T/T_m = 1.05$ en cualquiera de ellas, debido a la imposición de las condiciones de temperatura ($\Delta\bar{T}$ se ha fijado en 0.1). Asimismo, es notorio que medida que $\lambda$ aumenta, la importancia del movimiento en la transmisión de calor disminuye, pues la temperatura total se hace cada vez más similar a la temperatura que existe solo en equilibrio, si no existiese movimiento.

## 4.2. Par baroclínico

De forma introductoria previa a la exposición de resultados se va a explicar la diferencia fundamental existente en cuanto a la física, cuando las temperaturas están impuestas en paredes verticales y cuando están impuestas en las paredes horizontales. En **ausencia** de absorción de **radiación** por parte de las paredes, Rc=0, el gradiente de temperaturas en el segundo de los casos no depende de la coordenada $x$ por lo que el gradiente de temperaturas es paralelo al de presión y por tanto el de densidad también sigue la misma dirección. En cambio, en el primero de los casos, las condiciones de contorno imponen valores constantes de temperatura $T_1$ y $T_2$ en las paredes verticales izquierda y derecha, respectivamente, cumpliéndose que $T_1 > T_2$. Esto provoca un gradiente de temperaturas horizontal, que al dejar de ser paralelo al gradiente de presiones, provoca que el gradiente de densidad tampoco sea paralelo al de presiones generándose un *par baroclínico*. Esto se explica con mayor grado de detalles a continuación.

Debido al no paralelismo de los gradientes de presión y densidad, deducción que se obtiene de tomar el gradiente en la ecuación de estado:

$$\rho = \frac{p}{RgT} \Rightarrow \nabla \rho = \frac{1}{RgT} \nabla p - \frac{1}{RgT^2} \nabla T, \tag{4.5}$$

pues $\nabla T \nparallel \nabla p$ y al desplazarse el centro de masas de las partículas en la dirección del gradiente de densidad, por ser esta no uniforme, al tener en cuenta que las fuerzas de presiones, $-\nabla p d\Omega$, sí están aplicadas en el centro de masas, se crea un momento con respecto a él que se conoce como par baroclínico (véase la figura 4.4).

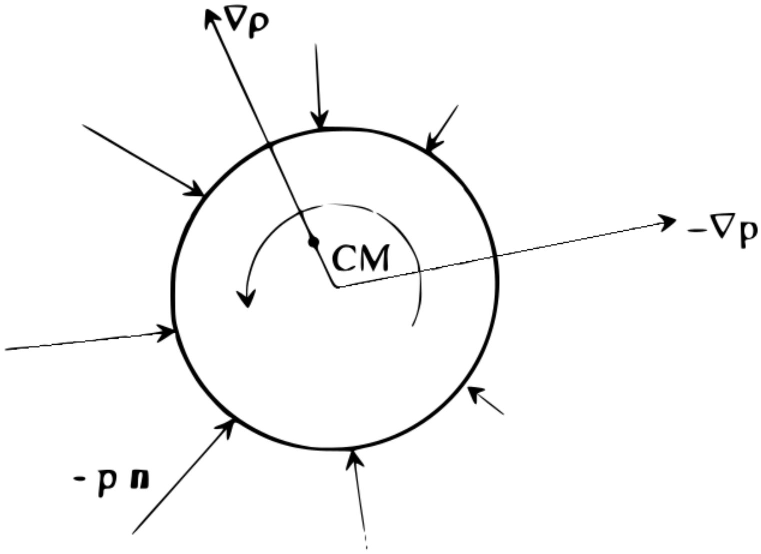



Figura 4.4: Par baroclínico, figura cortesía de [6]

El lector interesado puede consultar [6] (sección 4.4) para más detalles.

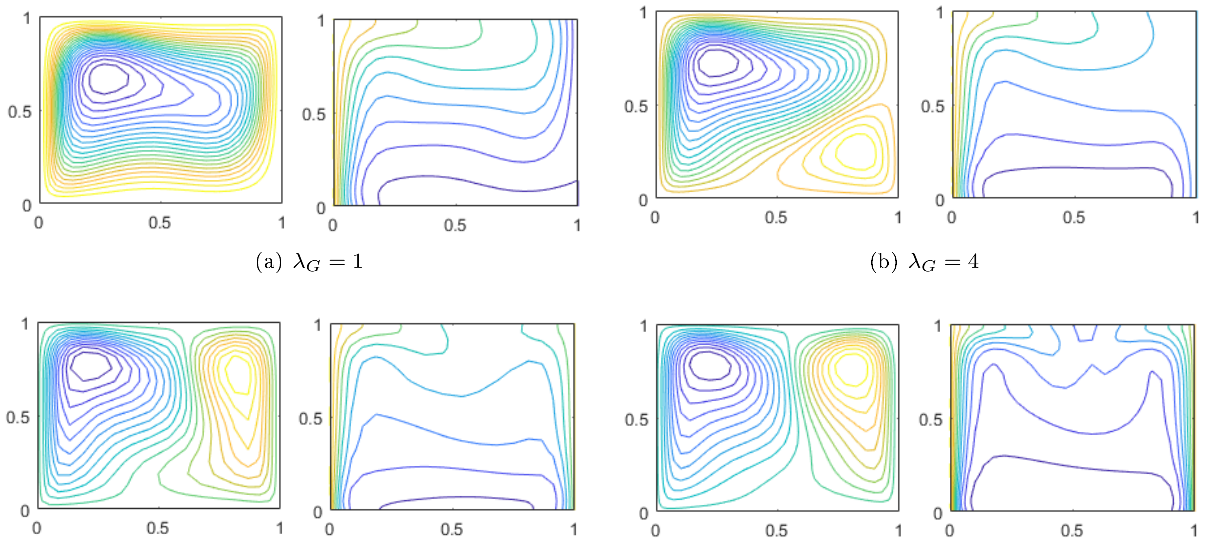
La parte esencial y relevante de este fenómeno es que en el problema que a continuación se presenta, no existe un número de Rayleigh crítico a partir del cuál se inicie el movimiento de convección, pues existe la inestabilidad expuesta en cualquier caso.

## 4.3. Paredes horizontales adiabáticas

Como se ha explicado con anterioridad, en este caso no existe un número de Rayleigh crítico, por lo que la obtención de resultados se ha enfocado a gráficas que representen los isocontornos del campo de temperaturas, al campo de velocidades y también se obtienen resultados para el número de Nusselt medio y en función de la coordenada $z$. .

### 4.3.1. Isocontornos de temperatura y función de corriente

En este apartado se ha estudiado cómo afecta el parámetro $\lambda$ a los campos de temperatura y de función de corriente (aquí se observa su efecto sobre los rollos de convección).



(a) $\lambda_G = 1$ (b) $\lambda_G = 4$

(c) $\lambda_G = 25$ (d) $\lambda_G = 100$

Figura 4.5: Isocontornos de los campos de temperatura y función de corriente.

## 4.4. Resolución del caso opaco

Mención aparte merece el caso en el que se considera la **aproximación opaca**. En el momento en el que se obtuvieron las ecuaciones se observó que las ecuaciones de Saltzmann válidas para la convección natural eran análogas a las que se obtenían para este caso si se reescribían como se hizo en 2.52. Por tanto se dijo entonces que el único cambio en el que se podrían diferenciar los valores de este caso con los del caso de convección natural, es que los valores de $\mathrm{Ra_c}$ estarían multiplicados por un factor de $1+\chi$, donde $\chi = \dfrac{16\sigma T_m^3}{3\kappa k}$, por tanto este problema se presupone trivial. En cualquier caso, se ha corroborado que así sucede a través del siguiente resultado: en la figura 4.6 se ha muestra que el valor numérico calculado como número de Rayleigh crítico para esta aproximación, si se tienen paredes libres,, es de $671.3(1+10^3)$ con A=10, si $\chi = 10^3$. Este valor puede ser comparado con el valor teórico para una cavidad infinita con paredes libres, que es 657.25 o con el valor numérico calculado en apartados posteriores.

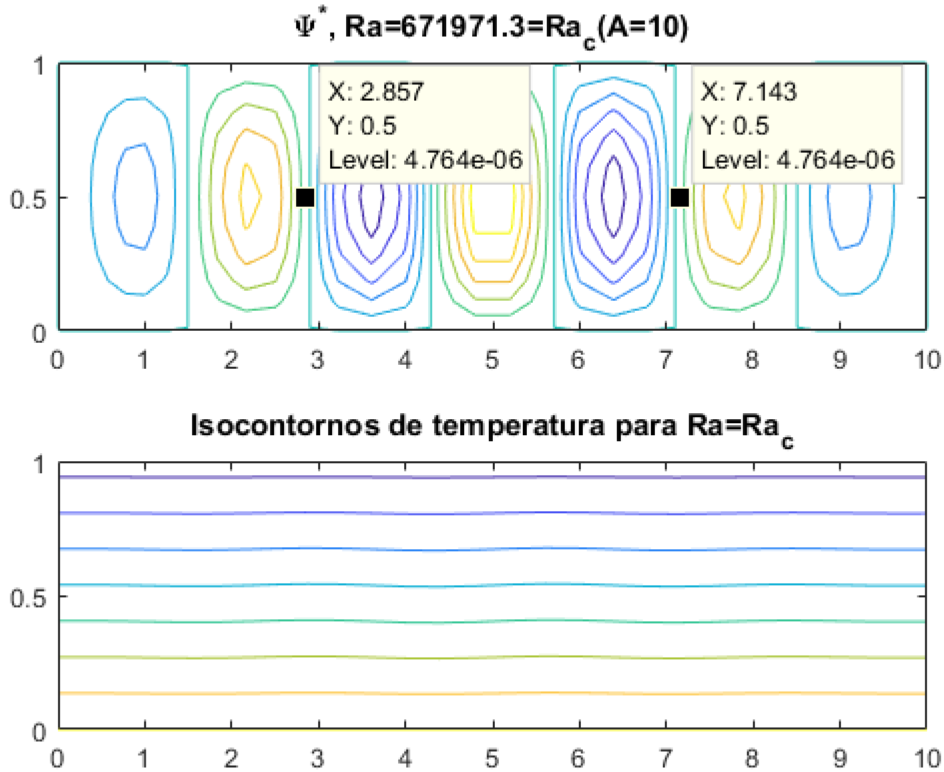



Figura 4.6: $\Psi^*$ e isocontornos de temperatura para paredes libres en el caso de aproximación opaca.

En conclusión, se ha comprobado que el caso de **aproximación ópticamente gruesa** es extrapolable de los resultados del problema de convección natural, por lo de aquí en adelante se pondrá la atención en el caso de **aproximación ópticamente fina** y su comparativa con el caso de radiación natural. De hecho, la longtidud crítica entre dos rollos convectivos o *período espacial*, $\lambda_c$ resulta ser, a la vista de la figura 4.6:

$$\lambda_c = \frac{7.143 - 2.857}{3/2} = 2.857,$$

que, comparándolo con el valor de la Teoría Lineal de Rayleigh de $\lambda_c$ para una cavidad infinita con paredes horizontales libres, $\lambda_c = 2.828$, asumiendo que pueden existir pequeños errores numéricos, se refuerza la idea de que este caso tan solo difiere en el factor $(1 + \chi)$ del número de Rayleigh.

54

# Capítulo 5

# Medio no participativo dentro de una cavidad con paredes con absorción de radiación no nula

En este capítulo se va a estudiar el caso en el que las paredes aisladas pueden absorber o emitir radiación, esto es, cuando el parámetro de radiación-convección no es nulo, por tener una emisividad $\epsilon$ el fluido. En este caso, al tener emisividad las paredes, el gradiente de temperaturas depende de la coordenada $x$, independientemente de si se está tratando el caso de paredes adiabáticas verticales u horizontales, formándose por tanto un par baroclínico en cualquier caso, por lo que deja de existir un número de Rayleigh crítico, al ser siempre inestable. Primero se considera el caso de paredes verticales adiabáticas y temperatura impuesta en las paredes horizontales y después se estudia el caso contrario.

En primer lugar, se ha estudiado cómo varía el número de Nusselt si el medio es totalmente transparente $\lambda = 0$.

Es importante destacar algo que hasta entonces no se había comentado, que es la dependencia del parámetro de radiación-convección definido, Rc, con el resto de parámetros del problema, es decir, este parámetro no es aleatorio, como se señala en [24]. De esta manera, dicha variable depende del número de Rayleigh de la siguiente forma:

$$Rc = 4\frac{T_m^3 \sigma \theta_0}{K} \left( \frac{Ra}{(T_1 - T_2)\beta\nu\alpha} \right)^{1/3} \Delta\bar{T}. \tag{5.1}$$

En general, en este trabajo se han adoptado los valores de los parámetros que hacen posible comparar completamente los resultados con los de [24]; a saber:

$$T_1 - T_2 = 10K;\ \theta_0 = 29.35;\ T_m = 293.5K.$$

Y, a partir de la temperatura media dada, se han tomado las propiedades del aire de la página [25]. Con dichos valores, el valor del parámetro de radiación-convección es de $Rc$ ha variado (típicamente) solo cuando ha variado $Ra$.

## 5.1. Paredes con absorción de radiación no nula. Resolución numérica del problema para una cavidad rectangular con paredes horizontales adiabáticas

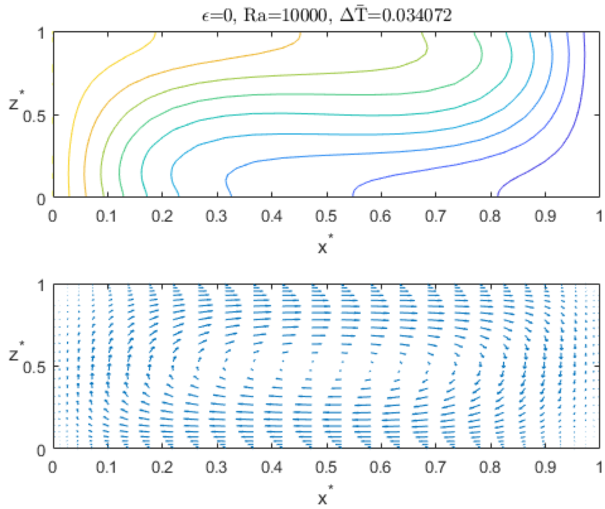
En esta sección se presentan resultados para el caso en el que las paredes horizontales ($z^* = 0, 1$) están aisladas y las paredes izquierda y derecha tienen impuesta unas temperaturas $T_1$ y $T_2$, respectivamente, siendo $T_1 > T_2$. Se han hecho comparaciones con la referencia [24] (M. Akiyama y Q. P. Chong, 1997), de tal modo que los parámetros definidos están en función de los que se presentan en dicho documento. Además, los valores de parámetros como la conductividad del fluido (aire) se han tomado, a la temperatura de referencia (la media), de la página mostrada en la cita [25].

### 5.1.1. Perfiles de velocidades e isocontornos de temperatura

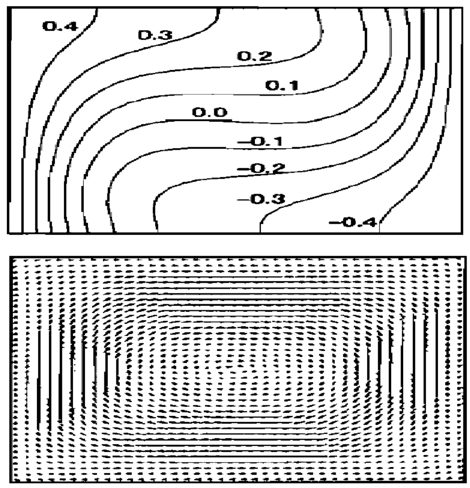
En primer lugar se han obtenido los perfiles del campo de velocidades y los isocontornos del campo de temperaturas (figura 5.1), encontrándose un buen acuerdo con los resultados de la literatura mencionada. Cabe destacar que lo que se representa como temperatura es la variable adimensional

$$\frac{T - T_m}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\Delta \bar{T}} \left( \theta + \frac{\Delta \bar{T}}{Ra} T^* \right),$$

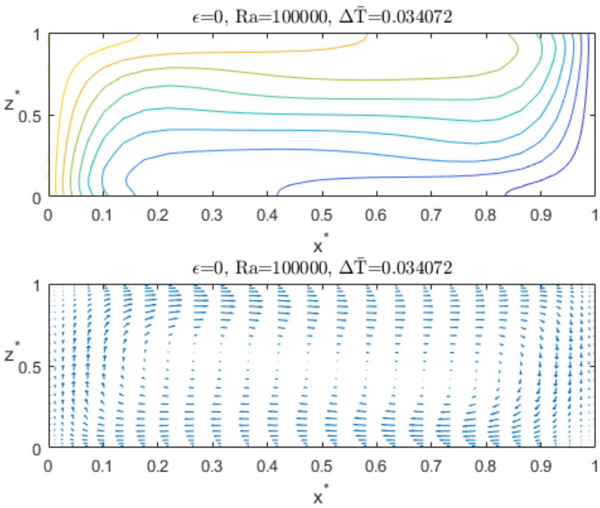
para que sea la misma variable de temperatura que la representada en los resultados de [24].



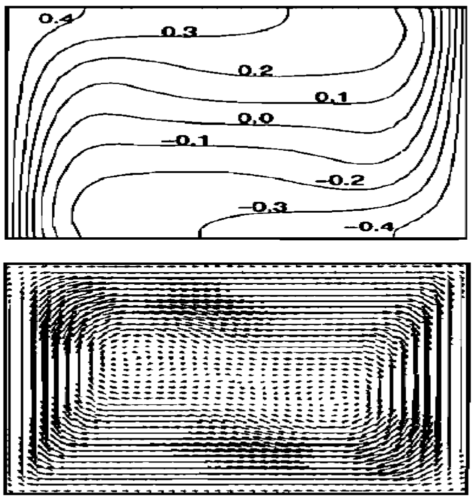

(a) $\mathrm{Ra} = 10^4$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$



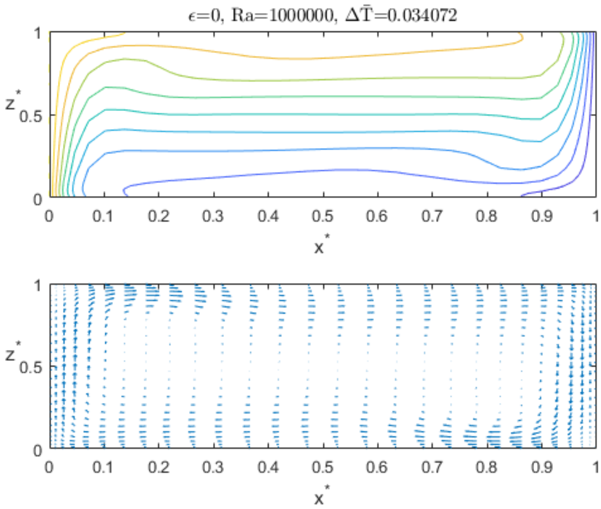

(b) $\mathrm{Ra} = 10^4$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$, obtenida por Akiyama & Chong



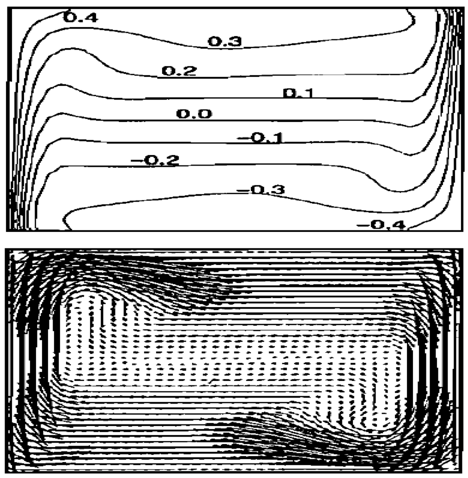

(c) $\mathrm{Ra} = 10^5$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$




(d) $\mathrm{Ra} = 10^4$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$, obtenida por Akiyama & Chong



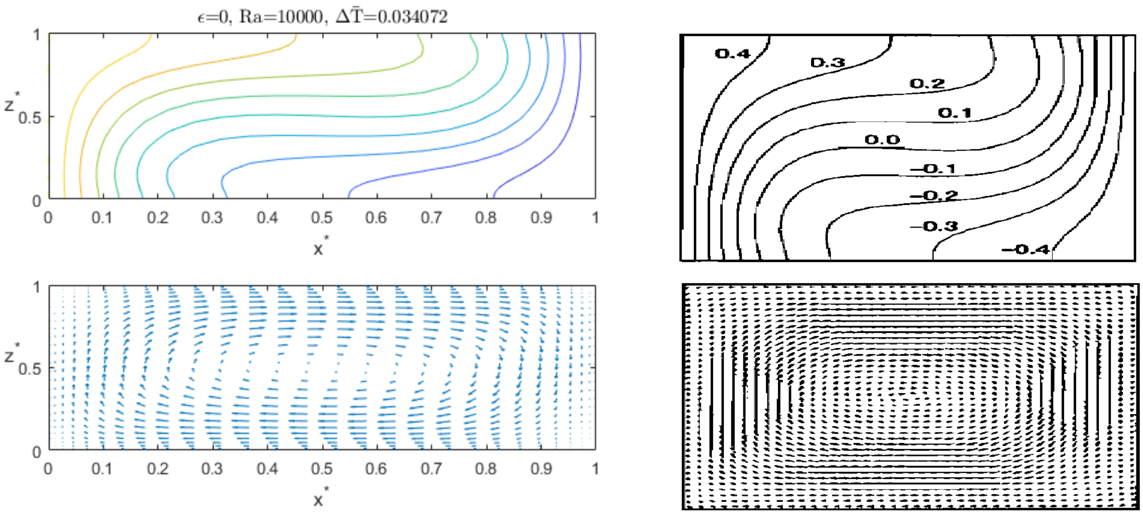

(e) $\mathrm{Ra} = 10^4$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$




(f) $\mathrm{Ra} = 10^4$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$, obtenida por Akiyama & Chong

Figura 5.1: Campo de velocidades e isocontornos de temperatura para varios valores del número de Rayleigh comparando los resultados con los obtenidos en [24]

Tras corroborar los resultados anteriores, también se han obtenido las mismas gráficas pero para valores inferiores del número de Rayleigh, a modo de ilustrar que efectivamente para cualquier número de dicho parámetro existen inestabilidades por la dirección del gradiente de temperaturas, como ya se predecía de forma teórica.




(a) $\mathrm{Ra} = 10^2$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$ (b) $\mathrm{Ra} = 10^3$, $\epsilon = 0.5$, $\Delta\bar{T} = 1/29.35$

Figura 5.2: Campo de velocidades e isocontornos de temperatura para números de Rayleigh bajos. Obsérvese que efectivamente incluso para valores muy pequeños del parámetro, existen inestabilidades.

### 5.1.2. Número de Nusselt convectivo

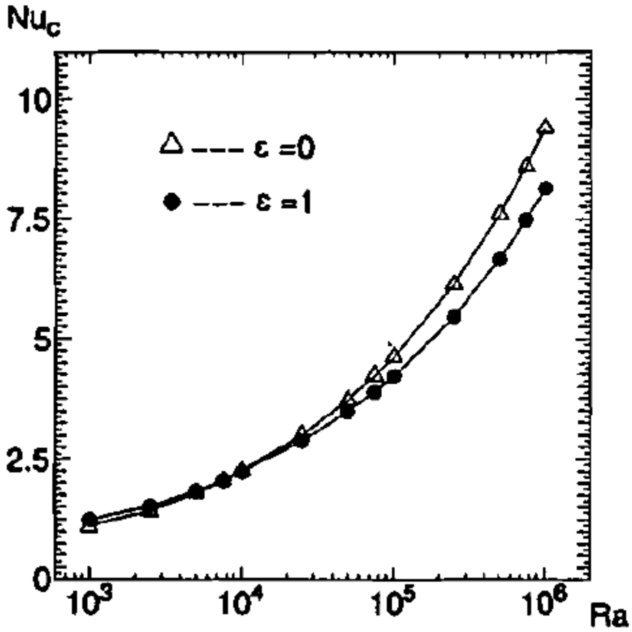
Aquí se ha calculado *el número de Nusselt convectivo* $\mathrm{Nu_c}$ medio en la pared, para varios valores de la emisividad $\epsilon$, que se ha definido como el calor por unidad de área y tiempo que por convección se transfiere en alguna de las paredes frente al que se transfiere por conducción considerando la cavidad entera, que en variables adimensionales viene dado por la integral:

$$Nu_c = \int_0^1 -\frac{1}{\Delta\bar{T}} \left. \frac{\partial\left(\theta_e + \frac{\Delta\bar{T}}{Ra}T^*\right)}{\partial x^*} \right|_{x^*=0,1} dz^* \tag{5.2}$$

A continuación, se presentan en una tabla varios valores de dicho parámetro variando el número de Rayleigh y la emisividad:

| Nu de convección, pared fría | | | |
|---|---|---|---|
| ε\Ra | 10^4 | 10^5 | 10^6 |
| 0 | 2.25 | 4.53 | 8.84 |
| 0.5 | 2.14 | 3.97 | 7.48 |
| 1 | 1.62 | 3.29 | 6.55 |

(a) Tabla

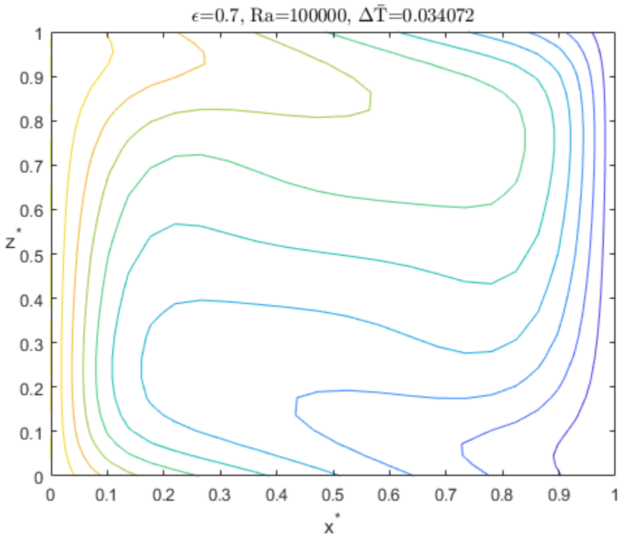



(b) Gráfica de Akiyama & Chong

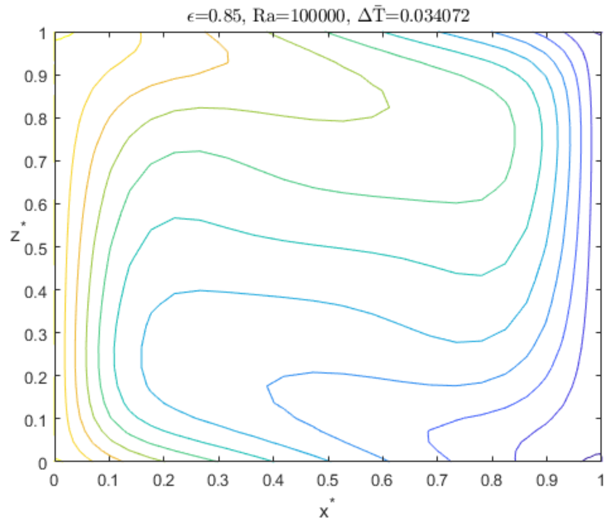
Figura 5.3: Tabla calculada frente a gráfica dada por [24].

En primer lugar, se percibe que al aumentar la emisividad, disminuye el número de Nusselt. Este resultado se podría entender como que al aumentar $\epsilon$, aumenta la cantidad de calor que se transfiere por radiación, por lo que el efecto de la convección disminuye. Por otro lado, es también lógico que a medida que aumenta el número de Rayleigh, aumenta el número de Nusselt, pues se incrementa la importancia de la transmisión de calor por el incremento del movimiento del fluido. Para ello, compárense los campos de velocidades de las figuras 5.1, donde a mayor Ra, mayores velocidades cerca de la pared fría.

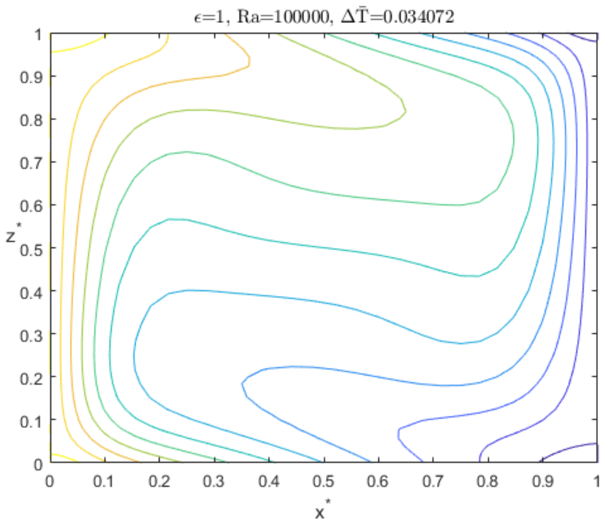
En segundo lugar, se puede observar un acuerdo prácticamente total para los valores de emisividad 0 y 0.5, pero no así para el valor unidad. Esta discrepancia posiblemente se deba a la linealización que se ha considerado del campo de temperaturas. De hecho, por esta razón se ha calculado también campo de temperaturas para una emisividad de valor unidad (figura 5.4), habiéndose encontrado también diferencias. En cualquier caso, téngase en cuenta que una emisividad tan elevada realmente no se da en la naturaleza, pues probablemente uno de los materiales que puedan usarse en las paredes son algunos vidrios y plásticos con emisividades en torno a 0.9.




(a) $\epsilon = 0.7$




(b) $\epsilon = 0.85$




(c) $\epsilon = 1$

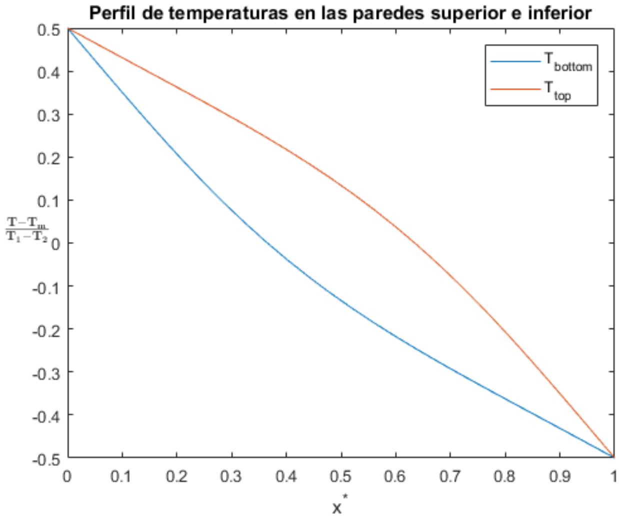
Figura 5.4: Isocontorno de temperaturas para valores altos de la emisividad: obsérvense los errores numéricos que se cometen en las paredes horizontales en la zona cercana a las esquinas cuando la emisividad es igual a la unidad.

En la figura anterior se observa cómo la emisividad no altera en exceso el campo de temperaturas, excepto para la figura 5.4 donde $\epsilon = 1$ en las zonas cercanas a las paredes verticales, donde en las esquinas en la pared izquierda se forman zonas con temperatura superior a la temperatura de la pared caliente, y zonas con temperatura inferior a la temperatura de la pared fría, en las esquinas de la derecha de la cavidad. Naturalmente, estos resultados no corresponden con la realidad, ni tampoco con los obtenidos por [24], por lo que se tratan de limitaciones del método numérico desarrollado.

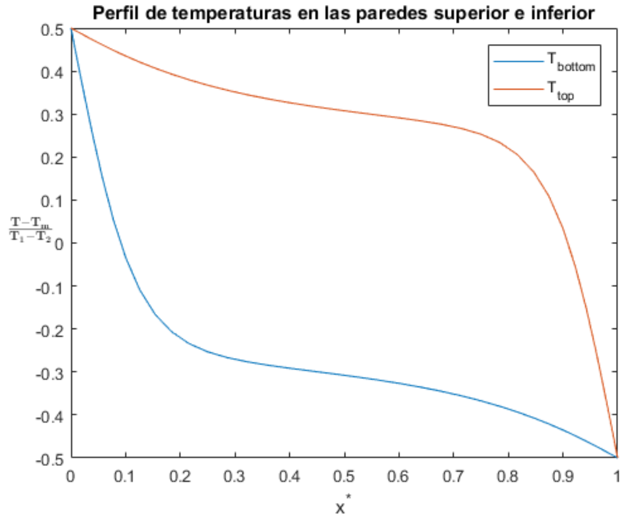
No obstante, se ha intentado a posteriori desarrollar un método eliminando la linealización que antes se realizaba, para comprobar que efectivamente era la causa raíz de los errores obtenidos numéricamente. En la siguiente sección (**??**) se tratará este problema, como mejora de los resultados hasta ahora reproducidos.

### 5.1.3. Temperatura en las paredes aisladas

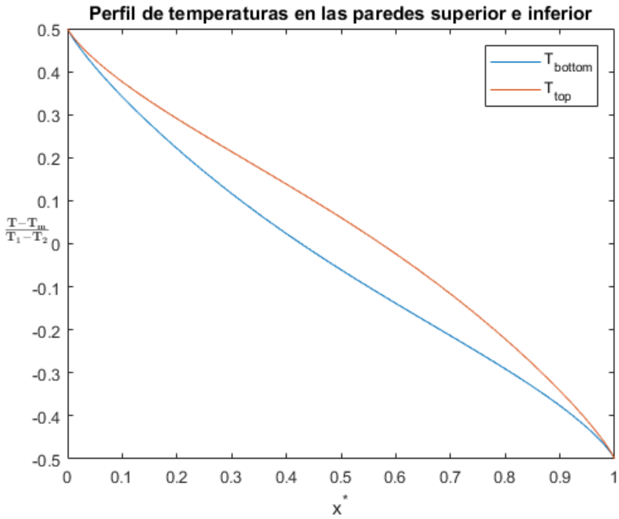
En esta sección se ha puesto interés en calcular la evolución de la temperatura en las paredes aisladas, para observar cómo afectan la emisividad y el número de Rayleigh, es decir la influencia de la radiación y de la convección, a la distribución de temperatura que alcanzan en las paredes horizontales. Como referencia para estos resultados se pueden consultar las gráficas de la página 193 de la referencia [3].



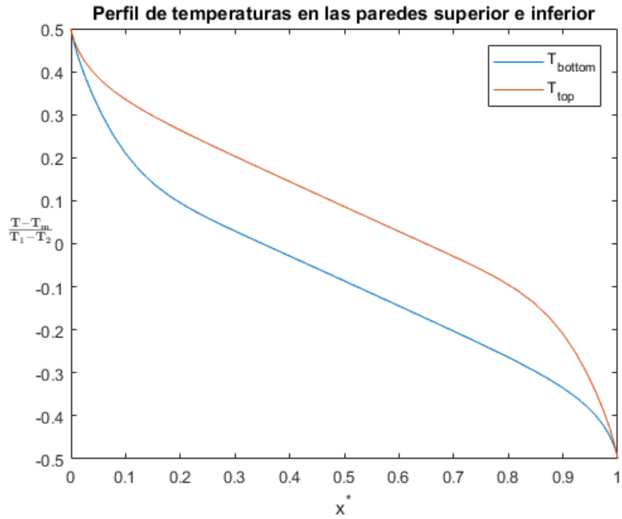

(a) $\mathrm{Ra} = 10^3$, $\epsilon = 0$



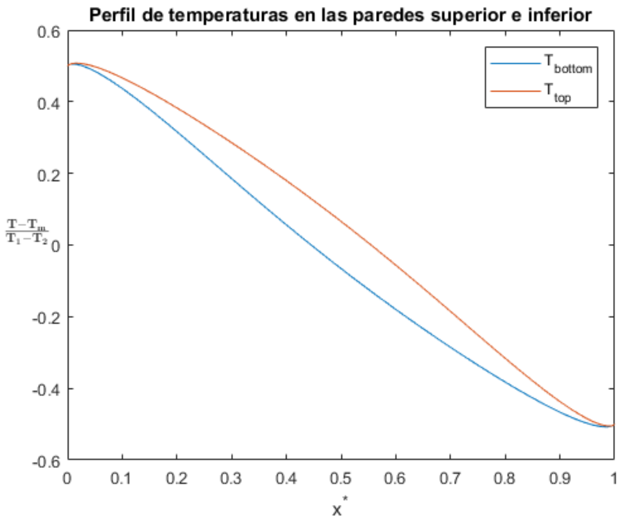

(b) $\mathrm{Ra} = 7 \cdot 10^4$, $\epsilon = 0$



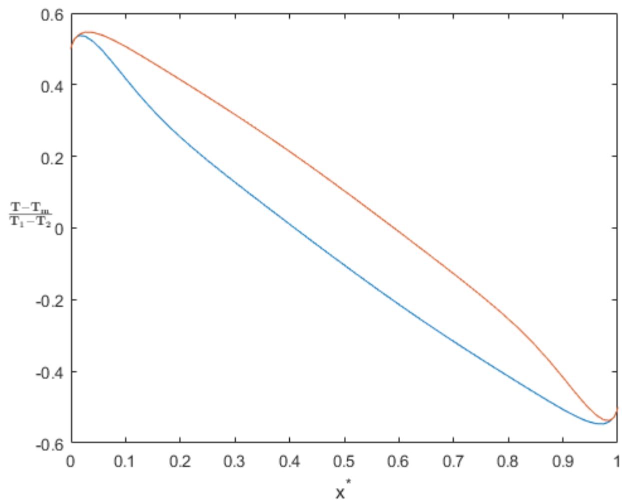

(c) $\mathrm{Ra} = 10^3$, $\epsilon = 0.5$




(d) $\mathrm{Ra} = 7 \cdot 10^4$, $\epsilon = 0.5$




(e) $\mathrm{Ra} = 10^3$, $\epsilon = 1$




(f) $\mathrm{Ra} = 7 \cdot 10^4$, $\epsilon = 1$

Figura 5.5: Perfiles de temperatura a lo largo de las paredes aisladas.

En primer lugar se observa que a mayor número de Rayleigh, mayor es la diferencia de temperatura entre las paredes aisladas, especialmente en el caso en el que no se considera radiación, lo cual quiere decir que el transporte de calor por convección calienta de forma notoria a la pared superior y enfría a la inferior cuando la recirculación aumenta (Ra aumenta), cuyas temperaturas solo se igualan en $x^* = 0$ y $x^* = 1$ por condición de contorno. De hecho, si no hubiese movimientos de convección (Ra=0), ambas paredes tendrían la misma temperatura. Por otro lado, al aumentar la emisividad para tener en cuenta las paredes, se halla que la consideración de la radiación facilita la equidad de las temperaturas entre las paredes aisladas, ya que pueden intercambiar calor entre sí directamente y no solo a través del fluido.

## 5.2. Corrección de los resultados: condiciones de contorno sin linealizar

En este apartado se expone el proceso seguido para el desarrollo de un nuevo código más preciso que el de la versión anterior, a fin de comparar resultados para valores de emisividad altos, donde se encontraban fallos. La diferencia radica en que no se linealiza la temperatura, la cual se va a considerar como la suma de tres términos:

$$T = T_m + T' + T + T'_e,$$

como se ha hecho anteriormente. Cabe destacar que para el código se mantiene la notación de índices y el nombre de las matrices que se ha usado en la sección anterior. A continuación se explica cómo se han impuesto las condiciones de contorno en el programa para el cálculo de la temperatura de equilibrio (es decir, obviando la hidrodinámica), y de manera análoga se procede con la temperatura completa. De este modo, en el equilibrio, en primer lugar se tiene la condición que se ha de cumplir en las paredes con temperatura impuesta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0; \tag{5.3}$$

Para imponer la condición de contorno en una pared aislada hay que hacer un balance entre los calores intercambiados por convección con el fluido y el calor neto intercambiado por radiación, de tal modo que:

$$K\frac{\partial T}{\partial z} \mp Q_r = 0;\ \text{para} z = \begin{cases} 0 \\ H \end{cases} \tag{5.4}$$

Se ha optado por introducir las variables adimensionales $x^*$, $z^*$ y $t^*$ ya presentadas previamente (se omitirán los superíndices por comodidad), además de una variable adimensional de temperatura de equilibrio $\theta_E$:

$$T = T_m + (T_1 - T_2)\theta_E;\ \text{donde}\ T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}, \tag{5.5}$$

cuyo subíndice $E$ se omite en adelante por comodidad, de tal modo que se denota $\theta \equiv \theta_E$.

Así, la ecuación 5.3 quedaría:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla^2 \theta = 0 \xRightarrow{\text{Discretiz.}} \frac{T_n - T_{n-1}}{dt} - DL * T_n = 0 \Rightarrow eye(Nt) - dt * DL)T_n = T_{n-1}, \tag{5.6}$$

donde el subíndice $n$ representa la iteración actual en el tiempo y $n-1$, la anterior, que es conocida y a la matriz $eye(Nt) - dt * DL$ se le denota en adelante y en el código por $BTE$.

Para la ecuación para pared aislada 5.4, usando el desarrollo completo de la expresión $(1 + \theta/\theta_0)^4$, donde $\theta_0 = 1/\Delta\bar{T}$ y teniendo en cuenta que el calor que recibiría un elemento de pared sería nulo si todos los elementos estuviesen a la misma temperatura, condición que se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{Nwall} AQ_{i_c j}\epsilon_j \sigma \cdot 1 = 0, \tag{5.7}$$

se tiene que la ecuación 5.4 se convierte en:

$$1 \left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{i_c} - n_{i_c}\frac{Rc\theta_0}{4}\sum_{j=1}^{Nwall} AQ_{i_c j}\epsilon_j g_j \theta_n, \text{ donde } n_{i_c} = \begin{cases} 1 \; si \; z=0 \\ -1 \; si \; z = zmax \end{cases}, \tag{5.8}$$

donde $g_j$ es la aproximación numérica $4/\theta_0 + 6\theta_{n-1}/\theta_0^2 + 4\theta_{n-1}^2/\theta_0^3 + \theta_{n-1}^3/\theta_0^4$, de tal manera que para cada iteración en el tiempo represente un valor conocido, y que se ha obtenido de una aproximación del desarrollo de $(1+\theta/\theta_0)^4$ y usar 5.7.

Para implementar las condiciones de contorno de temperatura impuesta (obsérvese que corresponden con $\theta = 1/2$ en $x=0$ y $\theta = -1/2$ en $x = x_{max}$) es necesario imponer en la matriz del sistema de la temperatura de equilibrio $BTE$, como se ha hecho en repetidas ocasiones, los siguientes cambios:

- Teniendo el nodo de la pared identificado con su índice $I$, se anula dicha fila $I$ completamente.
- El elemento $BTE(I,I)$ se hace igual a la unidad.
- Por último, en el elemento $I$ del vector que almacena los términos independientes (llamado $bTE$) se asigna el valor de $\pm 1/2$ según si corresponde a uno nodo de la pared caliente, $x=0$, o fría, $x=1$.

Para implementar la condición de contorno dada por 5.8, que es la parte más compleja e interesante, se siguen los pasos siguientes:

- Siguiendo la notación usada en el capítulo de Método numérico, se definen varios índices para hacer referencias a los nodos y a los paneles de los contornos, a saber: un índice $kw$ para paneles con condición de calor impuesta (paredes horizontales en este caso) tal que empieza numerando como primer panel al panel que se sitúa entre el primer nodo de la esquina superior izquierda y el punto medio entre los dos nodos siguientes. A partir de ahí, en la pared superior recorre de izquierda a derecha (es decir los primeros Nx-2 paneles) y continúa en la pared inferior de derecha a izquierda (numerando por tanto los Nx-2 paneles de esta pared). Adicionalmente, a cada panel $kw$ le corresponde un índice $i_c$ asociado a la enumeración original de los paneles usada en el programa previo (empieza numerando por el contorno izquierdo en la zona inferior y en sentido horario desde ese primer panel). Además, para recorrer el resto de paneles habiendo fijado uno $i_c$, se utiliza un índice $j$ que recorre todos los paneles de los contornos, ya sean paneles con temperatura impuesta o aislados, por lo que $j = 1 : N_{wall}$, siendo $N_{wall} = 2 * Nx + 2 * Nz - 8$. Por último, cada índice $I$ definido al principio del capítulo de Método numérico está relacionado con un par $(i_c, j)$.
- Una vez explicados los índices que se han usado, se exponen las matrices y vectores creados con el fin de exponer la condición de contorno de pared aislada sin linealizar las temperaturas. En primer lugar se crea una matriz auxiliar $BTEauxBC$ para almacenar los valores del segundo término de la ecuación 5.8, es decir, para cada nodo de las paredes aisladas se almacena en una fila de $Nt$ columnas los valores $-normalH(kw)R_c/4 * AQ(i_c, j)\epsilon(j)$, donde $normalH(kw)$ tiene un valor de 1 si $1 \leq kw \leq Nx-2$ o un valor de -1 si $Nx - 1 \leq kw \leq 2 * Nx - 4$ y la matriz $AQ$ es la misma que la del apartado 3.2. Después, se crea un vector auxiliar de $Nt$ componentes, de tal modo que la componente $J$ (correspondiente a la columna $J$ de la matriz BTEauxBC) de dicho vector es 1 si $J$ es un nodo de los contornos y cero si no pertenece a los contornos. Este vector sirve para tener en cuenta que sólo transmiten calor, según el término $-n_{i_c}\frac{Rc\theta_0}{4}\sum_{j=1}^{Nwall} AQ_{i_c j}\epsilon_j \sigma g_j \theta_n$, los paneles que pertenecen al contorno.
- Para finalizar, téngase en cuenta que debido a que la condición de contorno en los paneles aislados depende de la temperatura cambiante de los paneles de la otra pared aislada, por lo que la condición de contorno cambia cada vez que se produce una iteración. Esto lleva a recalcular lo que se ha llamado $auxv$ en el programa, que contiene los valores de la expresión de $g_j$ en los nodos que pertenecen a paneles del contorno. Debido a esto, la matriz del sistema, $BTE$, cambia con cada iteración del tiempo, por lo que hay que invertirla para resolverlo en cada iteración.

Para el cálculo de la temperatura $T^*$ las líneas de código necesarias son prácticamente análogas a las que se han necesitado para el cálculo de la temperatura de equilibrio. Del mismo modo, se puede aprovechar el nuevo programa para la obtención de resultados en el caso en el que las paredes aisladas son las verticales. Simplemente Para obtener la temperatura con la hidrodinámica hay que tener en cuenta que en el desarrollo de la ecuación 5.8 tiene que tomarse su expresión completa:

$$T = T_m \left(1 + \frac{\theta_E}{\theta_0} + \frac{T^*}{Ra\theta_0}\right), \tag{5.9}$$

quedando así la ecuación de la condición de contorno definitivamente:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T^*}{\partial z}(n) - n_{i_c}\frac{Rc\theta_0}{4}\sum_{j=1}^{N_{wall}} AQ_{ij}\epsilon_j T^*(n) \\ &\left[4\left(1+\frac{\theta_E}{\theta_0}\right)^3\frac{1}{\theta_0} + 6\left(1+\frac{\theta_E}{\theta_0}\right)^2\frac{T^*(n-1)}{Ra\theta_0^2} + \left(1+\frac{\theta_E}{\theta_0}\right)\frac{T^{*2}(n-1)}{Ra^2\theta_0^3} + \frac{T^{*3}}{Ra^3\theta_0^4}\right] = 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde se ha desarrollado la expresión de $T^4$ y se ha usado la condición de equilibrio 5.8.

### 5.2.1. Código mejorado

En este apartado se expone la versión del código sin uso de linealización para el caso en el que las temperaturas están impuestas en las paredes verticales.

```


clear all;
close all;
clc;
%_____PARAMETRES_____%
Pr=0.73;
Ra=1e5; theta0=29.35; DeltaTb=1/theta0;

Tm=293.5;
DeltaT=10; %NOT DeltaTb
beta_nu_alpha=3.7836e+05; %let's keep this as a constant
d=(Ra/DeltaT/beta_nu_alpha)^(1/3); %as a function of the rest of the parameters. This value is
     needed to calculate RaAki
sigma=5.67e-8; %constant
K=0.0257; %conductivity at Tm
emissivity=1;

RcAki=Tm^3*sigma*d*theta0/K;

if emissivity>0
Rc=4*RcAki*DeltaTb/emissivity;
else
Rc=0;
end


dt=0.0001;
%______GEOMETRY_____%

zmin=0; zmax=1;
%Chebyshev nodes
```

```
Nz=30;
zch(1:Nz)=(zmax+zmin)/2-(zmax-zmin)/2*cos(((1:Nz)-1)*pi/(Nz-1));

xmin=0; xmax=1;
%Chebyshev nodes
Nx=30;
xch(1:Nx)=(xmax+xmin)/2-(xmax-xmin)/2*cos(((1:Nx)-1)*pi/(Nx-1));
tic
%_____MATRICES_____%
[lpx]=dCheby(xch,Nx);
[lpz]=dCheby(zch,Nz);
lx=eye(Nx);
lz=eye(Nz);
Nt=Nz*Nx;

for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        I=(i-1)*Nz+j;
        X(I)=xch(i); Z(I)=zch(j);
        for m=1:Nx,
                Ki=(m-1)*Nz+1;
                Kf=(m-1)*Nz+Nz;
                Dx(I,Ki:Kf)=lpx(i,m)*lz(j,1:Nz);
                Dz(I,Ki:Kf)=lx(i,m)*lpz(j,1:Nz);
        end
    end
end
%
%
Nwall=2*Nx+2*Nz-8;
kw1L=1; kw2L=Nz-2;
kw1U=Nz-1; kw2U=Nx+Nz-4;
kw1R=Nx+Nz-3; kw2R=Nx+2*Nz-6;
kw1B=Nx+2*Nz-5; kw2B=2*Nx+2*Nz-8;
for kw=1:Nwall,
   if  kw>=kw1L && kw<=kw2L,
        Iwall(kw)=kw+1; Iw1=Iwall(kw)-1; Iw2=Iwall(kw)+1;
    end
   if  kw>=kw1U && kw<=kw2U,,
        Iwall(kw)=(kw-kw1U+2)*Nz; Iw1=Iwall(kw)-Nz; Iw2=Iwall(kw)+Nz;
   end
   if  kw>=kw1R && kw<=kw2R,
        Iwall(kw)=Nx*Nz-(kw-kw1R+1); Iw1=Iwall(kw)+1; Iw2=Iwall(kw)-1;
   end
   if  kw>=kw1B && kw<=kw2B
        Iwall(kw)=(Nx-1)*Nz+1-(kw-kw1B+1)*Nz; Iw1=Iwall(kw)+Nz; Iw2=Iwall(kw)-Nz;

   end
    Iw=Iwall(kw);
    xwall(kw,1)=(X(Iw1)+X(Iw))/2; xwall(kw,2)=(X(Iw2)+X(Iw))/2;
    zwall(kw,1)=(Z(Iw1)+Z(Iw))/2; zwall(kw,2)=(Z(Iw2)+Z(Iw))/2;
    if (kw-kw1L)*(kw-kw1U)*(kw-kw1R)*(kw-kw1B)==0,
            xwall(kw,1)=X(Iw1);
            zwall(kw,1)=Z(Iw1);
    end
    if (kw-kw2L)*(kw-kw2U)*(kw-kw2R)*(kw-kw2B)==0,
            xwall(kw,2)=X(Iw2);
            zwall(kw,2)=Z(Iw2);
    end
%   [kw Iw Iw1 Iw2]
%   [kw Iwall(kw) Iw1 Iw2 xwall(kw,1) xwall(kw,2)]
```

```
%pause
end
%
% Emissivities and View factors by Hottel's rule
%
%emiss(1:Nwall)=0.7;
emiss(1:Nwall)=emissivity;
for kw=1:Nwall,
    x1A=xwall(kw,1); x2A=xwall(kw,2);
    z1A=zwall(kw,1); z2A=zwall(kw,2);
    Long(kw)=sqrt((x2A-x1A)^2+(z2A-z1A)^2);
    for mw=1:Nwall,
    x1B=xwall(mw,1); x2B=xwall(mw,2);
    z1B=zwall(mw,1); z2B=zwall(mw,2);
    L1A1B=sqrt((x1A-x1B)^2+(z1A-z1B)^2);
    L2A2B=sqrt((x2A-x2B)^2+(z2A-z2B)^2);
    L2A1B=sqrt((x2A-x1B)^2+(z2A-z1B)^2);
    L1A2B=sqrt((x1A-x2B)^2+(z1A-z2B)^2);
    Fview(kw,mw)=(L1A1B+L2A2B-L1A2B-L2A1B)/2/Long(kw);
    end
    Fview(kw,kw)=0;
end
Ident=eye(Nwall);
for kw=1:Nwall,
Femiss(kw,1:Nwall)=emiss(kw)*Fview(kw,:);
Arad(kw,1:Nwall)=Ident(kw,:)-(1-emiss(kw))*Fview(kw,:);
end
Aradm1=inv(Arad);
AQ=Ident-Femiss*Aradm1;
%
DL=Dx*Dx+Dz*Dz;
DL2=DL*DL;
DxDL=Dx*DL;
DzDL=Dz*DL;
%
% Preparing BC's:
NwallH=2*(Nx-2);
NwallT=2*(Nz-2);
kwallT(1:NwallH)=[kw1L:kw2L, kw1R:kw2R];
nwallT(1:NwallH)=[ones(1,kw2L-kw1L+1), -ones(1,kw2R-kw1R+1)];
kwallH(1:NwallT)=[kw1U:kw2U, kw1B:kw2B];
nwallH(1:NwallH)=-[ones(1,kw2U-kw1U+1), -ones(1,kw2B-kw1B+1)];
BTauxBC=zeros(NwallH,Nt); TauxBC=zeros(1,Nt); normalH=zeros(Nt,Nt);
for kw=1:NwallH;
    ic=kwallH(kw); Ic=Iwall(ic); IwH(kw)=Ic;
    for mw=1:NwallH
        jc=kwallH(mw); Jc=Iwall(jc);
        BTauxBC(kw,Jc)=-nwallH(kw)*Rc*theta0/4*AQ(ic,jc)*emiss(jc);
        TauxBC(1,Jc)=1;
    end
    for nw=1:NwallT,
        jT=kwallT(nw); JT=Iwall(jT);
        BTauxBC(kw,JT)=-nwallH(kw)*Rc*theta0/4*AQ(ic,jT)*emiss(jT);
        TauxBC(1,JT)=1;
    end
end
%EQUILIBRIUM
%
dte=10*dt;
BTE=eye(Nt)-dte*DL;
bTE=zeros(Nt,1);
```

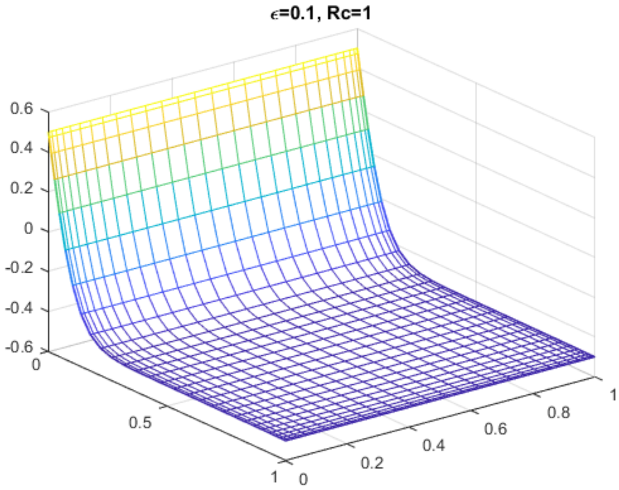
```
fBC(1:Nt,1)=0; fInt(1:Nt,1)=1;
%

     for j=1:Nz,
     I1=j;
     I2=(Nx-1)*Nz+j;

    BTE(I1,:)=0; BTE(I1,I1)=1; bTE(I1,1)=1/2; fBC(I1,1)=1; fInt(I1,1)=0;
    BTE(I2,:)=0; BTE(I2,I2)=1; bTE(I2,1)=-1/2; fBC(I2,1)=1; fInt(I2,1)=0;
    end

theta0=1/DeltaTb; theta02=theta0*theta0; theta03=theta02*theta0; theta04=theta03*theta0;
Thetanm1(1:Nt,1)=-1/2;
for it=1:10000,
     [it]
     vaux1=TauxBC.*Thetanm1';
     vaux2=vaux1.*vaux1;
     vaux3=vaux2.*vaux1;
     auxv=4/theta0+6*vaux1/theta02+4*vaux2/theta03+vaux3/theta04;
     for kw=1:NwallH
         Ikw=IwH(kw);
         BTE(Ikw,:)=Dz(Ikw,:)+BTauxBC(kw,:).*auxv(1,:);
         fBC(Ikw,1)=1; fInt(Ikw,1)=0;
     end
%      BTEinv=inv(BTE);
%      Thetan=BTEinv*(fBC.*bTE+fInt.*Thetanm1);
     AUX=fBC.*bTE+fInt.*Thetanm1;
     Thetan=BTE\AUX;
     for j=1:Nz,
     xmat(1:Nx,j)=xch(1:Nx)'; zmat(1:Nx,j)=zch(j);
     Thetanm1mat(1:Nx,j)=Thetanm1(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
     end
     mesh(xmat,zmat,Thetanm1mat)
     pause(0.001)
     hold off
     if max(abs(Thetanm1-Thetan)) <= 10^-5,
         break
     end
     Thetanm1=Thetan;
 end
 [max(abs(Thetanm1-Thetan))]
 ThetaE=Thetan;
pause

Thetae=DeltaTb*ThetaE;
DxThetae=Dx*Thetae; DzThetae=Dz*Thetae;
 for j=1:Nz,
 Thetaemat(1:Nx,j)=Thetae(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
 end
for I=1:Nt,
    aux1(I,:)=Dz(I,:)*DxThetae(I,1);
    aux2(I,:)=Dx(I,:)*DzThetae(I,1);
end
%
AuxThetae=1+Thetae';
AuxThetae2=AuxThetae.*AuxThetae;
AuxThetae3=AuxThetae2.*AuxThetae;

%_____BOUNDARY CONDITIONS_____%

APSI=DL-dt*Pr*DL2;
```

```
AT=dt*Pr*Dx;
BPSI=Ra/DeltaTb*dt*(aux1-aux2);
BT=eye(Nt)-dt*DL;
%Boundary conditions factors
FBC_PSI=ones(Nt,1);
FBC_T=ones(Nt,1);

for i=2:(Nx-1)
    I=(i-1)*Nz+1;
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
    I=(i-1)*Nz+Nz;
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
end

for j=1:Nz
    I=j;
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;  AT(I,:)=0;
    I=(Nx-1)*Nz+j;
    APSI(I,:)=0;   APSI(I,I)=1;  FBC_PSI(I,1)=0;     AT(I,:)=0;
end

for i=3:(Nx-2)
    K=(i-1)*Nz+2;
     APSI(K,:)=Dz((K-1),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
     K=(i-1)*Nz+Nz-1;
     APSI(K,:)=Dz((K+1),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
end

for j=2:(Nz-1)
    K=(2-1)*Nz+j;
     APSI(K,:)=Dx((K-Nz),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
     K=(Nx-2)*Nz+j;
     APSI(K,:)=Dx((K+Nz),:);  FBC_PSI(K,1)=0;  AT(K,:)=0;
end
%

for i=1:Nx,
      for j=1:Nz,
          I=(i-1)*Nz+j;
          Psi(I,1)=0.05*xch(i)^2*(xmax-xch(i))^2*zch(j)^2*(zmax-zch(j))^2;
          T(I,1)=0.05*sin(3*pi*zch(j));
      end
  end
AbPsi=sparse([DL, zeros(Nt,Nt)]);
AbT=sparse([zeros(Nt,Nt), speye(Nt)]);

[X, Z]=meshgrid(xch,zch);
%
figure
Ntime=5000;
  for nt=1:Ntime,
       t=nt*dt;
%
%BPSI y BT:
    for j=1:Nz
    I=(1-1)*Nz+j;
    BPSI(I,:)=0;   BT(I,:)=0;  BT(I,I)=1;  FBC_T(I,1)=0;
    I=(Nx-1)*Nz+j;
    BPSI(I,:)=0;   BT(I,:)=0;  BT(I,I)=1;  FBC_T(I,1)=0;
    end
    vaux1=TauxBC.*T';
```

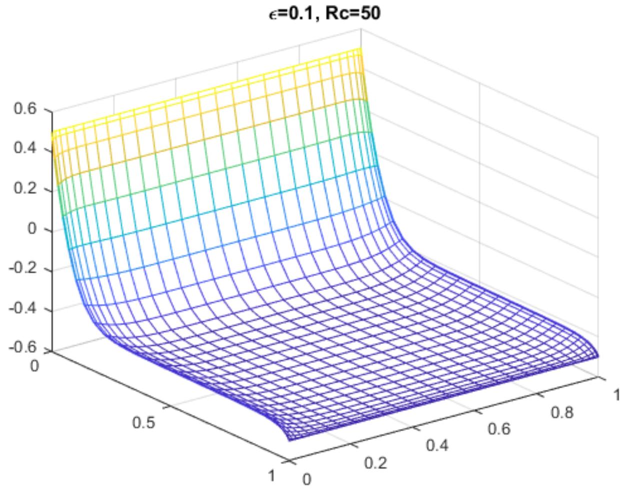
```
    vaux2=vaux1.*vaux1;
    vaux3=vaux2.*vaux1;
    auxv=4*AuxThetae3/theta0+6*AuxThetae2.*vaux1/theta02/Ra+4*vaux2.*AuxThetae/Ra^2/theta03+vaux3/Ra^3/theta04;
     for kw=1:NwallH
         Ikw=IwH(kw);
         BT(Ikw,:)=Dz(Ikw,:)+BTauxBC(kw,:).*auxv(1,:);
         FBCT(Ikw,1)=1;
     end
    Asyst=[APSI AT; BPSI BT];
       bNLPsi(1:Nt,1)=(-(Dz*Psi).*(DxDL*Psi)+(Dx*Psi).*(DzDL*Psi))*dt-Pr*Ra/DeltaTb*dt*DxThetae;
       bNLT(1:Nt,1)=(-(Dz*Psi).*(Dx*T)+(Dx*Psi).*(Dz*T))*dt;
       bLinPsi(1:Nt,1)=AbPsi*[Psi ; T];
       bLinT(1:Nt,1)=AbT*[Psi ; T];
       bsyst(1:(2*Nt),1)=[FBC_PSI.*(bNLPsi+bLinPsi); FBC_T.*(bNLT+bLinT)];
       bn=Asyst\bsyst; Psi=bn(1:Nt,1);  T=bn((Nt+1):(2*Nt),1);
       for j=1:Nz,
         Psimat(1:Nx,j)=Psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); Tmat(1:Nx,j)=T(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
         Tphysmat(1:Nx,j)=-1/2+Thetaemat(1:Nx,j)/DeltaTb+Tmat(1:Nx,j)/Ra;
       end
        subplot (2,2,1)
        contour (X, Z, Psimat')
        subplot (2,2,2)
        contour (X, Z, Tphysmat')
        Tmat_c(nt)=Tmat(ceil(Nx/2),ceil(Nz/2));
        Tmat_max=max(abs(Tmat_c(1:nt)));
        subplot (2,2,3)
        plot((1:nt)*dt,Tmat_c(1:nt)/Tmat_max)
        axis([0 Nt*dt -2 2])
        subplot (2,2,4)
        plot (Tphysmat(ceil(Nx/2),:),zch,'r')
        axis([-2 2 0 1])
        pause(0.01)
        hold off
  end
```

### 5.2.2. Temperatura de equilibrio

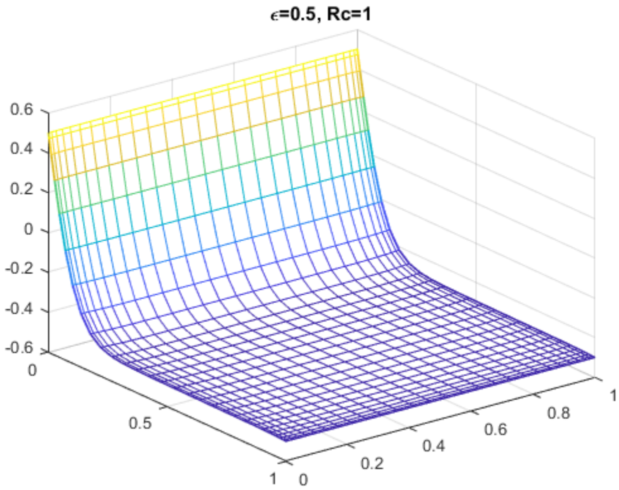
A continuación se presenta la temperatura de equilibrio, ya calculada con el programa anterior, para varios valores de los parámetros Rc y $\epsilon$, a fin de estudiar su influencia:



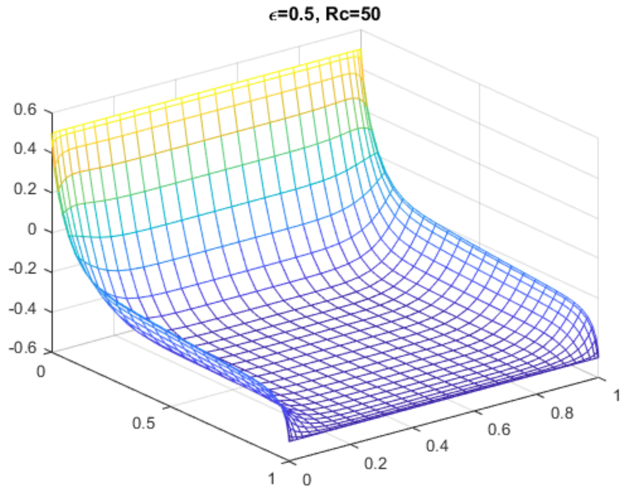

(a) Rc=1, $\epsilon = 0.1$



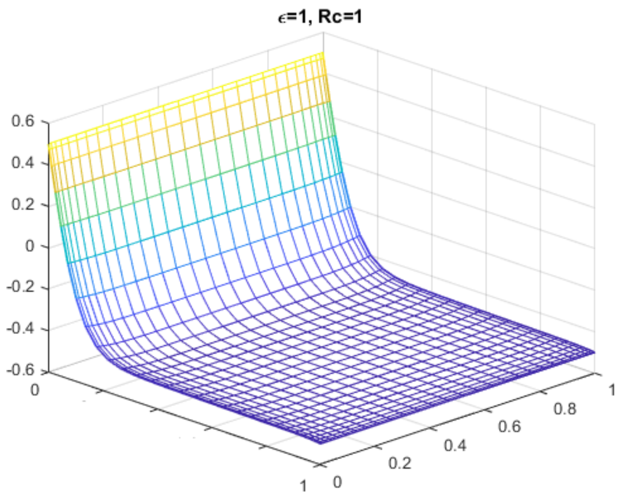

(b) Rc=50, $\epsilon = 0.1$



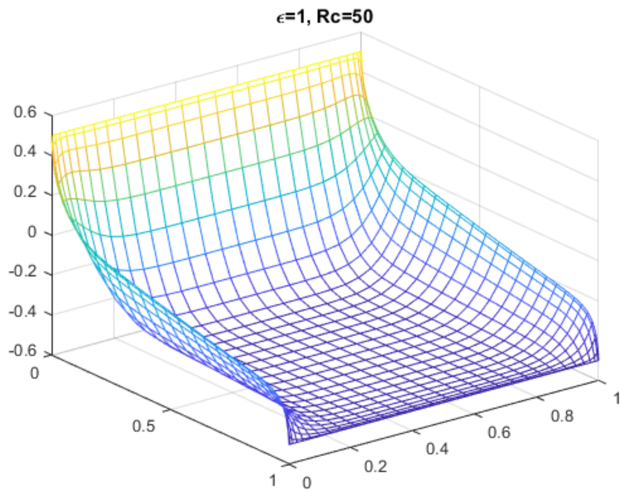

(c) Rc=1, $\epsilon = 0.5$




(d) Rc=50, $\epsilon = 0.5$




(e) Rc=1, $\epsilon = 1$




(f) Rc=50, $\epsilon = 1$

Figura 5.6: Temperatura de equilibrio para varios valores de los parámetros de radiación convección Rc y emisividad $\epsilon$.

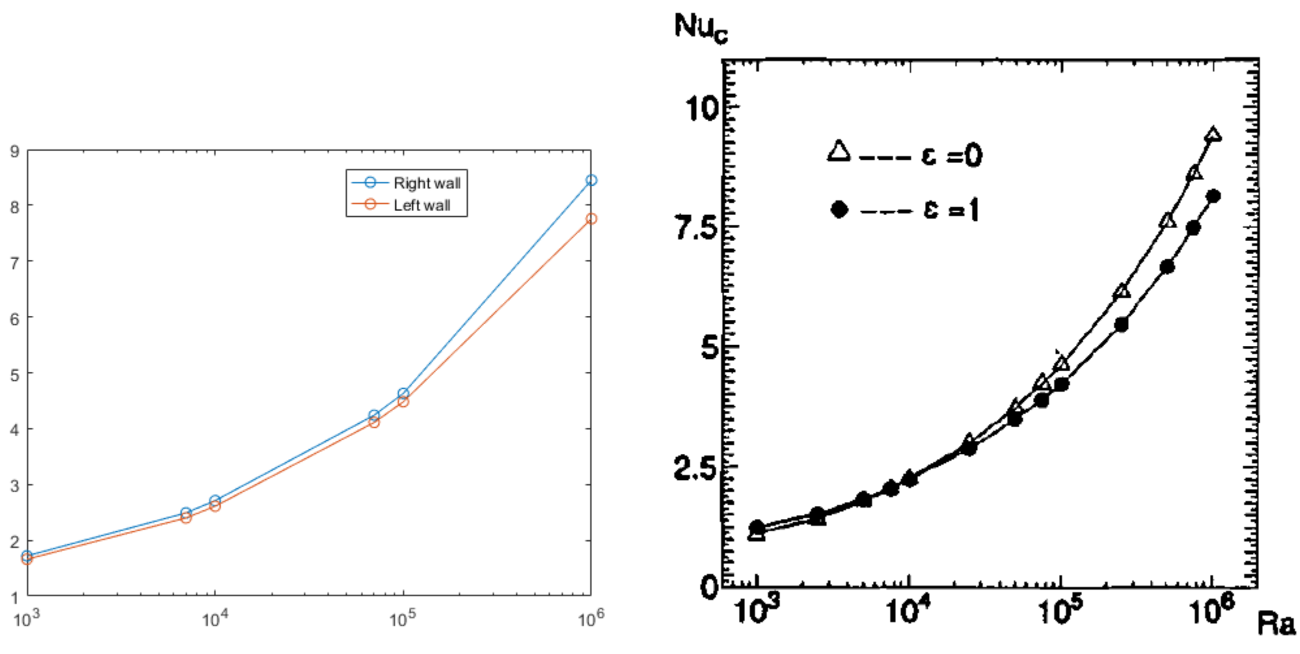
Se puede deducir de la figura 5.6 que ambos parámetros tienen un efecto en concordancia: si la emisividad de las paredes es elevada, pero el parámetro de radiación convección es bajo o viceversa, la temperatura de equilibrio es prácticamente equivalente a la que se tiene si no se tiene en cuenta la radiación; esto es, existe un fuerte gradiente de temperaturas (que decrece) en la dirección paralela a la de las paredes aisladas en la zona cercana a la pared caliente, y dichas paredes tienen una temperatura muy inferior a la pared caliente (muy cercana a la temperatura de la pared fría). Sin embargo, cuando la emisividad de las paredes aumenta hasta un valor medio ($\epsilon = 0.5$ en la figura), para valores considerables del parámetro Rc la temperatura de las paredes aisladas aumenta considerablemente al facilitarse el intercambio de calor por radiación.

Además de todo lo anterior, obsérvese que ahora la evolución de temperaturas no es ni mucho menos lineal, debido precisamente a que no se ha hecho uso de la linealización del campo de temperaturas. Por último, cabe destacar que la temperatura de equilibrio es exactamente igual independientemente de que la temperatura esté impuesta en las paredes verticales u horizontales, pues se calcula sin tener en cuenta la hidrodinámica.

### 5.2.3. Resultados corregidos para emisividades elevadas

Debido a que en el apartado de resultados se observó que para emisividades tales que $\epsilon \approx 0.7$ y superiores los resultados obtenidos al linealizar el campo de temperaturas no eran válidos, en esta sección se exponen las correcciones de dichos resultados.

Para empezar, se ha recalculado el **número de Nusselt** para los números de Rayleigh de la figura 5.3 con emisividad de valor unidad, habiéndose obtenido la gráfica completa que obtiene [24], solo que añadiendo también el número de Nusselt en la pared caliente:




(a) En azul la pared fría. En rojo, la caliente

(b)

Figura 5.7: Comparativa del número de Nusselt medido en ambas paredes verticales con la gráfica obtenido por Akiyama, para $\epsilon = 1$.

Por otro lado, se han obtenido los **isocontornos del campo de temperaturas** que era erróneo (como así se explica al final del apartado 5.1.2) en la figura 5.4, para los mismos parámetros que la imagen (c) de dicha figura. Así, en la nueva figura (5.8),, no se observan ya zonas con una temperatura incorrecta en las esquinas de la cavidad.

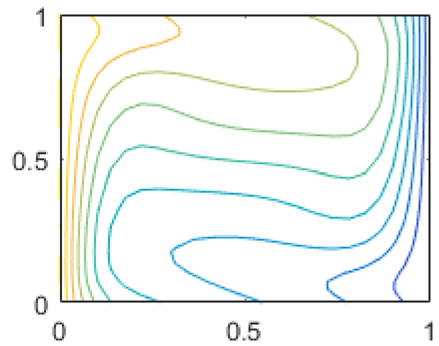
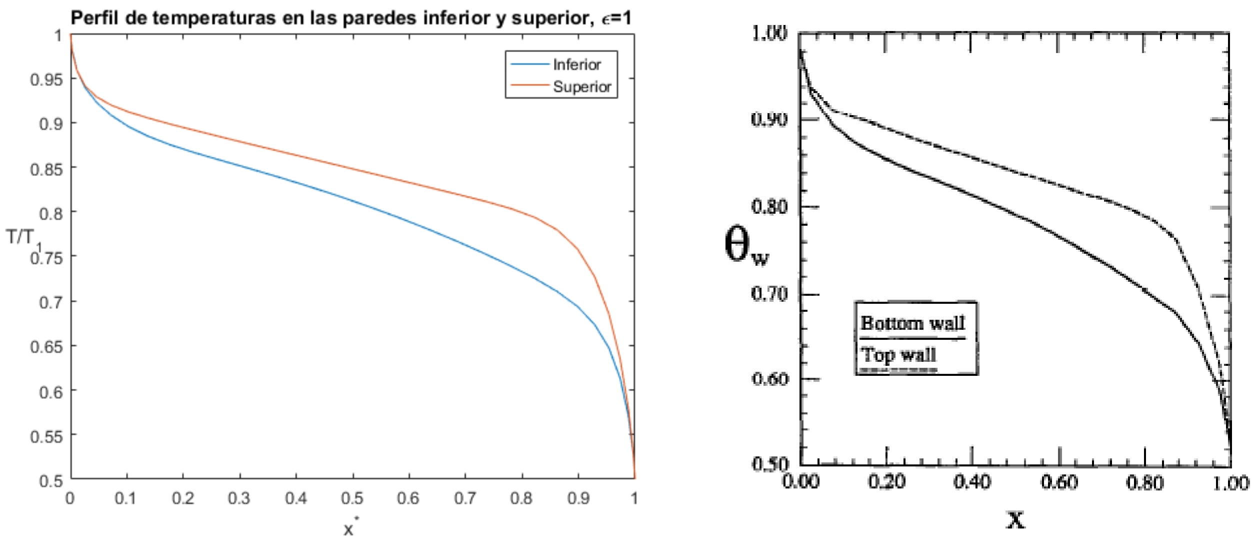



Figura 5.8: Isocontornos del campo de temperaturas para una emisividad $\epsilon = 1$ y $Ra = 10^5$ como corrección de la figura 5.4. Nótese que en esta figura sí que se observa que la mayor temperatura de la cavidad se alcanza en la pared de la izquierda y la menor en la pared de la derecha.

Finalmente, también se han corregido los perfiles de temperatura en las paredes aisladas, para un valor de emisividad $\epsilon = 1$ y $Ra = 7 \cdot 10^4$, al igual que la figura 5.5 (f).




(a)

(b)

Figura 5.9: Corrección de la evolución de la temperatura a lo largo de las paredes aisladas y comparativa con la obtenido por [24] para el mismo caso. La línea roja de la gráfica (a) corresponde con la línea a trazos de la figura (b) y la azul, con la continúa.

Esta última figura muestra la corrección de la figura 5.5 (f) y su comparativa con la obtenida por Akiyama para los mismos valores de los parámetros Ra y $\epsilon$. Téngase en cuenta que la variable que aquí se representa como temperatura es $\dfrac{T}{T_1} = \dfrac{1}{\theta_0 + 1/2}\left(theta_E + \dfrac{T^*}{Ra} + \theta_0\right)$, no la que venía siendo habitual.

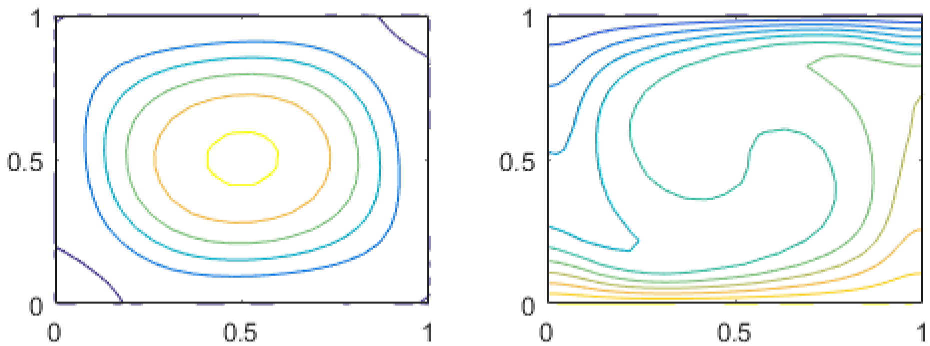
Tras haber obtenidos los resultados corregidos expuestos en este apartado, se resuelve a continuación el caso en el que las paredes horizontales son las que tienen condición de temperatura impuesta, directamente con el código nuevo pero adaptado para este caso.

## 5.3. Paredes con absorción de radiación no nula. Resolución numérica del problema para una cavidad rectangular con paredes verticales adiabáticas

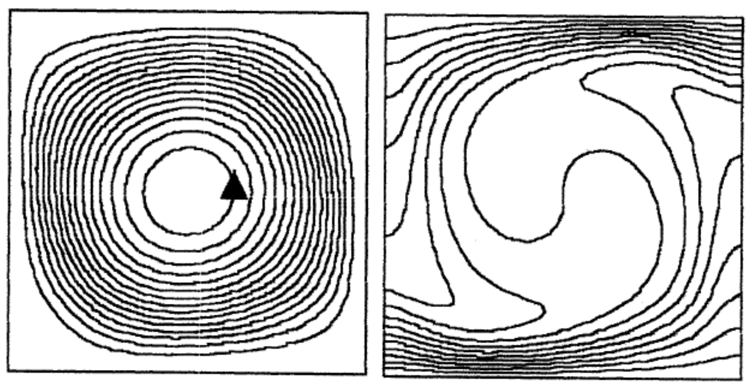
En esta sección se ha resuelto el problema descrito en el título, esto es, la convección natural acoplada con intercambio de radiación entre las paredes, estando la pared inferior a una temperatura mayor y se han obtenido resultados en primer lugar que se pueden comparar con la referencia [23]. De este modo, se han obtenido los isocontornos del campo de temperaturas y el máximo valor de la función de corriente $\Psi^*$.

### 5.3.1. Isocontornos del campo de temperaturas y de la función de corriente

En primer lugar se han obtenido los isocontornos del campo de temperatura y de la función para $\epsilon = 0$ y $Ra = 10^5$ para comparar las gráficas con las de la bibliografía.



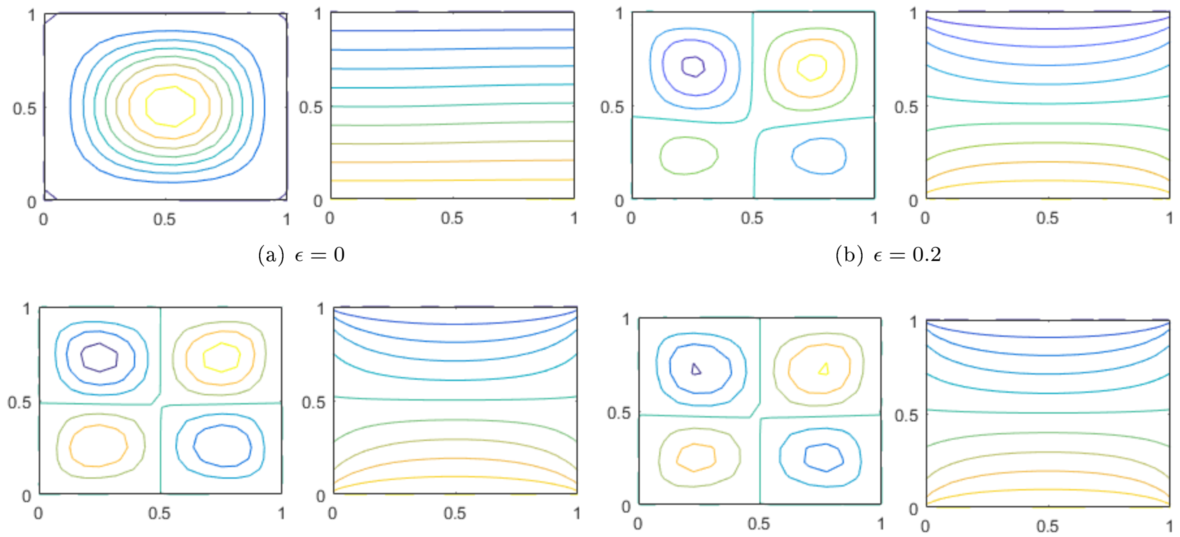

(a)



(b)

Figura 5.10: Gráfica de los isocontornos de función de corriente, a la izquierda, y del campo de temperaturas a la derecha. La imagen superior ha sido obtenida con el programa desarrollado mientras que la imagen inferior ha sido obtenida de [23]. La similitud de ambas imágenes es total.

A partir de aquí, se han obtenido los resultados estacionarios para el número de Rayleigh $Ra = 2586$, que es el valor crítico para el caso de convección natural (recuérdese que aquí debido al par baroclínico no se define este valor), para varios valores de la emisividad $\epsilon$:



(a) $\epsilon = 0$

(b) $\epsilon = 0.2$

(c) $\epsilon = 0.5$

(d) $\epsilon = 1$

Figura 5.11: Isocontornos de la función de corriente (izquierda) y del campo de temperaturas (derecha).

Se observa que a medida que aumenta la emisividad, se generan de forma visible, desde un solo rollo convectivo (el valor de Rayleigh es crítico como se puede observar en el campo de temperaturas ligeramente deformado) hasta cuatro rollos convectivos.

### 5.3.2. Número de Nusselt en función de Rayleigh

Se presentan a continuación una gráfica sobre el número de Nusselt medio $Nu$ en las paredes horizontales (fría y caliente) en función de la coordenada del número de Rayleigh para dos valores de la emisividad $\epsilon = 0$ y $\epsilon = 1$, al igual que se hizo en la figura 5.7.

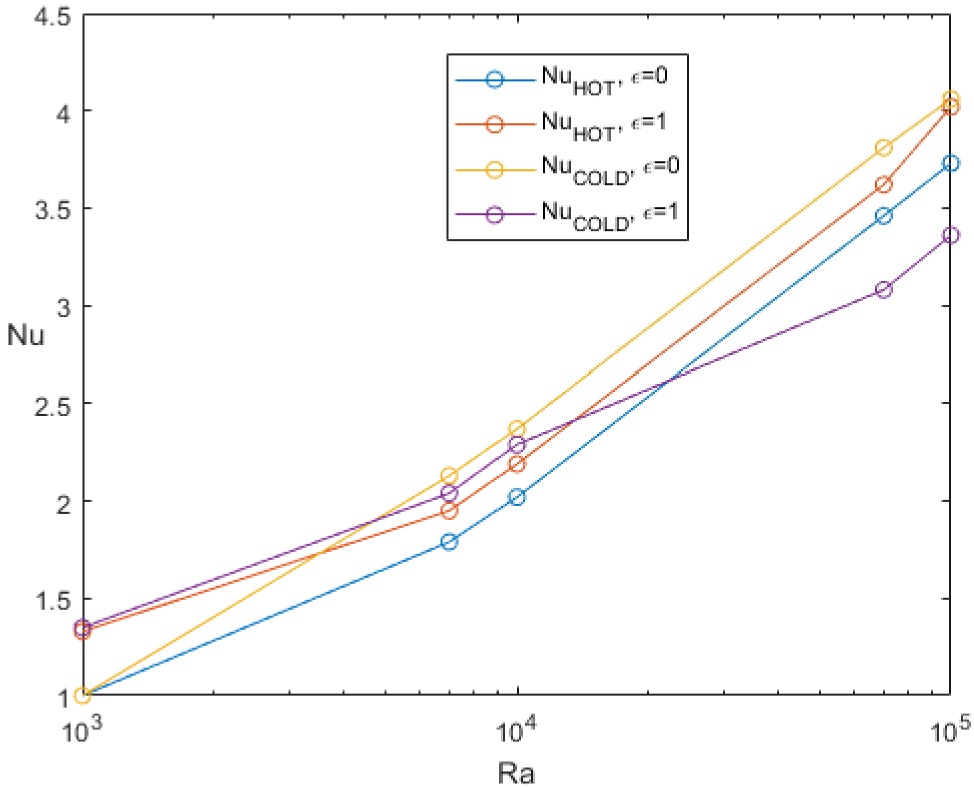



Figura 5.12: Nusselt medio medido en la pared fría (gráficas amarilla y morada) y caliente (azul y roja) en función de Rayeligh, para dos valores de la emisividad $\epsilon = 0$ (gráficas azul y amarilla) y $\epsilon = 1$ (gráficas roja y morada).

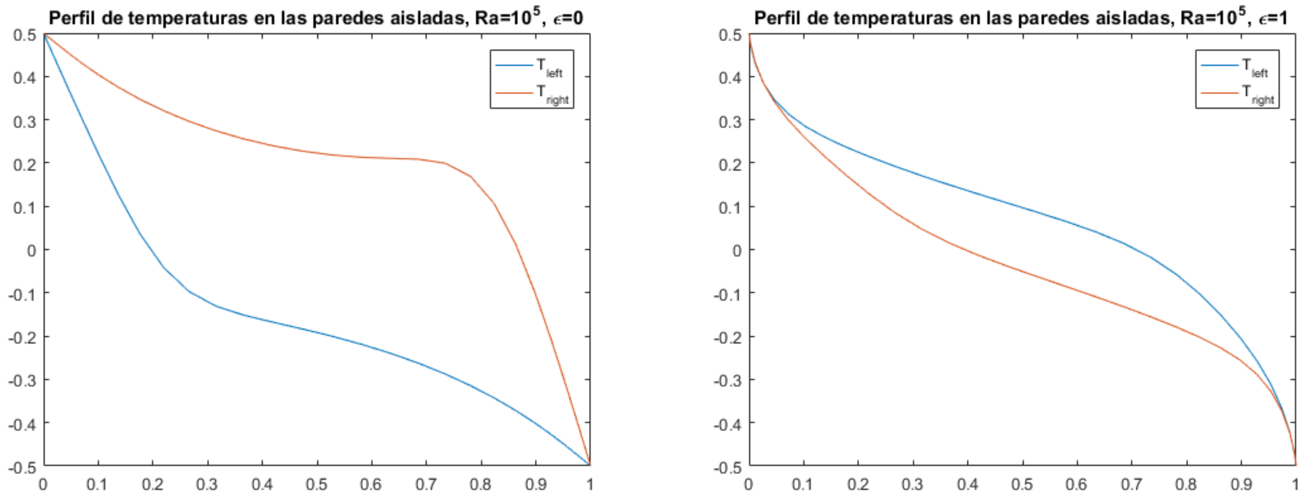
Un efecto reseñable que se puede comentar es en el caso en el que el número de Rayleigh es 1000, si no hay emisividad, es un valor por debajo del crítico, por lo que el calor intercambiado por la pared y el fluido es el mismo que en el caso de hubiese equilibrio (valor de Nusselt igual a la unidad). Sin embargo, como ya se ha repetido, en el caso de que la emisividad no sea nula, no existe equilibrio por muy pequeño que sea el número de Rayleigh. Esto provoca que con el mismo valor de Rayleigh (1000), en el caso en el que $\epsilon = 1$, el calor intercambiado por el fluido en las paredes es mayor que el que se intercambia en equilibrio (valor de Nusselt mayor que la unidad).

### 5.3.3. Perfil de temperaturas en las paredes aisladas

En las siguientes imágenes 5.13 (a) y (b) se ha representado la variable adimensional de temperaturas

$$\frac{T - T_m}{T_1 - T_2} = \theta_E + \frac{T^*}{Ra}.$$

Se observa que gracias a la inclusión de la emisividad de las paredes, la diferencia de temperaturas entre ellas disminuye. Por tanto se debe al movimiento del fluido, que transporta el calor desde la pared derecha hacia la pared izquierda, gracias al sentido horario de la corriente.




(a) $\epsilon = 0$

(b) $\epsilon = 0$

Figura 5.13: Perfil de temperaturas para paredes con emisividad nula y unidad.

# Capítulo 6

# Conclusiones y líneas de desarrollo

En este trabajo se ha estudiado la influencia de la radiación en el movimiento de convección de Rayleigh-Bénard, con aproximación de medio transparente (principalmente) y opaco, lo cual supone un tratamiento simplificado del medio participativo, el gas encerrado en la cavidad. Se han considerado dos paredes adiabáticas, lo cual conlleva la necesidad de modelar las condiciones de contorno, que se han implementado mediante el uso de un parámetro de radiación-convección y considerando la capacidad de emitir radiación por parte de las paredes, incluso se puede asignar una emisividad diferente a cada uno de los paneles de las paredes (estudio que aquí no se ha hecho, tomando todos los paneles del contorno con una misma emisividad) y dos paredes con temperatura impuesta.

La motivación principal de este trabajo, cuyos resultados han hecho hincapié en el problema (el capítulo 5 es sin duda el capítulo más importante del tema) en el que un medio no es participativo pero las paredes de la cavidad que lo encierran sí que intercambian calor por radiación, se debe a su aplicación a hornos industriales donde el medio (aire) al estar compuesto principalmente por moléculas no polares se puede considerar no participativo, mientras que sus paredes sí que intercambian calor. De hecho, una tesis doctoral reciente (2007) [26] está centrada en el modelado de la radiación en hornos y cámaras de combustión. Asimismo, en acondicionamiento de habitaciones de edificios también se encuentra una situación similar (ver la cita [4], donde se estudia este tema). De hecho, para estudiar un caso de este estilo, como futura mejora, se podría dividir la cavidad estudiada en varios compartimentos simulando salas. Por otro lado, el otro problema estudiado, el caso de medio participativo, se puede dar por ejemplo en el aire, que se puede considerar un medio participativo siempre y cuando las distancias que ha de recorrer en él son muy grandes, como es el caso de la atmósfera.

En cuanto al método de resolución del problema se ha utilizado el método de colocación con polinomios de Lagrange usando nodos de Chebyshev, lo cual facilita la convergencia de los resultados al aumentar el número de nodos. De esta forma, con códigos que podrían desarrollar alumnos que tengan conocimientos de MATLAB se demuestra que es posible calcular resultados que hace tan solo unas décadas no había posibilidad de obtener, salvo con cálculos engorrosos y usando demasiadas simplificaciones si se quería llegar a alguna solución de un problema tan complejo. Gracias a esos códigos del capítulo 4, se han reproducido en primer lugar y con alta precisión los resultados de Goody de estabilidad lineal, calculándose los números de Rayleigh críticos y posibilitándose también el estudio de estabilidad no lineal con los códigos implementados. Además, se ha estudiado cómo afecta el parámetro de radiación $\lambda$ al número de Nusselt definido en la pared caliente y también cómo varía este para un valor nulo de dicho parámetro (medio totalmente transparente) pero con paredes que pueden intercambiar calor por radiación entre sí, es decir, para valores no nulos del parámetro de radiación-convección y de la emisividad de las paredes. Es importante notar también que, a diferencia de las citas aportadas como bibliografía que se centran en los resultados del régimen estacionario, con estos códigos se puede estudiar la evolución temporal de la variable en la que se tenga interés.

Como posibles líneas de ampliación de este proyecto se tiene un gran abanico de posibilidades. Quizás la extensión más evidente es la reproducción del mismo problema pero de manera tridimensional, pero hay otras muchas que se podrían aplicar. Por ejemplo, se puede ampliar el estudio para medios que no se puedan aproximar ni como transparentes ni como opacos. A su vez, hay casos que debido a las aproximaciones realizadas sobre las temperaturas en las paredes, cuya diferencia es pequeña, es una hipótesis que no puede aplicarse en todos los problemas: por ejemplo, en atmósfera de estrellas, el gas se puede considerar como un medio opaco, pero la diferencias de temperaturas es muy destacable, por lo que habría que usar otro tipo de hipótesis menos simplificativas para estudiarlo. También sería posible ahondar más en algunos de los problemas resueltos y modificar las condiciones de contorno de pared rígida o libre en ellos o estudiar cavidades con distintas relaciones de aspectos aprovechando los mismos códigos que aquí se han desarrollado. Téngase en cuenta que el objetivo no era el de aportar un sinfín de resultados sin explicar, si no solo estudiar algunos parámetros de interés como el número de Nusselt o los campos de temperatura y velocidad o función de corriente, como se ha hecho. Otra propuesta sería la posibilidad de extender el estudio de los problema para valores muy altos del número de Rayleigh, de tal modo que se alcance un régimen turbulento (se necesitaría también desarrollar un modelo tridimensional) ya que en los resultados obtenidos para $Ra \geq 10^6$ se pierde precisión, como se vio en el capítulo 5. Para finalizar, también se podría implementar la división de la cavidad en varios compartimentos para estudiar la transferencia de calor entre las paredes de un edificio, como se ha descrito en párrafos previos.

# Bibliografía


[1] *El Método de Colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard*, **autor:** Pablo José Ruiz Contreras, **tutor:** Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, 2013.

[2] *Combined radiation and natural convection in a two-dimensional participating square medium*, **ZHIQIANG TAN and JOHN R. HOWELL**, 1990.

[3] *RADIATION HEAT TRANSFER: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS: ANALYSIS OF RADIATION-NATURAL CONVECTION INTERACTIONS IN 1-G AND LOW-G ENVIRONMENTS USING THE DISCRETE EXCHANGE FACTOR METHOD*, 1990

[4] *Heat conduction in two and three dimensions : computer modelling of building physics applications Byggnadsfysik LTH, Lunds Tekniska Högskola*, **Blomberg Thomas**, 1996

[5] *Investigation of heat loss from a solar cavity receiver*, **E. Abbasi-Shavazi & G.O. Hughes & J.D. Pye**, 2014

[6] *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, **autor:** Antonio Barrero Ripoll & Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

[7] *Procesos de convección natural con hipótesis anelástica*, **autor:** Eduardo M. García Juárez ,**tutor:** Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, 2014

[8] *The influence of radiative transfer on cellular convection*, **autor:** R. M. Goody, 1956.

[9] *Convection Heat Transfer, $4^{th}$ Edition*, cap. 1, **Adrian Bejan**, 2014.

[10] *Heat Transfer*, cap. 4-5, **Gregory Nellis & Sanford Klein**, 2008.

[11] *Atmospheric Convection*, **Kerry A. Emanuel**, 1994.

[12] https://www.nasa.gov/

[13] , https://www.thermalfluidscentral.org/encyclopedia/index.php/Properties_of_participating_media, **references:** Faghri, A., Zhang, Y., and Howell, J. R., 2010, Advanced Heat and Mass Transfer, Global Digital Press, Columbia, MO.

[14] https://imagine.gsfc.nasa.gov/science/objects/sun1.html

[15] , V. *Basic Methods in Transfer Problems.* Oxford University Press, 1952. **Kourganoff**

[16] *On maintained convective motion in a fluid heated from below*, **Anne Pellew & R. V. Southwell**, 1940

[17] *Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, vol. II, **John Wiley & Sons**, 1969 by Xerox Corporation.

[18] *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*, **autor:**Antonio Carrillo Ledesma y Omar Mendoza Bernal, Facultad de Ciencias UNAM, 2015.

[19] http://mathworld.wolfram.com/KroneckerProduct.html

[20] *Numerical Methods Using MATLAB, fourth edition*, cap. 4, **John H. Mathews & Kurtis D. Fink**

[21] *Heat and Mass Transfer: A Practical Approach*, **Yunus A. Cengel** 3rd edition, 2006.

[22] *Thermal Radiation Heat Transfer*, $5^{\text{th}}$ *Edition*, cap. 5, **John R. Howell, Robert Siegel & M.Pinar Mengüç**, 2010.

[23] **E. H. Ridouane , M. Hasnaoui , A. Amahmid & A. Raji** (2004) INTERACTION BETWEEN NATURAL CONVECTION AND RADIATION IN A SQUARE CAVITY HEATED FROM BELOW, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 45:3, 289-311, DOI: 10.1080/10407780490250373

[24] **M. Akiyama & Q. P. Chong** (1997) NUMERICAL ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION WITH SURFACE RADIATION IN A SQUARE ENCLOSURE, Numerical Heat Transfer, Part A Applications, 32:4, 419-433, DOI: 10.1080/10407789708913899

[25] http://www.aerospaceweb.org/design/scripts/atmosphere/

[26] http://lup.lub.lu.se/record/548795