

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS



Máster Universitario en Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Lineabilidad y Curvas de Peano

Trabajo Fin de Master

presentado por

Francisco Jácome Maura

Dirigido por:

María del Carmen Calderón Moreno,

José Antonio Prado Bassas.

Sevilla, Noviembre de 2018

Índice general

Abstract	5
Resumen	7
Introducción	9
1. Conceptos Previos	13
1.1. Números Cardinales	13
1.2. Tamaño Topológico	15
1.3. Lineabilidad, espaciabilidad y algebrabilidad	17
2. Curvas y Espacios de Peano	19
2.1. Curvas de Peano	19
2.2. Espacios de Peano	23
3. Curvas de Peano en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, Y)$	25
3.1. Lineabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$	25
3.2. Algebrabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$	32
3.3. Espacios σ -Peano	39
3.4. Curvas de Peano en espacios de sucesiones	44
3.5. Curvas de Peano en espacios de funciones	48

4. Curvas de Peano en $\mathcal{C}(I, Y)$	51
4.1. Propiedades topológico-algebraicas de \mathcal{P}	51
4.1.1. Topología de \mathcal{P} y \mathcal{P}_Y	52
4.1.2. Semigrupabilidad de \mathcal{P}	55
4.2. Curvas que rellenan espacio	56
4.2.1. Propiedades de \mathcal{SF}	58
4.2.2. Denso-lineabilidad maximal de \mathcal{TSF}	66
Bibliografía	71

Abstract

Peano curves can be generalized and understood: either as continuous and surjective applications between two spaces X and Y , or as curves whose image has an area. Each of these two interpretations defines a different class of sets. In this Master Thesis, results on the lineability and algebrability of both types of sets are compiled, allowing to obtain a notion of their algebraic size as subsets of the continuous functions.

Resumen

Las curvas de Peano pueden generalizarse y entenderse: o bien como aplicaciones continuas y sobreyectivas entre dos espacios X e Y , o bien como curvas cuya imagen tiene área. Cada una de estas dos interpretaciones define una clase de conjuntos diferente. En este Trabajo Fin de Máster se recopilan resultados sobre la lineabilidad y algebrabilidad de ambos tipos de conjuntos, permitiendo obtener una noción del tamaño algebraico de los mismos como subconjuntos de las funciones continuas.

Introducción

Desde su definición a principios del siglo XX, las categorías de Baire han permitido, en el ámbito del Análisis Matemático, dar una noción del tamaño topológico de un subconjunto de un espacio métrico completo en función de la categoría que sea. Esta herramienta ha permitido demostrar, por ejemplo, que el conjunto formado por las funciones reales de variable real continuas en todo punto pero no derivables en ninguno, también llamadas Monstruos de Weierstrass, es residual y por tanto “grande”.

Mucho después del desarrollo de las construcciones anteriores aparece una manera distinta de medir cómo de grande es un conjunto en un espacio, esta vez desde un punto de vista algebraico. La idea es ver si el conjunto en cuestión, en unión con el 0, contiene un subespacio vectorial o incluso un álgebra. Si su dimensión es pequeña, el conjunto puede interpretarse como pequeño. Sin embargo, si su dimensión es la máxima posible, la del espacio ambiente, el conjunto debe ser grande. Además puede verse si el subespacio contenido en el conjunto es cerrado o incluso denso.

La semilla de estos conceptos nace en el año 1966, en concreto en el artículo *Subspaces and bases in spaces of continuous functions* [13] del matemático Vladimir I. Gurariy. En el mismo, demostró que el conjunto de los Monstruos de Weierstrass es lineable, es decir, contiene un espacio vectorial de dimensión infinita. El resultado es cuanto menos sorprendente: encontrar una sola de estas funciones es complicado de por sí; obtener un conjunto con infinitas de ellas manteniendo estructura de espacio vectorial es un salto cualitativo, que por otro lado concuerda con la visión que aportaban las categorías de Baire.



Figura 1: Vladimir I. Gurariy.

Ya entrado el siglo XXI, y tras obtenerse otros resultados relacionados, se dan las definiciones de lineabilidad y algebrabilidad tal y como las veremos en el texto. En concreto, aparecen los conceptos de espaciabilidad, denso-lineabilidad, lineabilidad maximal, algebrabilidad fuerte, etc. Con ellos, surgen muchos y muy variados artículos sobre la lineabilidad de conjuntos de lo más diversos. Un compendio de ellos puede encontrarse en [3].

El objetivo de este trabajo es recopilar algunos de los resultados que se conocen sobre la lineabilidad y algebrabilidad de conjuntos basados en las Curvas de Peano: curvas que parten de $[0, 1]$ y rellenan el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Estas curvas son también objetos matemáticos complicados de construir, pero sin embargo veremos que su tamaño algebraico es a menudo bastante “grande” y que por tanto hay muchas de ellas, como pasaba con los Monstruos de Weierstrass.

Una introducción histórica a las Curvas y Espacios de Peano con los ejemplos necesarios puede encontrarse en el Capítulo 2. Previamente, en el Capítulo 1, se reúnen todos los conceptos indispensables para el grueso del trabajo. En los siguientes capítulos, el concepto de curvas de Peano se generaliza.

En el Capítulo 3 se parte de que las curvas de Peano son aplicaciones continuas y sobreyectivas de $[0, 1]$ en $[0, 1]^2$, y se generaliza el concepto de estas curvas entendiéndolas como aplicaciones continuas y sobreyectivas entre dos espacios.

- En la Sección 3.1 se extiende primero el conjunto de salida de $[0, 1]$ a \mathbb{R} y el de llegada de $[0, 1]^2$ a \mathbb{R}^2 , y después a dimensiones m y n superiores. Al conjunto de estas aplicaciones se las denota como $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y se obtiene que es no vacío, maximal lineable, denso-lineable y espaciabile en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Se utilizan [8] y [3] como referencias.
- En la Sección 3.2, el espacio de llegada se extiende a \mathbb{C}^n , lo que permite que tenga sentido estudiar la algebrabilidad del conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$. A partir de esta sección y durante el resto del capítulo se usará [2].
- En la Sección 3.3 se generaliza el concepto de espacio de Peano, introducido en la Sección 2.2, al de espacio σ -Peano, del cual que se dan varios ejemplos. El resultado más importante de la sección es el Teorema 3.3.6, que nos asegura que si X es un espacio σ -Peano, entonces $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, X)$ es maximal lineable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, X)$.

- En la Sección 3.4 se sigue el camino de las dos primeras, pero teniendo el espacio de llegada dimensión infinita: trabajaremos con aplicaciones continuas y sobreyectivas que a un punto de \mathbb{R}^m le asocian una sucesión de números reales o de números complejos, es decir, un elemento de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Obtenemos que $c_{00}(\mathbb{R})$ es maximal lineable y $c_{00}(\mathbb{C})$ fuertemente maximal algebraable. También se estudia lo que ocurre con ℓ_{∞} .
- Por último, en la Sección 3.5 se extienden los resultados de la sección anterior, tomando como espacios de salida y de llegada espacios de funciones.

En el Capítulo 4, que es el que cierra este Trabajo Fin de Master, se utiliza [4] como referencia.

En la sección 4.1, se estudian las propiedades topológicas del conjunto de las curvas de Peano \mathcal{P} y también de $\mathcal{CS}([0, 1], Y)$, donde Y es un espacio de Peano. En particular, se obtiene que son conjuntos topológicamente “pequeños” por ser de primera categoría. Además, se muestra que aunque el conjunto \mathcal{P} no es lineable, sí es semigrupable.

En la Sección 4.2, el concepto de curva de Peano se extiende de una manera diferente. Se mantiene el espacio de salida como $[0, 1]$ y el de llegada como \mathbb{R}^2 , pero ahora no se buscan aplicaciones continuas y necesariamente sobreyectivas, sino aplicaciones continuas (curvas) cuya imagen tenga área. Que un conjunto tenga área puede entenderse de varias formas distintas: que tenga medida de Jordan positiva, que tenga interior no vacío, o bien que tenga medida de Lebesgue positiva. Al comienzo de la sección se estudian en detalle y se explica la relación que hay entre ellas. Posteriormente:

- En la Subsección 4.2.1, se estudian las propiedades topológicas del conjunto \mathcal{SF} de las curvas cuya imagen tiene medida de Jordan positiva. En particular, se obtiene que es denso en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Seguidamente, se demuestra que es espaciabile, maximal lineable y fuertemente algebraable en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.
- Para terminar, en la Subsección 4.2.2 se demuestra que el conjunto de las curvas cuya imagen tiene interior no vacío es maximal denso-lineable y en consecuencia el conjunto de las curvas cuya imagen tiene medida de Lebesgue positiva también lo es.

Por último, hay que señalar que este texto corresponde a un Trabajo de Fin de Máster de 9 créditos, y que el alumno ha obtenido otros 9 créditos realizando prácticas de empresa (no relacionadas con este trabajo) durante el Máster, tal y como queda recogido en la normativa de la Universidad.

Capítulo 1

Conceptos Previos

1.1. Números Cardinales

La noción de números cardinales resultará importante para entender algunos conceptos posteriores del texto. En cierto modo, los números cardinales son una extensión de los números naturales, en el sentido de que se usan para “contar” cuántos elementos tiene un conjunto.

Definición 1.1.1. Sean A y B dos conjuntos. Se denota:

- $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ si hay una aplicación inyectiva de A a B .
- $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ si hay una aplicación sobreyectiva de A a B .
- $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ si hay una aplicación biyectiva de A a B .
- $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ si $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ y no hay ninguna biyección de A a B .
- $\text{card}(A) > \text{card}(B)$ si $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ y no hay ninguna biyección de A a B .

Evidentemente, si $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ y $\text{card}(B) \leq \text{card}(C)$ entonces $\text{card}(A) \leq \text{card}(C)$. Se tiene además el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. Se verifica $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ si y solo si $\text{card}(B) \geq \text{card}(A)$.

Demostración. Si $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$, sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación inyectiva y $a_0 \in A$. Puede definirse entonces la aplicación $g : B \rightarrow A$ dada por $g(b) = f^{-1}(b)$ si

$b \in f(A)$ y $g(b) = a_0$ en caso contrario. Como f es inyectiva, la aplicación g está bien definida y es sobreyectiva, luego $\text{card}(B) \geq \text{card}(A)$.

Recíprocamente, supongamos que $\text{card}(B) \geq \text{card}(A)$. Sea $g : B \rightarrow A$ sobreyectiva. Definimos la aplicación $f : A \rightarrow B$ que a cada elemento $a \in A$ le asigna un elemento $b \in g^{-1}(a)$, es decir, $f(a) = b$. Es claro que f es inyectiva y $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$. \square

De ahora en adelante, dado un conjunto A , a $\text{card}(A)$ lo llamaremos número cardinal de A o simplemente cardinal de A . El cardinal $\text{card}(A)$ se dice:

- Finito si A es finito. Si no, se dirá cardinal infinito.
- Numerable si es finito o $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N})$.

Intuitivamente, el cardinal de un conjunto A no es más que su número de elementos, y la aritmética habitual se mantiene con ellos. Además, $\text{card}(A^B) = \text{card}(A)^{\text{card}(B)}$. Si hay una biyección de A a $\{1, \dots, n\}$, escribimos $\text{card}(A) = n$. Al cardinal de los números naturales lo denotaremos $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, que se lee *aleph cero*. Es bien conocido que \mathbb{Z} y \mathbb{Q} tienen este cardinal, y también se cumple que si μ es un número cardinal infinito, $\aleph_0 \mu = \mu$.

Al cardinal de los números reales se le denomina *el continuo* y se le denota $\text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Se tiene que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ y que $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Asimismo, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Pueden encontrarse pruebas de los resultados mencionados en [3].

Los resultados anteriores aseguran que el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de las funciones reales de variable real tiene cardinal $2^{\mathfrak{c}}$:

$$\text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = \text{card}(\mathbb{R})^{\text{card}(\mathbb{R})} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Por otro lado, el conjunto de las funciones reales continuas, $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tiene cardinal \mathfrak{c} . En efecto, tiene cardinal al menos \mathfrak{c} porque a cada número real le corresponde una función constante; y tiene como mucho cardinal \mathfrak{c} porque como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , toda función continua queda unívocamente determinada por la sucesión formada por las imágenes de los elementos racionales, lo que define una inyección de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, por lo que $\text{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \leq \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. De forma análoga se obtiene que $\text{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) = \mathfrak{c}$.

1.2. Tamaño Topológico

Denotaremos por A° al interior de A y por \overline{A} a la clausura de A .

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ se dice:*

- **raro o denso en ninguna parte** si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, o equivalentemente, si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X . En efecto, $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ si y solo si para todo $B \subset X$ abierto, $B \not\subset \overline{A}$; que equivale a decir que para todo $B \subset X$ abierto, $B \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$; lo cual se tiene si y solo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X .
- **magro o de primera categoría** si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.
- **de segunda categoría** si no es de primera categoría
- **residual** si $X \setminus A$ es de primera categoría.

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, tenemos que \mathbb{N} es denso en ninguna parte, \mathbb{Q} es de primera categoría (y denso), el intervalo $(0, 1)$ es de segunda categoría pero no residual, y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es residual y de segunda categoría (además de denso).

Recordemos ahora algunos resultados de topología ampliamente conocidos, y de los que puede encontrarse una prueba en [3].

Teorema 1.2.2. (Teorema de Baire) *Si X es un espacio métrico completo, la intersección numerable de abiertos densos es densa en X .*

Cualquier espacio topológico cumpliendo la tesis del teorema se dice **de Baire**.

Proposición 1.2.3. *Si X es un espacio de Baire, entonces X es de segunda categoría en sí mismo.*

Haciendo uso de estos dos resultados, podemos probar lo siguiente.

Proposición 1.2.4. *Sea X es un espacio de Baire. Si $A \subset X$ es un conjunto residual, entonces A es de segunda categoría y denso.*

Demostración. Por un lado, en un espacio de Baire los conjuntos residuales son siempre de segunda categoría. Efectivamente, sea X un espacio de Baire y $A \subset X$. Si A es un conjunto residual, $X \setminus A$ es de primera categoría, y si suponemos por reducción

al absurdo que A es de primera categoría, entonces $X = A \cup (X \setminus A)$ también es de primera categoría. Sin embargo, esto entra en contradicción con que X sea un espacio de Baire, ya que por la proposición precedente X debe ser de segunda categoría.

Por otro lado, en un espacio de Baire los conjuntos residuales son siempre de segunda categoría: si X es un espacio de Baire y $A \subset X$ es residual, $X \setminus A$ es de primera categoría y existe una sucesión de conjuntos $(R_n)_n$ densos en ninguna parte tales que

$$X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{R_n} \implies A = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus R_n) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{R_n}).$$

Dado que los R_n son densos en ninguna parte, los conjuntos $X \setminus \overline{R_n}$ son densos y abiertos, y por ser X un espacio de Baire, la intersección de todos ellos es densa. Así pues, A contiene un conjunto denso, y por tanto A es denso. \square

Como consecuencia de la proposición anterior, en un espacio de Baire la categoría de un conjunto nos da una idea de su tamaño. Los conjuntos residuales serán “grandes”, ya que son densos en el espacio. Por contraposición, los conjuntos de primera categoría, que son complementarios a los residuales, pueden interpretarse como “pequeños”.

Nótese la importancia de partir de un espacio de Baire. Para que la interpretación tenga sentido, es necesario que los conjuntos no puedan ser grandes y pequeños a la vez. Los espacios de Baire son el contexto necesario para ello, pues en ellos todos los conjuntos residuales son de segunda categoría (además de densos) y por tanto no de primera categoría.

Por último, e independientemente de trabajar o no en un espacio de Baire, los conjuntos de primera categoría también son “pequeños” en el sentido de que son unión numerable (minúscula si la comparamos con una unión no numerable) de conjuntos que topológicamente son tan “pequeños” que el interior de su clausura es vacío.

A lo largo del Capítulo 4 trabajaremos con las nociones anteriores. Damos para terminar una definición relacionada que también será necesaria.

Definición 1.2.5. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) se dice **poroso** si existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y todo ε , existe $y \in B(x, \varepsilon)$ tal que*

$$B(y, \alpha d(x, y)) \cap A = \emptyset.$$

*Si el número α puede tomarse tan próximo a 1 como se desee, entonces se dice que A es **fuertemente poroso**.*

El interés de estos conjuntos viene dado por el siguiente resultado.

Proposición 1.2.6. *Los conjuntos porosos son densos en ninguna parte.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que A no es denso en ninguna parte. Entonces, $\overline{A}^\circ \neq \emptyset$, y por tanto existen $x_0 \in A$, $\varepsilon_0 > 0$ tales que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \overline{A}$.

En consecuencia, dado cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$, la intersección $B(y, \alpha d(x_0, x)) \cap A \neq \emptyset$, porque $B(y, \alpha d(x_0, x)) \cap B(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ para todo $\alpha > 0$ y $B(x_0, \varepsilon_0) \subset A$. Esto significa que A no es poroso, luego llegamos a contradicción. \square

Por la proposición anterior, la porosidad es una propiedad más fuerte que la densidad en ninguna parte, si bien esta última no es exclusiva de los espacios métricos. Así, los conjuntos porosos son siempre de primera categoría y podemos interpretarlos como “pequeños” topológicamente.

1.3. Lineabilidad, espaciabilidad y algebrabilidad

Un **espacio vectorial topológico** (abreviado como e.v.t.) es un espacio vectorial dotado de una topología donde las operaciones propias del espacio son continuas. Podemos hacernos una idea del tamaño de un subconjunto en estos espacios con las nociones de lineabilidad y espaciabilidad.

Definición 1.3.1. *Sea X un e.v.t., M un subconjunto de X y μ un número cardinal.*

- M es μ -**lineable** si $M \cup \{0\}$ contiene un espacio vectorial de dimensión μ .
- M es μ -**espaciable** si $M \cup \{0\}$ contiene un e.v. cerrado de dimensión μ .
- M es μ -**denso-lineable** si $M \cup \{0\}$ contiene un e.v. denso de dimensión μ .

Diremos además que M es **maximal lineable**, **maximal espaciable** o **maximal denso-lineable** si la dimensión del subespacio es igual a la dimensión de X .

Por otro lado, si el subespacio es infinito dimensional, se puede decir simplemente que M es *lineable*, *espaciable*, etc..

Pueden encontrarse algunos ejemplos curiosos de conjuntos finito-lineables en [3, p. 49]: denotando por $\hat{\mathcal{C}}(A, B)$ a las funciones continuas de A a B que alcanzan su

máximo una sola vez, se prueba entre otras cosas que $\hat{\mathcal{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\hat{\mathcal{C}}([a, b], \mathbb{R})$ son 2-lineables y que $\hat{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{R})$ es 1-lineable pero no 2-lineable.

Como decíamos, estos resultados nos aseguran que el conjunto de estas funciones es “pequeño” (en sentido lineal) dentro del espacio total, que tiene dimensión infinita. Sin embargo, en los casos que veremos en los siguientes capítulos encontraremos subespacios de dimensión infinita maximal dentro de los conjuntos a estudiar, por lo que interpretaremos entonces que tales conjuntos serán “grandes”.

Nótese que ya vimos una intuición parecida en la sección anterior trabajando en espacios de Baire. La búsqueda de lineabilidad es sin embargo una herramienta mucho más moderna que las categorías de Baire, aunque la idea perseguida sea la misma: obtener una cierta noción del tamaño de un conjunto dentro de un espacio topológico.

Queda por enunciar otra noción importante, la de algebrabilidad, que no deja de ser similar a la de lineabilidad pero con una operación adicional.

Definición 1.3.2. *Sea un conjunto M contenido en un álgebra \mathcal{A} , y sea un número cardinal μ .*

- M es **algebrable** si $M \cup \{0\}$ contiene un subálgebra \mathcal{C} de \mathcal{A} con un sistema de generadores de cardinal infinito.
- M es **μ -algebrable** si $M \cup \{0\}$ contiene un subálgebra \mathcal{C} de \mathcal{A} con un sistema de generadores de cardinal μ (se dice que es μ -generada).
- M es **fuertemente μ -algebrable** si $M \cup \{0\}$ contiene un subálgebra **libre** \mathcal{C} de \mathcal{A} que sea μ -generada. Si \mathcal{A} es conmutativa, esto equivale a que para cada conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{C}$ y para cada polinomio no nulo P de n variables que no tenga término constante, $P(x_1, \dots, x_n) \in M \setminus \{0\}$.

Diremos además que M es **maximal algebrable**, **maximal μ -algebrable** o **fuertemente maximal μ -algebrable** si la dimensión del subálgebra \mathcal{C} es igual la de \mathcal{A} .

Conviene destacar que, por definición, algebrabilidad fuerte implica algebrabilidad, y algebrabilidad implica lineabilidad. Sin embargo, los recíprocos no se tienen (ver [7] y [9, p. 74]). Esto significa que la algebrabilidad fuerte (como su propio nombre indica) es una propiedad más fuerte que la algebrabilidad y que la lineabilidad, y por tanto será más difícil de encontrar.

Capítulo 2

Curvas y Espacios de Peano

2.1. Curvas de Peano

A finales de junio del año 1877, George Cantor mantiene correspondencia postal con Richard Dedekind [12]. El primero creía haber construido una biyección entre $I = [0, 1]$ e I^2 , pero quería la revisión de su compañero. La esencia de su idea era, dado un número $z \in I$, hacerle corresponder el punto $(x, y) \in I^2$, donde x e y estarían formados, respectivamente, por las coordenadas impares y pares de la expresión decimal de z , resultando evidente la aplicación inversa de esta:

$$z = 0.z_1z_2z_3z_4z_5z_6\dots \longleftrightarrow (x, y) = (z_1z_3z_5\dots, z_2z_4z_6\dots).$$

Algunos números tienen dos expresiones decimales. Por ejemplo, $0,5 = 0,4999\dots$. Cantor decide que la segunda representación será la que use la función.

Pero Dedekind encuentra un error: al número $z = 0,12010101\dots$ le correspondería $x = 0,100000\dots$, que no está permitido por la elección de Cantor. La otra elección tampoco habría valido: basta notar que a $z = 0,0191919\dots$ le haría corresponder $x = 0,0999\dots$.¹

Cantor pronto solventa el problema refinando su aplicación mediante el uso de representación por fracciones continuas. Envía una nueva carta, donde declaraba “*je le vois, mais je ne le crois pas*”. Claro que lo creía, estaba convencido del resultado y

¹ El problema puede arreglarse. Si separamos $z = 0,12010101\dots$ en $12\ 01\ 01\ 01\dots$, y le hacemos corresponder $x = 0,1201\dots$ e $y = 0,0101\dots$, el fallo estaría solucionado. Se mantendría la elección de la representación con nueves, y se usaría que hay biyecciones entre $(0, 1]$ y $[0, 1]$.

la prueba ahora era más sólida. Pero quería una última revisión de Dedekind. No es para menos, acababa de demostrar que I e I^2 tenían el mismo cardinal.²

Sin embargo, la biyección construida por Cantor no era continua. Ya en 1890, el italiano Giuseppe Peano, en su artículo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* [18], compara su resultado con el de Cantor. Ha encontrado algo igual de sorprendente: una aplicación continua y sobreyectiva de I en I^2 . No es inyectiva, pero ha construido la primera curva, en el sentido de aplicación continua que parte de un intervalo de \mathbb{R} , que rellena el área del cuadrado. Por esta razón, a este tipo de curvas se les denomina **curvas de Peano**.

Definición 2.1.1. Una **curva de Peano** es una aplicación continua y sobreyectiva de $[0, 1]$ en $[0, 1]^2$. Denotaremos por \mathcal{P} al conjunto de estas curvas.

La curva del artículo tiene además, como remarca Peano al final del mismo, la particularidad de no ser diferenciable en ningún punto. No es el primer ejemplo de una curva con estas características: Karl Weierstrass había publicado, ya en 1872, una función continua pero no derivable en ningún punto [22] que se ganó el apodo de “monstruo de Weierstrass”.

A pesar de que Peano no ofrece ninguna imagen en su artículo, la manera más natural de entender su curva es dibujándola, pues se construye como el límite de la siguiente sucesión de curvas:

- La primera se obtiene de la siguiente forma: se divide el cuadrado unidad en 9 cuadrados de lado $1/3$, y se traza la curva que pasa por los centros de los mismos de la forma representada.
- Para la segunda, tomamos una homotecia de razón $1/3$ de la primera curva y la colocamos en los cuadrados de las esquinas y del centro. En los otros cuadrados colocamos la imagen simétrica con respecto a eje vertical de dicha homotecia. Se unen los segmentos más cercanos y la curva de la segunda iteración queda dibujada. Así, los 9 cuadrados de la primera iteración se dividen de nuevo en 9 cuadrados cada uno, habiendo ahora en total 9^2 cuadrados de lado $1/3^2$, por cuyos centros pasa la curva.

²Nótese que además, si tenemos en cuenta que existen biyecciones entre I y \mathbb{R} , esto implica que \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 también tienen el mismo cardinal. De hecho, basándonos en las aplicaciones que se usan en la demostración de la Proposición 3.1.1, se tiene que \mathbb{R} y \mathbb{R}^n poseen el mismo cardinal.

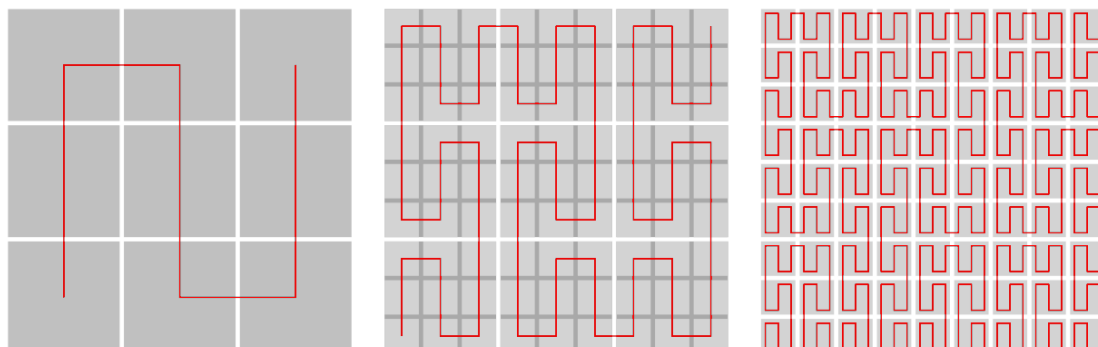


Figura 2.1: Primeras 3 iteraciones de la curva de Peano.

- Para la siguiente iteración se procedería de manera similar: tomando una homotecia de razón $1/3$ de la curva total anterior, colocándola en el cuadrado central y en los que hacen esquina (de los 9 cuadrados en los que se divide el cuadrado unidad), colocando su imagen simétrica en los otros cuatro cuadrados, y uniendo los segmentos de la forma más corta posible.

Así, la n -ésima curva de la sucesión pasaría por los centros de los 9^n cuadrados iguales en los que se puede dividir el cuadrado unidad. Intuitivamente, el límite pasaría por todos los puntos del cuadrado manteniendo aún la continuidad de la curva, que partiría de la esquina inferior izquierda.

David Hilbert [14] publicó en 1891, un año después de Peano y en la misma revista, un artículo donde describía otra curva de las mismas características, basándose en la construcción original de Peano, pero creando una más sencilla. Si Peano dividía el cuadrado unidad en 9, Hilbert lo dividía en 4:

- La primera curva de la sucesión parte del centro del cuadrado inferior izquierdo, sube al centro del superior izquierdo, pasa al superior derecho y baja al inferior derecho.
- La segunda se forma aplicando una homotecia de razón $1/4$ a la curva anterior y situándola sin girar en los cuadrados superiores, girada 90° en sentido horario en el inferior izquierdo, y girada 90° en sentido antihorario en el inferior derecho. Finalmente se unen los extremos de los segmentos más cercanos.

- De forma similar se obtienen las siguientes: dada una curva de la sucesión, la siguiente se obtiene aplicándole una homotecia de razón $1/4$, colocándo cuatro copias de esta en los nuevos cuadrados con los giros especificados, y uniendo los extremos más cercanos.

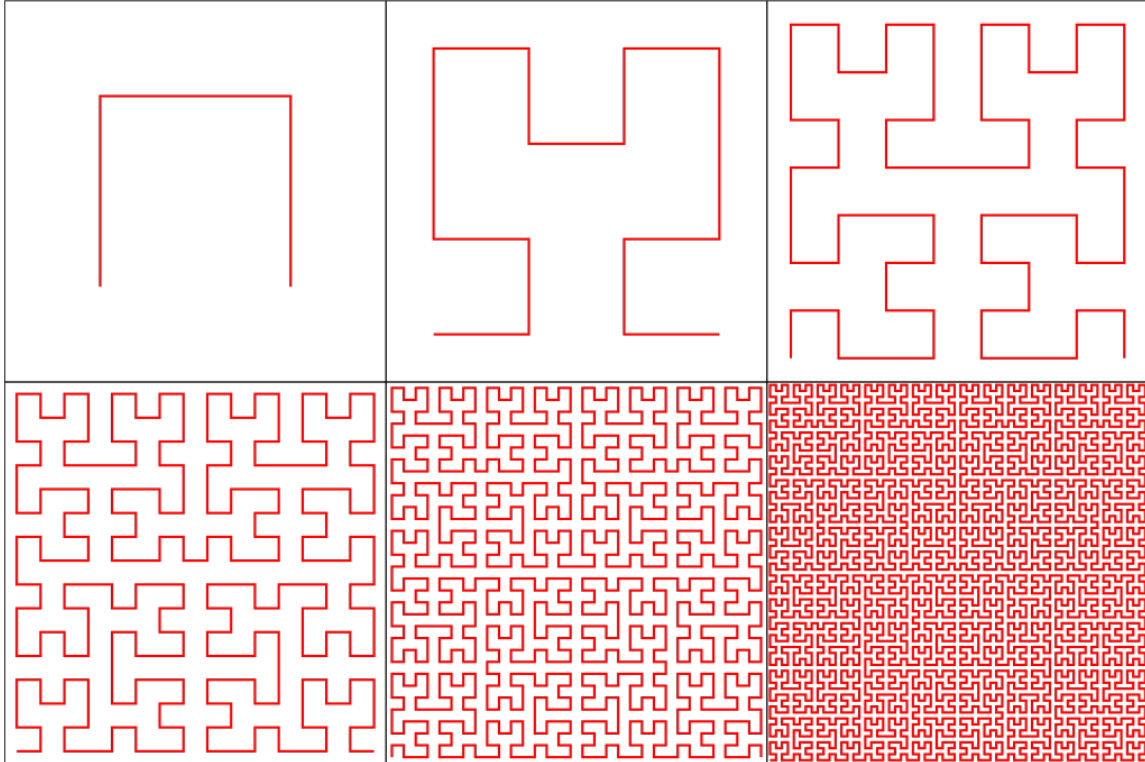


Figura 2.2: Primeras 6 iteraciones de la curva de Hilbert.

Esta vez la n -ésima curva de la sucesión pasa por los centros de 4^n cuadrados de lado $1/2^n$. Igual que antes, la intuición nos dice que el límite de la sucesión debe ser continuo y sobreyectivo en el cuadrado unidad. Sin embargo, esto no es tan sencillo de demostrar, ni en la curva de Peano ni en la de Hilbert.

Para cualquiera de las dos sucesiones la prueba debería asegurar tres cosas sobre su límite: debe estar bien definido (es decir, a un valor de I solo le puede corresponder uno de I^2); debe ser continuo; y debe ser sobreyectivo. Una prueba para el caso de la curva de Hilbert puede encontrarse en [6]. En [17, p. 272] se describe una prueba para una curva similar. Por otro lado, en [15, p. 209] puede encontrarse una prueba que demuestra la existencia de las curvas de Peano, aunque no es constructiva.

2.2. Espacios de Peano

En general, y como veremos posteriormente, existen muchos más conjuntos que pueden ser imagen continua de $[0, 1]$. Ello lleva a dar la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Un espacio topológico de Hausdorff se dice **espacio de Peano** si es imagen continua de $[0, 1]$.*

Proposición 2.2.2. *Los espacios de Peano son conexos por caminos.*

Demostración. Si Y es un espacio de Peano, es imagen de $[0, 1]$ por una función f . Dados $u, v \in X$, tomando $s_1 \in f^{-1}(u)$ y $s_2 \in f^{-1}(v)$ se tiene que la aplicación $t \in [0, 1] \mapsto f((1-t)s_1 + ts_2)$ es un camino entre u y v . Más aún, podemos cambiar el espacio de salida definiendo $t \in [a, b] \mapsto f(\frac{b-t}{b-a}s_1 + \frac{t-a}{b-a}s_2)$ \square

Valiéndonos de la proposición anterior, obtenemos un resultado que utilizaremos más adelante en los Capítulos 3 y 4.

Proposición 2.2.3. *Sea Y un espacio de Peano y sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de \mathbb{R} . Dados $u, v \in Y$, existe una aplicación $\Phi \in \mathcal{CS}([a, b], Y)$ tal que $\Phi(a) = u$ y $\Phi(b) = v$.*

Demostración. Como Y es un espacio de Peano, es imagen continua de $I = [0, 1]$, y por tanto existe $f \in \mathcal{CS}(I, Y)$. Además, los espacios de Peano son conexos por caminos, por lo que existen $g : [0, 1/3] \rightarrow Y$ y $h : [2/3, 1] \rightarrow Y$ tales que $g(0) = u, g(1/3) = f(0), h(2/3) = f(1)$ y $h(1) = v$. Definimos $\varphi : I \rightarrow Y$ como

$$\varphi(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } 0 \leq t < 1/3 \\ f(3t - 1) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ h(t) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Evidentemente, la aplicación $\Phi : [a, b] \rightarrow Y$ definida por $\Phi(t) = \varphi(\frac{t-a}{b-a})$ es continua y sobreyectiva, con lo que concluye la prueba. \square

El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en [23, Teorema 31.5], caracteriza los espacios de Peano.

Teorema 2.2.4. *(Hahn-Mazurkiewicz) Un espacio topológico de Hausdorff es imagen continua de $[0, 1]$ si y solo si el espacio es compacto, conexo, localmente conexo y segundo numerable.*

Como consecuencia del mismo, un espacio de Peano es un espacio compacto, conexo, localmente conexo y segundo numerable. Es más, teniendo en cuenta que los espacios de Hausdorff compactos son localmente compactos y que los espacios de Hausdorff localmente compactos son regulares [23, p. 130], por el teorema de metrización de Urysohn [23, Teorema 23.1], tenemos que **un espacio de Peano es un espacio compacto, conexo, localmente conexo y metrizable**. Esta caracterización será la que usaremos más adelante. Nótese que los espacios de Peano son además separables (como consecuencia de ser segundo numerables, o bien de ser compactos y metrizable, o también por el teorema de metrización de Urysohn).

Capítulo 3

Curvas de Peano en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, Y)$

3.1. Lineabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Ahora que sabemos que existen curvas de Peano, resulta natural querer extenderlas para que rellenen todo el plano. No existen aplicaciones continuas y sobreyectivas de I en \mathbb{R}^2 , dado que la imagen por una función continua de I , que es compacto, siempre será compacto, y \mathbb{R}^2 no lo es. Sin embargo, sí que podremos extender las curvas de Peano para obtener aplicaciones continuas y sobreyectivas de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 . A este conjunto lo denotaremos $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, y en general, dados dos espacios topológicos X e Y , definimos $\mathcal{CS}(X, Y)$ como el conjunto de las aplicaciones continuas y sobreyectivas de X en Y . En particular, $\mathcal{P} = \mathcal{CS}(I, I^2) \neq \emptyset$.

Sea pues $f \in \mathcal{P}$, y sea además a_n una enumeración de \mathbb{Z}^2 . Siguiendo el ejemplo de [3, p. 88], extendemos f a $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ definiendo

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} + f(t - n + 1) & \text{si } t \in [n - 1, n] \text{ y } n \text{ impar,} \\ (a_{\frac{n}{2}} + f(1))(n - t) + (t - n + 1)a_{\frac{n+2}{2}} & \text{si } t \in [n - 1, n] \text{ y } n \text{ par.} \end{cases} \quad (3.1)$$

La expresión es complicada, pero la idea es sencilla: crear una malla de cuadrados de lado 1 en \mathbb{R}^2 que la extensión va recubriendo uno a uno (son una cantidad numerable) y uniéndolos por segmentos para que se mantenga la continuidad. En efecto, \hat{f} lleva $[0, 1]$ en $a_1 + I^2$, $[2, 3]$ en $a_2 + I^2$, $[4, 5]$ en $a_3 + I^2$, ... y $[1, 2]$, $[3, 4]$, etc., en los segmentos que conectan $a_1 + f(1)$ con a_2 , $a_2 + f(1)$ con a_3 , y así sucesivamente.

Nótese que $a_k + f(1)$ es el punto donde acaba el recubrimiento del k -ésimo cuadrado y a_{k+1} el punto donde empieza el recubrimiento del $(k + 1)$ -ésimo. Lógicamente, por

cómo está construida, \hat{f} es continua y también sobreyectiva, por lo que ya tenemos que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \neq \emptyset$.

De la misma forma que en [1] y en [3, p. 89], probamos lo siguiente.

Proposición 3.1.1. *Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$.*

Demostración. El caso $n = m = 1$ es trivial: basta tomar la identidad $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Igualmente lo son los casos $m > 1, n = 1$, pues la proyección de \mathbb{R}^m sobre \mathbb{R} es continua y sobreyectiva y la composición de funciones mantiene estas propiedades. Veamos los demás casos:

Sea $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Entonces, la aplicación $id_{\mathbb{R}} \times f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que envía $(t, s) \mapsto (t, f_1(s), f_2(s))$ es una sobreyección continua. Por tanto, $(id_{\mathbb{R}} \times f) \circ f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ por ser composición de funciones continuas y sobreyectivas. Repitiendo este proceso, siempre podemos encontrar una función $g \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $F := g \circ \pi_1$. Nótese que $F(x_1, \dots, x_m) = g(x_1)$. De nuevo, por ser composición de sobreyecciones continuas, se tiene que $F \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. \square

Ahora que sabemos que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es no vacío, tiene sentido preguntarse cómo de grande es. Una manera de medirlo es ver su lineabilidad, es decir, comprobar si $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$ contiene un espacio vectorial. Vamos a ver que así es, y que de hecho es \mathfrak{c} -lineable. En particular, si tenemos en cuenta que $\dim \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathfrak{c}$, esto implicaría que es **maximal lineable**. Vamos a seguir el procedimiento de [1]. La siguiente observación nos proporciona un método para obtener el resultado:

Observación 3.1.2. Dada una función continua y sobreyectiva $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, supongamos que existe un subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de cardinal \mathfrak{c} formado por funciones linealmente independientes tales que $\text{span}(\mathcal{X}) \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\mathcal{Y} := \{F \circ f\}_{F \in \mathcal{X}} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$$

tendría cardinal \mathfrak{c} y sus funciones serían linealmente independientes. Es más,

$$\text{span}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\},$$

ya que

- (1) Dadas $g \in \mathcal{Y}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda g = \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$.
- (2) Si $g_1, g_2 \in \mathcal{Y}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{X}$ tales que $g_1 + g_2 = F_1 \circ f + F_2 \circ f = (F_1 + F_2) \circ f$, que pertenece a $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$ por estar $F_1 + F_2 \in \text{span}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$.

Por tanto, al tener $\text{span}(\mathcal{Y})$ estructura de espacio vectorial, se obtendría la \mathfrak{c} -lineabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Vamos a continuar con un par de lemas. Antes de nada, definimos para cada $r \in \mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ la función $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_r(t) := e^{rt} - e^{-rt} = 2 \sinh(rt),$$

que es continua, verifica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_r(t) = -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_r(t) = +\infty$, y como es estrictamente creciente, es biyectiva.

Lema 3.1.3. *El subconjunto $\mathcal{A} := \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}^+} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es linealmente independiente, tiene cardinal \mathfrak{c} , y $\text{span}(\mathcal{A}) \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Demostración. Evidentemente, cada elemento $\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi_{r_i} \in \text{span}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ es continuo. Veamos que es sobreyectivo. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r_1 > r_2 > \dots > r_k$ y $\alpha_1 \neq 0$. Si α_1 fuera nulo tomaríamos α_2 ; si este también lo fuera, α_3 y así sucesivamente. Al menos uno de ellos tiene que ser necesariamente no nulo, y la prueba seguiría de manera similar. Por tanto, escribimos

$$\phi(t) = e^{r_1 t} \cdot \left(\alpha_1 + \sum_{i=2}^k \alpha_i \cdot e^{(r_i - r_1)t} \right) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot e^{-r_i t},$$

de donde concluimos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \text{sign}(\alpha_1) \cdot \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = -\text{sign}(\alpha_1) \cdot \infty$. Así, la continuidad de ϕ asegura su sobreyectividad.

Pasamos ahora a ver que \mathcal{A} , que por definición tiene cardinal \mathfrak{c} , es linealmente independiente. Supongamos que $\psi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_{s_i} = 0$. Si hay algún $\lambda_j \neq 0$, podemos suponer que $s_1 > \dots > s_n$ y $\lambda_1 \neq 0$. Usando de nuevo el argumento de arriba, obtenemos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = \text{sign}(\lambda_1) \cdot \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = -\text{sign}(\lambda_1) \cdot \infty$, lo que contradice que $\psi = 0$. Esto termina la prueba. \square

Para cada $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, sea φ_r la aplicación de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n definida por $\varphi_r = (\phi_{r_1}, \dots, \phi_{r_n})$, i.e.,

$$\varphi_r(x) := (\phi_{r_1}(x_1), \dots, \phi_{r_n}(x_n)), \text{ para todo } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Por estar definida con las variables funcionando independientemente mediante las funciones ϕ_{r_i} , se tiene que φ_r es continua y biyectiva. Usando el lema anterior y trabajando coordenada a coordenada, tenemos trivialmente.

Lema 3.1.4. *El subconjunto $\mathcal{B} := \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}^+} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es linealmente independiente, tiene cardinal \mathfrak{c} , y $\text{span}(\mathcal{B}) \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.*

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado principal de la sección.

Teorema 3.1.5. *$\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es \mathfrak{c} -lineable.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Usando la notación del lema previo y la idea de la Observación 3.1.2, queremos probar que el conjunto $\mathcal{C} = \{F \circ f\}_{F \in \mathcal{B}}$ es tal que $\text{span}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$. Evidentemente, el cardinal de \mathcal{C} es el mismo que el de \mathcal{B} , es decir, $\text{card}(\mathcal{C}) = \mathfrak{c}$. Vamos a ver que sus vectores son linealmente independientes y por tanto $\dim(\text{span}(\mathcal{C})) = \mathfrak{c}$.

Como f es sobreyectiva, $G \circ f = 0$ implica $G = 0$ para toda función $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. De esta forma, si $F_i \in \mathcal{B}$, con $i = 1, \dots, k$, y

$$0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot F_i \circ f = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot F_i \right) \circ f,$$

entonces $\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot F_i = 0$. Como \mathcal{B} es linealmente independiente, concluimos que $\alpha_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$, y por tanto \mathcal{C} es linealmente independiente.

Por otro lado, cualquier función no nula

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot F_i \circ f = \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot F_i \right) \circ f$$

de $\text{span}(\mathcal{C})$ es continua y sobreyectiva, dado que es composición de sobreyecciones continuas (recordemos que, por el Lema 3.1.4, $\sum_{i=1}^l \lambda_i F_i$ es continua y sobreyectiva). Consecuentemente, $\text{span}(\mathcal{C})$ solo contiene, exceptuando al 0, funciones de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. \square

Como mencionamos antes, dado que $\dim(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) = \mathfrak{c}$, este resultado es el mejor posible en términos de dimensión, y $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es maximal lineable. Pero hay más cosas que quedan por estudiar. Hasta el momento no hemos hecho ninguna consideración topológica sobre el conjunto, que bien podría ser espaciabile o denso-lineable. Considerando la topología de la convergencia uniforme en compactos de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, inducida por la distancia

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max_{\overline{B}(0;n)} (|f - g|)}{1 + \max_{\overline{B}(0;n)} (|f - g|)},$$

¿Se puede encontrar en $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ un subespacio que sea cerrado? ¿Y denso? La respuesta es afirmativa en ambos casos, tal y como se muestra a continuación (ver [3, p. 68]).

Teorema 3.1.6. *El conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es denso-lineable y espaciabile en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. En particular, es maximal lineable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Vamos a demostrar el caso $m = 1$ y $n = 2$. A partir de éste, el resultado puede extenderse a dimensiones superiores como vimos en la prueba de la Proposición 3.1.1.

Para probar la denso-lineabilidad, hace falta, entre otras cosas, un subconjunto denso apropiado de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Como consecuencia del teorema de Stone-Weierstrass, se sabe que el conjunto \mathbf{P}_0 de funciones $P = (P_1, P_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyas componentes P_1, P_2 son polinomios con coeficientes racionales es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Nótese que este conjunto es numerable. Para cada $P = (P_1, P_2) \in \mathbf{P}_0$ y cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el par de funciones continuas $P_{1,k}, P_{2,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para $j = 1, 2$

$$P_{j,k}(x) = \begin{cases} P_j & \text{si } x \in [-k, k], \\ 0 & \text{si } |x| > k + 1, \\ h_{j,k} & \text{si } k < |x| \leq k + 1, \end{cases}$$

donde las $h_{j,k}$ son las funciones lineales afines que interpolan los otros dos trozos. Denotamos $P_k = (P_{1,k}, P_{2,k})$. Dado que cada compacto $K \subset \mathbb{R}$ está contenido en un cierto intervalo $[-k, k]$ y la topología de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ es la de la convergencia uniforme en compactos, tenemos que el conjunto numerable $\{P_k : P \in \mathbf{P}_0, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Denotaremos por $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ a una enumeración de este conjunto.

Vamos a construir una familia especial de funciones en $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $I_a := [a, a + 1]$ y $J_n := [-n, n] \times [-n, n]$. Dividimos \mathbb{N} en infinitas sucesiones estrictamente crecientes $\{m(n, k)\}_{k \geq 1}$ ($n = 1, 2, \dots$), siguiendo, por ejemplo, el siguiente procedimiento diagonal:

$$\begin{aligned} m(1, \cdot) &= 1, 3, 6, 10 \dots \\ m(2, \cdot) &= 2, 5, 9, \dots \\ m(3, \cdot) &= 4, 8, \dots \\ m(4, \cdot) &= 7 \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Usando la Proposición 2.2.3, encontramos para cada $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ una aplicación $\varphi_{n,k} \in \mathcal{CS}(I_{m(n,k)}, J_k)$ tal que $\varphi_{n,k}(m(n, k)) = (0, 0) = \varphi_{n,k}(m(n, k) + 1)$.

Entonces, para cada n , la función $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi_n(x) = \varphi_{n,k}(x)$ si $x \in I_{m(n,k)}$, y $\varphi(x) = (0, 0)$ en caso contrario, está bien definida y es continua. Más aún, es sobreyectiva porque $\varphi_n(\mathbb{R}) \supset \bigcup_{k \geq 1} J_k = \mathbb{R}^2$. Además, como $(J_k)_k$ es una sucesión creciente de cuadrados, la función φ_n satisface que $\varphi_n(\mathbb{R} \setminus K) = \mathbb{R}^2$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$. Es más, la función $\alpha \varphi$ también satisface la misma propiedad para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asimismo, las funciones φ_n son linealmente independientes porque tienen soportes disjuntos. Por tanto, cualquier combinación lineal no nula $f = c_1 \varphi_1 + \dots + c_N \varphi_N$ satisface también $f(\mathbb{R} \setminus K) = \mathbb{R}^2$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$.

La continuidad en el origen de la multiplicación por escalares en $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ (recordemos que es un e.v.t.) asegura, para cada $n \in \mathbb{N}$, la existencia de un $\varepsilon_n > 0$ tal que $d(0, \varepsilon_n \varphi_n) < 1/n$. Pero d es invariante por traslaciones, por lo que $d(Q_n, Q_n + \varepsilon_n \varphi_n) < 1/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $(Q_n)_n$ es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, la sucesión $(Q_n + \varepsilon_n \varphi_n)_n$ también es densa. Ahora, definimos los conjuntos

$$M_1 := \text{span}\{Q_n + \varepsilon_n \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$M_2 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n : c_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nótese que M_2 está bien definido porque para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe como máximo un n tal que $\varphi_n(x_0) \neq 0$. Evidentemente, M_1 y M_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, y M_1 es denso porque $M_1 \supset \{Q_n + \varepsilon_n \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Probemos que M_2 es cerrado. Para este fin, asumamos que una sucesión $\{f_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_{j,n}\varphi_n\}_{j \geq 1}$ tiende a una cierta $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Como la convergencia en este espacio implica la convergencia puntual, tenemos que $f(x_0) = (0, 0)$ si $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,k} I_{m(n,k)}) \cup \mathbb{N}$. Por otra parte, si $x_0 \in \bigcup_{n,k} I_{m(n,k)} \setminus \mathbb{N}$, existe un único par (n, k) tal que $x_0 \in I_{m(n,k)}$. Luego $c_{j,n}\varphi_n(x_0) = f_j(x_0) \rightarrow f(x_0)$ cuando $j \rightarrow \infty$. Tomando un $x_0 \in I_{m(n,k)}$ con $\varphi_n(x_0) \neq (0, 0)$, obtenemos que $(c_{j,n})_{j \in \mathbb{N}}$ tiende a una cierta constante c_n . Pero $c_{j,n}\varphi_n(x_0) \rightarrow c_n\varphi_n(x_0)$ cuando $j \rightarrow \infty$, por lo que $f = c_n\varphi_n$ sobre $I_{m(n,k)}$ para todo $m(n, k)$. Dado que las φ_n se anulan en los extremos de los intervalos $I_{m(n,k)}$, obtenemos $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \in M_2$, lo que muestra que M_2 es cerrado.

Lo único que queda ver es que $M_j \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ para $j = 1, 2$.

Fijemos $f \in M_1 \setminus \{0\}$. Entonces existen $N \in \mathbb{N}$ y $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ con $c_N \neq 0$ tales que $f = \sum_{n=1}^N c_n(Q_n + \varepsilon_n\varphi_n)$. Por la construcción de las Q_n , podemos encontrar un compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $Q_n(x) = 0$ para todo $x \notin K$ y todo $n = 1, \dots, N$, luego $f = \sum_{n=1}^N c_n\varepsilon_n\varphi_n$ en $\mathbb{R} \setminus K$. Tal y como se observó antes, $f(\mathbb{R} \setminus K) = \mathbb{R}^2$, por lo que $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Así, M_1 es un espacio vectorial denso tal que $M_1 \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, por lo que ya tenemos que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ es denso-lineable.

Ahora, consideremos una función $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \in M_2 \setminus \{0\}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ con $c_N \neq 0$. Como todas las φ_n valen cero en los intervalos $I_{m(N,k)}$ si $n \neq N$, tenemos

$$f(\mathbb{R}) \supset f\left(\bigcup_{k \geq 1} I_{m(N,k)}\right) = c_N\varphi_N\left(\bigcup_{k \geq 1} I_{m(N,k)}\right) = c_N \bigcup_{k \geq 1} J_k = \mathbb{R}^2.$$

Esto muestra la sobreyectividad de f . Así, M_2 es un espacio vectorial cerrado tal que $M_2 \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, por lo que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ es espaciabile y se termina la prueba. \square

Para terminar con esta sección queremos comentar que existen resultados de lineabilidad para conjuntos de funciones en $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ con propiedades adicionales. En concreto, en [8, Teorema 4.19] Bernal y Ordoñez demuestran la denso-lineabilidad y la espaciabilidad del conjunto

$$\mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : f^{-1}(a) \text{ es no acotado para todo } a \in \mathbb{R}^n\}$$

en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Evidentemente, $\mathcal{CS}_{\infty} \subset \mathcal{CS}$. Estos conjuntos de funciones aparecerán en las secciones siguientes.

3.2. Algebrabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$

Dado que en la sección anterior hemos obtenido resultados positivos sobre la linealidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, cabe preguntarse si el conjunto es además algebrable, considerando como producto el producto habitual de funciones coordenada a coordenada. Es sencillo ver que no: No es posible encontrar en $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$ ningún subconjunto con estructura de álgebra, pues dada cualquier $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, la función f^2 es no negativa: en su imagen no hay ningún punto con alguna coordenada negativa, y por tanto no es sobreyectiva y no pertenece a $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Sin embargo, la cosa cambia si el espacio de llegada es complejo, porque en \mathbb{C} los números negativos sí tienen raíces cuadradas. Tendría sentido por tanto buscar una estructura de álgebra contenida en $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n) \cup \{0\}$.

En esta sección demostraremos la algebrabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$. Para ello, vamos a ver algunas definiciones y propiedades que nos ayudarán a obtenerla. Siguiendo el procedimiento de [2], construiremos primero un lema previo antes de pasar propiamente a la demostración del teorema.

Denotamos por $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ al espacio de las funciones enteras de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Recordemos que estas funciones se caracterizan por ser holomorfas (es decir, complejo diferenciables) y analíticas (pueden expresarse como serie de potencias) en todo punto de \mathbb{C} . Para $r > 0$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, definimos $M(f, r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$. La función $M(f, \cdot)$ crece estrictamente hacia $+\infty$ siempre que f sea no constante. Se tienen los siguientes resultados, que pueden encontrarse en [10, p. 9] o en [5].

Propiedades 3.2.1. El **orden** (de crecimiento) $\rho(f)$ de una función entera $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ se define como el ínfimo de todos los números reales $\alpha > 0$ que cumplan $M(f, r) < e^{r^\alpha}$ para todo $r > r(\alpha) > 0$. Nótese que $\rho(f) \in [0, +\infty]$. Trivialmente, el orden de una función constante es 0.

(a) Si f es no constante, se tiene

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(f, r)}{\log r}. \quad (3.2)$$

(b) Si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es la serie de MacLaurin de f , entonces

$$\rho(f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log n}{\log(1/|a_n|)}. \quad (3.3)$$

En particular, dado $\alpha > 0$, $f_\alpha(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n/\alpha}}$ satisface $\rho(f_\alpha) = \alpha$.

(c) Para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, cada $N \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\rho(\alpha f^N) = \rho(f) . \quad (3.4)$$

(d) Para toda $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\rho(f \cdot g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}, \quad (3.5)$$

$$\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}. \quad (3.6)$$

Más aún, si f y g tienen órdenes diferentes,

$$\rho(f + g) = \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(f \cdot g), \quad (3.7)$$

donde se asume que $f \neq 0 \neq g$ para la segunda igualdad.

(e) (Corolario del Teorema de Hadamard): Toda función entera no constante f con $\rho(f) \notin \mathbb{N}$ y $\rho(f) < +\infty$ es sobreyectiva (ver [5, p. 211]).

Con estas propiedades y algo más de notación estamos preparados para obtener el lema. Dado un polinomio no constante de K variables $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_K]$, definimos $\mathcal{I}_P := \{n \in \{1, \dots, K\} : \frac{\partial P}{\partial z_n} \neq 0\}$. Es decir, \mathcal{I}_P es el conjunto de índices k para los que z_k aparece en algún monomio de P .

Lema 3.2.2. Sean $f_1, \dots, f_K \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $\rho(f_i) \neq \rho(f_j)$ si $i \neq j$. Entonces

$$\rho(P(f_1, \dots, f_K)) = \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k),$$

para todos los polinomios no constantes $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_K]$. Además, $\{f_k\}_{k=1}^K$ es algebraicamente independiente y genera un subálgebra libre conmutativa de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Demostración. Antes de nada, señalamos que una vez se pruebe la igualdad del lema, se tendrá que $\{f_k\}_{k=1}^K$ es algebraicamente independiente porque todas las funciones tienen orden distinto, y por las Propiedades 3.2.1(c) y (d) una función del conjunto no puede ser producto, suma o producto por escalar de otras.

Por otro lado, recordemos que el hecho de que $\{f_k\}_{k=1}^K$ genere un subálgebra libre conmutativa de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ significa que para cada conjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \{f_k\}_{k=1}^K$

y para cada polinomio no nulo P de n variables que no tenga término constante, $P(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Es sencillo ver que esto se cumple teniendo el resultado principal del teorema: evidentemente $P(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pero además $\rho(P(f_1, \dots, f_n)) = \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k) \neq 0 = \rho(0)$, luego $P(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.

Dicho esto, pasamos a probar la igualdad.

Vamos a empezar probándola para $K = 1$. Sea f una función entera y no constante (el caso constante es trivial). Tenemos que probar que $\rho(P(f)) = \rho(f)$ para cualquier polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[z]$, que será de la forma $P(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$ con $m > 0$ y $a_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por las Propiedades 3.2.1(c) y (d),

$$\rho(P(f)) = \rho(a_m f^m + \dots + a_1 f + a_0) \leq \underbrace{\max\{\rho(a_m f^m), \dots, \rho(a_1 f), \rho(a_0)\}}_{\text{por (d)}} \leq \underbrace{\rho(f)}_{\text{por (c)}}$$

luego ya tenemos $\rho(P(f)) \leq \rho(f)$. Por tanto, solo queda probar la desigualdad contraria. Como

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{P(z)}{z^m} \right| = |a_m| > 0,$$

tenemos

$$|P(z)| > c \cdot |z|^m$$

para $|z|$ suficientemente grande, donde $c := |a_m|/2$. Como lógicamente $\rho(f) > 0$, sea ε tal que $0 < \varepsilon < \rho(f)$. Por la propia definición de orden, existen una sucesión de radios positivos $(r_n)_n \rightarrow +\infty$ y una sucesión compleja $(z_n)_n$ con $|z_n| = r_n$ y $|f(z_n)| = M(f, r_n)$ tales que

$$\rho(f) - \varepsilon < \frac{\log \log M(f, r_n)}{\log r_n} \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(f, r)}{\log r} = \rho(f).$$

En consecuencia,

$$\log r_n^{\rho(f) - \varepsilon} < \log \log M(f, r_n),$$

y

$$|f(z_n)| = M(f, r_n) > e^{r_n^{\rho(f) - \varepsilon}} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Así, para valores grandes de n ,

$$M(P(f), r_n) \geq |P(f(z_n))| > c \cdot |f(z_n)|^m > c \cdot e^{m r_n^{\rho(f) - \varepsilon}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \rho(P(f)) &\geq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(P(f), r)}{\log r} \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(P(f), r_n)}{\log r_n} \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log \left(c \cdot e^{m r_n^{\rho(f) - \varepsilon}} \right)}{\log r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log \log c}{\log r_n} + \frac{\log \log \left(e^{r_n^{\rho(f) - \varepsilon}} \right)^m}{\log r_n} \right\} \\
 &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(m \log \left(e^{r_n^{\rho(f) - \varepsilon}} \right) \right)}{\log r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log m}{\log r_n} + \frac{\log r_n^{\rho(f) - \varepsilon}}{\log r_n} \right\} \\
 &\geq \rho(f) - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Sin más que hacer tender ε a 0, llegamos a $\rho(P(f)) \geq \rho(f)$ y hemos terminado con el caso unidimensional. Conviene aclarar que era necesario probar previamente este caso para poder usarlo en una inducción del **caso general**. Vayamos a ello:

Dado un polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_K]$, queremos probar que

$$\rho(P(f_1, \dots, f_K)) = \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k).$$

A diferencia de antes, ahora suponemos que el polinomio P tiene grado mayor o igual que $m > 0$. Además, podemos asumir sin pérdida de generalidad que las funciones $f_1, \dots, f_K \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ satisfacen $\rho(f_1) < \rho(f_2) < \dots < \rho(f_K)$. En particular, si $N = \max\{k \in \mathcal{I}_P\}$, la hipótesis anterior implica $\rho(f_N) = \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k)$. Por otro lado, por la definición de \mathcal{I}_P , si existen k con $N < k \leq K$, las funciones f_k no aparecen en ningún monomio de $P(f_1, \dots, f_K)$. Teniendo todo lo anterior en cuenta, podemos escribir

$$P(f_1, \dots, f_K) = \sum_{j=0}^m P_j(f_1, \dots, f_{N-1}) \cdot f_N^j, \quad (3.9)$$

con $P_m \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{N-1}] \setminus \{0\}$.

Vamos a probar la **primera desigualdad**. Dado que $P(f_1, \dots, f_K)$ es un polinomio, es suma de productos de las funciones f_1, \dots, f_K entre sí mismas y escalares. Usando como antes las Propiedades 3.2.1(c) y (d), se tiene sin más que

$$\rho(P(f_1, \dots, f_K)) \leq \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k).$$

Denotando $\rho_N := \rho(f_N)$, esta desigualdad asegura

$$\rho(P_j(f_1, \dots, f_{N-1})) \leq \rho(f_{N-1}) < \rho_N \quad \text{para todo } j = 0, \dots, m, \quad (3.10)$$

y como $\rho(P_m(f_1, \dots, f_M)) \leq \rho(f_{N-1})$ y f_N tiene orden estrictamente mayor, las dos funciones tienen orden distinto y por Propiedades 3.2.1(d)

$$\rho(P_m(f_1, \dots, f_{N-1}) \cdot f_N) = \rho_N. \quad (3.11)$$

Vamos a usar estos dos resultados para probar la **segunda desigualdad** y acabar la prueba del lema. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\rho(f_{N-1}) < \rho_N - 2\varepsilon < \rho_N.$$

Como antes, existen una sucesión de números reales $(r_n)_n \rightarrow +\infty$ y una de números complejos $(z_n)_n$ con $|z_n| = r_n$ tales que para n suficientemente grande se tienen:

$$|P_j(f_1, \dots, f_{N-1})(z_n)| < e^{r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}} \quad \text{para todo } j = 0, \dots, m, \quad (3.12)$$

$$|P_m(f_1, \dots, f_{N-1})(z_n)| \cdot |f_N(z_n)| > e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}}. \quad (3.13)$$

La primera de estas dos desigualdades se obtiene tomando (3.10) y la definición de orden, y la segunda utilizando (3.11) y razonando como en (3.8). Ahora, uniendo (3.12) y (3.13) y dividiendo, obtenemos que para n suficientemente grande

$$|f_N(z_n)| > e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon} - r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}}. \quad (3.14)$$

Recordando que $|a + b| \geq |a| - |b|$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |P(f_1, \dots, f_K)(z_n)| &= |P_m(f_1, \dots, f_{N-1})(z_n) \cdot f_N(z_n)^m + \sum_{j=0}^{m-1} P_j(f_1, \dots, f_{N-1})(z_n) \cdot f_N(z_n)^j| \\ &\geq |P_m(f_1, \dots, f_{N-1})(z_n)| \cdot |f_N(z_n)|^m - \sum_{j=0}^{m-1} |P_j(f_1, \dots, f_{N-1})(z_n)| \cdot |f_N(z_n)|^j \\ &> e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}} |f_N(z_n)|^{m-1} - e^{r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}} \sum_{j=0}^{m-1} |f_N(z_n)|^j \quad (\text{por (3.13) y (3.12)}) \\ &= e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}} |f_N(z_n)|^{m-1} \cdot \left[1 - e^{r_n^{\rho_N - 2\varepsilon} - r_n^{\rho_N - \varepsilon}} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} |f_N(z_n)|^{j-(m-1)} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

La expresión entre corchetes de la última fórmula tiende a 1 cuando $n \rightarrow +\infty$. En efecto, teniendo en cuenta que $\varepsilon > 0$ es un valor ya fijado,

$$e^{r_n^{\rho_N - 2\varepsilon} - r_n^{\rho_N - \varepsilon}} = e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon} (r_n^{-\varepsilon} - 1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{+\infty(-1)} = 0,$$

Por otro lado, por (3.14), para n suficientemente grande

$$|f_N(z_n)|^{-1} < e^{r_n^{\rho_N - 2\varepsilon} - r_n^{\rho_N - \varepsilon}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por tanto, usando esto último en (3.15), tenemos que para cualquier constante $C \in (0, 1)$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande

$$|P(f_1, \dots, f_K)(z_n)| > C \cdot e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}} |f_N(z_n)|^{m-1}.$$

Es más, por (3.14) también sabemos que

$$\begin{aligned} e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}} |f_N(z_n)|^{m-1} &> e^{r_n^{\rho_N - \varepsilon}} e^{(m-1)r_n^{\rho_N - \varepsilon} - (m-1)r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}} = e^{mr_n^{\rho_N - \varepsilon} - (m-1)r_n^{\rho_N - 2\varepsilon}} \\ &= e^{mr_n^{\rho_N - \varepsilon} [1 - (1 - \frac{1}{m})r_n^{-\varepsilon}]} > e^{\frac{m}{2}r_n^{\rho_N - \varepsilon}}, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande, porque $r_n^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Así pues, para cualquier constante $C \in (0, 1)$ y n suficientemente grande se tiene

$$M(P(f_1, \dots, f_K), r_n) \geq C \cdot e^{\frac{m}{2}r_n^{\rho_N - \varepsilon}}.$$

Esto que implica, razonando igual que en el caso unidimensional,

$$\begin{aligned} \rho(P(f_1, \dots, f_K)) &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(P(f_1, \dots, f_K), r)}{\log r} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(P(f_1, \dots, f_K), r_n)}{\log r_n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log (C \cdot e^{mr_n^{\rho_N - \varepsilon}})}{\log r_n} \\ &\geq \rho_N - \varepsilon. \end{aligned}$$

Sin más que hacer ε tender a 0, la desigualdad anterior prueba finalmente

$$\rho(P(f_1, \dots, f_K)) \leq \rho_N = \max_{k \in \mathcal{I}_P} \rho(f_k).$$

□

Ya estamos preparados para demostrar la algebrabilidad de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. De hecho, vamos a ver que es fuertemente \mathfrak{c} -algebraable, lo que implica que es fuertemente maximal algebraable si tenemos en cuenta que el cardinal del espacio ambiente $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ es \mathfrak{c} .

Teorema 3.2.3. $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ es fuertemente maximal algebraable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$.

Demostración. Para la prueba basta considerar $m = n = 1$. El caso $m > 1$, $n = 1$ se obtiene del caso $m = 1$ como en la Proposición 3.1.1: considerando que las proyecciones de \mathbb{R}^m a \mathbb{R} son aplicaciones continuas y sobreyectivas y que la composición de funciones mantiene estas dos propiedades. El caso $n > 1$ se obtiene adaptando el argumento de la proposición mencionada. Si $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la aplicación $(f(\Re(f)), f(\Im(f))) \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, y repitiendo el razonamiento con, por ejemplo, la última coordenada, obtenemos aplicaciones de $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. En este conjunto, la estructura de álgebra funcionaria coordenada a coordenada.

Empecemos pues. Para cada $s \in A := (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, sea una función entera $\varphi_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de orden s . Por ejemplo, como ya vimos en Propiedades 3.2.1(b), la función $\phi_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n/s}}$ cumple esta condición. Por el Lema 3.2.2, tenemos que el conjunto $\{\varphi_s\}_{s \in A}$, que tiene cardinal \mathfrak{c} , genera un subálgebra libre \mathcal{A} de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Por definición, cada $\varphi \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ puede escribirse como un polinomio no constante P sin termino constante evaluado sobre $\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_N}$:

$$\varphi = P(\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_N})$$

De nuevo por el Lema 3.2.2, existe un $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\rho(\varphi) = \rho(\varphi_{s_j}) = s_j \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, por Propiedades 3.2.1(e) tenemos que φ es sobreyectiva. Finalmente, tomamos $F \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y consideramos el álgebra

$$\mathcal{B} := \{\varphi \circ F\}_{\varphi \in \mathcal{A}}.$$

Está claro que \mathcal{B} es libre, \mathfrak{c} -generada y que por composición $\mathcal{B} \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, con lo que concluimos la prueba. \square

Es interesante notar que la estructura de la demostración es similar a la que se usó en la demostración del Teorema 3.1.5. En ambas se define un conjunto (\mathcal{B} o \mathcal{C}) de la misma manera, con la idea de que cumpla las propiedades necesarias para ser un subespacio vectorial o un subálgebra contenido dentro del conjunto de las funciones continuas y sobreyectivas junto con el cero.

Por último, cabe comentar que puede obtenerse un resultado todavía más fino, que es el que originalmente aparece en [2]. Si hubiéramos tomado $F \in \mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, que podemos hacer por ejemplo considerando $f := (f_1, f_2) \in \mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ y definiendo

$F := f_1 + if_2$, habríamos probado el siguiente teorema sin cambiar nada más de la demostración, teniendo en cuenta para el caso $m > 1$ que $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Teorema 3.2.4. *El conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$ es fuertemente maximal algebraable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$.*

3.3. Espacios σ -Peano

Siguiendo con [2], la idea de esta sección es dar una condición suficiente para que, dado un e.v.t. Y , el espacio $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, Y)$ sea maximal lineable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, Y)$ (esto es, c -lineable). Tal condición será que Y sea lo que vamos a definir a continuación como un espacio σ -Peano.

Definición 3.3.1. *Un espacio topológico Y se dice σ -Peano si existe una sucesión creciente de subconjuntos*

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots \subset Y,$$

tales que cada uno de ellos es un espacio de Peano (con la topología heredada por Y) y la unión de todos ellos recubre el espacio, es decir $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = Y$.

Observación 3.3.2. Como consecuencia de ser unión numerable de espacios separables (los espacios de Peano K_n), los espacios σ -Peano también son separables.

Veamos algunos ejemplos para asentar la definición:

Ejemplo 3.3.3. *(Espacios que son σ -Peano).*

- (a) Trivialmente, los espacios euclídeos \mathbb{R}^n y los espacios de Peano son σ -Peano.
- (b) Para $1 < p \leq \infty$, se define el cubo de Hilbert como el producto cartesiano infinito

$$C_p := \prod_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \subset \ell_p.$$

Considerado como un subespacio topológico de ℓ_p , es un espacio métrico, y además es compacto, conexo y localmente conexo por ser producto cartesiano numerable de conjuntos con estas propiedades, por lo que es un espacio de Peano. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea kC_p el cubo de Hilbert dilatado con razón k . Entonces, la unión de cubos de Hilbert $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} kC_p$ es un e.v.t. σ -Peano, dotado con la topología heredada de ℓ_p .

- (c) Sea Y un e.v.t. separable e Y' su dual topológico dotado de la topología *-débil. Si Y' es recubierto por una sucesión creciente de conjuntos *-débil compactos, entonces será σ -Peano. Esto se tiene porque en Y' con la topología *-débil, los subconjuntos compactos son metrizablees ([19, Teorema 3.16]) y en consecuencia, serán espacios de Peano (la conexión se tiene por ser Y un e.v.t.). En particular, este resultado se tiene para el dual topológico de los espacios normados separables dotados de la topología *-débil.

Veamos ahora algunos ejemplos contrarios. Recordemos que un **F-espacio** es un e.v.t. con una métrica completa e invariante por traslaciones.

Ejemplo 3.3.4. (*Espacios que no son σ -Peano*).

- (a) Todo espacio σ -Peano es separable. En consecuencia, cualquier espacio que no sea separable no es σ -Peano. Por ejemplo, ℓ_∞ , el espacio de las sucesiones acotadas reales dotado de la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.
- (b) Los espacios σ -Peano siempre son σ -compactos (esto es, unión numerable de espacios compactos) debido a que los K_n de su definición son espacios de Peano, y por tanto, compactos.

Sin embargo, ningún F-espacio infinito dimensional es σ -compacto, y por tanto, no pueden ser σ -Peano. Por ejemplo, los espacios de Banach, dado que son F -espacios, no son σ -Peano.

La causa de que los F -espacios no sean σ -compactos es la Proposición 1.2.3 combinada con el hecho de que en un e.v.t. de dimensión infinita los conjuntos compactos tienen interior vacío. Como los F -espacios son espacios métricos, los subconjuntos compactos son cerrados, su clausura es igual al conjunto y tienen interior vacío. Es decir, los compactos son densos en ninguna parte. Una unión numerable de compactos sería un conjunto de primera categoría, pero por la proposición mencionada sabemos que los F -espacios, que son métricos y completos, son de segunda categoría y por tanto no de primera.

El siguiente resultado caracteriza a los espacios σ -Peano que tengan la propiedad de Hausdorff.

Proposición 3.3.5. *Si Y es un espacio topológico de Hausdorff, son equivalentes:*

- (a) Y es un espacio σ -Peano.
- (b) $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, Y) \neq \emptyset$.
- (c) $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, Y) \neq \emptyset$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) : Sea $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ una sucesión creciente de espacios de Peano contenidos en Y cuya unión es todo Y . Fijemos un punto $x_0 \in Y$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 \in K_n$ para todo $n \geq 1$. Por la Proposición 2.2.3, para cada $n \geq 1$ hay una curva de Peano $f_n : [n, n+1] \rightarrow K_n$ que empieza y termina en x_0 , es decir, $f_n(n) = x_0 = f_n(n+1)$. Uniendo todas estas curvas de Peano al camino constante $t \in (-\infty, 0] \mapsto x_0 \in K_1$, se obtiene una aplicación $F : \mathbb{R} \rightarrow Y$. Dado que $F^{-1}(x)$ es un conjunto no acotado para todo $x \in Y$, se tiene que $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, Y)$. En efecto, si $x \in K_n \subset Y$ para todo $n \geq n_0$, existen $r_n \in [n, n+1]$ tales que $f_n(r_n) = F(r_n) = x$ para todo $n \geq n_0$, y por tanto $F^{-1}(x)$ contiene a $\{r_n : n \geq n_0\}$, que es no acotado.

(b) \Rightarrow (c) es trivial porque $\mathcal{CS}_\infty \subset \mathcal{CS}$.

(c) \Rightarrow (a) : Sea $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, Y)$. Por ser sobreyectiva, $Y = f(\mathbb{R})$. Entonces,

$$Y = f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f([-n, n]).$$

Definiendo $K_n := f([-n, n])$, está claro que K_n es un espacio de Peano por ser imagen continua de $[0, 1]$ (recordemos que $[n, n+1]$ y $[0, 1]$ son homeomorfos). Además es evidente que $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, y ya teníamos que la unión de todos ellos es Y , por lo que Y es un espacio σ -Peano. \square

Una de las consecuencias más evidentes de la proposición es que, de la misma forma que los espacios de Peano son imagen continua del intervalo $[0, 1]$, los espacios σ -Peano son imagen continua de \mathbb{R} . Esta es la idea con la que se definieron estos espacios, y como veremos en el próximo resultado, resulta ser de bastante utilidad, porque basta que haya una sola aplicación continua y sobreyectiva de \mathbb{R} en un e.v.t. Y para asegurar que $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, Y)$ sea maximal lineable.

Teorema 3.3.6. *Sea Y un e.v.t. σ -Peano. Entonces, $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, Y)$ es maximal lineable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, Y)$.*

Demostración. De nuevo, y por las mismas razones que en el Teorema 3.2.3, es suficiente probarlo solo para el caso $m = 1$.

En primer lugar, observemos que $\text{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, Y)) \leq \mathfrak{c}$. Como Y es imagen continua de \mathbb{R} por ser σ -Peano, existe f continua tal que $f(\mathbb{R}) = Y$. Al ser f sobreyectiva sobre su imagen, $\mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R}) \geq \text{card}(Y)$. Usando esta desigualdad y razonando como al final de la Sección 1.1, obtenemos $\text{card}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, Y)) \leq \text{card}(Y^{\mathbb{Q}}) \leq \mathfrak{c}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el teorema estará probado tan pronto como encontremos un espacio vectorial V con $\dim(V) = \mathfrak{c}$ y $V \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, Y)$.

Sea una biyección $h : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y sea

$$I_{k,n} := [h^{-1}(k, n), h^{-1}(k, n) + 1],$$

para todo $k, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $(I_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subintervalos compactos de $[0, +\infty)$ tales que $\bigcup_{k,n \in \mathbb{N}} I_{k,n} = [0, +\infty)$, siendo los interiores de los intervalos $I_{k,n}$ disjuntos dos a dos. Procediendo como en la construcción de la Proposición 3.3.5, para cada k podemos construir $F_k \in \mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, Y)$ con las siguientes propiedades por ser Y σ -Peano:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_k(I_{k,n})$ dibuja una curva que comienza en un punto x_0 de Y , recubre el n -ésimo espacio de Peano de Y , y termina de nuevo en x_0 . Recordemos que x_0 es un punto que pertenece a todos los espacios de Peano de Y . Vamos a suponer que $x_0 = 0_Y$, el elemento nulo de Y . Nótese que podemos hacerlo sin pérdida de generalidad sin más que hacer la traslación pertinente en Y .
- $F_k(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{k,n}) = Y$.
- $F_k \equiv 0_Y$ en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{j,n}$ para todo $j \neq k$.

Llegados a este punto, nos hace falta introducir un concepto de teoría de conjuntos. Una familia $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ de infinitos subconjuntos de \mathbb{N} se dice **casi disjunta** si $A_{\lambda} \cap A_{\lambda'}$ es finito siempre que $\lambda \neq \lambda'$. Un procedimiento habitual para generar una familia tal es el siguiente: sea $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una enumeración de los números racionales. Para cada irracional α , elegimos una subsucesión $\{q_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_{k_n} = \alpha$ y definimos $A_{\alpha} := \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por construcción, obtenemos que $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ es una familia de cardinal \mathfrak{c} formada por subconjuntos (de cardinal \aleph_0) casi disjuntos de \mathbb{N} .

Sea pues $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia obtenida según el procedimiento anterior. Definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$G_\lambda := \sum_{k \in J_\lambda} F_k : \mathbb{R} \rightarrow Y.$$

Como los interiores de los conjuntos $I_{k,n}$ son disjuntos dos a dos, si tenemos en cuenta las propiedades de F_k , está claro que G_λ está bien definida. De hecho,

$$G_\lambda = F_k \text{ sobre } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{k,n},$$

y su continuidad está asegurada porque las F_k son continuas y en los extremos de los intervalos $I_{k,n}$ valen 0_Y . Como obviamente $0_Y + 0_Y = 0_Y$, G_λ es continua en todo \mathbb{R} .

El interés de la construcción de estas funciones, que ha llevado casi toda la demostración hasta ahora, es ver que

$$V := \text{span}\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

nos aporta la lineabilidad maximal. Comprobémoslo.

Las G_λ son linealmente independientes por su definición y por ser J_λ casi disjuntos. Efectivamente, si tenemos $G_{\lambda_1}, \dots, G_{\lambda_N}$ distintas y $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{R}$ tales que $\mu_1 G_{\lambda_1} + \dots + \mu_N G_{\lambda_N} = 0$, como los J_{λ_i} son casi disjuntos, para todo $i = 1, \dots, N$ existen $t_i \in J_{\lambda_i}$ tales que no pertenecen a los J_{λ_j} para $j \neq i$. Por ello, $G_{\lambda_i}(t_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, N$ y $G_{\lambda_j}(t_i) = 0$ para todo $i \neq j$, por lo que obtenemos que $\mu_1 = \dots = \mu_N = 0$.

Además, está claro que hay \mathfrak{c} de ellas por la manera en la que se construyeron los J_λ , ya que $\Lambda = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y este último tiene cardinal \mathfrak{c} .

Queda ver que $V \setminus \{0\} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, Y)$. Si $G \in V$, existen $G_{\lambda_1}, \dots, G_{\lambda_N}$ distintas y $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, con $\alpha_N \neq 0$ (podemos asumirlo sin pérdida de generalidad sin más que cambiar el orden), tales que

$$G = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot G_{\lambda_n}.$$

Como $J_{\lambda_N} \setminus (\bigcup_{i=1}^{N-1} J_{\lambda_i})$ es infinito, podemos tomar y fijar $k_0 \in J_{\lambda_N} \setminus (\bigcup_{i=1}^{N-1} J_{\lambda_i})$. Nótese que entonces

$$G_{\lambda_1} = \dots = G_{\lambda_{N-1}} \equiv 0 \text{ sobre } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{k_0, n} \quad \text{y} \quad G_{\lambda_N} = F_{k_0} \text{ sobre } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{k_0, n}.$$

Consecuentemente,

$$G = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot G_{\lambda_n} = \alpha_N \cdot F_{k_0} \text{ sobre } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{k_0, n}.$$

Entonces G es un elemento de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, Y)$, porque la imagen de \mathbb{R} por G contiene a $\alpha_N \cdot F_{k_0}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{k_0, n}) = \alpha_N Y = Y$ y cada vector de Y es la imagen por F_{k_0} de un conjunto no acotado. \square

Este resultado es bastante útil. Provee una prueba alternativa al Teorema 3.1.5, y también a la segunda parte de la versión general del Teorema 3.1.6. Además, junto con el apartado (c) del Ejemplo 3.3.3, prueba lo siguiente

Corolario 3.3.7. *Sea \mathcal{N} un espacio normado separable y sea \mathcal{N}' su dual topológico dotado de la topología $*$ -débil. Entonces $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{N}')$ es maximal lineable.*

De hecho, por lo comentado en el Ejemplo 3.3.3, el resultado se tiene en un marco más general: si Y es un e.v.t. separable y su dual topológico Y' con la topología $*$ -débil es recubierto por subconjuntos ($*$ -débil) compactos, entonces $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, Y')$ es maximal lineable.

3.4. Curvas de Peano en espacios de sucesiones

Continuando con los resultados de [2], a lo largo de esta sección trabajaremos con el espacio de las sucesiones reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ y algunos de sus subespacios, aprovechando los resultados de la sección anterior para estudiar la posible lineabilidad de las sobreyecciones continuas de \mathbb{R} en estos subespacios.

Recordamos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (y también $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) es un F-espacio con la métrica

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad (3.16)$$

y que además la topología asociada a esta métrica es la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tal y como se prueba en [17, p. 175]. Por el Ejemplo 3.3.4 está claro que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no es σ -Peano, y como consecuencia de la Proposición 3.3.5, se tiene que $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \emptyset$, tal y como Albuquerque ya advirtió en [1]. No tiene sentido por tanto hablar de su

lineabilidad. Lo mismo pasa con $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$: si suponemos por reducción al absurdo que existe $f \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, como ya hemos visto que existe $F \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, llegamos a que $f \circ F \in \mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ y logramos la contradicción.

Sin embargo, si buscamos subespacios infinito dimensionales de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que puedan ser σ -Peano, encontramos inmediatamente los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.4.1. El espacio $(\ell_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ no es separable y por tanto no es σ -Peano, como ya dijimos en el Ejemplo 3.3.4. Sin embargo, si dotamos a este espacio de la topología heredada de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es decir, si lo consideramos un espacio métrico con la distancia definida a través de (3.16), ℓ_{∞} sí es σ -Peano. De hecho, $\ell_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]^{\mathbb{N}}$. Por tanto, el Teorema 3.3.6 prueba que $\mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, (\ell_{\infty}, \tau_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}))$ es maximal lineable. Todo lo anterior es aplicable tanto a $\ell_{\infty}(\mathbb{R})$ como a $\ell_{\infty}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, donde los espacios de Peano serían $K_n = \overline{B}(0; n)^{\mathbb{N}}$.

Ejemplo 3.4.2. El espacio $c_{00}(\mathbb{R})$ de las sucesiones reales convergentes a 0 en un número finito de términos dotado de su topología natural, la inducida por la norma $\|\cdot\|_{\infty}$, es un espacio σ -Peano. En efecto, $I_n := [-n, n]^n \times \{0\}^{\mathbb{N}} \subset c_{00}$ define una sucesión creciente de espacios de Peano en c_{00} cuya unión resulta ser el espacio entero. El espacio $(c_{00}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ también es σ -Peano.

Teniendo en cuenta los ejemplos, el siguiente resultado es inmediato por el Teorema 3.3.6.

Proposición 3.4.3. *El conjunto $\mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}^m, c_{00}(\mathbb{R}))$ es maximal lineable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, c_{00}(\mathbb{R}))$.*

Sin embargo, daremos una prueba directa basándonos en las demostraciones del Lema 3.1.3 del Teorema 3.1.5, ya que más tarde nos será de utilidad en el Teorema 3.4.4.

Demostración. Por los mismos motivos que en los teoremas anteriores, sólo probaremos el resultado para $m = 1$. Sean pues $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ y $\ell_{\infty}^+ := (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}} \cap \ell_{\infty}$. Para $\mathbf{r} = (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\infty}^+$, definimos $\Phi_{\mathbf{r}} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por

$$\Phi_{\mathbf{r}}((t_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (\phi_{r_n}(t_n))_{n \in \mathbb{N}},$$

donde $\phi_r(t) := e^{rt} - e^{-rt}$ para $r \in \mathbb{R}^+$, función que ya vimos antes en el Lema 3.1.3. Como $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, $\Phi_{\mathbf{r}}$ también es una biyección, actuando coordenada a

coordenada. La prueba del teorema se basa en probar que la restricción $\Phi_r : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ está bien definida y es continua en $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Veamos primero que está bien definida. Para $(t_n)_n \in \ell_\infty$ y para todo n , tenemos

$$\begin{aligned} |\phi_{r_n}(t_n)| &= |e^{r_n t_n} - e^{-r_n t_n}| = \frac{|e^{r_n t_n} - e^{-r_n t_n}| + |e^{r_n t_n} - e^{-r_n t_n}|}{2} \\ &\leq \frac{|e^{r_n t_n}| + |e^{-r_n t_n}| + |e^{r_n t_n} - e^{-r_n t_n}|}{2} = \frac{e^{r_n t_n} + e^{-r_n t_n} + |e^{r_n t_n} - e^{-r_n t_n}|}{2} \\ &= \max\{e^{r_n t_n}, e^{-r_n t_n}\} = e^{r_n |t_n|} \leq e^C, \end{aligned}$$

para alguna constante positiva C . En consecuencia, $\Phi_{\mathbf{r}}((t_n)_{n \in \mathbb{N}})$ está acotada y pertenece a ℓ_∞ .

Queda ver la continuidad de $\Phi_{\mathbf{r}}$. Sean $s \in \mathbb{R}$ y $t \in [s-1, s+1]$. Por el Teorema del Valor Medio, existe $\zeta = \zeta(t, s, n) \in [s-1, s+1]$ tal que

$$|\phi_{r_n}(t) - \phi_{r_n}(s)| = |\phi'_{r_n}(\zeta)| \cdot |t - s|.$$

Pero como $\mathbf{r} \in \ell_\infty^+$,

$$|\phi'_{r_n}(u)| = r_n(e^{r_n u} - e^{-r_n u}) \leq r_n e^{r_n |u|} \leq \|\mathbf{r}\|_\infty e^{\|\mathbf{r}\|_\infty |u|},$$

para todo $u \in \mathbb{R}$. En particular, para $u = \zeta$ se tiene $|u| \leq 1 + |s|$, por lo que

$$|\phi_{r_n}(t) - \phi_{r_n}(s)| \leq \|\mathbf{r}\|_\infty e^{\|\mathbf{r}\|_\infty (1+|s|)} |t - s|.$$

Si ahora fijamos $\mathbf{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y consideramos $\mathbf{t} = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ con $\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|_\infty \leq 1$, por la desigualdad precedente tenemos

$$\|\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) - \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{s})\|_\infty \leq \|\mathbf{r}\|_\infty e^{\|\mathbf{r}\|_\infty (1+|\mathbf{s}|)} \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|_\infty,$$

lo que asegura la continuidad de $\Phi_{\mathbf{r}}$.

Dado que $\phi_r(0) = 0$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$, podemos restringir de nuevo $\Phi_{\mathbf{r}} : c_{00} \rightarrow c_{00}$, donde la aplicación sigue estando bien definida y es continua al heredar estas propiedades por estar $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \subset (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Entonces, si fijamos una aplicación $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, c_{00})$ (sabemos que existen tales aplicaciones por la Proposición 3.3.5 y porque c_{00} es σ -Peano), el conjunto

$$\mathcal{C} := \{\Phi_{\mathbf{r}} \circ F\}_{\mathbf{r} \in \ell_\infty^+}$$

solo contiene funciones en $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, c_{00})$. Evidentemente, \mathcal{C} tiene cardinal \mathfrak{c} . Sus funciones son linealmente independientes puesto que, dadas $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{C}$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$,

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot G_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (\Phi_{r_i} \circ F) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_{r_i} \right) \circ F.$$

En particular esto implica $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_{r_i} = 0$, y se tiene que $\lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) por tenerse la independencia lineal componente a componente (recordemos que ya vimos en el Lema 3.1.3 que las ϕ_r son linealmente independientes). Además, $\text{span}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{CS}(\mathbb{R}, c_{00})$: la continuidad de sus elementos es evidente, y la sobreyectividad se tiene componente a componente por las razones que se vieron, una vez más, en el Lema 3.1.3. Por tanto, $\text{span}(\mathcal{C})$ nos da la lineabilidad maximal. \square

Con las herramientas del teorema anterior, puede ahora probarse un resultado que extiende el Teorema 3.2.3 al espacio de las sucesiones complejas. Veremos la demostración sin entrar en detalles.

Teorema 3.4.4. *El conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, c_{00}(\mathbb{C}))$ es fuertemente maximal algebraable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, c_{00}(\mathbb{C}))$.*

Demostración. De nuevo, es suficiente con tratar el caso $m = 1$. La prueba combina la prueba anterior con las ideas del Teorema 3.2.3. Sea $A := (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$, y sea $\varphi_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera de orden $s > 0$ y tal que $\varphi_s(0) = 0$ (basta tomar $\varphi_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n/s}}$). Para cada $\mathbf{r} = (r_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, la aplicación

$$\Phi_{\mathbf{r}} := (\varphi_{r_n})_{n \in \mathbb{N}} : c_{00}(\mathbb{C}) \rightarrow c_{00}(\mathbb{C})$$

está bien definida, es continua y es sobreyectiva. Por tanto, dada una aplicación

$$F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, c_{00}(\mathbb{C})),$$

el conjunto $\{\Phi_{\mathbf{r}} \circ F\}_{\mathbf{r} \in A^{\mathbb{N}}}$ genera un álgebra libre, que provee la algebrabilidad maximal fuerte de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^m, c_{00}(\mathbb{C}))$. \square

De la misma manera que se ha hecho en la demostración, dada $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, (\ell_\infty, \tau_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}))$, el conjunto $\{\Phi_{\mathbf{r}}|_{\ell_\infty} \circ F\}_{\mathbf{r} \in \ell_\infty^+}$ aportaría la lineabilidad máxima de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, (\ell_\infty, \tau_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}))$.

Es más, con las adaptaciones apropiadas, una prueba similar aseguraría que el conjunto $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, (\ell_\infty(\mathbb{C}), \tau_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}))$ es fuertemente maximal algebraable en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, (\ell_\infty(\mathbb{C}), \tau_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}))$.

3.5. Curvas de Peano en espacios de funciones

En esta última sección extenderemos los resultados de la sección anterior a espacios de funciones. Sea Λ un conjunto infinito de índices. Tal y como se explica en [17, p. 124, 267], el espacio \mathbb{R}^Λ de las funciones $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ es un espacio métrico completo dotado de la métrica uniforme

$$\rho_u(f, g) := \sup_{\lambda \in \Lambda} \min\{1, |f(\lambda) - g(\lambda)|\}, \quad (3.17)$$

que además es la que provee la topología *uniforme* de \mathbb{R}^Λ , estrictamente más fina que la topología producto de este espacio. Nótese que \mathbb{R}^Λ no es σ -Peano.

En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{R}^\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, con K_n subconjuntos compactos de \mathbb{R}^Λ . Viendo a \mathbb{N} como un subconjunto de Λ , podemos considerar la proyección $\pi_n : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. Como es continua, $\pi_n(K_n) \subset \mathbb{R}$ es compacto para todo n , y dado que \mathbb{R} no es compacto, necesariamente $\pi_n(K_n) \neq \mathbb{R}$ y existe $x_n \in \mathbb{R} \setminus \pi_n(K_n)$. Entonces, la función $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = x_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y $f(\lambda) = 0$ si $\lambda \notin \mathbb{N}$. Como esta función no pertenece a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^\Lambda$, llegamos a contradicción.

En consecuencia, en virtud de la Proposición 3.3.5, $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\Lambda) = \emptyset$, de forma similar a lo que encontramos en la sección anterior con $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Es más, al igual que en dicha sección, también se extiende el resultado a $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\Lambda) = \emptyset$. Sin embargo, si consideramos que el espacio de salida tiene dimensión infinita la cosa cambia.

Sean Λ y Γ conjuntos de índices infinitos. Por definición, si $\text{card}(\Lambda) \geq \text{card}(\Gamma)$, el conjunto de sobreyecciones de \mathbb{R}^Λ en \mathbb{R}^Γ es no vacío. Podemos interpretar por tanto a Γ como un subconjunto de Λ . En consecuencia, manteniendo la notación de la Proposición 3.4.3, para cada $\mathbf{r} = (r_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in (0, 1]^\Gamma$, definimos $\Phi_{\mathbf{r}} : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ como $\Phi_{\mathbf{r}}(f)(\gamma) := \phi_{r_\gamma}(f(\gamma))$. De forma similar a la vista en la proposición mencionada, se obtiene que $\Phi_{\mathbf{r}}$ es continua. Trabajando con $\{\Phi_{\mathbf{r}} : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma\}_{\mathbf{r} \in (0, 1]^\Gamma}$ y con las aplicaciones enteras de la tercera sección, se obtiene

Proposición 3.5.1. *Si $\text{card}(\Lambda) \geq \text{card}(\Gamma)$, entonces*

- (a) $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^\Lambda, \mathbb{R}^\Gamma)$ es $2^{\text{card}(\Gamma)}$ -lineable.
- (b) $\mathcal{CS}(\mathbb{C}^\Lambda, \mathbb{C}^\Gamma)$ es $2^{\text{card}(\Gamma)}$ -algebrable.

No hay nada que pueda hacerse con el caso restante, es decir, si $\text{card}(\Lambda) \geq \text{card}(\Gamma)$. Bajo este supuesto, $\text{card}(\mathbb{R}^\Lambda) = 2^{\text{card}(\Lambda)} \leq 2^{\text{card}(\Gamma)} = \text{card}(\mathbb{R}^\Gamma)$. Si suponemos ciertos los axiomas de Zermelo-Fraenkel y la hipótesis del continuo generalizada, tenemos que $\text{card}(\Lambda) \geq \text{card}(\Gamma)$ implica $2^{\text{card}(\Lambda)} < 2^{\text{card}(\Gamma)}$. Así, con esta axiomática tenemos que no hay ninguna sobreyección de \mathbb{R}^Λ a \mathbb{R}^Γ , y por tanto $\mathcal{CS}(\mathbb{C}^\Lambda, \mathbb{C}^\Gamma) = \emptyset$.

Capítulo 4

Curvas de Peano en $\mathcal{C}(I, Y)$

4.1. Propiedades topológico-algebraicas de \mathcal{P}

Recordemos que denotábamos a la familia de las curvas de Peano como $\mathcal{P} := \mathcal{CS}(I, I^2)$. De ahora en adelante, si Y es un espacio de Peano, denotaremos $\mathcal{P}_Y (:= \mathcal{CS}(I, Y))$. En particular, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{I^2}$.

A diferencia del capítulo anterior, dado que las funciones con las que trabajamos son continuas y parten del compacto I , su imagen $f(I)$ también será compacta y por tanto “no muy grande” si trabajamos dentro de un espacio ambiente mayor. Por ejemplo, si tomamos una curva de \mathcal{P} , su imagen será I^2 , que es todo el espacio si consideramos $Y = I^2$, o bien un conjunto “muy pequeño” si lo comparamos con su espacio ambiente \mathbb{R}^2 . Esto es consistente con la idea de que \mathcal{P} es “pequeño” dentro de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Es más, no tiene sentido estudiar la lineabilidad de \mathcal{P} , pues esta familia ni siquiera es estable para las homotecias: si tomamos la curva de Peano original y la multiplicamos por 2 se sale del conjunto.

Sin embargo, sí que podemos hacer un estudio de su tamaño topológico y también buscar otro tipo de estructura algebraica dentro del conjunto, considerando \mathcal{P} como subespacio de $\mathcal{C}(I, I^2)$. También encontraremos resultados topológicos para \mathcal{P}_Y como subespacio de $\mathcal{C}(I, Y)$. Lo haremos siguiendo [4].

4.1.1. Topología de \mathcal{P} y \mathcal{P}_Y

Definición 4.1.1. *Dados un espacio topológico X y un espacio métrico (Y, d) , definimos la métrica del supremo en $\mathcal{C}(X, Y)$ como*

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)). \quad (4.1)$$

Como se explica en [17, p. 268], esta métrica está relacionada con la métrica uniforme definida al final del capítulo anterior de la forma $\rho_u = \min\{\rho(f, g), 1\}$. Además, si (Y, d) es un espacio métrico completo, $(\mathcal{C}(X, Y), \rho)$ también lo es. En particular, tenemos

- $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2), \rho)$ es un espacio métrico completo, partiendo de que (\mathbb{R}^2, d_∞) lo es. Nótese que $d_\infty((a, b), (c, d)) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$.
- Si Y es un espacio de Peano, entonces $(\mathcal{C}(I, Y), \rho)$ es un espacio métrico completo. En efecto, como los espacios de Peano son compactos y metrizables, por [17, Teorema 45.1] cualquier distancia que genere su topología es completa.

En consecuencia, del segundo punto se sigue que \mathcal{P} es un espacio métrico completo. Además, si vemos \mathcal{P} como un subespacio topológico cerrado de $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2), \rho)$, por [23, Teorema 24.10] tenemos que esta métrica ρ hace de \mathcal{P} un espacio métrico completo. Obsérvese que \mathcal{P} es cerrado en $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2), \rho)$, por ser I^2 acotado y porque la convergencia uniforme implica la puntual.

Observación 4.1.2. En virtud de lo anterior, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{C}(I, Y)$ y \mathcal{P} son espacios métricos completos y consecuentemente espacios de Baire.

Vamos a ver ahora un resultado que nos muestra algunas propiedades topológicas de \mathcal{P}_Y . En concreto, teniendo en cuenta lo comentado al final de la Sección 1.2, el siguiente teorema asegura que \mathcal{P}_Y es “pequeño” topológicamente hablando, al tratarse de un conjunto de primera categoría.

Teorema 4.1.3. *Sea Y un espacio de Peano. Tenemos:*

- (1) \mathcal{P}_Y es cerrado en $\mathcal{C}(I, Y)$. En particular, \mathcal{P}_Y es un espacio completamente metrizable.
- (2) Si Y tiene al menos dos puntos, \mathcal{P}_Y no es compacto.

- (3) Asumamos que Y tiene al menos dos puntos y existe $y_0 \in Y$ cumpliendo la siguiente propiedad: dado un entorno U de y_0 , existe un entorno V de y_0 tal que $V \subset U$ y $V \setminus \{y_0\}$ es conexo por caminos. Entonces, $\mathcal{P}_Y^\circ = \emptyset$. En particular, por (1) \mathcal{P}_Y es denso en ninguna parte en $\mathcal{C}(I, Y)$.
- (4) En el caso $Y = I^2$, la familia de Peano $\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}$ es fuertemente porosa en $\mathcal{C}(I, I^2)$.

Demostración. (1) Sea $F \in \mathcal{C}(I, Y)$ y $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en \mathcal{P}_Y tal que $f_n \rightarrow F$. Sea $y \in Y$. Como las f_n son sobreyectivas, existe una sucesión $(t_n)_{n \geq 1} \subset I$ tal que $f_n(t_n) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como I es compacto, podemos extraer una subsucesión $(t_{n_k})_{k \geq 1}$ convergente a algún punto $t_0 \in I$. Denotando por d a la distancia propia de Y , la continuidad de F asegura $\alpha_k := d(F(t_{n_k}), F(t_0)) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por la desigualdad triangular,

$$d(y, F(t_0)) \leq d(f_{n_k}(t_{n_k}), F(t_{n_k})) + d(F(t_{n_k}), F(t_0)) \leq \rho(f_{n_k}, F) + \alpha_k \rightarrow 0.$$

Por tanto, $d(y, F(t_0)) = 0$, o lo que es lo mismo, $F(t_0) = y$. Como $y \in Y$ era un punto arbitrario, F es sobreyectiva y $F \in \mathcal{P}_Y$, luego \mathcal{P}_Y es cerrado en $\mathcal{C}(I, Y)$.

(2) Sean $y, z \in Y$ con $y \neq z$ y sea $\varepsilon := d(y, z) > 0$. Fijamos $\delta \in (0, 1)$. Por la Proposición 2.2.3, existe una sobreyección continua $\Phi : [0, \delta/2] \rightarrow Y$ con $\Phi(0) = y = \Phi(\delta/2)$. En particular, existe $v \in [0, \delta/2]$ tal que $\Phi(v) = z$. Extendiendo Φ como y en $(\delta/2, 1]$ y definiendo $u := 0$, encontramos dos puntos $u, v \in I$ y una aplicación $\Phi \in \mathcal{P}_Y$ tales que $|u - v| < \delta$ pero $d(\Phi(u), \Phi(v)) \geq \varepsilon$. En otras palabras, la familia \mathcal{P}_Y no es equicontinua. De acuerdo con el teorema generalizado de Arzelá [16, p.119], \mathcal{P}_Y no puede ser relativamente compacto, y por tanto no es compacto.

(3) Considérese un punto $y_0 \in Y$ en las hipótesis del enunciado. Por reducción al absurdo, consideremos que $\mathcal{P}_Y^\circ \neq \emptyset$. Entonces existen $f \in \mathcal{P}_Y$ y $r > 0$ tales que $B_\rho(f, r) \subset \mathcal{P}_Y$. En otras palabras, si $g \in \mathcal{C}(I, Y)$ y $\rho(g, f) < r$, entonces $g(I) = Y$.

Por un lado, puede encontrarse un entorno V de y_0 tal que $B_d(y_0, r/2) \supset V$ y $V \setminus \{y_0\}$ es conexo por caminos. Por otro lado, existe una bola cerrada $\overline{B}_d(y_0, s) \subset V$. Como f es continua, el conjunto $f^{-1}(B_d(y_0, s))$ es abierto en I , por lo que es unión numerable de conjuntos de la forma (α, β) , $[0, \beta)$, $(\alpha, 1]$. Como ni α ni β pertenecen a los intervalos, en los tres casos tenemos $f(\alpha) \neq y_0 \neq f(\beta)$, si bien la continuidad de f implica $f(\alpha), f(\beta) \in \overline{B}_d(y_0, s)$. Entonces, $f(\alpha), f(\beta) \in V \setminus \{y_0\}$, que es conexo

por caminos. Por tanto, en el primer caso, podemos encontrar una aplicación continua $h = h_{\alpha, \beta} : [\alpha, \beta] \rightarrow V \setminus \{y_0\}$ cumpliendo $h(\alpha) = f(\alpha)$ y $h(\beta) = f(\beta)$.

Definimos la aplicación $g : I \rightarrow Y$ como sigue: $g(t) = f(t)$ si $t \in I \setminus f^{-1}(B_d(y_0, s))$; $g(t) = h_{\alpha, \beta}(t)$ si t pertenece a uno de los intervalos (α, β) de $f^{-1}(B_d(y_0, s))$; $g(t) = f(\beta)$ si $t \in [0, \beta) \subset f^{-1}(B_d(y_0, s))$; y $g(t) = f(\alpha)$ si $t \in (\alpha, 1] \subset f^{-1}(B_d(y_0, s))$. Es evidente que g es continua y que $g(t) \neq y_0$ para todo $t \in I$, luego $g \notin \mathcal{P}_Y$. Ahora bien, la desigualdad triangular y el hecho de que $s < r/2$ asegura $d(g(t), f(t)) < r$ para todo $t \in I$, luego $g \in B_\rho(f, r) \subset \mathcal{P}_Y$. Esta contradicción prueba (3).

(4) Sean $\alpha \in (0, 1)$, $f \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\rho(f, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(I, I^2)$. Definimos $f_0 := (1 - \frac{\varepsilon}{2})f$. Trivialmente, $f_0 \in \mathcal{C}(I, I^2)$. Además,

$$\rho(f, f_0) = \sup_{t \in I} \left\| f(t) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) f(t) \right\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t \in I} \|f(t)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

por lo que $f_0 \in B_\rho(f, \varepsilon)$. Sea $g \in B_\rho(f_0, \alpha\rho(f, f_0))$. Entonces $d_\infty(g(t), f_0(t)) \leq \alpha\rho(f, f_0) \leq \alpha\varepsilon/2$ para todo $t \in I$. Por la desigualdad triangular y por la definición de f_0 ,

$$\|g(t)\|_\infty = \|g(t) - f_0(t) + f_0(t) - 0\|_\infty \leq \alpha\rho(f, f_0) + \|f_0(t)\|_\infty \leq \alpha\frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1.$$

En consecuencia, $g(I) \neq I^2$ para toda $g \in B_\rho(f_0, \alpha\rho(f, f_0))$, por lo que estas funciones no son sobreyectivas y $B_\rho(f_0, \alpha\rho(f, f_0)) \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Como α puede tomarse arbitrariamente cerca de 1, esto significa que \mathcal{P} es fuertemente poroso en $\mathcal{C}(I, I^2)$. \square

Observación 4.1.4. Evidentemente, la condición de (3) se verifica si $Y = I^2$, pero la conclusión de (4) es más fuerte que la de (3). Nótese que la hipótesis de (3) sobre Y realmente es necesaria para obtener $\mathcal{P}_Y^\circ = \emptyset$. Por ejemplo, para el círculo unidad $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, que claramente no satisface la condición mencionada, tenemos $\mathcal{P}_{S^1}^\circ \neq \emptyset$. De hecho, no es difícil mostrar que para la aplicación $f \in \mathcal{P}_{S^1}$ que recorre S^1 dos veces en sentido antihorario enviando $t \in I \rightarrow (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) \in S^1$, se tiene $B_\rho(f, 1/2) \subset \mathcal{P}_{S^1}$. En efecto, esta bola es lo suficientemente pequeña para que cualquier aplicación $g : I \rightarrow S^1$ perteneciente a la misma se vea obligada a recorrer al menos una vez toda la circunferencia S^1 al no mantenerse muy alejada de f , que la recorre dos veces.

4.1.2. Semigrupabilidad de \mathcal{P}

Hemos visto que \mathcal{P} es topológicamente “pequeño” y que algebraicamente también lo es, en el sentido de que no contiene ningún espacio vectorial. No obstante, vamos a ver que podemos encontrar otra estructura algebraica menos compleja dentro de este conjunto: un semigrupo. Antes daremos las definiciones pertinentes.

Definición 4.1.5. *Un semigrupo es una estructura algebraica de la forma (X, \odot) , en la cual X es un conjunto no vacío y \odot es una operación interna asociativa definida en X :*

$$\begin{aligned} \odot : X \times X &\longrightarrow X \\ (a, b) &\longmapsto c = a \odot b. \end{aligned}$$

Definición 4.1.6. *Se dice que un semigrupo X es infinitamente generado siempre que no sea finitamente generado, esto es, si no existe un conjunto finito $F \subset X$ tal que cada $x \in G$ pueda ser escrito como un producto finito $x = a_1^{m_1} \odot \cdots \odot a_p^{m_p}$, con $a_1, \dots, a_p \in F$ y $p, m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ (dependiendo p, a_i y m_i de x).*

Nótese que las a_i de la definición no tienen por qué ser necesariamente diferentes, puesto que el semigrupo puede ser no conmutativo. Sin embargo, en el caso que vamos a estudiar, $X = \mathcal{C}(I, I^2)$, el producto estará dado por la multiplicación coordenada a coordenada y si será conmutativo, por lo que las a_i sí serán diferentes.

Definición 4.1.7. *Sea (X, \odot) un semigrupo y sea $A \subset X$. Diremos que A es semigrupable si existe un subsemigrupo infinitamente generado $G \subset A$.*

Teorema 4.1.8. *El conjunto \mathcal{P} es semigrupable en $\mathcal{C}(I, I^2)$.*

Demostración. Sea una sucesión $(a_n) \subset I$ con $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots \rightarrow 1$. Sea $a_0 := 0$. De acuerdo con la Proposición 2.2.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una aplicación $f_n \in \mathcal{CS}([a_{n-1}, a_n], I^2)$ con $f_n(a_{n-1}) = (1, 1) = f_n(a_n)$. Podemos extender de forma continua f_n a I definiendo $f_n(t) = (1, 1)$ si $t \in I \setminus [a_{n-1}, a_n]$. Entonces, $f_n \in \mathcal{P}$ y, trivialmente, cada potencia f_n^m sigue perteneciendo a \mathcal{P} (se usa el producto coordenada a coordenada). Consideremos el subsemigrupo G generado por $\{f_n\}_{n \geq 1}$. Dada $\Phi \in G$, existen $p \in \mathbb{N}, \{i_1 < \dots < i_p\} \subset \mathbb{N}$ y $\{m_1, \dots, m_p\} \subset \mathbb{N}$ tales que $\Phi = f_{i_1}^{m_1} \cdots f_{i_p}^{m_p}$. Como

$$I^2 \supset \Phi(I) \supset \Phi([a_{i_p-1}, a_{i_p}]) = f_{i_p}^{m_p}([a_{i_p-1}, a_{i_p}]) = I^2,$$

obtenemos $\Phi(I) = I^2$, o lo que es lo mismo, $G \subset \mathcal{P}$. Todo lo que queda por probar es que G es infinitamente generado. Asumamos, por reducción al absurdo, que estuviera generado por una cantidad finita de elementos de G . Teniendo en cuenta la estructura de G y el hecho de que G es conmutativo, tendría que existir $p \in \mathbb{N}$ tal que cada $\Phi \in G$ pudiera ser escrito como $\Phi = f_1^{m_1} \cdots f_p^{m_p}$, para $m_1, \dots, m_p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ dependiendo de Φ . Pero tomando $\Phi = f_{p+1}$, la expresión del producto previo no es posible, porque $f_j(t) = (1, 1)$ para todo $t \in [a_p, a_{p+1}]$ y todo $j = 1, \dots, p$. Luego llegamos a contradicción. \square

Observación 4.1.9. Si \mathcal{P} es considerado subconjunto del grupo aditivo $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2), +)$, entonces la suma de dos aplicaciones de \mathcal{P} no tiene por qué ser otra aplicación de \mathcal{P} . Sin embargo, podemos decir al menos lo siguiente: dado $N \in \mathbb{N}$, existen funciones $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{P}$ tales que $f_1 + \cdots + f_N \in \mathcal{P}$. De hecho, esto se cumple si para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ tomamos f_i como la aplicación Φ de la Proposición 2.2.3 para $Y = I^2, [a, b] = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}], u = (0, 0) = v$, extendida como $(0, 0)$ para el resto de I . Pero no se puede encontrar una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}$ tal que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converja uniformemente a alguna función porque, si este fuera el caso, por la condición necesaria de convergencia se tendría $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \|f_n(t)\|_\infty = 0$, que claramente no es posible dado que $\sup_{t \in I} \|f_n(t)\|_\infty = 1$ para todo n . No se sabe si hay una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}$ tal que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converja puntualmente a una función $f \in \mathcal{P}$.

4.2. Curvas que rellenan espacio

Como ya vimos al principio del capítulo anterior, no existen funciones continuas y sobreyectivas de I en \mathbb{R}^2 por no ser compacto este último. Sin embargo, una noción más general que curvas de Peano nos permite encontrar resultados interesantes teniendo a $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ como espacio ambiente. Las curvas de Peano son funciones continuas y sobreyectivas, y en consecuencia rellenan todo el área del espacio de llegada de forma continua. En lugar de eso, vamos a buscar funciones continuas cuya imagen tenga área, aunque no sea toda el área de \mathbb{R}^2 . Es decir, vamos a buscar curvas que rellenen área. Antes de ello vamos a recordar dos nociones diferentes de medida en el plano.

Definición 4.2.1. Sea S un conjunto acotado de \mathbb{R}^2 . Los contenidos interior y exterior de Jordan se definen, respectivamente, mediante la **integral inferior o superior de**

Riemann de χ_S , donde χ_S denota la función característica de S , es decir,

$$\underline{c}(S) = \int \chi_S dx dy = \inf \left\{ \sum_k m(I_k); I_k \in P, I_k \subset S^\circ; P \in P(R) \right\},$$

$$\bar{c}(S) = \int \chi_S dx dy = \sup \left\{ \sum_k m(I_k); I_k \in P, I_k \cap \bar{S}; P \in P(R) \right\},$$

donde R es un rectángulo conteniendo a S y $P(R)$ es el conjunto de las particiones finitas de R en subintervalos I_k . El conjunto S se dice **medible Jordan** si $\underline{c}(S) = \bar{c}(S)$, en cuyo caso a su valor común $c(S)$ se le denomina **contenido** o **medida de Jordan**. Nótese que esto pasa si y solo si χ_S es integrable Riemann.

La siguiente proposición caracteriza a los conjuntos con medida de Jordan positiva.

Proposición 4.2.2. *Dado un conjunto medible Jordan acotado $S \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que $c(S) > 0$ si y solo si $S^\circ \neq \emptyset$.*

Hay conjuntos de sobra conocidos que no son medibles Jordan, como por ejemplo \mathbb{Q}^2 . Este problema se solventa con una medida más general, la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^2 , que denotaremos por λ . Recordemos que χ_S es integrable Riemann si y solo si $\lambda(\partial S) = 0$. Además, si S es integrable Riemann también es integrable Lebesgue y sus medidas coinciden, esto es, $c(S) = \lambda(S)$.

Con esto presente, damos la siguiente definición:

Definición 4.2.3. *Una aplicación continua $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice **curva que rellena espacio** si $\varphi(I)$ es medible Jordan y $c(\varphi(I)) > 0$. Al subconjunto de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ formado por todas las curvas que rellenan espacio se le denota \mathcal{SF} (space-filling curves).*

Observación 4.2.4. Teniendo en cuenta los párrafos anteriores,

$$\varphi \in \mathcal{SF} \text{ si y solo si } \lambda(\partial\varphi(I)) = 0 \text{ y } (\varphi(I))^\circ \neq \emptyset.$$

Observación 4.2.5. Directamente por definición, se tiene $\mathcal{P} \subset \mathcal{SF}$.

De forma similar a las curvas de \mathcal{SF} , se pueden definir las **curvas que λ -rellenan espacio** mediante la medida de Lebesgue. Al conjunto de estas curvas lo denotaremos $\lambda\text{-}\mathcal{SF}$. Cabe destacar que estas dos definiciones son distintas. De hecho, Osgood [20] construyó en 1903 una curva de Jordan (una función continua e inyectiva $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$)

tal que $\psi(I)$ es medible Lebesgue y $\lambda(\psi(I)) > 0$, pero no es medible Jordan y tiene interior vacío. Esto implica $\mathcal{SF} \subset \lambda\text{-}\mathcal{SF}$ lo que era esperable por ser la medida de Jordan más restrictiva que la de Lebesgue. Pero podemos afinar más definiendo un nuevo conjunto de curvas tales que su imagen $\varphi(I)$ tenga interior no vacío, ya sea o no medible Jordan.

Definición 4.2.6. Una aplicación continua $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice **curva que rellena espacio topológicamente** si $(\varphi(I))^\circ \neq \emptyset$. Al subconjunto de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ formado por todas estas curvas se le denota \mathcal{TSF} (topologically space-filling curves).

Proposición 4.2.7. Se tienen las contenciones estrictas $\mathcal{SF} \subset \mathcal{TSF} \subset \lambda\text{-}\mathcal{SF}$.

Demostración. Las contenciones se tienen simplemente por las definiciones de cada conjunto y por la Observación 4.2.4. Simplemente hay que probar que son estrictas. La curva de Osgood aporta $\mathcal{TSF} \subset \lambda\text{-}\mathcal{SF}$. La contención $\mathcal{SF} \subset \mathcal{TSF}$ también se obtiene utilizando esta curva. Efectivamente, podemos construir una curva que en $[0, 1/3]$ rellene I^2 como una curva de Peano y que en $[2/3, 1]$ sea la curva de Osgood, unidas por un segmento que la curva recorre en $[1/3, 2/3]$. Esta curva cumple que su imagen tiene interior no vacío (pues es el interior de I^2) y no es medible Jordan, por lo que la curva no pertenece a \mathcal{SF} pero sí a \mathcal{TSF} . \square

4.2.1. Propiedades de \mathcal{SF}

4.2.1.1. Topología de \mathcal{SF}

Nótese que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ con la distancia ρ definida en (4.1) es un F-espacio, es decir, un e.v.t. con una métrica completa e invariante por traslaciones. De hecho, es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\| := \rho(\cdot, 0)$.

Proposición 4.2.8. Se tienen las siguientes propiedades topológicas de \mathcal{SF} en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$:

- (a) \mathcal{SF} no es cerrado.
- (b) $\mathcal{SF}^\circ = \emptyset$
- (c) \mathcal{SF} es denso en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.

Demostración. (a) Sea $f \in \mathcal{P} \subset \mathcal{SF}$. Definiendo $f_n := (1/n)f \in \mathcal{SF}$ ($n \geq 1$), está claro que $f_n \rightarrow (0, 0) \notin \mathcal{SF}$, por lo que \mathcal{SF} no es cerrado.

(b) Sean $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ y $\varepsilon > 0$. Como I es compacto, por el Teorema de Heine-Cantor φ es uniformemente continua, luego si $\varphi(t) = (g(t), h(t))$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|g(t) - g(u)| < \varepsilon/2$ y $|h(t) - h(u)| < \varepsilon/2$ para todo $t, u \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ ($i = 1, \dots, N$).

Si definimos $\hat{g}, \hat{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ como las funciones poligonales cuyas gráficas unen los puntos $(\frac{i}{N}, g(\frac{i}{N}))$ ($i = 1, \dots, N$) y, respectivamente, los puntos $(\frac{i}{N}, h(\frac{i}{N}))$ ($i = 1, \dots, N$), entonces la aplicación $\hat{\varphi}(t) := (\hat{g}(t), \hat{h}(t))$ satisface $\hat{\varphi} \notin \mathcal{SF}$ y $\rho(\hat{\varphi}, \varphi) < \varepsilon$. Como ε se puede tomar arbitrariamente pequeño, resulta que \mathcal{SF} no contiene ninguna bola para la distancia ρ , luego no es abierto.

Veamos pues que $\rho(\hat{\varphi}, \varphi) = \sup_{t \in I} \max\{|g(t) - \hat{g}(t)|, |h(t) - \hat{h}(t)|\} < \varepsilon$. Como I es compacto, por el Teorema de Weierstrass existe $t_0 \in I$ donde el supremo se alcanza. En concreto, pertenecerá a uno de los intervalos $[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$, con lo que basta ver que $\max\{|g(t_0) - \hat{g}(t_0)|, |h(t_0) - \hat{h}(t_0)|\}$ para todo $t_0 \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$. Lo comprobaremos solo para h , siendo el cálculo exactamente igual para g .

$$\begin{aligned} |h(t_0) - \hat{h}(t_0)| &= \left| h(t_0) - \left(\frac{\frac{i}{N} - t_0}{\frac{1}{N}} \right) h\left(\frac{i-1}{N}\right) - \left(\frac{t_0 - \frac{i-1}{N}}{\frac{1}{N}} \right) h\left(\frac{i}{N}\right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{\frac{i}{N} - t_0}{\frac{1}{N}} \right) \left[h(t_0) - h\left(\frac{i-1}{N}\right) \right] + \left(\frac{t_0 - \frac{i-1}{N}}{\frac{1}{N}} \right) \left[h(t_0) - h\left(\frac{i}{N}\right) \right] \right| \\ &\leq \frac{|\frac{i}{N} - t_0|}{\frac{1}{N}} \left| h(t_0) - h\left(\frac{i-1}{N}\right) \right| + \frac{|t_0 - \frac{i-1}{N}|}{\frac{1}{N}} \left| h(t_0) - h\left(\frac{i}{N}\right) \right| \\ &\leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Fijemos una bola $B_\rho(f, \varepsilon)$. Como f es uniformemente continua en I , existe $\delta > 0$ tal que $\|f(u) - f(v)\|_\infty < \varepsilon/2$ si $|u - v| < \delta$. Elegimos una partición $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ con $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ ($j = 1, \dots, N$). Entonces tenemos $\|f(t_j) - f(t_{j-1})\|_\infty < \varepsilon/2$ ($j = 1, \dots, N$). Elegimos un rectángulo cerrado no degenerado $R = [a, b] \times [c, d]$ con $\max\{b - a, d - c\} < \varepsilon/2$ y $\{f(t_0), f(t_1)\} \subset R$. Elegimos además, en virtud de la Proposición 2.2.3, una aplicación $\varphi \in \mathcal{CS}([t_0, t_1], R)$ tal que $\varphi(t_1) = f(t_1)$. Definimos por último $g = (g_1, g_2)$ a trozos, en $[t_{j-1}, t_j]$ ($j = 2, \dots, N$) como la poligonal que une los puntos $f(t_j)$ (es decir, en estos intervalos g_1 y g_2 son lineales afines y cumplen $g(t_j) = f(t_j)$ ($j = 2, \dots, N$)) y en $[t_0, t_1]$ como φ . Está claro que $g \in \mathcal{SF}$. Procediendo de forma similar a lo hecho en (b) con la función h , se obtiene que además $g \in B_\rho(f, \varepsilon)$, lo que prueba la densidad de \mathcal{SF} . \square

4.2.1.2. Algebrabilidad de \mathcal{SF}

En esta subsección estudiaremos el tamaño algebraico de \mathcal{SF} , visto como un subconjunto de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. De hecho, en los siguientes teoremas se mostrará que \mathcal{SF} es “grande” en sentido algebraico. Para ello, necesitaremos previamente el siguiente lema.

Lema 4.2.9. *Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ tal que los soportes $\{t \in I : f_n(t) \neq 0\}$ ($n = 1, 2, \dots$) sean disjuntos. Entonces $(f_n)_{n \geq 1}$ es una **sucesión básica** en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ esto es, dado un elemento $f \in \overline{\text{span}}((f_n)_{n \geq 1})$, existe una única sucesión $(c_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ tal que $f = \sum_{n=1}^\infty c_n f_n$, teniéndose la convergencia uniforme (la convergencia en norma infinito).*

Demostración. Vamos a hacer uso del Teorema de Banach-Grünblum-Nikolskii, cuya prueba puede encontrarse en [11]. El teorema asegura que, si E es un espacio de Banach, una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset E \setminus \{0\}$ es básica si y solo si existe una constante $\alpha \in [1, +\infty)$ tal que, para cada par $r, s \in \mathbb{N}$ con $r \leq s$ y cada conjunto finito de escalares $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}$, se tenga

$$\left\| \sum_{n=1}^r a_n x_n \right\|_E \leq \alpha \left\| \sum_{n=1}^s a_n x_n \right\|_E$$

Nosotros aplicaremos el teorema en el espacio $E = (\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\infty)$. Para $\alpha = 1$, se tiene la desigualdad $\|\sum_{n=1}^r a_n x_n\|_\infty \leq \alpha \|\sum_{n=1}^s a_n x_n\|_\infty$ para todo par $r, s \in \mathbb{N}$ con $r \leq s$ y para todo conjunto de escalares $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}$ porque $\|\sum_{n=1}^r a_n x_n\|_\infty = \max_{1 \leq n \leq r} |a_n| \|f_n\|_\infty$ gracias a que los soportes de las f_n son disjuntos. \square

Teorema 4.2.10. *El conjunto \mathcal{SF} es espaciabile en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Además, es maximal lineable.*

Demostración. De la misma forma que en el Teorema 4.1.8, fijamos una sucesión $(a_n)_n \subset I$ estrictamente creciente y tal que $a_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$). Definimos $a_0 := 0$. De acuerdo con la Proposición 2.2.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una aplicación $f_n \in \mathcal{CS}([a_{n-1}, a_n], [-1, 1]^2)$ con $f_n(a_{n-1}) = (0, 0) = f_n(a_n)$.

Podemos extender de forma continua f_n a I definiendo $f_n(t) = (0, 0)$ si $t \in I \setminus [a_{n-1}, a_n]$. Como los soportes de estas funciones son mutuamente disjuntos, el Lema 4.2.9 asegura que $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión básica de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Definimos

$$M := \overline{\text{span}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

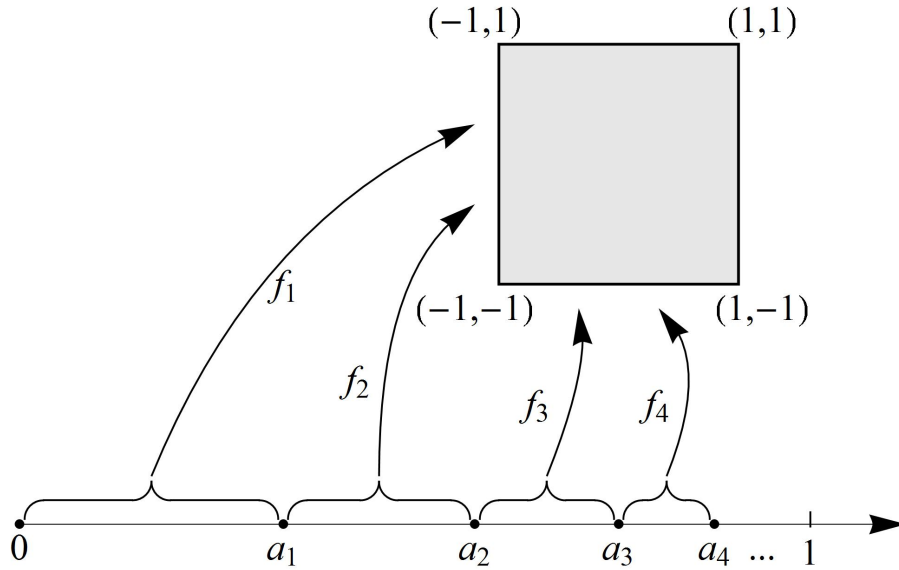


Figura 4.1: Construcción de las funciones f_n

Está claro que M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Más aún, es infinito dimensional porque las funciones f_n son linealmente independientes, pues si tomamos $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, y sabemos que sólo existe una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ cumpliendo esta propiedad por ser las f_n términos de una sucesión básica. Vamos a ver que M es el conjunto que nos aporta la espaciabilidad y la máxima lineabilidad de \mathcal{SF} , viendo que toda $f \in M \setminus \{0\}$ pertenece a \mathcal{SF} .

En efecto, sea $f \in M \setminus \{0\}$. Como las f_n forman una sucesión básica, existe una sucesión $(c_n) \subset \mathbb{R}$ con algún término $c_m \neq 0$ tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Nótese que la serie converge uniformemente en I . Por tanto $c_n f_n \rightarrow 0$ uniformemente en I , esto es $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| \sup_{t \in I} \|f_n(t)\|_{\infty} = 0$. Pero como $f_n(I) = [-1, 1]^2$, tenemos que $\sup_{t \in I} \|f_n(t)\|_{\infty} = 1$ para todo n , luego $c_n \rightarrow 0$. Por tanto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|c_p| = \max\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$. Consecuentemente, $f(I) = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n \geq 1} c_n f_n([a_{n-1}, a_n]) = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n \geq 1} |c_n| [-1, 1]^2 = |c_p| [-1, 1]^2 = [-|c_p|, |c_p|]^2$. Así, $f(I)$ es trivialmente medible Jordan y satisface $f(I)^{\circ} \neq \emptyset$, por lo que $f \in \mathcal{SF}$, como se requería.

La lineabilidad maximal de \mathcal{SF} viene del hecho de que $\dim(M) = \mathfrak{c} = \dim(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2))$. Ya sabíamos que M tiene dimensión infinita, por lo que lo único que tenemos que probar es que su dimensión no es \aleph_0 . Supongamos por reducción al absurdo que tiene una base numerable $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Definimos los conjuntos $M_n := \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n :$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Está claro que en esta situación $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Por otro lado, los conjuntos M_n son claramente cerrados, y además tienen interior vacío: si tomamos $\hat{e} \in M_n$, se tiene que para todo ε la bola $B_\rho(\hat{e}, \varepsilon) \not\subset M_n$. Efectivamente, si la distancia entre \hat{e} y e_{n+1} es $\rho(\hat{e}, e_{n+1}) = D$, el vector $(e_{n+1} - \hat{e}) \frac{\varepsilon}{D(\varepsilon+1)}$ pertenece a la bola $B_\rho(\hat{e}, \varepsilon)$ pero no a M_n . En consecuencia, los M_n son densos en ninguna parte y hemos expresado M como unión numerable de densos en ninguna parte. Pero como M era cerrado en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$, por [23, Teorema 24.10] tenemos que (M, ρ) es un espacio métrico completo, y por la Proposición 1.2.3, que es de segunda categoría en sí mismo, lo que implica que no puede expresarse como unión numerable de densos en ninguna parte. Aquí tenemos la contradicción. \square

De acuerdo con el último teorema y con el último punto de la Proposición 4.2.8, \mathcal{SF} es denso y lineable. Sin embargo, esto no implica que \mathcal{SF} sea denso lineable. Los autores de [4] conjeturan que el resultado es cierto, si bien no lograron probarlo. Por el contrario, sí que encontraron una prueba para la denso-lineabilidad maximal de la familia \mathcal{TSF} , que como ya vimos contiene estrictamente a \mathcal{SF} . El resultado es el objetivo de la siguiente subsección (Teorema 4.2.17). Las demostraciones que hay en ella están estrechamente relacionadas con las vistas en esta subsección, por lo que si se quiere hacer una lectura completa del texto puede ser recomendable pasar a verlas directamente.

No obstante, todavía queda por probar el resultado más fuerte que se tiene sobre \mathcal{SF} , también el último que veremos. Daremos un lema previo y veremos primero que el conjunto es algebraable antes de pasar a ver que es fuertemente algebraable. Recordemos que el espacio $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ tiene estructura de álgebra trabajando con la suma y el producto coordenada a coordenada.

Lema 4.2.11. *Sea $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase \mathcal{C}^1 (esto es, diferenciable y tal que la aplicación diferencial de S es continua). Sea R un compacto de \mathbb{R}^2 tal que ∂R es una curva de clase \mathcal{C}^1 a trozos. Entonces $\lambda(\partial S(R)) = 0$.*

Demostración. Denotemos por $J_S(x, y)$ a la matriz jacobiana de la transformación S en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dado que R es compacto en \mathbb{R}^2 (y por tanto también cerrado, por ser un subconjunto compacto de un espacio métrico), se tiene que $\partial S(R) \subset S(R) = S(R^\circ) \cup S(\partial R)$. Como S es localmente abierta en los puntos $(x, y) \in R^\circ$ con $\det J_S(x, y) \neq 0$, deducimos que $\partial S(R) \subset S(C) \cup S(\partial R)$, donde $C := \{(x, y) \in R^\circ : \det J_S(x, y) = 0\}$.

Por un lado, dado que S es \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^2 , el teorema de Sard (ver [21, p. 47]) asegura que $\lambda(S(C)) = 0$. Por otro lado, que S sea \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^2 y que ∂R sea \mathcal{C}^1 a trozos asegura, usando el teorema de cambio de variables, que

$$\lambda(S(\partial R)) \leq \int_{\partial R} |\det J_S| d\lambda \leq \sup_{\partial R} |\det J_S| \cdot \lambda(\partial R) = 0.$$

Por tanto, $\lambda(S(\partial R)) = 0$, o lo que es lo mismo, $\lambda(\partial S(R)) = 0$, como se requería. \square

Teorema 4.2.12. *El conjunto \mathcal{SF} es algebraable en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.*

Demostración. Consideremos una sucesión $(a_n)_n \subset I$ estrictamente creciente con $a_n \rightarrow 1$ y los intervalos $I_n = [a_n, a_{n+1}]$ ($n \geq 1$). Por la Proposición 2.2.3, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $g_n \in \mathcal{CS}(I_n, I^2)$ tal que $g_n(a_n) = (0, 0) = g_n(a_{n+1})$. Definimos la función continua $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como g_j sobre I_j ($j = 1, \dots, n$) y $(0, 0)$ sobre $I \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j$. Sea \mathcal{A} el álgebra generado por las f_n . Entonces, \mathcal{A} es infinitamente generado, porque cada f_n no puede escribirse como $P(f_1, \dots, f_{n-1})$, siendo P un polinomio no constante de $n-1$ variables reales. De hecho, tal función $P(f_1, \dots, f_{n-1})$ sería cero en I_n , lo que es absurdo por ser $f_n = g_n$ sobre I_n . Ahora, fijamos N y un polinomio no nulo $P(x_1, \dots, x_N)$ de N variables reales. Debe probarse que la aplicación $F := P(f_1, \dots, f_N)$ es idénticamente nula o pertenece a \mathcal{SF} . Nótese que no se requiere $F \not\equiv 0$ porque no se busca demostrar que \mathcal{A} sea un álgebra libre. Es más, vemos que \mathcal{A} no es un álgebra libre tomando por ejemplo el polinomio no nulo sin término constante $P(x, y) := x^2y - xy^2$, que verifica $P(f_1, f_2) \equiv (0, 0)$ por tener f_1 y f_2 soportes disjuntos.

Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que f_N aparece explícitamente en la expresión de $P(x_1, \dots, x_N)$ como suma de los monomios $x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N}$. Consideremos los polinomios de una variable sin término constante $P_1(x) := P(x, x, \dots, x)$, $P_2(x) := P(0, x, \dots, x)$, $P_3(x) := P(0, 0, x, \dots, x), \dots, P_N(x) := P(0, \dots, 0, x)$. De acuerdo con la definición de las f_n , tenemos que $F = P_j(g_j)$ sobre I_j . Entonces, $F(I) = \bigcup_{j=1}^N S_j(I^2)$, donde $S_j(x, y) := (P_j(x), P_j(y))$ ($j = 1, \dots, N$). Si P_j es constante, entonces $P_j \equiv 0$, por lo que $S_j(I^2) = \{(0, 0)\}$. Si P_j es no constante, entonces por el Lema 4.2.11 tenemos $\lambda(\partial S_j(I^2)) = 0$ y $(S_j(I^2))^\circ \neq \emptyset$. Por tanto, como se requería, o bien $F \equiv (0, 0)$, o bien $\lambda(\partial F(I)) = 0$ y $F(I)^\circ \neq \emptyset$, lo que equivale a que $F \in \mathcal{SF}$. \square

Como ya anunciamos, el resultado puede mejorarse porque puede encontrarse un álgebra libre dentro de \mathcal{SF} .

Teorema 4.2.13. *El conjunto \mathcal{SF} es fuertemente algebraable en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.*

Demostración. Como primer paso, construimos una sucesión apropiada $(f_n)_{n \geq 1}$ generando un álgebra libre en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Por la Proposición 2.2.3, existe una curva $\varphi \in \mathcal{CS}(I, [-1, 1]^2)$ tal que $\varphi(0) = (0, 0) = \varphi(1)$. Si tenemos un intervalo $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, definimos $\varphi_T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\varphi_T(t) = \varphi(\frac{t-a}{b-a})$, de forma que $\varphi_T(T) = [-1, 1]^2$ y $\varphi_T(a) = (0, 0) = \varphi_T(b)$. Consideramos el conjunto numerable $J = (\sigma_k)_{k \geq 1}$ definido como

$$J := \{\sigma = (q_1, q_2, \dots, q_j, 0, 0, \dots) \in (-1, 1)^{\mathbb{N}}, \text{ donde } q_1, \dots, q_j \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1), j \in \mathbb{N}\}.$$

Tomamos una sucesión $(a_n)_n \subset I$ estrictamente creciente con $a_n \rightarrow 1$, y consideramos la sucesión de intervalos $[a_n, a_{n+1}] \subset [0, 1]$ ($n \geq 1$). De entre esta sucesión de intervalos queremos obtener una cantidad infinita numerable de subsucesiones de intervalos $\{I_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) tales que $I_{n,k} \cap I_{m,l} = \emptyset$ si $(n, k) \neq (m, l)$ y que se aproximen a 1 cuando $k \rightarrow +\infty$. Para ello, nos quedamos solo con la sucesión de intervalos disjuntos $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ y extraemos de aquí las subsucesiones de intervalos de la siguiente forma: primero dividimos la sucesión a_{2n-1} en las siguientes subsucesiones ordenando sus términos recorriendo las diagonales principales:

$$\begin{aligned} & a_1, a_5, a_{11}, a_{19}, \dots \\ & a_3, a_9, a_{17}, \dots \\ & a_7, a_{15}, \dots \\ & a_{13}, \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

A continuación, denotamos por a_{n_k} al k -ésimo elemento de la n -ésima fila (por ejemplo, $a_{3_2} = a_{15}$). Por último, definimos los intervalos $I_{n,k} := [a_{n_k}, a_{n_{k+1}}]$. Está claro que son disjuntos y que para cada $n \in \mathbb{N}$ se aproximan a 1 cuando $k \rightarrow +\infty$.

Siguiendo con la demostración, dividimos cada uno de estos intervalos en tres subintervalos de igual longitud,

$$I_{n,k} = I_{n,k,1} \cup I_{n,k,2} \cup I_{n,k,3},$$

donde $I_{n,k,2}$ es el intervalo intermedio.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como sigue. Para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos $f_n := k^{-1}\varphi_{I_{n,k,2}}$ sobre $I_{n,k,2}$ y $f_n := (0, 0)$ sobre $I_{n,k,1} \cup I_{n,k,3}$. Además, para $m \neq n$, definimos

$f_n := (k^{-1}q_n, k^{-1}q_n)$ sobre $I_{m,k,2}$, donde q_n es la n -ésima componente de la sucesión $\sigma_k \in J$. Las otras componentes de f_n se definen como aplicaciones lineales afines sobre $I_{m,k,1}$ y $I_{m,k,3}$, valiéndose $(0, 0)$ en el extremo izquierda de $I_{m,k,1}$ y en el derecho de $I_{m,k,3}$, y $(k^{-1}q_n, k^{-1}q_n)$ para mantener la continuidad. Finalmente, definimos $f_n := (0, 0)$ sobre $I \setminus \bigcup_{k=1, m=1}^{\infty} I_{m,k}$. Cada f_n es claramente continua en $[0, 1)$, mientras que su continuidad en $t = 1$ (donde f_n toma el valor $(0, 0)$) viene dada por el hecho de que $\sup_{t \in I_{n,k}} \|f_n(t)\|_1 \leq k^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que los intervalos $I_{m,k}$ tienden a 1 cuando $k \rightarrow +\infty$.

Ahora, sea $N \in \mathbb{N}$ y consideremos un polinomio no nulo de N variables $P = P(x_1, \dots, x_N)$ sin término constante. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que x_N aparece explícitamente en P , por lo que existen un cierto $m \in \mathbb{N}$ y unos polinomios Q_j ($j = 0, 1, \dots, N-1$) de $N-1$ variables reales, con $Q_m \neq 0$, tales que

$$P(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=0}^m Q_j(x_1, \dots, x_{N-1}) x_N^j.$$

Sea $F := P(f_1, \dots, f_N)$. Nuestro objetivo es mostrar que $F \in \mathcal{SF}$ (también debería probarse que $F \neq 0$, pero esto no es necesario porque $0 \notin \mathcal{SF}$).

Asumamos primero que $Q_m(0, \dots, 0) \neq 0$. Como Q_m es continuo, existe $r \in (0, 1)$ tal que $Q_m(x_1, \dots, x_{N-1}) \neq 0$ para todo $(x_1, \dots, x_{N-1}) \in (-r, r)^{N-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Tomando $p \in \mathbb{N}$ con $1/p < r$ y definiendo $q_j := 1/p$ ($j = 1, \dots, N-1$), deducimos la existencia de un punto $(q_1, \dots, q_{N-1}) \in (\mathbb{Q} \cap (-1, 1))^{N-1}$ tal que

$$Q_m(k^{-1}q_1, \dots, k^{-1}q_{N-1}) \neq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Si por el contrario tenemos que $Q_m(0, \dots, 0) = 0$, entonces también encontraríamos un punto $q = (q_1, \dots, q_{N-1}) \in (\mathbb{Q} \cap (-1, 1))^{N-1}$ satisfaciendo (4.2). Para verlo, asumamos por contradicción que para cada punto $p = (p_1, \dots, p_{N-1}) \in (\mathbb{Q} \cap (-1, 1))^{N-1}$ hay infinitos $t \in \mathbb{R}$ con $Q_m(tp_1, \dots, tp_{N-1}) = 0$. Como el lado izquierdo de la ecuación es un polinomio en la variable t , tenemos $Q_m(tp_1, \dots, tp_{N-1}) = 0$ para todo t . Fijando t y teniendo en cuenta la densidad de $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ en $(-1, 1)$ y la continuidad de Q_m , obtenemos que $Q_m(tx_1, \dots, tx_{N-1}) = 0$ para todo $(x_1, \dots, x_{N-1}) \in (-1, 1)^{N-1}$ y todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que $Q_m \equiv 0$, y llegamos a contradicción. Por tanto, existe $p \in (\mathbb{Q} \cap (-1, 1))^{N-1}$ tal que el conjunto de los $t \in \mathbb{R}$ para los cuales $Q_m(tp_1, \dots, tp_{N-1}) = 0$ es finito. Como 0 es uno de dichos valores t , existe $s \in \mathbb{N}$ con $Q_m(sp_1, \dots, sp_{N-1}) \neq 0$

para todo $t \in (0, 1/s]$. En conclusión, si tomamos $q = (s^{-1}p_1, \dots, s^{-1}p_{N-1})$, obtenemos que se verifica (4.2).

Sea $\sigma := (q_1, \dots, q_{N-1}, 0, 0, \dots) \in J$, donde $(q_1, \dots, q_{N-1}) \in (\mathbb{Q} \cap (-1, 1))^{N-1}$ satisface (4.2). Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma = \sigma_k$. Consideremos el intervalo $I_{N,k}$ y su subintervalo $I_{N,k,2}$. Se tiene que, para cada $t \in I_{N,k,2}$,

$$\begin{aligned} F(t) &= P(f_1(t), \dots, f_N(t)) \\ &= P((k^{-1}q_1, k^{-1}q_1), \dots, (k^{-1}q_{N-1}, k^{-1}q_{N-1}), k^{-1}\varphi_{I_{N,k,2}}(t)) \\ &= \sum_{j=0}^m Q_j((k^{-1}q_1, k^{-1}q_1), \dots, (k^{-1}q_{N-1}, k^{-1}q_{N-1}))(k^{-1}\varphi_{I_{N,k,2}}(t))^j. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dado un polinomio $H(x_1, \dots, x_N)$, denotaremos por $H((a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N))$ al vector $(H(a_1, \dots, a_N), H(b_1, \dots, b_N))$. Por la definición de las f_n , la imagen $L_2 := F(I \setminus I_{N,k})$ es la unión de dos funciones \mathcal{C}^1 a trozos en \mathbb{R}^2 , por lo que $L_2^\circ = \emptyset$. Además, $L_2 = \partial L_2$ y la medida de Lebesgue de $\lambda(\partial L_2) = 0$. Gracias a (4.3), el conjunto $L_1 := F(I_{N,k})$ es la imagen del cuadrado $R := [-1/k, 1/k]^2$ bajo la aplicación $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase \mathcal{C}^1 dada por $S(x, y) = (H(x), H(y))$, donde H es el polinomio no constante $H(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j x^j$, con $\alpha_j := Q_j(k^{-1}q_1, \dots, k^{-1}q_{N-1})$ (es no constante porque, por (4.2), $\alpha_m \neq 0$; esto también asegura $F \neq 0$). Por tanto, existe un punto $x_0 \in (-1/k, 1/k)$ tal que $H'(x_0) \neq 0$, por lo que el determinante de la matriz jacobiana $J_S(x, y)$ de la transformación S en $(x_0, x_0) \in R$ es $H'(x_0)^2 \neq 0$. Por el Teorema de la Aplicación Inversa, S tiene una inversa local diferenciable (luego también continua) en (x_0, x_0) , así que S es localmente abierta en este punto, lo que garantiza $L_1^\circ = (S(R))^\circ \neq \emptyset$.

Finalmente, dado que $L_1 = S(R)$ es compacto, el Lema 4.2.11 asegura que $\lambda(\partial L_1) = 0$. Como teníamos $L_1^\circ \neq \emptyset$ y $(F(I))^\circ \supset L_1^\circ$, está claro que $(F(I))^\circ \neq \emptyset$. Además,

$$\lambda(\partial F(I)) \leq \lambda((\partial L_1) \cup (\partial L_2)) \leq \lambda(\partial L_1) + \lambda(\partial L_2) = 0.$$

Hemos obtenido entonces que $(F(I))^\circ \neq \emptyset$ y $\lambda(\partial F(I)) = 0$. En otras palabras, $F \in \mathcal{SF}$, lo que termina la prueba. \square

4.2.2. Denso-lineabilidad maximal de \mathcal{TSF}

Para terminar con el trabajo Fin de Máster presentado, procedemos en esta sección a demostrar la maximal denso-lineabilidad de los conjuntos \mathcal{TSF} y $\lambda\text{-}\mathcal{TSF}$.

Antes de ello, necesitaremos algunos resultados previos. Del primero, que es un resultado bastante interesante sobre denso-lineabilidad en general, puede encontrarse una prueba en [8, Teorema 2.3]

Teorema 4.2.14. *Asumamos que E es un e.t.v. metrizable y separable. Sean α un número cardinal infinito y sean $A, B \subset E$ tales que A es α -lineable, B es denso-lineable, $A \cap B = \emptyset$ y $A + B \subset A$. Entonces A contiene un espacio vectorial denso M con $\dim(M) = \alpha$, por lo que en particular es α -denso-lineable.*

De los otros dos lemas sí daremos la prueba. Recordamos que un espacio topológico (X, τ) se dice **localmente conexo por caminos** si para todo $x \in X$ y para todo entorno abierto B de x , existe un conjunto V abierto y conexo por caminos tal que $x \in V \subset B$.

Lema 4.2.15. *Sea (Y, d) un espacio métrico localmente conexo por caminos, y sea $t_0 \in I$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{D}_{t_0} := \{\varphi \in \mathcal{C}(I, Y) : \varphi \text{ es constante en un entorno } U = U_\varphi \text{ de } t_0\}$$

es denso en $\mathcal{C}(I, Y)$, dotado de la métrica del supremo $\rho(f, g) = \sup_{t \in I} d(f(t), g(t))$.

Demostración. Fijemos una bola $B_\rho(f, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(I, Y)$. Nuestro objetivo es mostrar que $\mathcal{D}_{t_0} \cap B_\rho(f, \varepsilon) \neq \emptyset$. Consideremos la bola $B_d(f(t_0), \varepsilon/3) \subset Y$. Por hipótesis, existe un entorno V de $f(t_0)$ en Y tal que $V \subset B_d(f(t_0), \varepsilon/3)$ y es conexo por caminos. Dado que f es continua en t_0 , existe un entorno $[c, d]$ de t_0 en I con $f([c, d]) \subset V$. Podemos suponer $0 < t_0 < 1$ (los casos $t_0 = 0$ y $t_0 = 1$ se tratan de manera similar), de forma que $c < t_0 < d$. Tomamos c', d' con $c < c' < t_0 < d' < d$. Como V es conexo por caminos, podemos encontrar aplicaciones continuas $g : [c, c'] \rightarrow V$, $h : [d', d] \rightarrow V$ cumpliendo $g(c) = f(c)$, $g(c') = f(t_0) = h(d')$ y $h(d) = f(d)$. Definimos $U := [c', d']$ y la curva $\varphi : I \rightarrow Y$ como

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \notin [c, d] \\ g(t) & \text{si } t \in [c, c'] \\ f(t_0) & \text{si } t \in U \\ h(t) & \text{si } t \in (d', d]. \end{cases}$$

Claramente, $\varphi \in \mathcal{D}_{t_0}$. Es más,

$$\begin{aligned} \rho(f, \varphi) &= \sup_{t \in [c, d]} d(f(t), \varphi(t)) \\ &\leq \sup_{t \in [c, d]} (d(f(t), f(t_0)) + d(f(t_0), \varphi(t))) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon, \end{aligned}$$

debido a la desigualdad triangular, a que $f(t) \in V \subset B_d(f(t_0), \varepsilon/3)$ para todo $t \in [c, d]$, y al hecho de que $\varphi([c, d]) = g([c, c]) \cup h([d', d]) \subset V \subset B_d(f(t_0), \varepsilon/3)$. Consecuentemente, $f \in \mathcal{D}_{t_0} \cap B_\rho(f, \varepsilon)$, y hemos terminado la prueba. \square

Lema 4.2.16. *El subconjunto de \mathcal{TSF} dado por*

$$\mathcal{TSF}_1 := \{\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) : (\varphi(U))^\circ \neq \emptyset \text{ para todo entorno } U \text{ de } 1\}$$

es espaciabile en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Además, es maximal lineable.

Demostración. Usaremos una modificación de la construcción hecha en la prueba del Teorema 4.2.10. Fijemos de nuevo una sucesión $(a_n)_n \subset I$ estrictamente creciente con $a_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$). Como en el Teorema 4.2.13, consideramos una partición de \mathbb{N} en infinitas sucesiones divergentes disjuntas $\{p(n, 1) < p(n, 2) < p(n, 3) < \dots\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Por la Proposición 2.2.3, para cada par $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ existe una aplicación $g_{n,k} \in \mathcal{CS}([a_{p(n,k)}, a_{p(n,k)+1}], (1/k)I^2)$ con $g_{n,k}(a_{p(n,k)}) = (0, 0) = g_{n,k}(a_{p(n,k)+1})$. Definimos los intervalos de interiores disjuntos $I_{n,k} := [a_{p(n,k)}, a_{p(n,k)+1}]$ y extendemos de forma continua cada $g_{n,k}$ a I definiéndolas como $(0, 0)$ en $I \setminus I_{n,k}$. Ahora, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos $f_n := \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}$. Obsérvese que en la serie es convergente para cada $t \in I$, por lo que está bien definida. De hecho, $f_n|_{I_{n,k}} = g_{n,k}$, lo que además garantiza la continuidad de f_n teniendo en cuenta que las $g_{n,k}$ valen $(0, 0)$ en los extremos de los intervalos y también fuera de ellos. Como los soportes de las funciones f_n son disjuntos, por el Lema 4.2.9 tenemos que forman una sucesión básica.

Como en la prueba del Teorema 4.2.10, definimos

$$M := \overline{\text{span}}\{f_n : n \geq 1\}.$$

M es un subespacio cerrado infinito-dimensional de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Vamos a ver que es el conjunto que nos aporta la espaciabilidad de \mathcal{TSF}_∞ . Sea $f \in M \setminus \{0\}$. Como las f_n forma una sucesión básica, existen unos coeficientes reales únicos c_1, c_2, \dots con algún $c_m \neq 0$ tales que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, donde la convergencia es uniforme en I . Fijemos un

entorno $U \subset I$ de $t = 1$. Como $a_{p(m,k)} \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$, podemos encontrar un cierto $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[a_{p(m,k_0)}, a_{p(m,k_0)+1}] \subset U$. Por tanto, recordando de nuevo que las f_n tienen soportes disjuntos,

$$\begin{aligned} f(U) \supset f([a_{p(m,k_0)}, a_{p(m,k_0)+1}]) &= c_m f_m([a_{p(m,k_0)}, a_{p(m,k_0)+1}]) \\ &= c_m g_{p(m,k_0)}([a_{p(m,k_0)}, a_{p(m,k_0)+1}]) = c_m k_0^{-1} I^2, \end{aligned}$$

por lo que $(f(U))^\circ \neq \emptyset$. Esto implica que $f \in \mathcal{TSF}_1$, por lo que $M \subset \mathcal{TSF}_1$ y logramos la espaciabilidad buscada. La lineabilidad maximal se obtiene de la misma forma que se obtuvo en el Teorema 4.2.10 para SF . En efecto, $\dim(M) = \mathfrak{c}$ y \mathcal{TSF} es \mathfrak{c} -lineable. \square

La construcción del lema anterior también puede hacerse para cualquier $t_0 \in I$, pero para nuestros propósitos basta tenerlo para $t_0 = 1$. De hecho, ya estamos listos para probar el último resultado de esta memoria, y principal de esta sección.

Teorema 4.2.17. *El conjunto \mathcal{TSF} es maximal denso-lineable en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Además, el conjunto $\lambda\text{-}\mathcal{SF}$ también es maximal denso-lineable.*

Demostración. Es suficiente probar que el subconjunto \mathcal{TSF}_1 definido en el lema anterior es maximal denso-lineable en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$, por tenerse $\mathcal{TSF}_1 \subset \mathcal{TSF} \subset \lambda\text{-}\mathcal{SF}$. Para lograr este objetivo, haremos uso del Teorema 4.2.14. En primer lugar, recordamos que $A := \mathcal{TSF}_1$ es \mathfrak{c} -lineable en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ por el Lema 4.2.16. En segundo lugar, el conjunto

$$B := \{\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) : \varphi \text{ es constante en un entorno } U = U_\varphi \text{ de } 1\}$$

es denso en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ debido al Lema 4.2.15. Trivialmente, B es también un espacio vectorial, por lo que B es denso-lineable. También resulta claro que $A \cap B = \emptyset$ sin más que ver la definición de $A := \mathcal{TSF}_1$ y notar que si una aplicación φ es constante en un conjunto U , entonces $(\varphi(U))^\circ = \emptyset$.

Finalmente, si $\varphi \in A$, $\psi \in B$ y U es un entorno de 1, existen un entorno $V \subset U$ de 1 y un vector constante $C \in \mathbb{R}^2$ tales que $\psi(t) = C$ para todo $t \in V$ y $(\varphi(V))^\circ \neq \emptyset$. Luego

$$((\varphi + \psi)(U))^\circ \supset ((\varphi + \psi)(V))^\circ = C + (\varphi(V))^\circ \neq \emptyset,$$

donde $C + (\varphi(V))^\circ$ denota al conjunto $(\varphi(V))^\circ$ trasladado por el vector C .

En consecuencia $((\varphi + \psi)(U))^\circ \neq \emptyset$, esto es, $\varphi + \psi \in A$ y $A + B \subset A$. La prueba termina aplicando simplemente el Teorema 4.2.14 con $E := \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ y $\alpha := c$. \square

Bibliografía

Bibliografía fundamental

- [1] N. G. Albuquerque, *Maximal lineability of the set of continuous surjections*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **21** (2014), 83–87.
- [2] N. G. Albuquerque, L. Bernal-González, D. Pellegrino, y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Peano curves on topological vector spaces*, arXiv:1404.5876 [math.GN], Linear Algebra Appl. **460** (2014) 81–96.
- [3] R. M. Aron, L. Bernal-González, D. Pellegrino, y J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability. The Search for Linearity in Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [4] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno, y J. A. Prado-Bassas, *The set of space-filling curves: topological and algebraic structure*, Linear Algebra Appl. **467** (2015), 57-74.

Otras referencias

- [5] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [6] M. Bader, *Space-Filling curves: An introduction with applications in scientific computing*, Springer, Heidelberg, 2013.
- [7] A. Bartoszewicz y S. Glab, *Strong algebraicity of sets of sequences of functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 827–835.
- [8] L. Bernal-González y M. Ordóñez Cabrera, *Lineability criteria, with applications*, J. Funct. Anal. **206** (2014), no. 6, 3997-4025, DOI 10.1016/j.jfa.2013.11.014.

-
- [9] L. Bernal-González, D. Pellegrino, y J.B. Seoane-Sepúlveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **51** (2014), 71–130.
- [10] R. P. Boas Jr., *Entire Functions*, Academic Press, Inc., New York, 1954.
- [11] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [12] F. Q. Gouvêa, *Was Cantor surprised?*, Amer. Math. Month., **118** (2011), no. 3, 198-209.
- [13] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971-973.
- [14] D. Hilbert, *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Ann. **38**, (1891), 459–460.
- [15] D. Hinrichsen y J. L. Fernández, *Topología general*, Ed. Urmo, Bilbao, 1977.
- [16] A. M. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Mir, Moscú, 1975.
- [17] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [18] G. Peano, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. **36**, (1890), 157-160.
- [19] W. Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [20] H. Sagan, *Space-filling curves*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [21] S. Z. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- [22] K. Weierstrass, *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen* [*On continuous functions of a real argument which possess a definite derivative for no value of the argument*], Königl. Akad. Wiss. (1872), Mathematische Werke II, 71-74.

- [23] S. Willard, *General topology*, Dover, New York, 2004.

