

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA



Laplacianas de digrafos y topologías de Alexandrov

Trabajo Fin de Grado realizado por
María Vela Felardo

Tutor: Antonio Quintero Toscano

2017-18

Índice general

Introducción	1
1. Teoría de grafos	3
1.1. Definiciones básicas sobre grafos	3
1.2. Caminos y conceptos relacionados	5
1.3. Grado de un vértice	7
1.4. Representación matricial de grafos	8
2. Conjuntos ordenados y digrafos	10
2.1. Definiciones básicas sobre estructuras ordenadas	10
2.2. Relaciones y digrafos	11
3. Topología general	13
3.1. Espacios topológicos	13
3.2. Base de una topología	14
3.3. Axiomas de separación	15
3.4. Aplicaciones continuas y homeomorfismos	16
4. Espacios de Alexandrov, órdenes y digrafos	17
4.1. Espacios de Alexandrov	17
4.2. A-topologías y preórdenes	19
4.3. Ejemplos y tabla resumen	20
5. Laplacianas en digrafos y topologías de Alexandrov	26
5.1. Las matrices laplacianas de un digrafo	26
5.2. Conectividad fuerte en digrafos transitivos	27
5.3. Estructura de bloques de laplacianas	30
5.4. A-topologías y laplacianas en digrafos	32
5.5. Algunos ejemplos	33
5.6. Núcleos de laplacianas de digrafos transitivos	36
5.7. Núcleos de laplacianas de digrafos transitivos y acíclicos	39
6. Laplacianas de digrafos (caso infinito)	41
6.1. A-espacios, órdenes y digrafos localmente finitos	41
6.2. Una propuesta para extender la teoría espectral de grafos infinitos a digrafos	43
6.2.1. Apéndice: Operadores en espacios de Hilbert	46
Bibliografía	49
Resumen (abstract)	50

Introducción

Las relaciones de orden aparecen en multitud de situaciones en Matemáticas. Por ello es de interés buscar procedimientos para representar estas relaciones por medio de objetos matemáticos de distinta naturaleza y aplicar los conocimientos disponibles sobre estos para el estudio de la relación de orden original.

Una manera muy habitual es representar las relaciones de orden por medio de grafos dirigidos. Sin embargo, es mucho menos frecuente estudiar los conjuntos ordenados usando la topología intrínseca que poseen. Esta topología fue analizada por primera vez en 1937 por P.S. Alexandrov e independientemente por A.W. Tucker [4], quienes demostraron que los conjuntos ordenados podían ser identificados como aquellos espacios topológicos en los que la intersección arbitraria de abiertos era también un conjunto abierto. En particular los espacios con esta propiedad han pasado a denominarse espacios de Alexandrov o A-espacios.

Los espacios finitos corresponden a los conjuntos ordenados finitos y los espacios discretos son entonces los únicos A-espacios dotados de la propiedad de separación de Hausdorff y, por tanto, los únicos espacios métricos entre los A-espacios. Como los espacios métricos son los espacios fundamentales del análisis y la geometría, los A-espacios quedaron olvidados tras el trabajo inicial de Alexandrov. Después de treinta años aparecieron dos trabajos sobre la topología algebraica de los A-espacios debidos a M. McCord y R. Stong que destacaban que, a pesar del fallo de la propiedad de Hausdorff, los A-espacios tienen propiedades de conexión sorprendentemente similares a los espacios de interés de la topología algebraico-geométrica. Referimos a [8] para una referencia general sobre A-espacios y sus propiedades.

Esta memoria contiene un “diccionario” con tres entradas correspondiente a las tres facetas de los espacios de Alexandrov: la ordinal como conjuntos ordenados, la combinatoria como digrafos y la suya propia como espacios topológicos.

Al poderse tratar los digrafos como A-espacios, se está en condiciones de reescribir las construcciones y resultados de la teoría de grafos en términos topológicos. Como una muestra de este hecho, la segunda parte de la memoria está dedicada a dar una detallada exposición de los resultados en [6] sobre matrices laplacianas de digrafos, recalcando su reformulación topológica.

Las matrices laplacianas de un (di)grafo y sus espectros están entre las herramientas de la llamada teoría algebraica de grafos, que es un intento de utilizar el álgebra lineal, en particular la teoría de matrices, en el estudio de las propiedades de los grafos.

Dado un (di)grafo G existen varias matrices asociadas a su estructura combinatoria. La más habitual es la matriz de adyacencia, construida a partir de una indexación de los vértices de G , colocando un 1 en el lugar (i, j) si existe una arista entre los vértices i -ésimo y j -ésimo y un 0 en caso contrario.

En general, dada una matriz $A = [a_{ij}]$ indexada por los vértices de G , se llama A -espectro de G al conjunto de autovalores de la matriz A . Varias maneras de asociar matrices a grafos y sus correspondientes espectros puede verse en [7].

Pasamos a detallar el contenido de la memoria: el Capítulo 1 recoge los resultados básicos sobre digrafos que hemos utilizado. La terminología sobre conjuntos ordenados aparece en el Capítulo 2. Los requisitos de topología están resumidos en el Capítulo 3. El Capítulo 4 contiene las nociones fundamentales de espacios de Alexandrov y la comparación de los tres lenguajes equivalentes para su estudio. El capítulo concluye con una tabla-resumen que sirve para traducir los conceptos y resultados de un lenguaje a otro. Finalmente, en el Capítulo 5 exponemos detalladamente resultados de [6], que introduce el lenguaje de A -espacios en la teoría algebraica de grafos al estudiar el espectro de un digrafo en términos de su A -topología.

Los grafos infinitos son considerados en el Capítulo 6, que es solo el boceto de una posible extensión de la teoría espectral de los grafos localmente finitos dada en [9] a los digrafos.

Capítulo 1

Teoría de grafos

La teoría de grafos constituye uno de los temas más importantes de la Matemática Discreta. Esta parte de las matemáticas tiene su origen en un trabajo publicado en 1736 por el matemático suizo Leonhard Euler relacionado con el popular problema conocido como "los siete puentes de Königsberg" (para más detalles, consultar cualquier libro de Matemática Discreta como [5]).

1.1. Definiciones básicas sobre grafos

En esta sección introduciremos nociones básicas sobre grafos (la terminología utilizada en la teoría de grafos no está estandarizada, pudiendo variar de unos textos a otros).

Definición 1.1.1. Sea V un conjunto no vacío formado por elementos denominados *vértices* o *nodos* y sea $E \subseteq V \times V$ otro conjunto formado por elementos denominados *arcos* o *aristas*. Entonces el par (V, E) recibe el nombre de *grafo* sobre V , y se indica por $G = (V, E)$. Si E es un conjunto de pares ordenados de los elementos de V , diremos que G es un *grafo dirigido* o *digrafo*. Dada una arista e del digrafo G , se escribe $o(e)$ para el vértice inicial y $t(e)$ para el vértice final.

Ejemplo 1.1.2. Por ejemplo, la siguiente figura es un grafo sobre el conjunto de vértices

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \tag{1.1}$$

y cuyas aristas son el conjunto

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\} \tag{1.2}$$

de pares no ordenados.

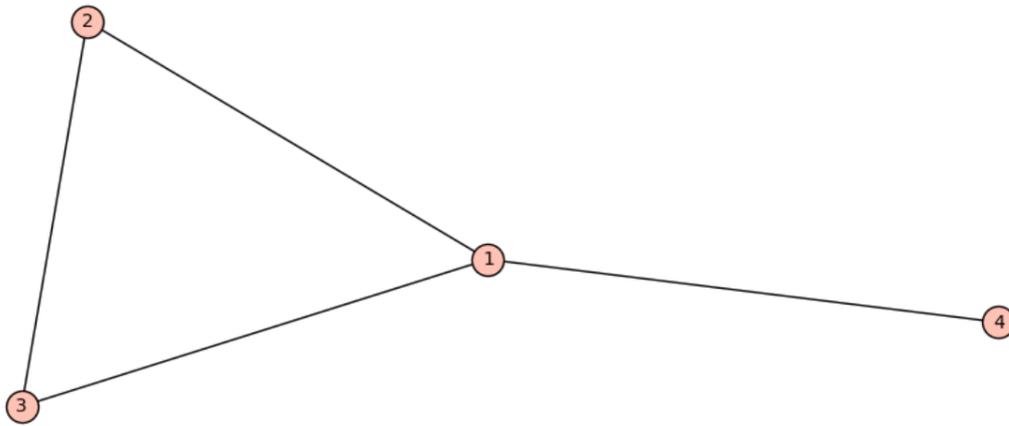


Figura 1.1.

Ejemplo 1.1.3. La figura que sigue constituye un ejemplo de digrafo sobre

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad (1.3)$$

cuyas aristas son los elementos del conjunto

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 2)\} \quad (1.4)$$

de pares ordenados.

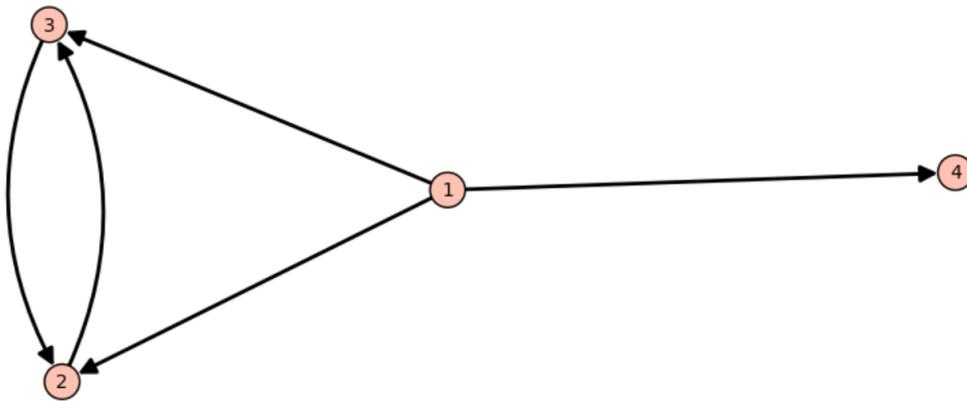


Figura 1.2.

La dirección de cada arista se indica mediante una flecha.

Definición 1.1.4. Dado un grafo G , se dice que una arista forma un *lazo* cuando está asociada a dos vértices idénticos, es decir, cuando sus extremos coinciden. Dos aristas son *paralelas* cuando son incidentes con los mismos vértices. Un grafo formado por un solo vértice, recibe el nombre de *trivial* o *degenerado*.

Definición 1.1.5. Un grafo $G = (V, E)$ es un *multigrafo* si, para $a, b \in V$ con $a \neq b$, existen dos o más aristas de la forma (a, b) , para un digrafo, o bien $\{a, b\}$, para un grafo.

En lo que sigue en este trabajo, no consideraremos grafos con lazos ni multigrafos.

Definición 1.1.6. Cuando un grafo no posee ni aristas paralelas ni lazos se dice que se trata de un *grafo simple*.

Definición 1.1.7. Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sea $x \in V$ un vértice. Diremos que x es una *fuente* si no existe $y \in V$ tal que $(y, x) \in E$. Diremos que x es un *sumidero* si no existe $y \in V$ tal que $(x, y) \in E$.

Definición 1.1.8. Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Se dirá que $S \subseteq V$ es una *absorbente inferior* si $(y, x) \in E$ con $x \in S$ implica que $y \in S$.

De forma análoga, Se dirá que $S \subseteq V$ es una *absorbente superior* si $(x, y) \in E$ con $x \in S$ implica que $y \in S$.

Definición 1.1.9. El *dual* de un digrafo $G = (V, E)$ es un digrafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ donde $\overline{E} = \{(x, y)/(y, x) \in E\}$.

Definición 1.1.10. Se define *homomorfismo entre grafos* a una función $\phi : G \rightarrow H$ entre dos grafos G y H que satisface que si u y v son dos vértices de G unidos por una arista, entonces $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son dos vértices de H y también están unidos por una arista.

Análogamente si G y H son digrafos, ϕ será *homomorfismo entre digrafos* si además también conserva las direcciones de las aristas. Se dirá que ϕ es un *antihomomorfismo entre digrafos* si invierte las direcciones de las aristas.

1.2. Caminos y conceptos relacionados

Existe una necesidad de definir conceptos sobre grafos relacionados con la forma de recorrerlos, partiendo de un origen y llegando a un destino.

Definición 1.2.1. Dado un grafo G , se denomina *camino* en G de v a w a una secuencia alternada de vértices v_i y aristas e_i de G

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n, e_n, v_{n+1} \quad (1.5)$$

con $v_1 = v$, $v_{n+1} = w$, que contiene n aristas

$$e_i = \{v_i, v_{i+1}\}, 1 \leq i \leq n. \quad (1.6)$$

Un camino es *cerrado* si $v = w$ y $n > 1$.

Si G es un digrafo, un *camino* entre v y w será una secuencia alternada $v_1 e_1 v_2 \dots v_{n+1}$ con $v_1 = v$, $v_{n+1} = w$ y cada e_i es una arista ordenada donde v_i y v_{i+1} son sus vértices. Cuando $o(e_i) = v_i$ y $t(e_i) = v_{i+1}$ se dirá que el camino es un *camino dirigido*.

Definición 1.2.2. Dado un grafo G , recibe el nombre de *camino simple* todo camino sin aristas repetidas, es decir, un camino que no pasa dos veces por la misma arista.

Llamaremos *camino elemental* a todo camino simple sin vértices repetidos, es decir, un camino simple que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Nota 1.2.3. Si hay un camino simple entre dos vértices de un grafo, entonces también hay un camino elemental entre dichos vértices. La demostración la podemos encontrar en [5].

Definición 1.2.4. Dado un grafo G , un *circuito* es un camino simple cerrado. Se denominará *ciclo* a todo camino elemental cerrado. Una *cadena* es un camino elemental abierto.

Definición 1.2.5. Un grafo $G = (V, E)$ se dice *conexo* si dos vértices arbitrarios $v, w \in V$ se pueden unir por un camino en G . En caso contrario, se dice *disconexo*. Análogamente se define un *digrafo conexo*. En el caso en que en un digrafo G existan caminos dirigidos entre dos vértices cualesquiera, se dirá que G es *conexo de manera dirigida*.

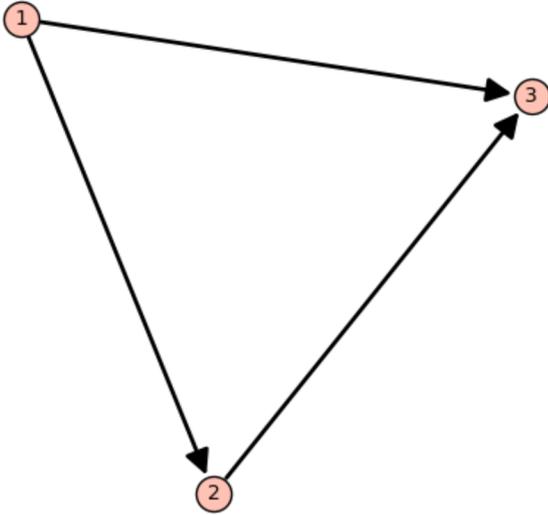


Figura 1.3. Digrafo conexo, no conexo de manera dirigida

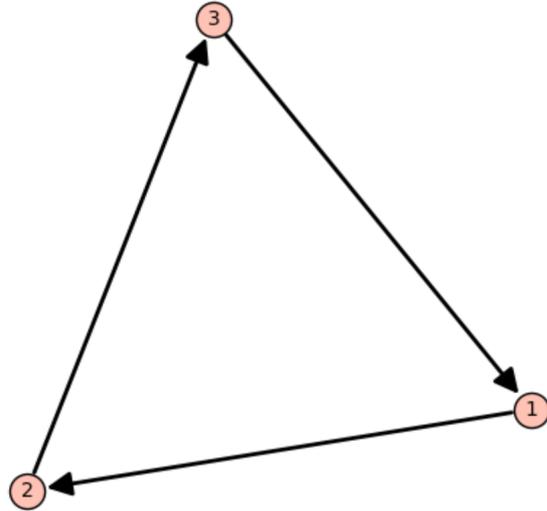


Figura 1.4. Digrafo conexo de manera dirigida

Definición 1.2.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo (digrafo) y sean $x, y \in V$. Diremos que x está *conectado a y* si hay un camino (camino dirigido) en las aristas de E desde x hasta y . Diremos que x e y están *fuertemente conectados* si x está conectado a y y viceversa.

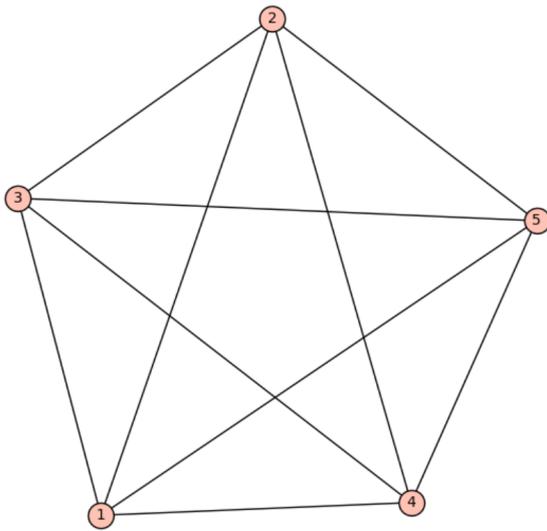
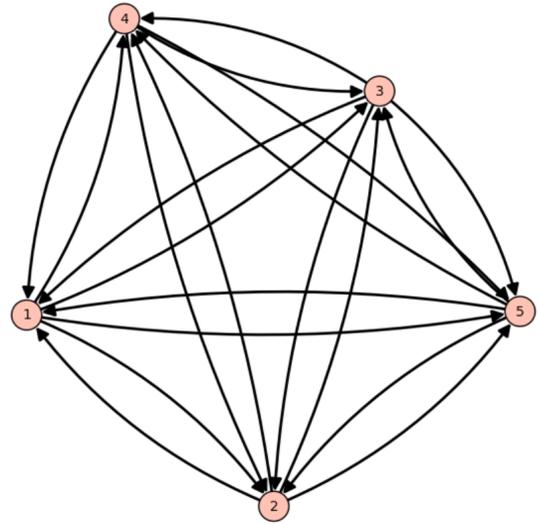
Definición 1.2.7. Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sea $x \in V$ un vértice. Llamaremos *dominio de influencia bajo x* al conjunto de todos los vértices $y \in V$ tal que $(y, x) \in E$ (todo vértice está en el dominio de influencia bajo él).

De forma análoga, llamaremos *dominio de influencia sobre x* al conjunto de todos los vértices $y \in V$ tal que $(x, y) \in E$ (todo vértice está en el dominio de influencia sobre él).

Definición 1.2.8. Sea un digrafo $G = (V, E)$. Diremos que $S \subseteq V$ es una *componente fuertemente conexa* si dos vértices cualesquiera de S están fuertemente conectados y ningún vértice de $V - S$ está fuertemente conectado a algún vértice de S .

Definición 1.2.9. Sea un grafo $G = (V, E)$ con n vértices. Diremos que G es un *grafo completo* (y lo denotaremos como $G = K_n$), si para cada par de vértices hay una arista uniéndolos.

Si $G = (V, E)$ es un digrafo, diremos que G es un *digrafo completo* si cada par de vértices está fuertemente conectado.

Figura 1.5. K_5 Figura 1.6. K_5 dirigido

Definición 1.2.10. Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Una componente fuertemente conexa $S \subseteq V$ se denomina *componente fuente* si todo y conectado a algún $c \in S$ está en S . Una componente fuertemente conexa $S \subseteq V$ se denomina *componente sumidero* si $x \in S$ está conectado a y implica que $y \in S$.

Nota 1.2.11. Debe notarse que los dominios de influencia bajo los vértices de una componente sumidero son todos el mismo. A este conjunto se le llamará el *dominio de influencia bajo la componente sumidero*.

Definición 1.2.12. Si $G = (V, E)$ es un grafo o digrafo, entonces $G_1 = (V_1, E_1)$ es un *subgrafo* de G si $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$, donde cada arista de E_1 tiene sus vértices en V_1 .

Definición 1.2.13. Dado un grafo o digrafo $G = (V, E)$, sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un subgrafo de G . Entonces, si $V_1 = V$, G_1 recibe el nombre de subgrafo *maximal* de G .

1.3. Grado de un vértice

Definición 1.3.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo. El número de aristas incidentes con un vértice v recibe el nombre de *grado* o *valencia* de ese vértice. Se indica por $gra(v)$.

Definición 1.3.2. Dado un digrafo $G = (V, E)$, recibe el nombre de *grado de entrada* del vértice v , el número de aristas que llegan a dicho vértice: se designa por $gra^-(v)$. De igual forma, recibe el nombre de *grado de salida* de un vértice v , y se designa por $gra^+(v)$, el total de aristas que salen de dicho vértice.

La *matriz de grados de entrada*, D^- , y la *matriz de grados de salida*, D^+ , tienen componentes $(D^-)_{ij} = \delta_{ij} gra^-(i)$ y $(D^+)_{ij} = \delta_{ij} gra^+(i)$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Ejemplo 1.3.3. Dado el siguiente digrafo G :

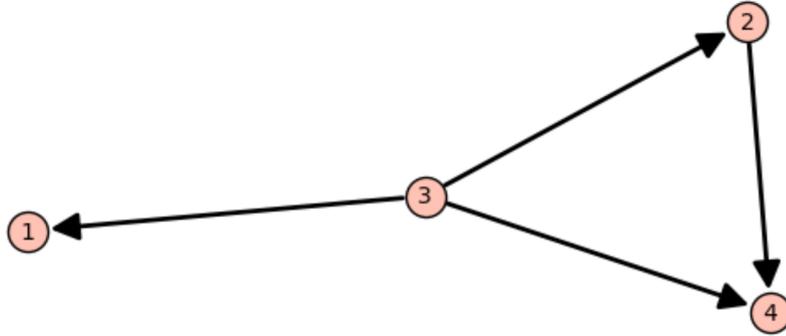


Figura 1.7.

Los grados de entrada y de salida de sus vértices son $\text{gra}^-(1) = 1$, $\text{gra}^-(2) = 1$, $\text{gra}^-(3) = 0$, $\text{gra}^-(4) = 2$, $\text{gra}^+(1) = 0$, $\text{gra}^+(2) = 1$, $\text{gra}^+(3) = 3$ y $\text{gra}^+(4) = 0$. Por tanto, las matrices de grados de entrada y de salida son:

$$D^-(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^+(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4. Representación matricial de grafos

Definición 1.4.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo o digrafo con $\#V = n$ y $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La *matriz de adyacencia* de G , respecto a los vértices anteriores, es una matriz booleana $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, donde a_{ij} vale 1 cuando v_i es adyacente a v_j y 0 cuando no lo es.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (1.7)$$

Nota 1.4.2. La matriz de adyacencia de un grafo depende del orden elegido para sus vértices. Al existir $n!$ ordenaciones posibles para sus vértices, también existirán $n!$ matrices de adyacencia para un grafo dado. Además, como para un grafo se tiene $a_{ij} = a_{ji}$, su matriz de adyacencia es simétrica. Por otra parte, para los grafos simples, tenemos $a_{ii} = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo 1.4.3. Hallemos ahora la matriz de adyacencia del siguiente grafo G :

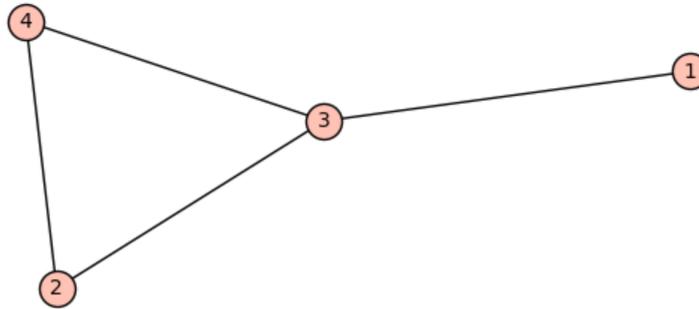


Figura 1.8.

Como las aristas de G son $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, la matriz de adyacencia viene dada por

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora sea el grafo G' , cuyos vértices son una reordenación aleatoria del grafo G :

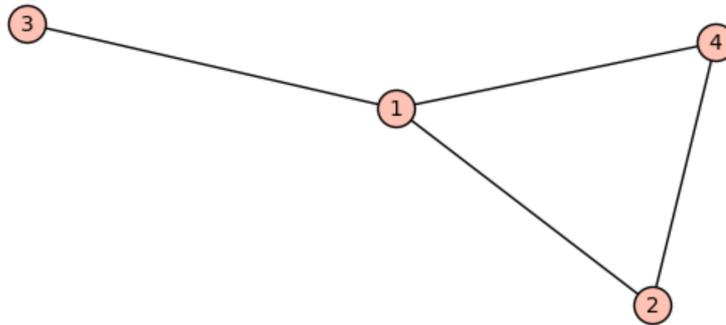


Figura 1.9.

Observamos que en este caso las aristas son $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, y su matriz de adyacencia es

$$A(G') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos observar, que como dichos grafos son grafos simples, efectivamente $a_{ii} = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Capítulo 2

Conjuntos ordenados y digrafos

Es claro que la ordenación de los vértices en las aristas de los digrafos va a permitir una interpretación de los digrafos dentro de la teoría de conjuntos ordenados.

Empezaremos con dos secciones que nos aportan nociones básicas sobre estructuras ordenadas, necesarias para la comprensión del trabajo.

2.1. Definiciones básicas sobre estructuras ordenadas

Sea X un conjunto. Una *relación binaria* (o relación) en X es cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Una relación \mathcal{R} es *reflexiva* si $(x, x) \in \mathcal{R}$ para cada $x \in X$. Se dice *simétrica* si para todo $x, y \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ implica $(y, x) \in \mathcal{R}$. Por el contrario, \mathcal{R} es *antisimétrica* si para todo $x, y, z \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R}$ implica $x = y$. Finalmente, \mathcal{R} es *transitiva* si para todo $x, y, z \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$ implica $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Definición 2.1.1. Un *preorden* \mathcal{R} en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva. Si un preorden \mathcal{R} en X es además antisimétrico, se llamará *orden parcial* (o simplemente *orden* en X) y decimos que (X, \mathcal{R}) es un *conjunto parcialmente ordenado* (o *poset*).

Notación 2.1.2. Como de costumbre, se escribe $x \leq y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Definición 2.1.3. Un elemento $x \in X$ es un *elemento maximal* (*minimal*) si para cada z en X , $x \leq z$ ($z \leq x$, respectivamente) implica $x = z$. Se denotará por $Max(X)$ ($Min(X)$, respectivamente) el conjunto de los elementos maximales (minimales, respectivamente) de X .

Dos elementos x, y se dicen *comparables* si $x \leq y$ o $y \leq x$, de lo contrario se dicen *incomparables*. Si cada par de elementos son comparables decimos que (X, \leq) es un conjunto *totalmente ordenado*. En general, cualquier subconjunto totalmente ordenado de un poset se llamará *cadena*. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice una *anticadena* si ningún par de sus elementos son comparables. Nótese que tanto $Max(X)$ como $Min(X)$ son anticadenas.

Definición 2.1.4. Un conjunto ordenado (X, \mathcal{R}) se dice *conexo* si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in X$ existe una secuencia de elementos de X , x_0, x_1, \dots, x_n , donde $x_0 = x$, $x_n = y$, y x_i es comparable a x_{i+1} para todo $i \leq n - 1$.

Definición 2.1.5. Una aplicación entre conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$ se dice que *preserva el orden* (o que es una *aplicación ordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x) \preceq f(x')$. Se dice que *invierte el orden* (o es *antiordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x') \preceq f(x)$. La aplicación anterior se dice que es un *isomorfismo* entre conjuntos preordenados si es una biyección tal que f y f^{-1} son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama *antiisomorfismo*.

Definición 2.1.6. Un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto decreciente* si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in X$. Para $x \in X$, $\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}$ es un conjunto decreciente, llamado el *ideal principal generado por x* .

Dualmente, un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto creciente* si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in X$. Como caso particular, $\uparrow x = \{y \in X; y \geq x\}$ es un conjunto creciente para todo $x \in X$, llamado *filtro principal generado por x* .

2.2. Relaciones y digrafos

Obsérvese que una relación \mathcal{R} en X se puede ver como un digrafo $G = G(X) = \langle X, \mathcal{R} \rangle$. Recíprocamente, dado un digrafo $G = \langle V, E \rangle$, el conjunto de aristas E es una relación \mathcal{R}_E en el conjunto de vértices V .

Nota 2.2.1. En principio si $(x, x) \in \mathcal{R}$, entonces en el grafo $G(X)$ aparecería un lazo. como trabajaremos con digrafos sin lazos, prescindiremos de esas aristas en $G(X)$. De manera análoga, si nos da un digrafo $G = \langle V, E \rangle$, en la relación \mathcal{R}_E añadimos las parejas (x, x) para todo $x \in V$.

Definición 2.2.2. Un digrafo $G = (V, E)$ se denomina *transitivo* si $(x, y), (y, z) \in E$, con $x \neq z$, implica que $(x, z) \in E$.

Definición 2.2.3. Un digrafo $G = (V, E)$ se denomina *acíclico* si no contiene ningún ciclo.

Proposición 2.2.4. a) Si \mathcal{R} es un preorden en X , entonces el digrafo asociado $G(X)$ es transitivo y recíprocamente.

b) (X, \mathcal{R}) es un poset si y solo si su digrafo asociado $G(X)$ es acíclico y transitivo.

Proposición 2.2.5. Dado un conjunto X con una relación de orden. El conjunto X con la relación de orden opuesta, se corresponde con el dual del digrafo asociado al conjunto X con el orden de partida.

Proposición 2.2.6. Un elemento maximal en un conjunto X con relación \mathcal{R} se corresponde con un sumidero en el digrafo asociado. Análogamente, se tiene que un elemento minimal se corresponde a una fuente en el digrafo asociado.

Proposición 2.2.7. Dado un conjunto X con una relación \mathcal{R} , si existen dos elementos x e y comparables en X , entonces existe una arista, bien de x a y , o bien de y a x en el digrafo asociado al conjunto. Análogamente, si son incomparables, entonces no hay ninguna arista entre ellos.

Proposición 2.2.8. Dado un conjunto X con relación \mathcal{R} . Si $A \subseteq X$ es una anticadena, entonces, en el digrafo asociado, los vértices correspondientes a los elementos de A no están conectados de manera dirigida.

Proposición 2.2.9. Toda aplicación ordenada entre dos conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$, se corresponde con un homomorfismo entre los digrafos asociados.

De la misma forma, una aplicación se corresponde con un antihomomorfismo entre los digrafos asociados.

Proposición 2.2.10. Dado un conjunto X con relación \leq , si $S \subseteq X$ es un conjunto decreciente, entonces S se corresponde con una absorbente inferior en el digrafo asociado.

Análogamente, si S es un conjunto creciente, le corresponde una absorbente superior en el digrafo asociado.

Proposición 2.2.11. Dado un conjunto X con una relación de orden \leq , sea $x \in X$. Entonces el ideal principal generado por x , $x \downarrow$, se corresponde con el dominio de influencia bajo x en el digrafo asociado.

De igual forma, el filtro principal generado por x , $x \uparrow$, se corresponde con el dominio de influencia sobre x en el digrafo asociado.

Ejemplo 2.2.12. Dado el siguiente preorden: $a \leq b, a \leq c, a \leq d, a \leq e, a \leq f, b \leq f$ y $c \leq e$, obtenemos el digrafo

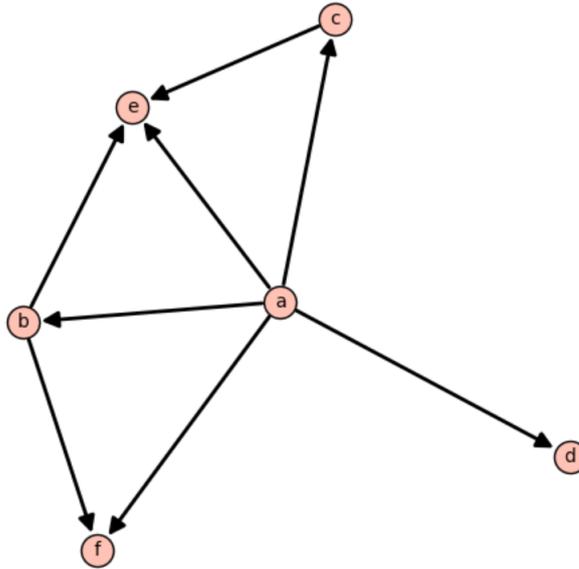


Figura 2.1.

Podemos observar que, efectivamente, los elementos maximales del preorden son los sumideros del digrafo asociado (d, e y f) y que los elementos minimales del preorden son las fuentes en el digrafo asociado (a). Además, por ejemplo, tenemos que el conjunto $\{c, d\}$ es una anticadena en el preorden y no existe un camino dirigido entre c y d (también se cumple con el resto de anticadenas). También podemos observar que el conjunto decreciente $\{a, d\}$ es una absorbente inferior en el digrafo (análogamente el conjunto creciente $\{c, e\}$ es una absorbente superior en el digrafo asociado). Por último, podemos ver que $c \downarrow = \{a, c\}$, que es el dominio de influencia bajo c en el digrafo, de la misma forma vemos que $c \uparrow = \{c, e\}$, que es el dominio de influencia sobre c en el digrafo.

Capítulo 3

Topología general

En esta sección veremos las definiciones y resultados principales de topología que usaremos en este trabajo. Estos pueden consultarse, por ejemplo, en [1] o [2]. Aquí solo demostraremos los resultados que no suelen aparecer en la bibliografía habitual.

3.1. Espacios topológicos

Definición 3.1.1. Una topología sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X , \mathcal{T} , que cumple las siguientes propiedades:

1. \emptyset y X están en \mathcal{T} .
2. La intersección finita de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .
3. La unión arbitraria de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Al par (X, \mathcal{T}) se le llama *espacio topológico*. Los conjuntos de \mathcal{T} son llamados *conjuntos abiertos de (X, \mathcal{T})* .

Notación 3.1.2. Cuando la topología \mathcal{T} se supone implícitamente, o no es relevante en el contexto, denotamos simplemente por X al espacio topológico, que también es abreviadamente referido como “espacio”.

Los dos ejemplos extremos de topología son los siguientes:

- La *topología discreta* en X es la topología en la que todos los conjuntos son abiertos, o equivalentemente, todos los conjuntos unitarios son abiertos.
- La topología *indiscreta* o *trivial* en X es la topología en la que únicamente \emptyset y X son los abiertos.

Es obvio que la topología discreta es la mayor topología posible, y la indiscreta, la menor.

Recordemos que un espacio topológico X se dice *compacto* si de todo recubrimiento de X por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Definición 3.1.3. Al complementario de un conjunto abierto en el espacio topológico (X, \mathcal{T}) se le llama *conjunto cerrado*.

Nótese que una topología es discreta si y solo si cualquier conjunto es cerrado.

La familia \mathcal{F} de cerrados de un espacio cumple las siguientes propiedades:

1. \emptyset y X están en \mathcal{F} .
2. La unión finita de conjuntos de \mathcal{F} está en \mathcal{F} .
3. La intersección arbitraria de conjuntos de \mathcal{F} está en \mathcal{F} .

Definición 3.1.4. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, dados $A \subseteq X$ y $x \in X$, se dice que x es *interior a A* en (X, \mathcal{T}) (o que A es *entorno* de x) si existe un abierto G con $x \in G \subseteq A$. Se llama *interior* de A en (X, \mathcal{T}) al conjunto $\text{int}(A) = \{x \in X; x \text{ es interior a } A\}$. Una familia \mathcal{V} de entornos de x se dice *base de entornos* de x si para todo entorno N de x , existe $V \in \mathcal{V}$ con $V \subseteq N$.

Un conjunto $A \subseteq X$ se dice *entorno* de $x \in X$ si $x \in \text{int}(A)$.

Por otro lado, $x \in X$ es llamado *punto adherente* a A si todo abierto G con $x \in G$ cumple $G \cap A \neq \emptyset$. Se llama *clausura* de A al conjunto $\bar{A} = \{x \in X; x \text{ es adherente a } A\}$.

Lema 3.1.5. Se cumple que $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Un conjunto $A \subseteq X$ es *cerrado* en (X, \mathcal{T}) si y solo si $\bar{A} = A$ y es abierto si y solo si $\text{int}(A) = A$.

3.2. Base de una topología

La topología de los espacios de interés (por ejemplo, los espacios métricos) no está dada explícitamente sino descrita a partir de ciertos abiertos generadores de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 3.2.1. Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se dice que es una *base* de la topología \mathcal{T} (o *base de abiertos*) si todo abierto no vacío de \mathcal{T} es unión de abiertos de \mathcal{B} .

Lema 3.2.2. \mathcal{B} es una base de \mathcal{T} si y solo si para cada abierto U y para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 3.2.3. Una *base* \mathcal{B} de \mathcal{T} se dice *minimal* si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ la familia $\mathcal{B} - \{B\}$ deja de ser base de \mathcal{T} .

Ejemplo 3.2.4. Una base de la topología discreta es la formada por todos los conjuntos unitarios $\{x\}$, $x \in X$. Además, esta base es minimal.

Definición 3.2.5. Una base \mathcal{B} para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X , llamados *elementos básicos*, que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x .
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x , tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si \mathcal{B} satisface estas dos condiciones, la familia $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ formada por los conjuntos $U \subseteq X$ tales que para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$, es la única topología sobre X que tiene a \mathcal{B} como base y se denomina *topología generada por \mathcal{B}* .

Añadiendo una tercera condición a la Definición 3.2.5 se tiene la siguiente caracterización de base minimal para una topología:

Lema 3.2.6. Un conjunto \mathcal{B} de subconjuntos no vacíos de X es una *base minimal* para una topología si y solo si se cumplen las tres propiedades siguientes:

1. Todo punto de X está en algún conjunto B de \mathcal{B} .
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
3. Si una unión de conjuntos B_i de \mathcal{B} está también en \mathcal{B} , entonces la unión es igual a uno de los B_i .

Demostración. Las dos primeras condiciones son las de la Definición 3.2.5.

Vamos a probar ahora la tercera condición. Su pongamos que la base \mathcal{B} no cumple la propiedad (3), es decir, existe algún $B' \in \mathcal{B}$ con $B' = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$ y $B' \neq B_i$, para todo $i \in I$.

Entonces, la familia $\mathcal{B} - \{B'\}$ sigue siendo base de la topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, luego \mathcal{B} no es minimal.

Recíprocamente, si se cumple (3) y \mathcal{B}' es una base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ con $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, dado cualquier $B \in \mathcal{B}$ tenemos $B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B'_\alpha$ con $B'_\alpha \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ por ser \mathcal{B}' base. Entonces por la condición (3), existe $\alpha_0 \in \Lambda$ con $B = B'_{\alpha_0} \in \mathcal{B}'$. Es decir, $B \in \mathcal{B}'$, y por tanto $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. \square

3.3. Axiomas de separación

Es bien sabido que la unicidad de puntos límite es consecuencia de la famosa *propiedad de separación de Hausdorff*. Decimos que un espacio X tiene esta propiedad (o que es un *espacio T_2*) si para dos puntos distintos cualesquiera $x, x' \in X$ existen abiertos G_1, G_2 de X tales que $x \in G_1$, $y \in G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

La nomenclatura T_2 se debe a que la propiedad de Hausdorff es parte de una jerarquía de propiedades de separación que van de T_0 a T_5 , estando los espacios métricos en lo más alto de la escala.

Definición 3.3.1. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico.

1. X es un *espacio T_0* si para dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto G tal que, o bien $x \in G$ y $y \notin G$, o bien $y \in G$ y $x \notin G$.
2. X es un *espacio T_1* si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos $G_1, G_2 \in (X, \mathcal{T})$ tales que: $x \in G_1, y \notin G_1$, y también $y \in G_2, x \notin G_2$.

Obviamente, $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Además,

Lema 3.3.2. Se tienen las siguientes equivalencias:

1. X es T_0 si y solo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ o bien $x \notin \overline{\{y\}}$, o bien $y \notin \overline{\{x\}}$.
2. X es T_1 si y solo si para todo $x \in X$, entonces $\{x\}$ es cerrado, es decir, $\{x\} = \overline{\{x\}}$, lo que a su vez equivale a pedir que para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_x} G$ siendo \mathcal{G}_x la familia de abiertos que contiene a x .
3. X es T_2 si y solo si para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_x} \overline{G}$.

3.4. Aplicaciones continuas y homeomorfismos

Por medio de una topología se da una estructura de proximidad entre los puntos de un conjunto. Las aplicaciones continuas entre espacios topológicos son aquellas que preservan la proximidad. Recordamos aquí la definición general de continuidad.

Definición 3.4.1. Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es *continua* si $f^{-1}(V)$ es un abierto de X , para cada abierto V de Y .

Una aplicación continua es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y su inversa f^{-1} es también continua.

Una clase especial de aplicaciones continuas son aquellas que determinan la topología del espacio de llegada en función de la topología del dominio de la aplicación (en particular, esta clase incluye a los homeomorfismos). Estas aplicaciones son las llamadas *aplicaciones cociente*. Recordemos su definición.

Definición 3.4.2. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una *aplicación cociente* (o *de identificación*) si un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto en Y si y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Definición 3.4.3. Si X es un espacio, Y un conjunto y $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología \mathcal{T} sobre Y respecto a la cual p es una aplicación cociente; se denomina *topología cociente* inducida por p .

En particular, si “ \sim ” es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X , el conjunto cociente X/\sim con la topología cociente inducida por la proyección natural $p : X \rightarrow X/\sim$ se denomina *espacio cociente* de X .

Podemos describir la topología cociente de otro modo: Un subconjunto U de X/\sim es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es justo la unión de los representantes de las clases pertenecen a U . Así, el conjunto abierto característico de X/\sim es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un conjunto abierto de X .

Nótese que $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente si y solo si Y es homeomorfo al espacio cociente X/\sim donde “ \sim ” es la relación de equivalencia definida por $x \sim x'$ si $p(x) = p(x')$.

La siguiente propiedad es característica de los espacios cociente.

Proposición 3.4.4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua compatible con la relación de equivalencia “ \sim ” sobre X , es decir, $f(x) = f(x')$ si $x \sim x'$. Entonces la aplicación $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ dada por $\tilde{f}([x]) = f(x)$ (llamada *aplicación inducida por f*) es continua para la topología cociente.

Capítulo 4

Espacios de Alexandrov, órdenes y digrafos

4.1. Espacios de Alexandrov

Un espacio topológico es un *espacio de Alexandrov* o *A-espacio* si la topología \mathcal{T} es cerrada también bajo intersecciones arbitrarias. Es decir, la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.

Es obvio que todo espacio finito es un A-espacio, ya que toda intersección de abiertos se puede expresar como una intersección finita. Por tanto, todo lo que se establezca para A-espacios, seguirá siendo válido para los espacios finitos. Ver [3] para varias referencias.

En gran medida, cuando pensamos en un espacio topológico, solemos considerar espacios con la propiedad de Hausdorff. Un ejemplo de esto son los espacios métricos. La intuición que solemos tener de este tipo de espacios puede resultar un poco engañosa cuando tratemos con espacios de Alexandrov. Para empezar, el siguiente lema nos haría dudar del interés de los A-espacios.

Lema 4.1.1. Si un A-espacio es T_1 , entonces es discreto.

Demostración. Por el Lema 3.3.2 (2) cada $\{x\}$ es abierto y cerrado. \square

Otra característica distintiva de los A-espacios es la existencia de una base mínima para su topología.

Definición 4.1.2. Sea X un A-espacio. Para todo $x \in X$, se define el *abierto mínimo* de x , U_x , como la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a x .

Lema 4.1.3. Si X es un A-espacio, entonces $U_x = U_y$ si y solo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. En particular, X es T_0 si y solo si $U_x = U_y$, o, equivalentemente, $x = y$.

Demostración. Supongamos $U_x = U_y$ y sea $z \in \overline{\{x\}}$ cualquiera. Entonces tenemos que $U_z \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in U_z$. Utilizando nuestra hipótesis, $U_x = U_y \subseteq U_z$. De aquí obtenemos que $y \in U_z$. Ahora, $U_z \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por tanto $z \in \overline{\{y\}}$. Hemos demostrado inclusión $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. La otra inclusión se prueba análogamente y tenemos la igualdad $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

Si ahora suponemos $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, entonces se sigue que $y \in \overline{\{x\}}$, y, de la misma manera $x \in \overline{\{y\}}$. Esto quiere decir que $U_y \cap \{x\} \neq \emptyset$ y $U_x \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in U_y$ e $y \in U_x$ y, por la definición de los abiertos mínimos, $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$; esto es, $U_x = U_y$.

Si el espacio X fuese T_0 entonces la igualdad $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ equivale a $x = y$ por el Lema 3.3.2. Recíprocamente, si X no es T_0 entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tales que todo abierto

que contiene a x contiene a y y viceversa; en particular, $y \in U_x$ y $x \in U_y$, por lo que $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$ y, por tanto, $U_x = U_y$ aunque $x \neq y$. \square

Lema 4.1.4. La familia de los conjuntos abiertos mínimos U_x es una base del espacio X . De hecho, es la única base minimal (es decir, mínima) de X .

Demostración. Ver que es base es inmediato, a partir del Lema 3.2.2. La minimalidad de \mathcal{B} es inmediata a partir del Lema 3.2.6. En efecto, si $\cup_{x \in J} U_x = U_y$, con $y \in J$ debe existir $x_0 \in J$ con $y \in U_{x_0}$ y por tanto $U_y \subseteq U_{x_0}$. Por otra lado, $U_{x_0} \subseteq \cup_{x \in J} U_x = U_y$ y se sigue la igualdad $U_y = U_{x_0}$.

Veamos que \mathcal{B} es la única base minimal. Supongamos que existe otra base minimal \mathcal{M} . Entonces para todo $U_x \in \mathcal{B}$ existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $x \in M \subseteq U_x$. Así pues, $M = U_x$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. Como habíamos supuesto que \mathcal{M} es minimal, se tiene, necesariamente, la igualdad $\mathcal{M} = \mathcal{B}$. \square

Proposición 4.1.5. X es un A-espacio si y solo si para todo punto $x \in X$, existe un abierto mínimo U_x que lo contiene.

Demostración. Ya sabemos por la Definición 4.1.2 que en todo A-espacio se puede encontrar un abierto mínimo para cada punto. Recíprocamente, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia cualquiera de abiertos de X , con $\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Entonces, $U_x \subseteq G_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$, y por tanto $x \in U_x \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, luego $x \in \text{int}(\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Hemos probado que $\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ es un abierto. \square

Proposición 4.1.6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre A-espacios. Entonces f es continua si y solo si $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si f es continua, entonces $f^{-1}(U_{f(x)})$ es abierto y $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$, luego $U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$. Esto es, $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$.

Recíprocamente, si Ω es cualquier abierto de Y y $x \in f^{-1}(\Omega)$, tenemos $f(x) \in \Omega$. Luego $f(U_x) \subseteq U_{f(x)} \subseteq \Omega$. Aquí usamos la hipótesis y la minimalidad de $U_{f(x)}$. Por tanto, $U_x \subseteq f^{-1}(\Omega)$ y $f^{-1}(\Omega)$ es abierto, lo que quiere decir que f es continua. \square

Proposición 4.1.7. Si $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente y X es un A-espacio, entonces Y también lo es.

Demostración. Sea $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de abiertos en Y , es decir, $p^{-1}(\Omega_\alpha)$ es abierto de X para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces $p^{-1}(\cap_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha) = \cap_{\alpha \in \Lambda} p^{-1}(\Omega_\alpha)$ es abierto de X por ser A-espacio. Por definición de topología cociente, $\cap_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha$ es abierto de X/\sim . \square

Proposición 4.1.8. En la proposición anterior, la familia de imágenes $\{p(U_x)\}_{x \in X}$ de la base mínima de X es base mínima de Y si y solo si la aplicación cociente es también abierta.

Recordemos que una aplicación (continua o no) $f : X \rightarrow Y$ se dice *abierta* si para todo abierto G de X su imagen $f(G)$ es un abierto de Y .

Demostración. Si la familia dada fuese una base mínima entonces cada imagen $p(U_x)$ sería un conjunto abierto y como todo abierto G de X se puede expresar como una unión $G = \cup_{x \in J} U_x$ se sigue que $p(G) = \cup_{x \in J} p(U_x)$ es abierto.

Para probar el recíproco, sabemos que cada $p(U_x)$ es un abierto que contiene a $p(x)$. Si $U_{p(x)}$ es el abierto mínimo de $p(x)$ en Y dado por la Proposición 4.1.7, la continuidad de p nos dice que $p(U_x) \subseteq U_{p(x)}$ por la Proposición 4.1.6. La minimalidad de $U_{p(x)}$ nos da $p(U_x) = U_{p(x)}$. \square

Ejemplo 4.1.9. Un ejemplo donde $p(U_x)$ no es abierto es la siguiente aplicación cociente. Sean los espacios finitos $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{x, y, z\}$ con topologías $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y, \{x\}\}$. Entonces $p : X \rightarrow Y$ dada por $p(a) = x$, $p(b) = p(c) = y$ y $p(d) = z$ es una aplicación cociente y $p(U_b) = \{x, y\}$ no es abierto de Y con $U_b = \{a, b\}$.

Proposición 4.1.10. Todo A-espacio X tiene un cociente canónico X_0 que es T_0 .

Demostración. Definimos la relación $x \sim y$ si $U_x = U_y$. Sea $X_0 = X/\sim$ el espacio cociente correspondiente. Sabemos que X_0 es un A-espacio por la Proposición 4.1.7. Más aún, la proyección canónica $p : X \rightarrow X_0$ es una aplicación abierta ya que $p^{-1}(p(U_x)) = U_x$, pues si $y \in p^{-1}(p(U_x))$ entonces existe $z \in U_x$ con $p(y) = p(z)$, esto es, $U_y = U_z \subseteq U_x$ y así $y \in U_x$. Tenemos, por la Proposición 4.1.8, que $\{p(U_x)\}_{x \in X}$ es la base mínima de X_0 . El espacio X_0 es T_0 como consecuencia inmediata del Lema 4.1.3 pues $p(U_x) = p(U_y)$ es equivalente a $[x] = [y]$. \square

4.2. A-topologías y preórdenes

Dedicaremos la sección a describir la identificación entre A-espacios y conjuntos preordenados debida a Alexandrov y Tucker [4].

Lema 4.2.1. Si \leq es un preorden en X , entonces la familia de los ideales principales en X :

$$\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}, \quad x \in X$$

es base mínima para una A-topología sobre X para la cual los abiertos son exactamente los conjuntos decrecientes (o, equivalentemente, los cerrados son los conjuntos crecientes). Más aún, si " \leq " es un orden parcial, entonces esta topología es T_0 .

Demostración. Para ver que la familia anterior forma una base minimal usaremos el Lema 3.2.2. Obviamente $x \in \downarrow x$. Más aún, si $z \in \downarrow x$, claramente tenemos $\downarrow z \subseteq \downarrow x$. Esto prueba tanto la segunda condición del lema como que los conjuntos $U_x = \downarrow x$ forman una base minimal.

Si además (X, \leq) es un poset, entonces si $x \in U_y$ e $y \in U_x$ tenemos que $x \leq y$ y $y \leq x$. Por tanto $x = y$, es decir, la topología así construida es T_0 .

Finalmente, si A es un conjunto decreciente se prueba fácilmente que $A = \cup_{a \in A} \downarrow a$, esto es, A es un abierto de esta topología. \square

Definición 4.2.2. A la topología anterior la llamaremos *topología del preorden " \leq "* y la denotaremos por \mathcal{T}_{\leq} .

Nota 4.2.3. También es base mínima para una topología sobre X la familia de filtros principales $\uparrow x$, que sería la topología del preorden opuesto definido por $x \leq^{op} y$ si $y \leq x$.

De manera inversa tenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.4. En todo A-espacio (X, \mathcal{T}) se puede definir un preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ (*preorden de especialización* de \mathcal{T}) estableciendo $x \leq_{\mathcal{T}} y$ si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

$$U_x \subseteq U_y \Leftrightarrow x \in U_y \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$$

Más aún, si (X, \mathcal{T}) es T_0 entonces el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ es de hecho un orden parcial.

Demostración. La propiedad reflexiva sigue de $x \in U_x$. Para ver la propiedad transitiva, supongamos $x \leq_{\mathcal{T}} y$ e $y \leq_{\mathcal{T}} z$. Entonces tenemos $x \in U_y$ y $y \in U_z$, respectivamente. En particular, por ser X un A-espacio, $U_y \subseteq U_z$. Por tanto tenemos $x \in U_y \subseteq U_z$, es decir, $x \leq_{\mathcal{T}} z$.

Si además (X, \mathcal{T}) es T_0 , y tenemos $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x \in U_y$ e $y \in U_x$ y por ello $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$. Así que $U_x = U_y$, y por el Lema 4.1.3 tenemos $x = y$. \square

Proposición 4.2.5. Toda relación de preorden “ \leq ” sobre un conjunto X coincide con el preorden de especialización de su topología. Más aún, toda A-topología \mathcal{T} sobre X es la topología de su preorden de especialización. Además, $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$ es ordenada si y solo si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua.

Si el espacio (X, \mathcal{T}_{\leq}) es T_0 , entonces se corresponde con un poset.

Demostración. Denotemos por “ \preceq ” el preorden de especialización de \mathcal{T}_{\leq} y supongamos que $x \preceq y$, esto es, $x \in U_y$. Como el abierto mínimo de y en $\mathcal{T}(\leq)$ es el ideal principal de y con respecto al preorden “ \leq ”, $U_y = \downarrow y$, se sigue que $x \leq y$.

Si ahora A es un abierto de la topología del preorden de especialización de \mathcal{T} podemos escribir A como la unión $A = \cup_{a \in A} \downarrow a$ donde los ideales principales están tomados respecto a “ $\leq_{\mathcal{T}}$ ”. Pero, respecto a este orden, es inmediato probar que $\downarrow a = U_a$ es el abierto mínimo de a en la A-topología \mathcal{T} , y así A es abierto de esta topología.

Ahora, si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua, entonces, la continuidad y la definición de la topología del preorden nos dan $\downarrow x = U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)}) = f^{-1}(\downarrow f(x))$. Luego si $y \leq x$, entonces $f(y) \preceq f(x)$. El recíproco es análogo. \square

Corolario 4.2.6. Los abiertos de un espacio finito (X, \mathcal{T}) están en correspondencia biunívoca con las anticadenas de su preorden asociado. Más precisamente, la anticadena asociada a un abierto G es el conjunto $Max(G)$.

Demostración. Sea \mathcal{A} la familia de anticadenas de X (incluyendo la anticadena vacía). Sea $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ la aplicación que lleva G en $Max(G)$. Para ver que ψ es sobreyectiva, dada una anticadena $A \in \mathcal{A}$ consideramos el abierto $G = \cup_{x \in A} U_x$. Por definición del preorden, tenemos que $Max(G) = A$. La inyectividad de ψ sigue inmediatamente si comprobamos la igualdad $G = \cup_{x \in Max(G)} U_x$. Para ver esta igualdad, sea $y \in G$, y C una secuencia de longitud máxima de elementos comparables en G conteniendo a y . Entonces el elemento máximo de C , digamos m , es maximal en G , pues si no es así existe $x \in G$ con $m \leq x$ y la secuencia C puede ser alargada añadiendo x . Entonces $y \in U_m$ y tenemos la inclusión $G \subseteq \cup_{x \in Max(G)} U_x$. La otra inclusión es obvia. \square

Corolario 4.2.7. Un A-espacio X es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y solo si existe una secuencia de elementos comparables para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de X .

4.3. Ejemplos y tabla resumen

Como vimos en el capítulo 2, todo conjunto preordenado (X, \leq) puede ser representado como un digrafo cuyos vértices son los elementos de X y aparece una arista dirigida de a a b si $a < b$. Por tanto, a todo A-espacio (X, \mathcal{T}) le corresponde el digrafo de su preorden de especialización “ $\leq_{\mathcal{T}}$ ”. Por supuesto este digrafo permite visualizar la topología original: un conjunto U de vértices del digrafo es abierto si cada arista que tiene su punto final en un elemento de U tiene su punto inicial también en U .

Ejemplo 4.3.1. Para la topología $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$ sobre $X = \{a, b, c, d\}$ los abiertos mínimos son $U_a = \{a, b\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = U_d = \{b, c, d\}$. Por tanto su preorden es $b < a$, $b < c$, $b < d$, $c < d$ y $d < c$ y su grafo dirigido asociado es:

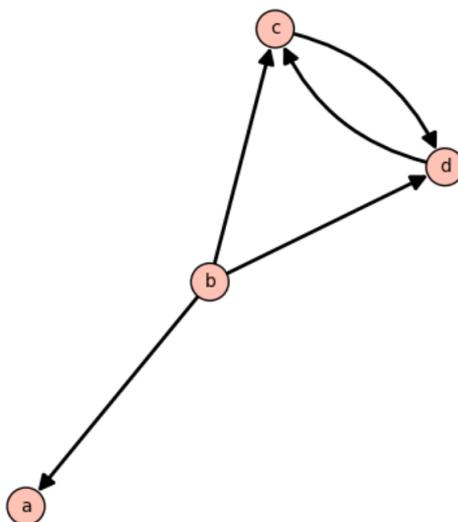


Figura 4.1.

Con el fin de simplificar la estructura de los digrafos asociados a los posets se utilizan los llamados diagramas de Hasse.

Definición 4.3.2. Dado un poset (X, \leq) , se define su *diagrama de Hasse*, $\mathcal{H}(X)$, como el digrafo obtenido a partir del digrafo asociado $G(X)$ una vez eliminadas aquellas aristas dirigidas que son redundantes por transitividad. De hecho esta es la manera habitual de proceder cuando se define un orden transitivo y acíclico ya que se pueden obviar las relaciones generadas por transitividad.

Ejemplo 4.3.3. Dado el poset (X, \leq) con las siguientes relaciones: $d \leq b, d \leq c, e \leq b, e \leq c, b \leq a$ y $c \leq a$. Por transitividad, se deben incluir además las relaciones $d \leq a$ y $e \leq a$. El digrafo asociado $G(X)$ es

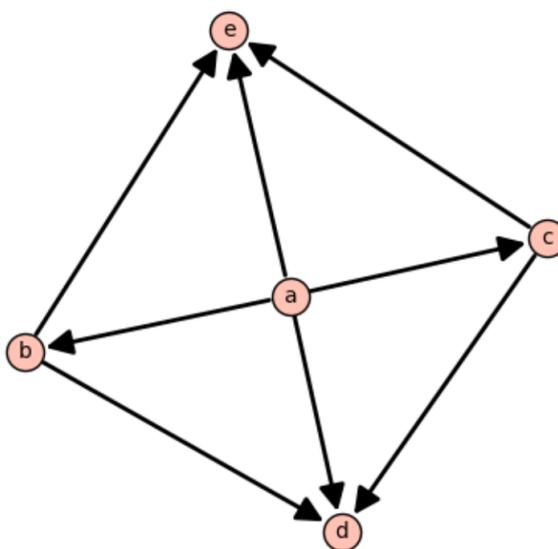


Figura 4.2.

En los diagramas de Hasse, en lugar de colocar flechas, se colocan los vértices de forma que si un vértice u está colocado en una altura inferior a otro vértice v , entonces hay una arista dirigida de u a v . El diagrama de Hasse en este caso sería

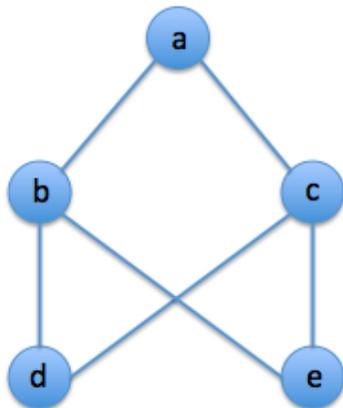


Figura 4.3.

Ejemplo 4.3.4. La *recta de Khalimsky* es el poset $K = (\mathbb{Z}, \preceq)$ donde $2k, 2k + 2 \preceq 2k + 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Su diagrama de Hasse está descrito en la siguiente figura:

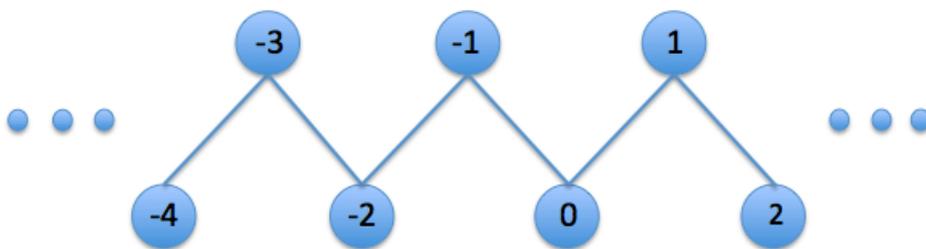


Figura 4.4.

Proposición 4.3.5. Si X es finito, entonces X es conexo si y solo si el diagrama de Hasse asociado a X es conexo.

Demostración. Supongamos que el diagrama de Hasse asociado a X es conexo. Dados dos elementos $x, y \in X$, podemos encontrar un arco por aristas Γ en el diagrama de Hasse entre x e y . Como los vértices de cada arista de $\mathcal{H}(X)$ son elementos comparables en X , el arco Γ determina una secuencia de elementos comparables en X . Esto prueba que X es conexo por el Corolario 4.2.7.

Si X es conexo y $a, b \in X$, existe una secuencia de elementos comparables $x_0, x_1, \dots, \leq x_n$ con $a = x_0$ y $b = x_n$. Por ser X finito, si la relación entre x_i y x_{i+1} , $i = 0, \dots, n-1$ no aparece en $\mathcal{H}(X)$ es porque se ha podido descomponer en una cadena finita de relaciones directas que dan lugar a un arco ascendente o descendente por aristas en $\mathcal{H}(X)$ entre x_i y x_{i+1} . De esta forma a y b quedan unidos $\mathcal{H}(X)$ por la yuxtaposición de estos arcos. \square

Nota 4.3.6. En general, la Proposición 4.3.5 puede no ser cierta.

Ejemplo 4.3.7. Si D_n denota el espacio discreto, el orden asociado es la igualdad, es decir, $x \leq x'$ si y solo si $x = x'$ y el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(D_n)$ es la unión disjunta de n puntos.

Ejemplo 4.3.8. Para $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ con $a < b$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $b < e$, $b < f$ y $c < e$, el diagrama de Hasse de X está descrito en la Figura 4.5. Obsérvese que en $\mathcal{H}(X)$ no se reflejan las relaciones $a < e$ y $a < f$. Puesto que $\mathcal{H}(X)$ contiene a todas las anticadenas del orden, la topología del orden puede obtenerse a partir del diagrama de Hasse por medio del Corolario 4.2.6, de forma que los abiertos mínimos son los correspondientes a los anticadenas unitarias, esto es, $U_a = \{a\}$, $U_b = \{a, b\}$, $U_c = \{a, c\}$, $U_d = \{a, d\}$, $U_e = \{a, b, c, e\}$ y $U_f = \{a, b, f\}$.

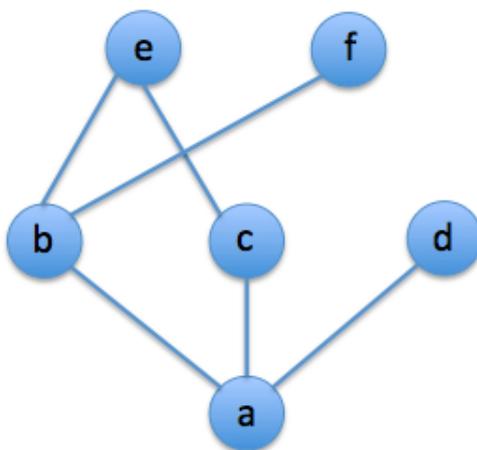


Figura 4.5.

Ejemplo 4.3.9. Ahora, supongamos que nos es dado un diagrama de Hasse indicado en la Figura 4.6. Del diagrama se deduce que las anticadenas no vacías con más de un elemento son $\{a, d\}$, y $\{b, c\}$. De donde se sigue que la topología de este orden es $\mathcal{T}_{\leq} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$.

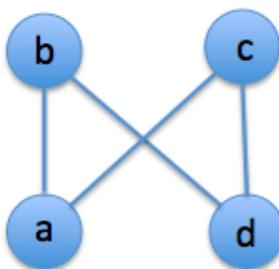


Figura 4.6.

Nota 4.3.10. Sea K_n un digrafo completo cualquiera, entonces su A-topología es la indiscreta $\{X, \emptyset\}$.

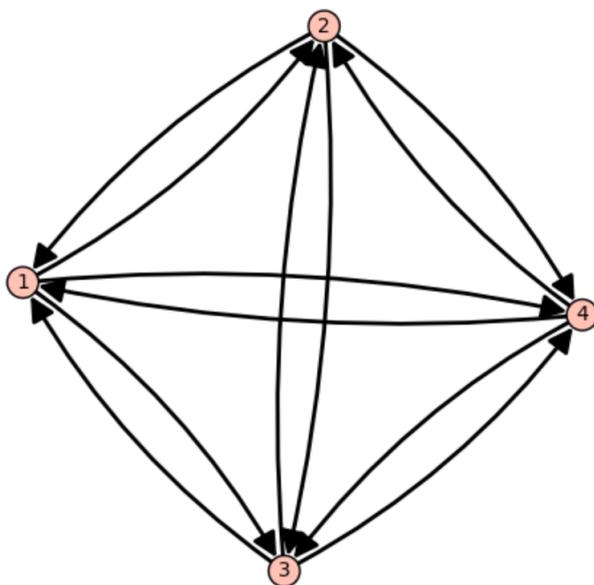


Figura 4.7.

En particular, si tenemos un digrafo transitivo cualquiera G , su A-espacio X tiene como cociente el espacio X_0 asociado al digrafo G_0 resultante de identificar a un único vértice cada componente fuertemente conexa (ver Ejemplo 5.5.1). El digrafo G_0 es entonces transitivo y acíclico y el homomorfismo $h : G \rightarrow G_0$ inducido por esa identificación se corresponde por la proyección $p : X \rightarrow X_0$ vista en la Proposición 4.1.10.

Para concluir esta sección, mostraremos una tabla resumen con los conceptos reunidos en estos 4 capítulos. Las filas indican la correspondencia entre ellos.

Tabla 4.3		
Digrafos transitivos	Preórdenes	A-Topologías
Acíclico (sin lazos)	Orden parcial	A_0 -topología
Digrafo dual	Relación de orden opuesta	Espacio opuesto X^{op} al cambiar abiertos por cerrados
Sumidero	Elemento maximal	Conjunto unitario cerrado
Fuente	Elemento minimal	Conjunto unitario abierto
(a, b) arista (ordenada)	$a \leq b$	$b \in \overline{\{a\}} \Leftrightarrow a \in U_b$
(a, b) no arista	a y b no comparables	$b \notin \overline{\{a\}} \Leftrightarrow a \notin U_b$ y $a \notin \overline{\{b\}} \Leftrightarrow b \notin U_a$
Conexo	Conexo	Conexo (\Leftrightarrow Conexo por caminos)
Vértice independiente	$x \leq y$ o $x \geq y \implies y = x$	Conjunto unitario abierto y cerrado a la vez
No existe camino dirigido entre dos elementos cualesquiera de $S \subseteq X$	S anticadena	$S \cap U_s = \{s\}, \forall s \in S$ (la topología relativa a S es discreta)
Homomorfismo entre digrafos transitivos	Aplicación ordenada entre conjuntos preordenados	Aplicación continua entre A-espacios
Antihomomorfismo entre digrafos transitivos X e Y	Aplicación antiordenada entre conjuntos preordenados	Aplicación continua entre X e Y^{op}
Isomorfismo entre digrafos	Isomorfismo entre conjuntos preordenados	Isomorfismo entre A-espacios
Antiisomorfismo entre digrafos	Antiisomorfismo entre conjuntos preordenados	Antiisomorfismo entre A-espacios
Absorbente inferior	Conjunto decreciente	Abierto
Absorbente superior	Conjunto creciente	Cerrado
Familia de los dominios de influencia bajo los vértices	Familia de ideales principales ($\{a \downarrow a \in X\}$)	Base mínima (de abiertos) para una A-topología
Familia de los dominios de influencia sobre los vértices	Familia de filtros principales ($\{a \uparrow a \in X\}$)	Base mínima (de cerrados) para una A-topología
Componente fuertemente conexa	$A = a \uparrow \cap a \downarrow$, para $a \in A$	Conjunto con A-topología indiscreta $\{X, \emptyset\}$

Capítulo 5

Laplacianas en digrafos y topologías de Alexandrov

En este capítulo todos los digrafos serán transitivos y, por tanto, tienen asociada una topología de Alexandrov (no necesariamente son espacios T_0).

5.1. Las matrices laplacianas de un digrafo

Notación 5.1.1. Durante todo el capítulo, a la matriz de adyacencia de un digrafo transitivo G se le denotará por $A(G)$, a la matriz de grados de entrada (respectivamente, de salida) se le denotará por $D^-(G)$ (respectivamente, $D^+(G)$), y al digrafo dual se le denotará por \overline{G} .

Definición 5.1.2. Definimos la *matriz laplaciana de entrada* de un digrafo transitivo G (y la denotamos por $L^-(G)$) como $D^-(G) - A(G)$.

Análogamente, se define la *matriz laplaciana de salida* (denotada por $L^+(G)$) como $D^+(G) - A(G)$.

Proposición 5.1.3. Dado un digrafo transitivo G , entonces $A(\overline{G}) = A(G)^t$, $L^+(\overline{G}) = L^-(G)^t$ y $L^-(\overline{G}) = L^+(G)^t$.

Como queremos unir topologías con matrices, debemos encontrar un modo de codificar conjuntos en términos de objetos del álgebra lineal.

Definición 5.1.4. Para $S \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ definimos el *vector característico* de S como el vector $\vec{b}(S)$ con n componentes $\vec{b}(S)_i = 1$ si y solo si $v_i \in S$ y 0 en otro caso.

Nota 5.1.5. Observemos que si $S = \{v_i\}$, con $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces $\vec{b}(S) = \vec{e}_i$, donde \vec{e}_i es el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n .

Definición 5.1.6. Dada una matriz A se llama *espectro* de A al conjunto de sus autovalores. Si G es un digrafo se llamará L^+ -*espectro* de G al espectro de su matriz laplaciana $L^+(G)$. Análogamente se define el L^- -*espectro* de G .

Nota 5.1.7. De acuerdo con las equivalencias dadas en el capítulo anterior, podemos hablar de las matrices laplacianas y sus correspondientes espectros para conjuntos ordenados o A-espacios finitos.

Es claro que las matrices laplacianas de un digrafo G dependen de la elección de un orden o indexación de los vértices de G . Pero esto no es así para sus respectivos espectros como consecuencia del siguiente resultado bien conocido en el álgebra de matrices.

Lema 5.1.8. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada $n \times n$ y sea σ una permutación de $\{1, \dots, n\}$. Entonces el espectro de A coincide con el de la matriz $A^\sigma = [a_{\sigma(i)\sigma(j)}]$.

Demostración. Podemos pensar que A^σ se ha construido en dos pasos: primero se permutan las filas y después las columnas. Cada paso representa la misma transformación lineal pero con otra base. por tanto A^σ es una matriz semejante a A . Es decir existe una matriz invertible B con $A^\sigma = BAB^{-1}$. Y matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico pues $|A^\sigma - \lambda I| = |BAB^{-1} - \lambda I| = |B(A - \lambda I)B^{-1}| = |A - \lambda I|$. \square

De acuerdo con el lema anterior podemos elegir una indexación a nuestra conveniencia cuando trabajemos con el L^+ -espectro o el L^- -espectro de un digrafo. En particular se conseguirá una elección de índices tal que las laplacianas vendrán dadas por matrices por bloques (cuadrados) triangulares superiores. Para este tipo de matrices el espectro se descompone en la unión de los espectros de los bloques. Explícitamente, tenemos el siguiente resultado clásico del álgebra de matrices.

Lema 5.1.9. Sea A la matriz cuadrada con la siguiente descomposición triangular superior en bloques cuadrados

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces $|A| = \prod_{i=1}^n |A_{ii}|$. En particular el espectro de A es la unión de los espectros de los bloques diagonales.

Demostración. Podemos ver la matriz A como la matriz con sólo dos bloques diagonales

$$\begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

donde $P = A_{11}$, $R = [A_{12} \ A_{13} \ \dots \ A_{1n}]$ y Q es la matriz por bloques

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces bastará probar $|A| = |P||Q|$. Esto se puede demostrar inductivamente sobre el tamaño de P . Si P se reduce a un número el resultado es inmediato. Suponiendo el resultado para P con tamaño $\leq s - 1$, para P de tamaño s sigue del desarrollo por menores de $|A|$ y la hipótesis de inducción. \square

5.2. Conectividad fuerte en digrafos transitivos

Esta sección solo contiene la siguiente proposición, que caracteriza la conexión fuerte entre dos vértices de un digrafo transitivo. Explícitamente se prueba:

Proposición 5.2.1. Sea $G = (V, E)$ un digrafo transitivo. Las siguientes condiciones son equivalentes para $v_i, v_j \in V$, y para $L^- = L^-(G)$, $L^+ = L^+(G)$ y $A = A(G)$:

a) v_i y v_j están fuertemente conectados.

- b) $A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \vec{e}_j - \vec{e}_i$.
c) $L^+(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$.
d) $L^-(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$.
e) $(L^-)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$.
f) $(L^+)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$.
g) $A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \vec{e}_j - \vec{e}_i$.

Demostración. (**a** \implies **b**). Sean v_i y

$$(A(\vec{e}_i - \vec{e}_j))_k = \sum_l a_{kl}(\delta_{il} - \delta_{jl}) = a_{ki} - a_{kj}$$

Si $k \neq i, j$, entonces $a_{ki} = a_{kj}$ debido a la transitividad. Si $k = i$, entonces $a_{ki} = 0$ y $a_{kj} = 1$. Análogamente, si $k = j$, entonces $a_{ki} = 1$ y $a_{kj} = 0$. En todos los casos, $(A(\vec{e}_i - \vec{e}_j))_k = (\vec{e}_j - \vec{e}_i)_k$.

(**b** \implies **c**). Supongamos que $A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \vec{e}_j - \vec{e}_i$, entonces:

$$A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = D^+(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(D^+ - A)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$$

y, por definición, obtenemos que

$$L^+(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (D^+ - A)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j).$$

(**c** \implies **d**). Supongamos que $L^+(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$. Por definición, tenemos:

$$\begin{aligned} (D^+ - A)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= D^+(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= \vec{e}_j - \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = D^-(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(D^- - A)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j).$$

Y, por definición, nos queda que

$$L^-(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j).$$

(d \implies e). Supongamos que $L^-(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$. Por definición, tenemos que:

$$\begin{aligned} (D^- - A)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= D^-(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\vec{e}_j - \vec{e}_i) \implies a_{k,i} - a_{k,j} = \delta_{jk} - \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Si $k = i$, entonces $a_{ki} - a_{kj} = -a_{kj} = -1$, por tanto, $(v_i, v_j) \in E$. Si $k = j$, entonces $a_{ki} - a_{kj} = a_{ki} = 1$, por tanto, $(v_j, v_i) \in E$. Con lo que deducimos que v_i y v_j están fuertemente conectados, por tanto, también están fuertemente conectados en el digrafo dual de G , con lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \vec{e}_j - \vec{e}_i &\implies A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = D^-(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \\ &= (D^-)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies (D^- - A)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (L^-)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j). \end{aligned}$$

(e \implies f). Supongamos que $(L^-)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$. Tenemos, por definición, que:

$$\begin{aligned} (D^- - A)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (D^-)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^-(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\vec{e}_j - \vec{e}_i) &= D^+(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \\ &= (D^+)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies (D^+ - A)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (L^+)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j). \end{aligned}$$

(f \implies g). Supongamos que $(L^+)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j)$. Tenemos entonces, por definición:

$$\begin{aligned} (D^+ - A)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (D^+)^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) - (\text{gra}^+(v_i) + 1)(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \implies \\ \implies A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) &= (\vec{e}_j - \vec{e}_i). \end{aligned}$$

(g \implies a). Supongamos que $A^t(\vec{e}_i - \vec{e}_j) = \vec{e}_j - \vec{e}_i$. Entonces, tenemos que $a_{ki}^t - a_{kj}^t = \delta_{jk} - \delta_{ik}$. Si $k = i$, entonces $a_{ki}^t - a_{kj}^t = -a_{kj}^t = -1$, por tanto, $(v_j, v_i) \in E$. Si $k = j$, entonces $a_{ki}^t - a_{kj}^t = a_{ki}^t = 1$, por tanto, $(v_i, v_j) \in E$. Queda probado que v_i y v_j están fuertemente conectados. □

5.3. Estructura de bloques de laplacianas

En esta sección nos centraremos en estudiar la estructura de laplacianas de digrafos transitivos no necesariamente acíclicos. Recordemos que ya vimos al final del Capítulo 4 que todo digrafo transitivo G da lugar a un digrafo transitivo y acíclico G_0 obtenido al tomar cada componente fuertemente conexa C de G (trivial o no) como un vértice v_C de G_0 y una arista dirigida en G_0 entre v_C y $v_{C'}$ es justamente una arista dirigida en G entre un vértice de C y otro de C' .

Si $X(G)$ es el A -espacio asociado a G entonces $X(G_0)$ es justamente el A_0 -espacio $X(G)_0$ definido en la Proposición 4.1.10.

Si cambiamos el lenguaje a espacios ordenados, G_0 corresponde al poset formado por las componentes fuertemente conexas de G y el orden $C \leq C' \Leftrightarrow v_C \leq v_{C'}$ en el poset asociado a G_0 .

A partir del orden anterior sobre las componentes fuertemente conexas de G indexamos las componentes fuertemente conexas de G de manera coherente con ese orden C_1, C_2, \dots, C_s . Dentro de cada componente C_j indexamos sus vértices de la forma $\{v_1^j, \dots, v_{I_j}^j\}_{i \in I_j}$, donde I_j es un subconjunto finito de \mathbb{N} . De esta manera los vértices de G quedan indexados de manera consistente con el preorden, es decir, el índice del vértice v es menor el índice del vector v' si $v \leq v'$, quedando además los vértices pertenecientes a la misma componente C con índices consecutivos.

Usaremos este procedimiento de indexación para describir las laplacianas de digrafos transitivos por medio de matrices por bloques con ceros por debajo de esos bloques. Los bloques corresponden a las componentes fuertemente conexas, y en el caso de que estas componentes se reduzcan a un punto, es decir, tengamos un grafo transitivo y acíclico, tendremos matrices triangulares superiores.

Empezaremos por el caso particular de los digrafos transitivos fuertemente conexos. Recordemos que dos digrafos fuertemente conexos con el mismo conjunto de vértices tienen la misma topología de Alexandrov, exactamente la indiscreta $\{\emptyset, V\}$ (ver Nota 4.3.10).

Notación 5.3.1. Diremos que un vector es *no negativo* si ninguna de sus componentes es negativa.

Lema 5.3.2. Si K_n denota al digrafo completo de n vértices, entonces $L^+(K_n) = L^-(K_n)$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

A partir de esta expresión explícita se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.3.3. Las matrices $L^-(G)$ y $L^+(G)$ de un digrafo transitivo G fuertemente conexo tienen autovalores $\lambda_n = 0$, con autovector $\vec{v}_n = (1, \dots, 1)$, y $\lambda_i = n$ con $1 \leq i \leq n-1$ con autovectores $\{\vec{v}_i\}$ que tiene componentes $(\vec{v}_i)_j = \delta_{ij} - \delta_{ij-1}$, es decir, $\vec{v}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, \underbrace{-1}_{i+1}, 0, \dots, 0)$.

Nota 5.3.4. Recuérdese que la topología asociada a un digrafo a un digrafo completo K_n es la indiscreta, con el único abierto no vacío $V(K_n)$, mientras que el único autovector no negativo de sus laplacianas L^+ y L^- es $\vec{b}(V(K_n)) = (1, \dots, 1)$.

Vayamos ahora al caso general de digrafos transitivos. Nótese que una componente fuertemente conexas de un digrafo se corresponde con un K_n dirigido (véanse las Definiciones 1.2.8 y 1.2.9), ya que en una componente fuertemente conexas de un digrafo, todo par de vértices está fuertemente conectado. Además, por el Lema 5.1.8 podemos considerar la matrices laplacianas $L^- = L^-(G)$ y $L^+ = L^+(G)$ de un digrafo transitivo G construidas a partir de la indexación de los vértices vista en la introducción de este capítulo. De esta manera L^- y L^+ aparecen como matrices por bloques (cuadrados) triangulares superiores. Más aún, se tiene como consecuencia del Lema 5.1.9 la siguiente descripción de L^+ -espectro y L^- -espectro de G .

Proposición 5.3.5. Dado un digrafo transitivo G los autovalores de las laplacianas $L^- = L^-(G)$ y $L^+ = L^+(G)$ son enteros no negativos. Más aún, si C_1, \dots, C_m son las componentes conexas fuertes y σ_j es el grado de salida total de los vértices de C_j y $\#C_j$ es su cardinal, tenemos que el espectro de L^+ está formado por $\sigma_j + 1$ con multiplicidad $\#C_j - 1$ y $\sigma_j - \#C_j + 1$ con multiplicidad 1 para $1 \leq j \leq m$. Análogamente para la laplaciana L^- y los grados de entrada.

Demostración. Como hemos indicado, usando la indexación dada al principio de esta sección, tenemos que L^- y L^+ son matrices por bloques triangulares superiores las matrices. Además los bloques diagonales vienen dados por las componentes fuertes (posiblemente triviales) que son digrafos completos. Ahora bien, si C es una componente fuerte con n vértices, el bloque B_C determinado por C no es exactamente el de K_n ya que el grado de salida en los vértices de C es el grado total de salida de los vértices de C en G , que es el mismo en todos los vértices de C , digamos $k \geq n-1$. Así pues el bloque B_C es la matriz

$$\begin{bmatrix} k & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & k & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & k & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & k \end{bmatrix}$$

que tiene por autovalores $k - n + 1$ y $k + 1$. Además el primero tiene multiplicidad 1 (correspondiente al vector de coordenadas todas 1) y el segundo tiene multiplicidad $n - 1$ (correspondiente

a los vectores $\vec{v}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, \underbrace{-1}_{i+1}, 0, \dots, 0)$ con $1 \leq i \leq n-1$; compárese con la Proposición 5.3.3.

Ahora, aplicamos el Lema 5.1.9 y tenemos que los autovalores de la laplaciana L^+ son los autovalores de los bloques diagonales, que son todos enteros no negativos. Explícitamente, los bloques están determinados por las componentes C_1, \dots, C_m y tenemos que los autovalores de L^+ son $\sigma_j + 1$ con multiplicidad $\#C_j - 1$ y $\sigma_j - \#C_j + 1$ con multiplicidad 1 para $1 \leq j \leq m$. Análogamente para la laplaciana L^- . \square

Proposición 5.3.6. Dado un digrafo transitivo $G = (V, E)$, los autovalores de $L^- = L^+(G)$ son menores o iguales a $1 + \max\{gra^+(v) | v \in V\}$.

Demostración. De acuerdo con la proposición anterior Cada componente fuertemente conexa de m vértices con grado de salida total en G $k \geq m$ aporta autovalores $k - m + 1$ y $k + 1$ con multiplicidades 1 y $m - 1$, respectivamente. Por tanto el mayor autovalor de L^+ es el máximo grado de salida, por lo que $\lambda \leq 1 + \max\{gra^+(v) | v \in V\}$ para todo autovalor λ . \square

La siguiente proposición tiene una prueba similar.

Proposición 5.3.7. Dado un digrafo transitivo $G = (V, E)$, los autovalores de $L^-(G)$ son menores o iguales a $1 + \max\{gra^-(v) | v \in V\}$.

5.4. A-topologías y laplacianas en digrafos

Considerando el producto de matrices laplacianas con vectores característicos, tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 5.4.1. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido transitivo y \mathcal{T} su A-topología, entonces $S \in \mathcal{T} \Leftrightarrow L^+\vec{b}(S) \geq 0$, para la laplaciana $L^+ = L^+(G)$.

Demostración. [\Rightarrow] Sea $S \in \mathcal{T}$, entonces

$$(L^+\vec{b}(S))_i = \sum_{\{j|v_j \in S\}} (D^+)_{ij} - a_{ij} = \sum_{\{j|v_j \in S\}} \delta_{ij} gra^+(v_i) - \sum_{\{j|v_j \in S\}} a_{ij} \quad (5.1)$$

Si $v_i \in S$ entonces $(L^+\vec{b}(S))_i = gra^+(v_i) - \sum_{\{j|v_j \in S\}} a_{ij} \geq 0$ por la definición de grado de salida.

Si $v_i \notin S$ y $(v_i, v_j) \in E$ entonces $v_j \notin S$, por tanto $\sum_{\{j|v_j \in S\}} a_{ij} = 0$.

[\Leftarrow] Sea $L^+\vec{b}(S) \geq 0$, entonces para todo v_i

$$\sum_{\{j|v_j \in S\}} a_{ij} \leq \sum_{\{j|v_j \in S\}} \delta_{ij} gra^+(v_i) \quad (5.2)$$

Por tanto, si $v_{j_0} \in S$ y $(v_i, v_{j_0}) \in E$ entonces $a_{ij_0} \neq 0$, con lo cual $\sum_{\{j|v_j \in S\}} a_{ij} > 0$ y

$\sum_{\{j|v_j \in S\}} \delta_{ij} gra^+(v_i) > 0$. Por tanto, existe un $v_{j_1} \in S$ con $\delta_{ij_1} = 1$, y entonces $v_i = v_{j_1} \in S$. Por transitividad, si $v_j \in S$ y $v_h \leq v_j$ entonces $v_h \in S$, por lo tanto S es abierto. \square

La siguiente proposición se prueba de forma análoga (ver Proposición 5.1.3).

Proposición 5.4.2. Sea $G = (V, E)$ es un digrafo transitivo con A -topología \mathcal{T} . Entonces $S \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (L^-)^t \vec{b}(S) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{L}^+ \vec{b}(S) \leq 0$, para la laplacianas $L^- = L^-(G)$ y $\bar{L}^+ = L^+(\bar{G})$, siendo \bar{G} el digrafo dual de G .

Combinando 5.4.1 y 5.4.2 con los resultados obtenidos en la sección anterior obtenemos los siguientes resultados relacionando los autovectores de las laplacianas $L^- = L^-(G)$ y $L^+ = L^+(G)$ de un digrafo transitivo G y la A -topología de este \mathcal{T} .

Proposición 5.4.3. Dado un digrafo transitivo $G = (V, E)$. Para un conjunto $S \subseteq V$, si $\vec{b}(S)$ puede ser expresado como una suma de autovectores no negativos de $L^+(G)$, entonces $S \in \mathcal{T}$.

Demostración. Sea $\vec{b}(S) = \sum \vec{v}_i$ donde \vec{v}_i son autovectores no negativos. Entonces $L^+ \vec{b}(S) = L^+ \sum \vec{v}_i = \sum \lambda_i \vec{v}_i \geq 0$ (para $L^+ = L^+(G)$), que implica que $S \in \mathcal{T}$. \square

Proposición 5.4.4. Dado un digrafo transitivo $G = (V, E)$. Para un conjunto $S \subseteq V$ con complementario $\mathcal{C}(S)$, si $\vec{b}(\mathcal{C}(S))$ puede ser expresado como suma de autovectores no negativos de $(L^-(G))^t$, entonces $S \in \mathcal{T}$.

Demostración. Sea $\vec{b}(\mathcal{C}(S)) = \sum \vec{v}_i$ donde \vec{v}_i son autovectores no negativos. Entonces como $\vec{b}(S) = \mathbf{1} - \vec{b}(\mathcal{C}(S))$, tenemos que $\vec{b}(S) = \mathbf{1} - \sum \vec{v}_i$. Como $(L^-)^T \mathbf{1} = \vec{0}$ entonces $(L^-)^T \vec{b}(S) = -(L^-)^T \sum \vec{v}_i = -\sum \lambda_i \vec{v}_i \leq 0$ (para $L^- = L^-(G)$), lo que implica que $S \in \mathcal{T}$. \square

5.5. Algunos ejemplos

Con los siguientes ejemplos se quiere ilustrar los resultados de las dos secciones anteriores.

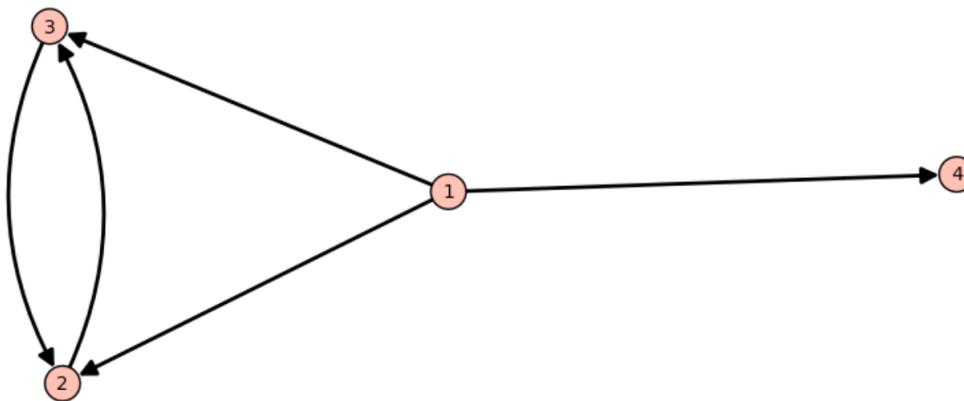


Figura 5.1.

Ejemplo 5.5.1. Denotaremos al digrafo de la figura anterior como $G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ es el conjunto de los vértices y $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$ es el conjunto de las aristas.

Elegimos este ejemplo porque los autovectores de $L^+(G)$ y $L^-(G)$ (a) ayudan a demostrar la importancia de las condiciones de la Proposición 5.4.3 y (b) tienen propiedades que han sido observadas pero no ha sido demostrado que sean válidas en casos más complicados. $L^+(G)$ y $L^-(G)$, en este caso, vienen dadas por las siguientes matrices:

$$L^+(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^-(G) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $L^+(G)$ son $\lambda_1 = 3$ para $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)^t$, $\lambda_2 = 2$ para $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 0)^t$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ para $\vec{v}_4 = (1, 1, 1, 1)^t$ y $\vec{v}_3 = (1, 3/2, 3/2, 0)^t$. Notar que $(\vec{v}_3 + (3/2)\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1)/3 = (1, 1, 0, 0) = \vec{b}(S)$ para $S = \{1, 2\}$ que no es abierto; esta suma de autovectores produce un vector canónico, pero los autovectores no son todos no negativos. Esto muestra la importancia de la especificación en la Proposición 5.4.3 de que los autovectores de la suma son no negativos.

Los autovalores de $L^-(G)$ son $\lambda_1 = 3$ para $\vec{v}_1 = (0, 1, -1, 0)^t$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ para $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1, 0)^t$ y $\vec{v}_3 = (-1, 0, 0, 1)^t$, y $\lambda_4 = 0$ para $\vec{v}_4 = (1, 0, 0, 0)^t$. Notar que $(-1/2)\vec{v}_1 + (1/2)\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 = (0, 0, 1, 1)^t = \vec{b}(\mathcal{C}(S))$ para $S = \{1, 2\}$ que no es abierto; esta suma de autovectores produce un vector canónico, pero los autovectores no son todos negativos. Esto muestra la importancia de la especificación en la Proposición 5.4.4 de que los autovectores de la suma son no negativos.

A continuación transformaremos el digrafo G para hallar $L^+(G')$ y $L^-(G')$, ya que G es un digrafo transitivo y contiene un K_2 . Convirtiendo dicho K_2 (que se encuentra en los vértices 2 y 3) en un único vértice (2), nos queda el siguiente digrafo G' :

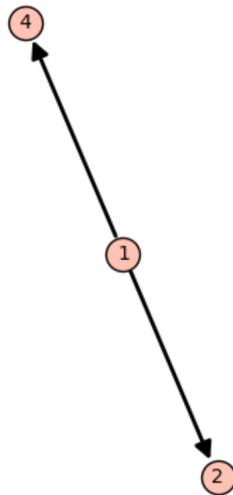


Figura 5.2.

cuyas matrices $L^+(G')$ y $L^-(G')$ vienen dadas por:

$$L^+(G') = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^-(G') = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que, como podemos observar, son triangulares superiores. Ahora podemos ver reflejado en el ejemplo lo que se expuso al comienzo de la sección. Efectivamente los vértices que formaban el K_2 pertenecen al conjunto $\{m+1, m+2\}$, con $m=1$. Ahora obtenemos que los autovalores de $L^+(G')$ son $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ con autovectores $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)^t$ y $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)^t$, y $\lambda_1 = 2$ con autovector $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^t$. Por tanto, por el autovector \vec{v}_1 vemos que los digrafos transitivos que no son fuertemente conexos, no cumplen la última propiedad de la Proposición 5.3.3.

Los autovalores de $L^-(G')$ son $\lambda_3 = 0$ para $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)^t$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ para $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1)^t$ y $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0)^t$.

Ejemplo 5.5.2. Además de los K_n dirigidos, un tipo de digrafo digno de considerar es el digrafo transitivo cuyo preorden es un orden total de sus vértices, de acuerdo a la dirección de las aristas. Un orden total es un orden parcial que cumple la comparabilidad, es decir, cada par de vértices está relacionado.

Dado un digrafo transitivo G con orden total de sus vértices, entonces las matrices $L^-(G)$ y $L^+(G)$ son de la siguiente forma:

$$L^+(G) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^-(G) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

Los autovectores y los autovalores de las matrices anteriores son, para $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = n-i$ para autovectores con componentes $(\vec{v}_i)_j = \Theta_{j,i}$, para $L^+(G)$, y $\lambda_i = n-i$ para autovectores con componentes $(\vec{v}_i)_j = \overline{\Theta}_{j,i}$, para $(L^-)^T$, donde

$$\Theta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

$$\overline{\Theta}_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq n-i+1 \\ 0 & \text{si } j < n-i+1 \end{cases}$$

Es fácil ver que estos autovectores son de la forma $\vec{b}(S)$, para $L^+(G)$, y $1-\vec{b}(S)$, para $L^-(G)$, donde $S \in \mathcal{T}$. En este caso cada uno de los autovectores corresponde exactamente a un conjunto abierto; como son no negativos, es trivial confirmar las Proposiciones 5.4.3 y 5.4.4.

Ejemplo 5.5.3. A continuación mostraremos un ejemplo de un digrafo transitivo $G = (V, E)$ con orden total, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$:

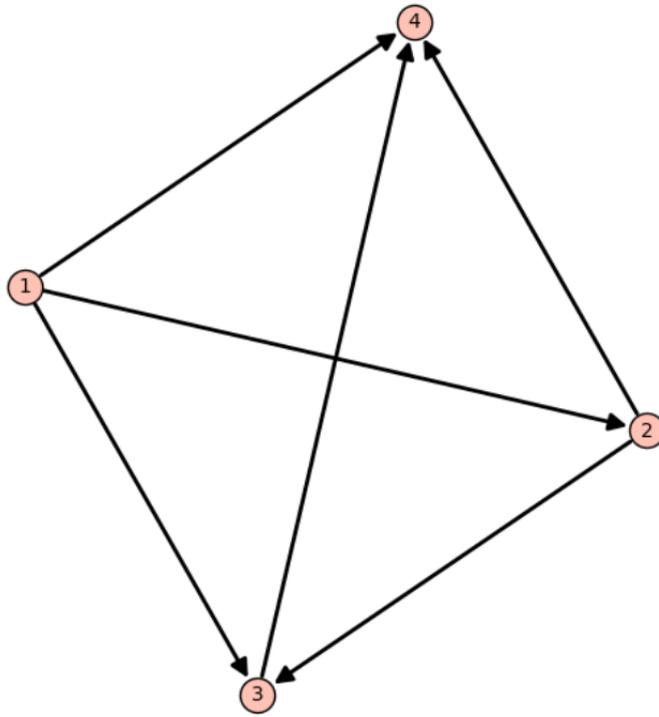


Figura 5.3.

Tenemos que sus laplacianas vienen dadas por

$$L^+(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^-(G) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 0$, con autovectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$ y $\vec{v}_4 = (1, 1, 1, 1)$, para $L^+(G)$, y $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 0$, con autovectores $\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 1, 1)$ y $\vec{v}_4 = (1, 1, 1, 1)$, para $(L^-(G))^t$.

Podemos observar que los autovectores hallados nos dan los conjuntos abiertos que son $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, V$ (este solo lo obtenemos de $L^+(G)$) y \emptyset (este solo lo obtenemos de $(L^-(G))^t$), y así vemos que se cumple la nota final en el Ejemplo 5.5.2.

5.6. Núcleos de laplacianas de digrafos transitivos

Sea G un grafo transitivo con componentes conexas fuertes C_1, \dots, C_m ya ordenadas como se hizo en la Sección 5.3.

Definición 5.6.1. Una *componente sumidero* C es una componente fuertemente conexa para la que no existe una componente fuertemente conexa C' con $C \leq C'$. Una *componente fuente* C es una componente fuertemente conexa para la que no existe una componente fuertemente conexa C' con $C' \leq C$.

Debe observarse que las componentes sumidero son las que aparecen en los últimos lugares para el orden anterior.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado sobre la dimensión del núcleo de la laplaciana $L^+ = L^+(G)$ de un digrafo transitivo G .

Proposición 5.6.2. La dimensión del núcleo de L^+ es menor o igual al cardinal del conjunto de componentes sumidero de G .

Demostración. De acuerdo con la Proposición 5.3.5, si C_1, \dots, C_m son las componentes conexas fuertes y σ_j es el grado de salida total de los vértices de C_j y $\#C_j$ es su cardinal, tenemos que los autovalores de L^+ son $\sigma_j + 1$ con multiplicidad $\#C_j - 1$ y $\alpha_j = \sigma_j - \#C_j + 1$ con multiplicidad 1 para $1 \leq j \leq n$. EL núcleo de L^+ se obtiene para el autovalor 0. Como $\sigma_j \geq 1$, la única opción es $\alpha_j = 0$. Esto ocurre si y solo si $\sigma_j = \#C_j - 1$; esto es, no hay aristas de salida desde los vértices de C_j y por tanto es una componente sumidero. Cada j aportará un autovector al núcleo y tenemos así el resultado (en principio dos componentes podrían aportar el mismo autovector). \square

A continuación se probará que de hecho se tiene la igualdad, dando un método para obtener una base del núcleo de L^+ . Para ello se dan la siguiente definición.

Definición 5.6.3. Si C es una componente fuertemente conexa de G , su *dominio de influencia bajo* C son los vértices que aparecen en todas las componentes $C' \leq C$. Análogamente se define el *dominio de influencia sobre* una componente fuertemente conexa.

Obsérvese que el dominio de influencia bajo C coincide con el abierto mínimo de cualquier $x \in C$ (todos son iguales). Análogamente, el dominio de influencia sobre C es la clausura $\overline{\{x\}}$ para cualquier $x \in C$.

Proposición 5.6.4. Sea $S = S_C$ el dominio de influencia bajo una componente sumidero C del digrafo transitivo $G = (V, E)$. Entonces existe un vector $\vec{w}_S \in [0, 1]^V$ tal que $[\vec{w}_S] = \vec{b}(S)$ y $L^+ \vec{w}_S = \vec{0}$.

Más aún, si Σ denota la familia de componentes sumidero de G y $\mathcal{S} = \{S_C | C \in \Sigma\}$ es la familia de los correspondientes dominios de influencia, entonces $\{\vec{w}_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ es una base del núcleo de L^+ .

Demostración. Si C_1, \dots, C_m son las componentes de G ordenadas como más arriba, dentro de cada componente C_j indexamos sus vértices de la forma $\{v_1^j, \dots, v_i^j\}_{i \in I_j}$, donde I_j es un subconjunto finito de \mathbb{N} . Indexamos los vértices de G de acuerdo con este criterio, es decir, primero se indexan las componentes fuertemente conexas C_1, \dots, C_m y después dentro de C_j por medio de un doble índice v_i^j con $i \in I_j \subseteq \mathbb{N}$.

Tenemos así el orden lexicográfico respecto a los índices de los vértices de G ; esto es, $v_i^j \leq v_{i'}^{j'}$ si $j \leq j'$ o $j = j'$ e $i \leq i'$. Por tanto las entradas de la laplaciana L^+ vienen dadas por cuatro índices $(j, i), (j', i')$.

Supongamos que las componentes sumidero las últimas k , esto es, C_{m-k+1}, \dots, C_m . Denotemos por S_{m-k+j} al dominio de influencia de C_{m-k+j} para $j \leq k$. Contruiremos los vectores $\vec{w}_j = \vec{w}_{S_{m-k+j}}$ ($1 \leq j \leq k$) como sigue. Escribimos $S = S_{C_m}$ y observamos:

1. Por ser $V - S$ cerrado, si $v_i^S \notin S$ y $v_i^j \geq v_i^S$ entonces $v_i^j \notin S$.
2. En la fila (j, i) de L^+ las entradas $((j, i), (p, q))$ con $p < j$ son todas nulas pues no hay aristas dirigidas de v_i^j a v_q^p .

Para obtener el vector \vec{w}_k empezamos construyendo un vector \vec{w} con las siguientes coordenadas $w_{j,i}$. Si $v_i^j \notin S$ elegimos $w_{j,i} = 0$. Cualquier vector con esta única condición cumple que $(L^+\vec{w})_{j,i} = 0$ ya que la entrada $((j, i), (j', i'))$ de L^+ es 0 si $C_j \not\leq C_{j'}$ mientras que las coordenadas (t, s) con $C_j \leq C_t$ ha sido elegida 0, pues si $v_i^j \notin S$ entonces $v_s^t \notin S$. Ver las observaciones (1) y (2).

Completamos las coordenadas del vector \vec{w} recursivamente sobre los índices con coordenadas aún no elegidas. Se comienza con $w_{m,i} = 1$ para todo $i \in I_m$ y se procede de manera decreciente sobre los índices de las componentes.

Notar que todo \vec{w} con $w_{j,i} = 0$ si $v_i^j \notin S$ y $w_{m,i'} = 1$ cumple que $(L^+\vec{w})_{j,i} = 0$ y $(L^+\vec{w})_{m,i'} = 0$ para todo $i \in I_j$ e $i' \in I_m$. Esto último se debe a que las filas (m, i') de L^+ están formadas por ceros. En efecto, por ser $S = S_m$ una componente sumidero, el grado de salida de cada vértice v_i^m es $\#C_m - 1$ y la entrada $((m, i), (m, j))$ de la matriz de adyacencia es 1 para todo $i \neq j$. Así pues, la multiplicación de la caja correspondiente a la componente C_m por la última $\#C_m$ coordenadas de \vec{w} que son 1 es

$$\begin{bmatrix} \#C_m - 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \#C_m - 1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \#C_m - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supongamos que tenemos asignadas coordenadas $w_{s,i}$ para $t + 1 \leq s \leq m$ y todo $i \in I_S$ de forma que $w_{j,i} = 0$ y $(L^+\vec{w})_{j,i} = 0$ si $v_i^j \notin S$ y $(L^+\vec{w})_{s,i'} = 0$ para todo $i' \in I_S$ si $t + 1 \leq s \leq m$. Entonces las coordenadas $w_{t,i}$ ya eran nulas si $v_i^t \notin S$ y las coordenadas $w_{t,i}$ con $v_i^t \in S$ las tomamos como

$$w_{t,i} = \frac{1}{\text{gra}^+(v_i^t) - \#C_t + 1} \sum_{\{(p,q):v_i^t < v_q^p\}} a_{(t,i),(p,q)} w_{p,q}.$$

Entonces cualquier vector \vec{w} con $w_{j,i} = 0$ si $v_i^j \notin S$, y $w_{s,i}$ elegido de manera inductiva como más arriba si $t \leq s \leq m$ y $v_i^s \in S$ cumple, por la hipótesis de inducción, $(L^+\vec{w})_{j,i} = 0$ si $v_i^j \notin S$ y $(L^+\vec{w})_{s,i} = 0$ para todo $i \in I_S$ si $t + 1 \leq s \leq m$. Veamos que sería $(L^+\vec{w})_{t,i} = 0$ para todo $i \in I_t$. En efecto, tenemos que en la fila (t, i) de L^+ las entradas $((t, i), (p, q))$ son nulas si $v_q^p < v_i^t$, las entradas $((t, i), (t, i'))$ son -1 si $i \neq i'$ y la entrada diagonal $((t, i), (t, i))$ es $\text{gra}^+(v_i^t)$. Finalmente, para (p, q) con $v_q^p > v_i^t$ las entradas $((t, i), (p, q))$ son nulas si C_t y C_p no son comparables y -1 si lo son (y entonces $C_t \leq C_p$ y $v_i^t \leq v_q^p$ necesariamente). De esta forma

$$\begin{aligned} (L^+\vec{w})_{t,i} &= (\text{gra}^+(v_i^t) - \#C_t + 1) \left(\frac{1}{\text{gra}^+(v_i^t) - \#C_t + 1} \sum_{\{(p,q):v_i^t < v_q^p\}} a_{(t,i),(p,q)} w_{p,q} \right) - \\ &\quad - \sum_{\{(p,q) > (t,i):v_i^t < v_q^p\}} w_{p,q} - \sum_{\{(p',q') < (t,i):v_i^t < v_{q'}^{p'}\}} w_{p',q'} = 0. \end{aligned}$$

Aquí usamos que $a_{(t,s),(p,s)} = 1$ para $v_s^t < v_q^p$ y que $\{(p',q') < (t,i) : v_i^t < v_{q'}^{p'}\} = \emptyset$ por la observación (2). Esta fórmula se aplica recursivamente hasta que todas las coordenadas del vector \vec{w} quedan definidas. Las coordenadas de este vector son todas nulas ya que $gra^+(v_i^t)$ y $a_{(t,s),(p,q)}w_{p,q}$ son positivos para todo (t,s) y (p,q) . Sea μ el máximo de todas las coordenadas de \vec{w} . Entonces para $\vec{w}_k = \frac{1}{\mu}\vec{w}$, tenemos $[\vec{w}_k] = \vec{b}(S)$.

Para la componente sumidero C_{m-1} realizamos la misma construcción, observando que en el vector \vec{w}_{k-1} así obtenido la (m,i) coordenada es nula para todo $i \in I_m$ pues $v_i^m \notin S_{m-1}$. Reiterando este procedimiento de manera decreciente obtenemos $\vec{w}_k, \dots, \vec{w}_1$ con la propiedad de que para $j \leq k$, \vec{w}_j tiene sus $(m-j+1, i)$ -coordenadas no nulas, para todo $i \in I_{m-j+1}$ y para $s \geq m-j+2$ todas sus (s, i) -coordenadas son nulas ($i \in I_S$).

A partir de esta propiedad, los vectores $\vec{w}_k, \dots, \vec{w}_1$ forman un sistema linealmente independiente ya que la $(m-j+1, i)$ -componente con $i \in I_{m-j+1}$ y $k \leq j$ de cualquier combinación lineal $\sum_{s=1}^k \alpha_s \vec{w}_s$ es α_j multiplicado por la $(m-j+1, i)$ -coordenada de \vec{w}_j . Al ser esta última estrictamente positiva, se sigue que cualquier combinación nula de los vectores \vec{w}_j solo es posible si todos los coeficientes son nulos. Por tanto, $\dim Ker L^+ \geq k$. Como $\dim Ker L^+ \leq k$ por la Proposición 5.6.2, se sigue que $\dim Ker L^+ = k$ y los vectores $\vec{w}_k, \dots, \vec{w}_1$ forman una base. \square

Usando la dualidad de la Proposición 5.1.3, los dos resultados anteriores tienen sus correspondientes análogos:

Proposición 5.6.5. La dimensión del núcleo de L^- es menor o igual al cardinal del conjunto de componentes fuente de G .

Proposición 5.6.6. Sea $F = F_C$ el dominio de influencia sobre una componente fuente C del digrafo transitivo $G = (V, E)$. Entonces existe un vector $\vec{w}_F \in [0, 1]^V$ tal que $[\vec{w}_F] = \vec{b}(F)$ y $L^- \vec{w}_F = \vec{0}$.

Más aún, si Ψ denota la familia de componentes fuente de G y $\mathcal{F} = \{F_C : C \in \Phi\}$ es la familia de los correspondientes dominios de influencia, entonces $\{\vec{w}_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ es una base del núcleo de L^- .

5.7. Núcleos de laplacianas de digrafos transitivos y acíclicos

En esta sección se particularizarán los resultados de la secciones anteriores al caso de un digrafo G transitivo y acíclico, o lo que es lo mismo un poset o un espacio topológico finito T_0 . Por tanto los resultados podrán ser traducidos a cualquiera de estos lenguajes. Para ello usaremos el siguiente lema, que es una consecuencia inmediata de la Tabla 4.3:

Lema 5.7.1. Para el grafo transitivo y acíclico $G = (V, E)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El conjunto de vértices $M \subseteq V$ es el conjunto de sumideros del digrafo G .
2. M es el conjunto de elementos maximales respecto al orden asociado a G .
3. $\mathcal{M} = \{\{v\} : v \in M\}$ es la familia de los cerrados unitarios de la A_0 -topología asociada a G .

Como G es transitivo y acíclico, todas sus componentes conexas fuertes son triviales y por ello la matrices $L^+L^+(G)$ y $L^-(G)$ son triangulares superiores con los grado de salida (de llegada, respectivamente) de los vértices en la diagonal. Por tanto los autovalores de L^+ son $gra^+(v)$ con $v \in V$ (también consecuencia inmediata de la Proposición 5.3.5).

También como consecuencia de la Proposición 5.6.2 tenemos

Proposición 5.7.2. La dimensión del núcleo de L^+ es igual al cardinal del conjunto de sumideros de G . Equivalentemente, al cardinal de elementos maximales respecto al orden asociado. O también, al cardinal de la familia de los cerrados unitarios de la A_0 -topología.

La igualdad es consecuencia de la siguiente proposición, corolario directo a su vez de la Proposición 5.6.4

Proposición 5.7.3. Sea $S = S_v$ el dominio de influencia bajo un sumidero v en G , entonces existe un vector $\vec{w}_S \in [0, 1]^{\#V}$ tal que $[\vec{w}_S] = \vec{b}(S)$ y $L^+\vec{w}_S = \vec{0}$. Aquí $[\vec{w}_S]$ denota el vector cuya j -ésima coordenada es el menor entero mayor o igual que $(w_S)_j$.

Más aún, si Sum es la familia de sumideros de G y $\mathcal{S} = \{S_v | v \in Sum\}$ es la familia de los correspondientes dominios de influencia, entonces $\{\vec{w}_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ es una base del núcleo de L^+ .

El sumidero v corresponde a un elemento maximal en el orden o, alternativamente, a decir que el conjunto unitario $\{v\}$ es cerrado en la A_0 -topología sobre V asociada (ver Tabla 4.3), coincidiendo el dominio de influencia S bajo v con el abierto mínimo U_v .

Usando la dualidad de la Proposición 5.1.3, los dos resultados anteriores tienen sus correspondientes análogos:

Proposición 5.7.4. La dimensión del núcleo de L^- es igual al cardinal del conjunto de fuentes de G . Equivalentemente, al cardinal de elementos minimales respecto al orden asociado. O, también al cardinal de la familia de los abiertos unitarios de la A_0 -topología.

Proposición 5.7.5. Sea $F = F_v$ el dominio de influencia sobre una fuente v en G , entonces existe un vector $\vec{w}_F \in [0, 1]^{\#V}$ tal que $[\vec{w}_F] = \vec{b}(F)$ y $(L^-)^t \vec{w}_F = \vec{0}$.

Más aún, si Fnt es la familia de fuentes de G y $\mathcal{F} = \{F_v | v \in Fnt\}$ es la familia de dominios de influencia sobre las fuentes de G , entonces $\{\vec{w}_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ es una base del núcleo de L^- .

Capítulo 6

Laplacianas de digrafos (caso infinito)

Este breve capítulo presenta la teoría espectral para grafos infinitos dada en [9] y sugiere la posible extensión de los resultados de [6] a digrafos infinitos.

6.1. A-espacios, órdenes y digrafos localmente finitos

En ausencia de compacidad, muchas propiedades topológicas interesantes pueden ser derivadas de la compacidad local. Recordemos la definición de esta propiedad.

Definición 6.1.1. Un espacio X se dice *localmente compacto* si para todo $x \in X$ existe una base de entornos de x , $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, formada por conjuntos compactos. Esto es, cada N_α es un entorno compacto de x y para cualquier entorno N de x existe $\alpha \in \Lambda$ con $N_\alpha \subseteq N$.

Sin embargo, esta propiedad no es relevante en la clase de los A -espacios, ya que todos ellos la poseen como probamos a continuación. Este hecho es consecuencia inmediata del siguiente resultado.

Teorema 6.1.2. Un A -espacio X es compacto si y solo si $Max(X)$ es finito, y todo $x \in X$ es menor que algún elemento de $Max(X)$.

Demostración. Supongamos que X es compacto, y sea $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ el recubrimiento de X por abiertos mínimos. Por compacidad existe un subconjunto finito $J = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ tal que $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_s}$. Podemos suponer que ningún par en J es comparable, ya que si $x_i \leq x_j$ entonces $U_{x_i} \subseteq U_{x_j}$ y podemos eliminar U_{x_i} del subrecubrimiento finito. De ello se sigue inmediatamente que $J = Max(X)$ y que todo elemento de X es menor que algún x_j .

Si se cumplen las condiciones del teorema, y consideramos cualquier recubrimiento por abiertos $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha$, para cada $x \in Max(X)$ consideramos un índice $\alpha(x) \in \Lambda$ tal que $x \in \Omega_{\alpha(x)}$.

Entonces $U_x \subseteq \Omega_{\alpha(x)}$ y tenemos, por la segunda condición, $X = \bigcup_{x \in Max(X)} U_x \subseteq \bigcup_{x \in Max(X)} \Omega_{\alpha(x)}$, es decir X es compacto. \square

Corolario 6.1.3. Todo A -espacio X es localmente compacto.

Demostración. Por el Teorema 6.1.2 el abierto mínimo U_x siempre es compacto para cualquier $x \in X$. \square

Ejemplo 6.1.4. Nótese que si X es finito, todo elemento $x \in X$ es menor o igual que un elemento maximal (este es el último término de cualquier sucesión creciente de longitud máxima empezando en x). En el caso infinito esto no es así. Por ejemplo, sea X la unión disjunta de la Recta de Khalimsky K y un punto no relacionado con ningún elemento de K .

La irrelevancia de esta propiedad para los A -espacios hace necesario buscar una propiedad que desempeñe el papel de la compacidad local para los espacios de Alexandrov. Esta propiedad se corresponderá con la finitud local en la teoría de Posets.

Definición 6.1.5. Un poset (X, \leq) se dice *localmente finito descendentemente* (abreviado a *l.f.d.*) si para todo $x \in X$ el ideal principal generado por él, $x \downarrow$, es finito. Dualmente, decimos que es *localmente finito ascendentemente* (abreviado a *l.f.a.*) si para todo $x \in X$ el filtro principal $x \uparrow$ es finito. Un poset (X, \leq) se dice *localmente finito* (abreviado a *l.f.*) si es a la vez l.f.a. y l.f.d.

Es claro que un poset X es l.f. si y solo si para todo $x \in X$ el conjunto de los elementos comparables a x es finito. Equivalentemente, X es l.f. si y solo si para todo $x \in X$, el número de cadenas en X que contiene a x es finito.

Un A_0 -espacio se dice *localmente finito* si su poset asociado lo es; análogamente se definen A_0 -espacios l.f.a. o l.f.d.

El siguiente lema es inmediato a partir de las propiedades básicas del orden de especialización de una A -topología para el que $U_x = x \downarrow$ y $\overline{\{x\}} = x \uparrow$.

Lema 6.1.6. Sea X un A_0 -espacio. Se cumplen las siguientes propiedades.

1. X es l.f.d. si y solo si U_x es finito para todo $x \in X$.
2. X es l.f.a. si y solo si $\overline{\{x\}}$ es finito para todo $x \in X$.

Como consecuencia del lema anterior tenemos:

Lema 6.1.7. Un A_0 -espacio X es l.f. si y solo si $\overline{U_x}$ es finito para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que X es l.f. Entonces por el Lema 6.1.6, U_x es finito y para todo $y \in U_x$, $\overline{\{y\}}$ es finito. Entonces $\overline{U_x} = \bigcup_{y \in U_x} \overline{\{y\}}$ es finito.

Recíprocamente, si para todo $x \in X$, $\overline{U_x}$ es finito tenemos que $U_x \subseteq \overline{U_x}$ y $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{U_x}$ son finitos. Por tanto X es l.f.a. y l.f.d. y por ello l.f. \square

Sobre la compacidad y conexión de los A -espacios l.f. tenemos las dos propiedades siguientes.

Lema 6.1.8. Sea X un A_0 -espacio l.f.d. Entonces un conjunto $Z \subseteq X$ es compacto si y solo si es finito.

Demostración. Supongamos que Z es compacto. Entonces por el Teorema 6.1.2 el conjunto $M = \text{Max}(Z)$ es finito y para todo $z \in Z$ existe $m \in M$ con $z \leq m$. Por ser X l.f.d. solo existe una cantidad finita de elementos menores que cada $m \in M$ en X y por ello Z es finito. El recíproco es trivial. \square

Lema 6.1.9. Todo A -espacio T_0 l.f. conexo es numerable.

6.2. UNA PROPUESTA PARA EXTENDER LA TEORÍA ESPECTRAL DE GRAFOS INFINITOS A DIG

Demostración. Recordemos que la conexión de X es equivalente a su conexión por caminos. Dado $x_0 \in X$, sea $X_n \subseteq X$ el conjunto de los $x \in X$ que se pueden unir a x_0 por una secuencia de hasta n elementos comparables. Entonces, $X_0 = \{x_0\}$ y $X_n = \{x; x \text{ es comparable a algún } y \in X_{n-1}\}$. De acuerdo con la finitud local, los elementos comparables a cualquier $x \in X$ forman un conjunto finito y así podemos deducir inductivamente que cada X_n es finito, y por tanto $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ es numerable. \square

Un espacio X se dice σ -compacto si se puede descomponer como una unión numerable de subconjuntos compactos. El siguiente lema es una consecuencia directa de los Lemas 6.1.8 y 6.1.9.

Lema 6.1.10. Un A_0 -espacio l.f. es σ -compacto si y solo si es numerable. En particular, todo A_0 -espacio l.f. conexo es σ -compacto.

Otras propiedades también usadas en la teoría de posets son las siguientes.

Definición 6.1.11. Un poset (X, \leq) se dice que cumple la *condición de cadenas descendentes finitas* (abreviado a *c.c.d.f.*) si no contiene sucesiones infinitas descendentes. Análogamente, decimos que cumple la *condición de cadenas ascendentes finitas* (abreviado a *c.c.a.f.*) si no contiene sucesiones infinitas ascendentes. Nótese que (X, \leq) cumple la c.c.d.f. si y solo si su opuesto cumple la c.c.a.f. Un poset (X, \leq) se dice que cumple la *condición de cadenas finitas* (abreviado a *c.c.f.*) si cumple a la vez la c.c.d.f. y la c.c.a.f.

Un A_0 -espacio se dice que cumple cada una de las condiciones anteriores si su poset asociado lo hace.

Los siguientes lemas son bien conocidos.

Lema 6.1.12. Sea (X, \leq) un poset.

1. (X, \leq) cumple la c.c.f. si y solo si toda cadena en él es finita.
2. (X, \leq) cumple la c.c.a.f. si y solo si para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$, $Max(A) \neq \emptyset$.
Dualmente, cumple la c.c.d.f. si $Min(A) \neq \emptyset$.

Lema 6.1.13. Si (X, \leq) es l.f. entonces cumple la c.c.f.

Ejemplo 6.1.14. 1. La recta de Khalimsky es localmente finita.

2. Sea $X = \bigvee_{n=1}^{\infty} X_n$ la unión por el origen de copias disjuntas de intervalos de longitudes crecientes de números enteros positivos $X_n = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x \leq n\}$. Si damos sobre X el orden natural, el poset (X, \leq) cumple la c.c.f. pero no es l.f.

6.2. Una propuesta para extender la teoría espectral de grafos infinitos a digrafos

En [9] se considera un grafo $G = (V, E)$ posiblemente infinito y se dan un espacio de Hilbert y un operador lineal con buenas propiedades definido en él a partir de la matriz de adyacencia del grafo con el de definir el espectro del grafo infinito como el espectro de dicho operador. En el Apéndice a esta sección se recogen los conceptos necesarios de la teoría de operadores en espacios de Hilbert.

Habitualmente se considera el espacio de Hilbert $\ell^2(V)$; esto es, las sucesiones de números complejos $(x_v)_{v \in V}$ ($x_v \in \mathbb{C}$) de cuadrado numerable; es decir, $\sum |x_v|^2 < \infty$, y norma $\|(x_v)\|_{v \in V} = \left(\sum_{v \in V} |x_v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Se puede usar también el espacio de Hilbert $\ell^p(V)$ con $1 \leq p \leq \infty$, con $\sum |x_v|^p < \infty$

y norma $\|(x_v)_{v \in V}\| = \left(\sum_{v \in V} |x_v|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, donde para $p = \infty$, $\ell^\infty(V)$ corresponde a las sucesiones $(x_v)_{v \in V}$ acotadas con la norma del máximo $\|(x_v)_{v \in V}\|_\infty = \max\{|x_v|; v \in V\}$.

A partir de la matriz de adyacencia $A(G)$ se construye en [9] un operador lineal $A(G)$ de $\ell^2(V)$ en sí mismo. Para empezar, el grafo G debe ser localmente finito, (cada vértice solo tiene un número finito de aristas incidentes en él). De esta forma las matrices $A = A(G)$ son *localmente finitas*, esto es, solo tienen un número finito de entradas no nulas en cada fila y columna. Además para la base ortonormal de $\ell^2(V)$, $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$, tenemos que Ae_i es la i -ésima columna de A y por tanto un elemento de $\ell^2(V)$.

Así pues si \mathcal{H}_0 es el subespacio de $\ell^2(V)$ generado por las combinaciones lineales finitas de la base $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, es bien conocido (y fácil de probar) que \mathcal{H}_0 es denso en $\ell^2(V)$ y obviamente $A : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ es un endomorfismo de espacios vectoriales.

El punto crucial del desarrollo de la teoría espectral de grafos localmente finitos en [9] es la posibilidad de extender A a un operador cerrado \bar{A} de $\ell^2(V)$ en sí mismo. En [9] ello es consecuencia del hecho de que la matriz de adyacencia de un grafo es simétrica.

A diferencia de los grafos, la matriz de adyacencia A de un digrafo no es simétrica (si $a_{ij} = 1$, entonces $a_{ji} = 0$). Sin embargo podemos probar que A también puede ser extendido a un operador cerrado, esto es A es un operador clausurable. En detalle, sea \mathcal{H} el espacio de Hilbert de las sucesiones complejas de cuadrado sumable con norma $\|(z_i)\| = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$.

Sea A una matriz localmente finita cuyas entradas no nulas son 1 y sea V el espacio vectorial complejo de base $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$. Entonces V es denso en \mathcal{H} y tenemos el operador lineal

$$A : V \rightarrow \mathcal{H}.$$

Lema 6.2.1. A es clausurable.

Demostración. Hay que demostrar que para cualquier sucesión $\{s_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ con $s_n \rightarrow 0$ y $As_n \rightarrow l$ se tiene que $l = 0$. Sean

$$s_n = (z_i^n)_{i=1}^{\infty}, l = (l_i)_{i=1}^{\infty}.$$

Además, si $As_n = (a_i^n)_{i=1}^{\infty}$, tenemos que $a_i^n = \sum_{j \in J_i} z_j^n$ con $\#J_i = r_i < \infty$ finito (r_i es el número de entradas no nulas en la i -ésima fila de A).

Supongamos por reducción al absurdo que $l_t \neq 0$ para algún t . Sea $\lambda = |l_t|$ y sea $\varepsilon = \frac{\lambda^2}{4}$. Por hipótesis existe n_0 tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i^n|^2 < \frac{\varepsilon}{r_t^2}$$

6.2. UNA PROPUESTA PARA EXTENDER LA TEORÍA ESPECTRAL DE GRAFOS INFINITOS A DIG

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - l_i|^2 < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. En particular para el índice t ,

$$\sum_{j \in J_t} |z_j^n|^2 < \frac{\varepsilon}{r_t^2}$$

y

$$|a_t^n - l_t|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - l_i|^2 < \varepsilon.$$

Así que para todo $j \in J_t$, $|z_j^n|^2 < \frac{\varepsilon}{r_t^2}$ y por tanto

$$|a_t^n| = \left| \sum_{j \in J_t} z_j^n \right| \leq \sum_{j \in J_t} |z_j^n| < r_t \frac{\sqrt{\varepsilon}}{r_t} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Ahora,

$$|l_t| \leq |a_t^n - l_t| + |a_t^n| < \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} = 2\sqrt{\varepsilon} = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

lo que es una contradicción. □

Volvamos a la matriz de adyacencia del digrafo localmente finito G , $A(G)$. Una vez demostrado que $A(G)$ es un operador clausurable, se puede iniciar la teoría espectral de los digrafos localmente finitos extendiendo el método introducido por Mohar para grafos localmente finitos en [9], que pasamos a describir.

Consideramos la clausura del operador $A(G)$, $\overline{A(G)}$, que llamaremos el *operador de adyacencia* de G , entonces el espectro de G , $\sigma(G)$, será el espectro de su operador de adyacencia. Como hemos visto en el Apéndice, este conjunto queda dividido en tres partes: el espectro puntual $\sigma_p(G)$, el espectro residual $\sigma_r(G)$ y el espectro continuo $\sigma_c(G)$. Además $\sigma(G)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{C} por ser $\overline{A(G)}$ un operador cerrado. En particular los elementos de $\sigma_p(G)$ se llamarán autovalores de G .

Debemos observar que en [9] se elige como definición de $\sigma_c(G)$, $\sigma_c(G) = \sigma(G) - (\sigma_p(G) \cup \sigma_r(G))$; ver Nota 6.2.13.

Al igual que para grafos, el espectro del digrafo G no depende de la numeración de los vértices ya que una permutación de los mismos induce una transformación unitaria, es decir un isomorfismo lineal cuyo inverso es su adjunto, y es sabido que los espectros son invariantes por estas transformaciones (ver [9]). Por tanto el espectro es un invariante del digrafo G .

A partir de ahora se pueden plantear para el operador de adyacencia de un digrafo localmente finito G las mismas cuestiones que para el caso de grafos. En particular es de gran importancia saber si el operador de adyacencia del digrafo G es acotado y/o autoadjunto debido a las propiedades de esta clase de operadores. Es sabido que para grafos localmente finitos la acotación de las valencias de todos los vértices por un número k es equivalente a la acotación del operador de adyacencia y en tal caso serán autoadjuntos (ver [9], Teorema 3.2).

Dejamos para aquellos interesados el establecer resultados precisos en esta línea de investigación, que podría ser extendida a las matrices laplacianas de entrada y salida.

6.2.1. Apéndice: Operadores en espacios de Hilbert

En este apéndice se recogen varias nociones y resultados de la teoría de operadores en espacios de Hilbert ([10]) para la construcción de un operador adecuado a partir de la matriz de adyacencia de un digrafo, extendiendo el método usado en [9].

Definición 6.2.2. Un operador lineal de un espacio de Hilbert \mathcal{H}_1 en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_2 es una aplicación lineal T de un subespacio vectorial de \mathcal{H}_1 , denominado *dominio* de T y denotado por $\mathcal{D}(T)$, en \mathcal{H}_2 . Se denotarán por $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(T)$ la imagen y el núcleo de T .

Sean T y S dos operadores lineales de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 . Se dirá que T es una *extensión* de S y se escribirá $S \subseteq T$ cuando $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T)$ y $S(x) = T(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(S)$.

Definición 6.2.3. Un operador T de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 se denomina *cerrado* si para toda sucesión de vectores $x_n \in \mathcal{D}(T)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ en \mathcal{H}_1 y $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n) = y$ en \mathcal{H}_2 se tiene $x \in \mathcal{D}(T)$ y $Tx = y$. Esta propiedad es equivalente a pedir que el grafo de T sea cerrado en la suma directa $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ con la norma $\langle (x, y) \rangle = \langle x \rangle_1 + \langle y \rangle_2$. Siendo también equivalente a decir que $\mathcal{D}(T)$ con la norma $\langle x \rangle_T = \langle x \rangle_1 + \langle Tx \rangle_2$ sea completo y así un espacio de Hilbert para esa norma.

Definición 6.2.4. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H}$. Entonces T se dice *clausurable* si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{D}(T)$ convergiendo a 0 tal que $Tx_n \rightarrow y$, entonces $y = 0$.

Definición 6.2.5. Sea $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un operador clausurable. Sea el conjunto $\mathcal{D}(\overline{T})$ formado por los vectores $x \in \mathcal{H}_1$ para los que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(T)$ tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ en \mathcal{H}_1 y $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en \mathcal{H}_2 . Para dicha sucesión (x_n) , se denomina *clausura* del operador T al operador \overline{T} de dominio $\mathcal{D}(\overline{T})$ dado por $\overline{T}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$ para todo $x \in \mathcal{D}(\overline{T})$.

Nota 6.2.6. Las nociones anteriores están claramente relacionadas con la continuidad de los operadores. Recordemos que un operador lineal T es *continuo* (es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$) si y sólo si es acotado (esto es, existe una constante $c > 0$ tal que $\langle Tx \rangle_2 \leq c \langle x \rangle_1$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$). No es difícil probar que todo operador continuo es clausurable. Así pues la propiedad de ser clausurable es una versión débil de la continuidad ya que sólo se pide que cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ en caso de converger la sucesión $T(x_n)$ lo haga al límite esperado, esto es, 0. Por otro lado, si el operador T está acotado, entonces la norma $\langle \cdot \rangle_T$ sobre $\mathcal{D}(T)$ es equivalente a $\langle \cdot \rangle_1$. Por tanto un operador acotado (o, equivalentemente, continuo) es cerrado si y sólo si su dominio $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en \mathcal{H}_1 . Recíprocamente, si T es un operador lineal con dominio cerrado, entonces el teorema del grafo cerrado implica que T está acotado. En particular, un operador lineal cerrado que no sea acotado no puede estar definido en todo el espacio de Hilbert \mathcal{H}_1 .

Todo operador densamente definido T entre los espacios de Hilbert $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ tiene asociado un operador T^* entre \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_1 llamado adjunto de T cuyo dominio de definición es el conjunto $\mathcal{D}(T^*)$ cuya construcción es como sigue:

Sean $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert. Sea T un operador lineal de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 tal que el dominio $\mathcal{D}(T)$ es denso en \mathcal{H}_1 . Se establece

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathcal{H}_2 : \exists u \in \mathcal{H}_1 / \langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, u \rangle_1, x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Por el teorema de Riesz, un vector $y \in \mathcal{H}_2$ pertenece a $\mathcal{D}(T^*)$ si y solo si hay una constante $c_y > 0$ tal que $|\langle Tx, y \rangle_2| \leq c_y \|x\|_1$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{D}(T^*)$ es en general complicado.

6.2. UNA PROPUESTA PARA EXTENDER LA TEORÍA ESPECTRAL DE GRAFOS INFINITOS A DIG

Como $\mathcal{D}(T)$ es denso en \mathcal{H}_1 , el vector $u \in \mathcal{H}_1$ que cumple $\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ está determinado únicamente por y . Por tanto, estableciendo $T^*y = u$, se obtiene un operador bien definido T^* de \mathcal{H}_2 a \mathcal{H}_1 . Es fácil ver que T^* es lineal.

Definición 6.2.7. Sea T un operador lineal densamente definido en \mathcal{H} . El operador lineal T^* se denomina *operador adjunto* de T . El operador T se denomina *autoadjunto* si $T = T^*$.

Por la definición anterior se tiene

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^*y \rangle_1, \forall x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(T^*).$$

Un número de propiedades importantes y útiles de operadores clausurables y adjuntos están recogidas en el siguiente teorema.

Teorema 6.2.8. Sea T un operador lineal densamente definido de \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 .

- (i) T es clausurable si y solo si $\mathcal{D}(T^*)$ es denso en \mathcal{H}_2 .
- (ii) Si T es clausurable, entonces $(\overline{T})^* = T^*$, y definiendo $T^{**} := (T^*)^*$, se tiene $\overline{T} = T^{**}$.
- (iii) T es cerrado si y solo si $T = T^{**}$.
- (iv) Supongamos que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ y $\mathcal{R}(T)$ es denso en \mathcal{H}_2 . Entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Terminamos este apéndice con la definición de espectro de un operador cerrado T de un espacio de Hilbert \mathcal{H} en sí mismo.

Definición 6.2.9. Se llama *conjunto resolvente* del operador T al conjunto de números complejos λ tales que el operador $T - \lambda I$ tiene inversa acotada definida en todo \mathcal{H} . Esta inversa se denomina *resolvente* de T en λ y se denota por $R_\lambda(T)$. El conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es denominado *espectro* del operador T . Es sabido que el espectro de un operador cerrado es un conjunto cerrado. Cuando \mathcal{H} es cerrado entonces el requisito de que la inversa de $T - \lambda I$ es acotada es redundante.

Los puntos del espectro de un operador se clasifican en tres tipos de acuerdo a las siguientes definiciones.

Definición 6.2.10. Se llama *espectro puntual* del operador T al conjunto $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$. Cada $\lambda \in \sigma_p(T)$ se llama un *autovalor* de T , la dimensión de $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ su *multiplicidad*, y cualquier elemento no nulo de $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ un *autovector* de T en λ . Se dirá que un operador cerrado T tiene un *espectro puramente discreto* si $\sigma(T)$ consiste solamente de autovalores de multiplicidades finitas que no tienen punto de acumulación finito.

Si λ es un punto del espectro $\sigma(T)$, entonces o bien $T - \lambda I$ no es inyectivo o no es sobreyectivo. Entonces, el espectro puntual de T es precisamente el conjunto de todos los $\lambda \in \sigma(T)$ para los cuales $T - \lambda I$ no es inyectivo. Miremos ahora los números donde la sobreyectividad del operador $T - \lambda I$ falla.

Definición 6.2.11. Se denomina *espectro residual* del operador T al conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $T - \lambda I$ tiene una inversa acotada que no está definida en todo \mathcal{H} . Se denota por $\sigma_r(T)$. Es sabido que $\sigma_r(T)$ es un conjunto abierto y que para operadores autoadjuntos es siempre vacío.

Definición 6.2.12. El conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el rango de $T - \lambda I$ no es cerrado, esto es, $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)}$, se denomina *espectro continuo* de T y se denota $\sigma_c(T)$. Entonces $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$, pero los conjuntos $\sigma_c(T)$ y $\sigma_p(T)$ son en general no disjuntos.

Nota 6.2.13. Algunos autores definen $\sigma_c(T)$ como el complementario de $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$ en $\sigma(T)$; entonces $\sigma(T)$ se convierte en la unión disjunta de las tres partes.

Bibliografía

- [1] J.R. Munkres. *Topología*. Pearson Educación, 2001.
- [2] R. Engelking. General Topology. *Heldermann*, 1989.
- [3] G.N. Rubiano. Sobre el número de topologías en un conjunto finito. *Boletín de Matemáticas*, 13(2006), 136-158.
- [4] P.S. Alexandroff. Diskrete Raume. *Math. Sbornik*, 2(1937), 501-519.
- [5] García Merayo, F., *Matemática discreta*, Paraninfo, 2015.
- [6] Aaron Ostrander, *Laplacian matrices and Alexandrov topologies of digraphs*, Linear Algebra Appl. 481 (2015) 174-185.
- [7] D. M. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs. Theory and Applications*. Academic Press, 1979.
- [8] J. P. May, *Finite Spaces and larger contexts. Preliminary draft submitted to the AMS*, 2014. <http://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FiniteAugBOOK.pdf>.
- [9] Bojan Mohar, *The Spectrum of an Infinite Graph*. Linear Algebra and its Applications, 1982.
- [10] Konrad Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer Science+Business Media Dordrecht 2012.

Resumen (abstract)

La teoría algebraica de grafos se ocupa de la relación entre las propiedades de la estructura combinatoria de un grafo y aquellas de los objetos algebraicos (polinomios, matrices, etc.) construidos a partir de ella.

Cuando las aristas del grafo están dotadas de una dirección, lo que se conoce como un digrafo, de la combinatoria de ese grafo surge una estructura de orden o, equivalentemente, una estructura topológica. De esta manera la teoría algebraica de los digrafos tiene una lectura múltiple según el lenguaje matemático elegido.

Este trabajo quiere ser una breve ilustración de este hecho: empieza con la equivalencia entre las facetas combinatoria, ordinal y topológica de un digrafo y concluye con una exposición detallada de los resultados del artículo [6], donde se establecen propiedades de las matrices laplacianas de entrada y salida de un digrafo en términos del espacio topológico asociado al digrafo. También se indica un camino para tratar los digrafos localmente finitos.

Algebraic Graph Theory deals with the relationship between the properties of the combinatorial structure of a graph and the properties of the algebraic objects (polynomials, matrices, etc.) derived from latter.

When the edges of a graph are endowed of a direction (i.e., a digraph) the combinatorics of that graph yields an order structure or, equivalently a topological structure. This way the algebraic theory of digraphs has a variety of approaches, according to the chosen mathematical language.

This work intends to be a brief survey of this fact: it starts with the equivalences among the combinatorial, order and topological faces of a digraph and it ends with a detailed exposition of the results from [6], where some properties of the outward and inward laplacian matrices of a digraph are stated in terms of the topological space associated to the digraph. The case of locally finite digraphs is suggested.