MINIMALIDAD Y J(4,±2) ESTRUCTURAS

por

Antonio Alcaraz Martinez

Trabajo realizado bajo la dirección del Profesor Dr. D.Francisco J.Echarte Reula para obtener el grado de doctor en ciencias,Sección de Matematicas,por la Univer versidad de Sevilla.

El doctorando:

Tesis revisada y conforme
El director y padrino:
D.F.J.Echarte Reula

Sevilla, 13 Junio 1975

INTRODUCCION

La teoría de las subvariedades minimales ha tenido durante los últimos años un rápido desarrollo. A nuestro modo de ver ello es debido a que ha sido posible encontrar un formalismo adecuado que permite expresar y manejar de una manera sencilla el concepto de subvariedad minimal.

El resultado más importante y conocido que se deriva de tal formalismo es el teorema que afirma que toda subvariedad casi-compleja de una variedad Kaehleriana es minimal.

Yano, Houh y Chen han introducido en 1972 las $J(4,\pm 2)$-variedades como una generalización natural de las variedades casi-complejas, casi-tangentes y casi-producto. Una $J(4,\pm 2)$-variedad consiste en una variedad diferenciable M en la que se ha dado un tensor J del tipo $(1,1)$ que satisface $J^4 \pm J^2 = 0$ y una cierta condición sobre el rango

El objeto del presente trabajo, aplicando el citado formalismo, la minimalidad en las $J(4,\pm 2)$-variedades. Es to supone,a nuestro modo de ver,una doble generalización del teorema sobre las variedades de Kaehler:1°) Se ha modificado la variedad ambiente sustituyendo una variedad casi-compleja por una $J(4,\pm 2)$-variedad.2°)Se estudia el caracter minimal no solo de las subvariedades casi-complejas sino tambien de otro tipo de subvariedades: las $J(3,1)$ Y $J(4,\pm 2)$subvariedades.

Vamos,a continuación,a indicar de un modo breve el desarrollo del trabajo y los resultados más importantes obtenidos.Hemos dividido la presente memoria en dos capitulos.El primero de ellos esta dedicado a exponer el formalismo a que hemos venido haciendo referencia.

SUBVARIEDADES MINIMALES:Consideramos,como punto de partida una variedad diferenciable M con una métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ y una subvariedad $\overline{M}$ de M.Designamos por Δ y $\overline{\Delta}$ las conexiones Riemannianas que $\langle\ ,\ \rangle$ induce sobre M y $\overline{M}$ y se demuestra que,en todo punto de $\overline{M}$,T(M) (espacio tangente a M) puede descomponerse en suma directa de $T(\overline{M})$ y de su complemento ortogonal respecto de $\langle\ ,\ \rangle$:$[T(\overline{M})]^{\perp}$. Si X,Y son,entonces,dos campos tangentes a $\overline{M}$ se demuestra que $\Delta_X Y = \overline{\Delta}_X Y + V(X,Y)$ (Ecuación llamada de Gauss) donde V es un tersor simetrico,de orden 2,con valores vectoriales,verificandose además que $\overline{\Delta}_X Y$ es la componente tangente de $\Delta_X Y$ y V(X,Y) la componente normal.Si A es un campo normal a $\overline{M}$ (es decir que verifica $\langle A,X\rangle = o \quad \forall\ X \in T(\overline{M})$)

puede defirse un endomorfismo L_A de $T(\overline{M})$ de la siguiente manera:

$$L_A X = tg\Delta_X A \qquad \forall\ X \in T(\overline{M})$$

endomorfismo que verifica la igualdad:

$$\langle L_A X, Y\rangle = -\langle A, V(X,Y)\rangle \qquad \forall\ X,Y \in T(\overline{M})$$

L_A permite definir la 1-forma H que actua sobre los cam - pos normales a $\overline{M}$ del modo siguiente:

$$H(A) = \text{traza de } L_A$$

por lo tanto si $\{X_1,\ldots,X_k\}$ es una base ortonormal de $T(\overline{M})$ puede escribirse:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=k} \langle L_A X_i, X_i\rangle = \sum_{i=1}^{i=k} -\langle A, V(X_i,X_i)\rangle .$$

Por definición $\overline{M}$ recibe el nombre de subvariedad minimal si $H(A) = o$ para cualquier campo A normal a $\overline{M}$.

INTERPRETACION GEOMETRICA:En determinados casos es posi - ble dar una interpretación geometrica de la anulación de H.Sea K un subconjunto compacto de $\overline{M}$ y supongamos que las ecuaciones paramétricas de $\overline{M}$ son:

$$u_i = u_i(x_1,\ldots,x_k) \qquad i=1,\ldots,n$$

($x_1,\ldots,x_k$ son coordenadas locales en $\overline{M}$).Entonces para cada vector A normal a $\overline{M}$ cuyo dominio contenga a K y nulo sobre la frontera de K y cada funcion diferenciable sobre M f se define la familia uniparamétrica de subvariedades:

$$K(t;A,f) \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$v_i(x_1,\ldots,x_k) = u_i + t\, f\, a_i \qquad i=1,\ldots,n$$

donde a_i son las componentes de A.Se demuestra entonces que H = o si,y solo si,es estacionaria la integral:

$$\int_K \alpha(t)$$

donde $\alpha(t)$ es el elemento de volumen de $K(t;A,f)$.

En el capitulo segundo entramos en el estudio de la minimalidad en las J(4,2)-variedades.Sobre una tal variedad M se demuestra que pueden definirse dos distribuciones complementarias $P = \{X \in T(M) \mid J^2X = -X\}$,$Q = \{X \in T(M) \mid J^2X = 0\}$ y una métrica Riemanniana $<\ ,\ >$ tal que $<JX,JY> = <X,Y>$ para cualesquiera $X,Y \in P$ siendo además P y Q mutuamente ortogonales.Q puede a su vez descomponerse en la suma directa $Q = Q_1 \oplus Q_2$ donde Q_1=Ker(J) y Q_2 es el complemento ortogonal de Q_1 en Q.La métrica $<\ ,\ >$ puede determinarse de modo que J transforme una base ortonormal de Q_2 en una base ortonormal de Q_1.

Si Δ es la conexión Riemanniana inducida por $<\ ,\ >$ suponemos sucesivamente que Δ cumple las siguientes condiciones:

$$\Delta_X JY = J\Delta_X Y \qquad \text{(Condición Kaehleriana)}$$

$$\Delta_X JY - J\Delta_X Y - \Delta_Y JX + J\Delta_Y X = 0 \qquad \text{(" parakaehleriana)}$$

$$\Delta_X JY - J\Delta_X Y + \Delta_Y JX - J\Delta_Y X = 0 \qquad \text{(" nearlykaehleriana)}$$

$\Delta_X JY - J\Delta_X Y + \Delta_{JX} J^2 Y - J\Delta_{JX} JY = 0$ (Condición quasikaehleriana)

Vamos a enumerar algunos de lao resultados más importantes obtenidos:

Teorema 2.11: Si $\Delta_X JY = J\Delta_X Y$ toda subvariedad casi-compleja de M es minimal.

Teorema 2.15: Si $\Delta_X JY = J\Delta_X Y$ entonces las distribuciones P y Q son involutivas y cualquier subvariedad integral de una de ellas es minimal.

Teoremas 2.16,2.20,2.22:Si Δ cumple la condición parakaehleriana,nearlykaehleriana,quasikaehleriana respectivamente,entonces toda subvariedad casi-compleja de M es minimal.

A continuación hemos definido las J(3,1)-subvariedades como las subvariedades de M sobre las que J opera de tal forma que $J^3+J=0$.Se demuestra:

Teorema 2.23:$\overline{M}$ es una J(3,1)-subvariedad de M si,y solo si,$T(\overline{M}) \cap Q_2 = \{0\}$

Hemos dado además la condición necesaria y suficiente para que una J(3,1)-subvariedad sea minimal y asimismo hemos probado:

Teorema 2.26(corolario 1):La distribución $P+Q_1$ es involutiva y sus subvariedades integrales son J(3.1)-subvariedades minimales.

Teorema 2.26(corolario 2):Una condición suficiente para que una J(3,1)-subvariedad sea minimal es que:

$$\langle J|A,JX|,X\rangle = \langle |A,JX|,JX\rangle$$

para cualquier campo A normal a $\overline{M}$ y cualquier campo X ε Q tal que JX ε T($\overline{M}$).

Finalmente se definen las J(4,2)-subvariedades de M como aquellas sobre las que J induce una J(4,2)-estructura y se demuestra:

TEOREMA 2.33.

Toda J(4,2)-subvariedad de una J(4,2)-variedad cuya conexión afín cumple $\Delta_X JY = J\Delta_X Y$ es minimal.

Este teorema 2.33 es a nuestro entemder el resultado más importante del trabajo prsente.Su demostración es muy elaborada y larga.Damos una breve idea de ella:

Si $\overline{M}$ es una J(4,2)-subvariedad de M demostramos que puede determinarse una base ortonormal de T($\overline{M}$):

$Z_1,\ldots,Z_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h \qquad Z_i \;\varepsilon\; P, X_i \;\varepsilon\; Q_2, JX_i \varepsilon Q_1$

tal que:

$JZ_1,\ldots,JZ_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h \qquad JZ_i \;\varepsilon\; P, X_i \;\varepsilon\; Q_2, JX_i \varepsilon Q_1$

es asimismo una base ortonormal de T($\overline{M}$).Si A es entonces un campo normal a $\overline{M}$ probamos que:

$$\langle L_A Z_i, Z_i\rangle = -\langle L_A JZ_i, JZ_i\rangle$$

y en consecuencia:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} \langle L_A Z_i, Z_i\rangle + \sum_{j=1}^{j=h} \langle L_A X_j, X_j\rangle + \sum_{j=1}^{j=h} \langle L_A JX_j, JX_j\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^{i=s} <L_A JZ_i, JZ_i> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A JX_j, JX_j>$$

pero de otra parte:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} <L_A JZ_i, JZ_i> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A JX_j, JX_j>$$

por lo que si sumamos:

$$2\,H(A) = \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A JX_j, JX_j>$$

pero se demuestra que:

$$<L_A JX_j, JX_j> = -<A, J^2 \Delta_{X_j} X_j>$$

y que $\Delta_{X_j} X_j \in Q \rightarrow J^2 \Delta_{X_j} X_j = 0 \rightarrow <L_A JX_j, JX_j> = 0$

Asimismo se prueba que:

$$<L_A X_j, X_j> = -<JA, \Delta_{JX_j} X_j>$$

donde $JA \in Q_1, \Delta_{JX_j} X_j \in Q_2$ lo que,al ser Q_1, Q_2 mutuamente ortogonales,implica que:

$$<L_A X_j, X_j> = 0 \qquad\qquad H(A) = o$$

El trabajo se termina con un apêndice al capitulo segundo en el que nos ocupamos de las J(4,-2)-variedades.Como remen diremos que una tal variedad se decompone en suma directa de cuatro distribuciones P_1, P_2, Q_1, Q_2 y que hemos demostrado:

Teorema A.8:Toda subvariedad casi-tangente de una J(4,-2) variedad es minimal.

Asimismo hemos probado que el caracter minimal de una J94,-2)-subvariedad no depende ni de Q_1 ni de Q_2 y que de P_1 y P_2 depende tal caracter de una forma especial señalada en el teorema A.11.

No quiero terminar esta introducción sin mostrar mi agradecimiento a D.Francisco Javier Echarte Reula,director del presente trabajo al que ha hecho posible y asimismo a mi compañero D.Jose Luis Cabrerizo Jaraiz por su inestimable colaboración.

INDICE

CAPITULO PRIMERO

CAPITULO SEGUNDO

CAPITULO PRIMERO

SUBVARIEDADES MINIMALES

0.-GENERALIDADES.NOTACIONES.

En todo lo que sigue designaremos por M una variedad diferenciable real de clase C^∞,de Haussdorf,paracompacta y de dimensión n.

Por M_p designaremos el espacio tangente a M en el punto $p \in M$.Recordemos que M_p es un espacio vectorial real de dimensión n(=dim.M). $\mathbb{R}$ será,para nosotros,la recta real.

DEFINICION 1.1.

Una métrica semi-Riemanniana en M es un tensor $<\ ,\ >_M$ del tipo (0,2),simétrico ,de *clase C^{∞} en M tal que para cada $p \in M$ la forma $< , >_p : M_p \times M_p \to R$ es no-singular, es decir que:*

$$\left.\begin{array}{l} Y_p \in M_p \\ <X_p, Y_p>_p = 0 \quad \forall X_p \in M_p \end{array}\right\} \to Y_p = 0$$

Si $< , >_p$ es además definida positiva entonces $< , >_M$ recibe el nombre de métrica de Riemann.

Al conjunto de las funciones diferenciables de clase C^{∞} en el punto $p \in M$ lo llamaremos $F(p)$.

Si U es un abierto de M usaremos la notación $F(U)$ para representar al conjunto de las funciones C^{∞} en U y $T(U)$ para el espacio de los campos diferenciables, de clase C^{∞}, de dominio U. (En particular se obtiene la notación $T(M)$ para los campos que son C^{∞} en toda la variedad M).

Recordemos que dadas dos variedades diferenciables M y $\overline{M}$ (de dimensiones respectivas k y n con $k \leq n$) tales que $\overline{M} \subset M$ se dice que $\overline{M}$ es una subvariedad de M si para cada punto $p \in \overline{M}$ existe un sistema local de coordenadas $(U;x_1,\ldots,x_n)$ de p en M de forma que: $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$

$\overline{U} = \{q \in U \mid x_{k+1}(q)=\ldots=x_n(q)=0\}$, $\overline{x}_i = x_i \mid_{\overline{U}}$ $i=1,\ldots,k$

es un sistema local de coordenadas de p en $\overline{M}$.

NOTA: En estas condiciones diremos que $(U;x_1,\ldots,x_n)$

$(\bar{U};\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k)$ son dos sistemas locales de coordenadas adaptados.

DEFINICION 1.2.

Si $\bar{M}$ es una subvariedad de M la aplicación $j : \bar{M} \to M$ definida por:

$j(p)=p$ para todo $p \in \bar{M}$

la llamaremos in clusión. Recordemos que j es entonces una función C^∞ y por lo tanto cabe considerar la diferencial $(dj)_p$ para cada $p \in \bar{M}$.

CONSECUENCIA: Si $X_p \in \bar{M}_p \to (dj)_p(X_p) \in M_p$. Como en ningun caso habrá lugar a confusión haremos siempre la identificación $(dj)_p(X_p) = X_p$.

DEFINICION 1.3.

Diremos que $\bar{M}$ es una subvariedad no-singular de M respecto de $<\ ,\ >_M$ si para cada $p \in \bar{M}$ se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} Y_p \in \bar{M}_p \\ <X_p, Y_p>_p = 0 \quad \forall X_p \in \bar{M}_p \end{array}\right\} \to Y_p = 0$$

NOTA: Es obvio que en el caso de que $<\ ,\ >_M$ sea una métrica de Riemann todas las subvariedades son no-singulares.

TEOREMA 1.1.

Si $\overline{M}$ es una subvariedad de M no-singular respecto de $< , >_M$ y se define en $\overline{M}$ el tensor:

$< , >_{\overline{M}} = <dj , dj>_M$

resulta que $< , >_{\overline{M}}$ es una métrica semi-Riemanniana en $\overline{M}$ que recibe el nombre de métrica inducida por $< , >_M$.

NOTA: En adelante pondremos indistintamente $< , >$ en lugar de $< , >_M$ y de $< , >_{\overline{M}}$.

DEFINICION 1.4.

Una conexión afín en una variedad diferenciable M es un operador Δ que asigna a cada campo $X \in T(U)$ una aplicación:

$\Delta_X : T(U) \rightarrow T(U)$

que cumple las condiciones siguientes:

a) Δ_X es lineal, es decir que:

$\Delta_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \Delta_X Y + \beta \Delta_X Z$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in R; X, Y, Z \in T(U)$

b) Si $f, g \in F(U)$; $X, Y, Z \in T(U)$ se cumple:

$\Delta_{fX+gY} Z = f \Delta_X Z + g \Delta_Y Z$

c) Finalmente deberá cumplirse que:

$\Delta_X(fY) = (Xf) Y + f \Delta_X Y$

TEOREMA 1.2.

Sean $X,Y \in T(U)$. Si $X_p = 0$ en un punto $p \in U$ entonces $(\Delta_X Y)_p = 0$.

DEMOSTRACION:

Helgason |1| ,pág. 27.

El teorema más importante que necesitamos recordar en estos preliminares es el que da la conexión métrica en una variedad semi-Riemanniana. Vamos unicamente a enunciarlo. Su demostración puede consultarse en Hicks |1| página 71.

TEOREMA 1.3.

En una variedad M con una métrica $<\ ,\ >$ existe una, y solo una, conexión afín Δ que satisface las dos condiciones siguientes cualesquiera que sean $X,Y,Z \in T(U)$:

1) $\Delta_X Y - \Delta_Y X = |X,Y|$

2) $X<Y,Z> = <\Delta_X Y,Z> + <Y,\Delta_X Z>$

Δ recibe el nombre de conexión métrica asociada a $<\ ,\ >$.

NOTAS: a) Por $|X,Y|$ designamos el corchete de los campos X e Y.

b) Si se define $T(X,Y) = \Delta_X Y - \Delta_Y X - |X,Y|$ la condición 1) anterior resulta ser $T(X,Y) = 0$. T recibe el nombre de torsión.

1.-FORMA DE MINIMALIDAD.

Suponemos que se tiene una variedad diferenciable M con una métrica < , > y que $\overline{M}$ es una variedad no-singular(respecto de < , >) de M.

DEFINICION 1.5.

Sea X un campo de vectores en M. Diremos que X es C^∞ sobre un abierto $\overline{G}$ de $\overline{M}$ si para cada punto $p \in \overline{G}$ y cada sistema local de coordenadas $(U; x_1, \ldots, x_n)$ de p en M se cumple que si:

$$X_q = \sum f_i(q)\ (\partial/\partial x_i)_q \qquad q \in U$$

entonces las funciones:

$$f_i : U \cap \overline{M} \subset \overline{M} \to R \quad \text{son diferenciables.}$$

Notese que no se dice nada de que X tenga que ser tangente a $\overline{M}$.

TEOREMA 1.4.

Si X es un campo C^∞ en el abierto U de M y *llamamos $\overline{U} = U \cap \overline{M}$ entonces X es un campo C^∞ en $\overline{U} \subseteq \overline{M}$.*

DEMOSTRACION:

Hicks |1| página 14.

Sean $(U;x_1,\ldots,x_n)$ $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ dos sistemas locales de coordenadas adaptados. Vamos a llamar $T^*(\overline{U})$ al espacio de los campos C^∞ en $\overline{M}$ que son restricción de un campo X que es C^∞ en U, es decir:

$$T^*(\overline{U}) = \{X|_{\overline{U}} \text{ tales que } X \in T(U)\}$$

TEOREMA 1.5.

Si $X \in T(\overline{U})$ entonces existe $X^* \in T(U)$ tal que $X^*|_{\overline{U}} = X$. Se dice que X^* es una extensión de X a U.

DEMOSTRACION:

Hicks |1| página 22(en adelante pondremos $X^*=X$).

Si, por otra parte, definimos:

$$|T(\overline{U})|^\perp = \{X \in T(\overline{U}) \mid \langle X,Y\rangle=0 \quad \forall Y \in T(\overline{U})\}$$

se verifica el siguiente teorema:

TEOREMA 1.6.

$$T^*(\overline{U}) = T(\overline{U}) \oplus |T(\overline{U})|^\perp$$

DEMOSTRACION:

En efecto como $(U;x_1,\ldots,x_n)$ $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ son dos sistemas locales de coordenadas adaptados se tiene que:

$$X_i = \partial/\partial x_i \qquad i=1,\ldots,n$$

forman una base de $T(U)$(Lo que implica que $X_i|_{\overline{U}}$ $i=1,\ldots,n$ forman una base de $T^*(\overline{U})$) y por otra parte:

$$X_i|_{\overline{U}} \qquad i=1,\ldots,k$$

forman una base de $T(\overline{U})$. Aplicando a $X_1,\ldots,X_n$ el método de ortonormalización de Gram-Schmitd puede sustituirse esta base por otra $Y_1,\ldots,Y_n$ tal que:

$<Y_i,Y_j> = 0$ si $i\neq j$

$Y_i|_{\overline{U}}$ $i=1,\ldots,k$ forman una base de $T(\overline{U})$

$Y_i|_{\overline{U}}$ $i=k+1,\ldots,n$ forman una base de $|T(\overline{U})|^{\perp}$

El resto de la demostración es trivial.

COROLARIO

Si $X \in T^*(\overline{U})$ entonces X se descompone de manera única en la forma:

$X = tgX + NorX$

donde $tgX \in T(\overline{U})$ y $NorX \in |T(\overline{U})|^{\perp}$. Como consecuencia las aplicaciones:

$X \mapsto tgX \qquad X \mapsto NorX$

son lineales.

Tras estas consideraciones recordemos que, puesto que $\overline{M}$ es una subvariedad, no-singular respecto de $< \, , \, >$, de M

tanto M como $\overline{M}$ son variedades semi-Riemannianas. Vamos a llamar Δ a la conexión afín (única) que induce $<\ ,\ >$ en M y $\overline{\Delta}$ a la conexión afín (tambien única) que induce $<\ ,\ >$ en $\overline{M}$. Hagamos notar que no es cierto que $\overline{\Delta} = \Delta|_{\overline{M}}$; la relación entre Δ y $\overline{\Delta}$ viene expresada en el siguiente teorema

Sean, como hasta ahora, $(U;x_1,\ldots,x_n)$ $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ dos sistemas adaptados:

TEOREMA 1.7.

Si $X,Y \in T(\overline{U})$ y $X,Y \in T(U)$ son dos extensiones a U se verifica que:

$\overline{\Delta}_X Y = tg\,\Delta_X Y$

TEOREMA 1.8.

Si $X,Y \in T(\overline{U})$ y se define:

$V(X,Y) = Nor\,\Delta_X Y$

se verifica que V es un tensor C^∞, simétrico, covariante de orden 2 y con valores vectoriales.

DEMOSTRACIONES:

Hicks |1| pág.75.

NOTA: La ecuación del corolario que sigue recibe el nombre de ecuación de Gauss. V se llama segundo tensor funda mental.

Consideremos un campo diferenciable A cuyo dominio sea un abierto G de M.

DEFINICION 1.6.

Se dice que A es normal a $\overline{M}$ si para cada punto $p \in G \cap \overline{M}$ se cumple:

$$\langle A_p, X_p \rangle_p = 0 \qquad \forall X_p \in \overline{M}_p$$

Si se dispone de un campo A normal a $\overline{M}$ y $p \in \overline{M}$ es un punto del dominio de A puede definirse un endomorfismo:

$$L_A : \overline{M}_p \to \overline{M}_p$$

de la siguiente forma:

Sea $X_p \in \overline{M}_p$ y tomemos en p dos sistemas locales de coordenadas adaptados $(U;x_1,\ldots,x_n)$ $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$. Entonces X_p puede escribirse:

$$X_p = \sum a_i \,(\partial/\partial x_i)_p \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Es obvio que el campo:

$$X^* = \sum a_i \,(\partial/\partial x_i)$$

pertenece a T(U) y verifica:

$$X^*_p = X_p$$

Esto prueba que al menos existe un campo de T(U) cuyo valor en p es X_p. Sea X uno cualquiera de ellos. Por definición tomamos:

$$L_A X_p = tg(\Delta_X A)_p$$

Puesto que, como dijimos en la pregunta anterior, si $X, Y \in T(U)$ y $X_p = Y_p$ se cumple que:

$$(\Delta_X A)_p = (\Delta_Y A)_p$$

resulta que $L_A X_p$ depende exclusivamente de X_p y A y queda, por ello, bien definido. Que se trata de un endomorfismo de $\overline{M}_p$ es trivial.

Esto podemos hacerlo para cada punto $p \in \overline{M}$ del dominio G de A de forma que si X es un campo diferenciable en $\overline{M}$ cuyo dominio contenga a $G \cap \overline{M}$ puede escribirse:

$$L_A X = tg\Delta_X A$$

y $L_A X$ es tambien un campo diferenciable en $\overline{M}$ cuyo dominio es $G \cap \overline{M}$.

TEOREMA 1.9.

Si X, Y son dos campos diferenciables en $\overline{M}$, tangentes a $\overline{M}$ de dominio $\overline{G}$ (abierto en $\overline{M}$) y A es un campo normal a $\overline{M}$ se verifica (en $\overline{G} \cap dom(A)$):

$$\langle L_A X, Y\rangle = -\langle A, V(X,Y)\rangle$$

DEMOSTRACION:

Sea $p \in \overline{G} \cap dom(A)$ y sean $U, \overline{U}$ dominios de sistemas locales de coordenadas adaptados tales que $\overline{U} \subset \overline{G} \cap \mathrm{dom}(A)$.Esto implica que $X,Y \in T(\overline{U})$, $A \in |T(\overline{U})|_y^{\perp}$ por lo tanto:

$$\langle Y,A\rangle = 0 \qquad \text{en } \overline{U} \quad \rightarrow$$

$$X\langle Y,A\rangle = 0 \qquad \text{en } \overline{U}$$

Sean X,Y dos extensiones a U de X,Y.Por ser Δ la conexión métrica se tiene:

$$0 = X\langle Y,A\rangle = \langle \Delta_X Y,A\rangle + \langle Y,\Delta_X A\rangle$$

Pero como:

$$\Delta_X Y = \overline{\Delta}_X Y + V(X,Y)$$

resulta:

$$\langle \overline{\Delta}_X Y,A\rangle + \langle V(X,Y),A\rangle + \langle Y,\Delta_X A\rangle = 0$$

Ahora bien:

$$\langle \overline{\Delta}_X Y,A\rangle = 0 \quad \text{por ser } \overline{\Delta}_X Y \text{ tangente a } \overline{M} \quad \rightarrow$$

$$\langle Y,\Delta_X A\rangle = -\langle A,V(X,Y)\rangle \quad \rightarrow$$

$$\langle Y,\mathrm{tag}\Delta_X A + \mathrm{Nor}\ _X A\rangle = -\langle A,V(X,Y)\rangle$$

pero:

$$\langle Y,\mathrm{Nor}\ _X A\rangle = 0 \qquad \text{porque } Y \in T(\overline{U})$$

y en consecuencia se concluye que:

$$\langle Y,L_A X\rangle = \langle Y,\mathrm{tg}\Delta_X A\rangle = -\langle A,V(X,Y)\rangle$$

Si L_A es un endomorfismo de $\overline{M}_p$ por $\mathrm{tr}L_A$ entendemos la traza de L_A.Concluimos esta sección con una definición fundamental:

DEFINICION 1.7.

Sea H la 1-forma que opera sobre los campos diferenciables en M normales a $\overline{M}$:

$H(A) = tr\ L_A$

H recibe el nombre de forma de minimalidad de $\overline{M}$.

NOTA: Esta definición implica que si se tiene un abierto $\overline{U}$ de $\overline{M}$,una base ortonormal:

$$X_1,\ldots,X_k$$

de $T(\overline{U})$ y un campo A normal a $\overline{M}$,entonces se verifica en $\overline{U} \cap \mathrm{dom}(A)$:

$$H(A) = tr\ L_A = \sum_{i=1}^{i=k} \langle L_A X_i, X_i \rangle = - \sum_{i=1}^{i=k} \langle A, V(X_i, X_i) \rangle$$

DEFINICION 1.8.

Sea M una variedad semi-Riemanniana y $\overline{M}$ una subvariedad de M no-singular para la métrica de M. Diremos que $\overline{M}$ es una subvariedad minimal de M si la forma H de minimalidad de $\overline{M}$ es nula, es decir si:

$H(A) = 0$

para todo campo A normal a $\overline{M}$.

En virtud de la nota anterior esto equivale a que para todo campo A normal a $\overline{M}$, todo punto $p \in \overline{M}$ en el dominio de A y toda base ortonormal $X_1, \ldots, X_k \in T(\overline{U})$ en un entorno abierto $\overline{U}$ de p en $\overline{M}$ se verifique:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \langle A, V(X_i, X_i) \rangle = 0$$

EJEMPLO

A modo de ilustración damos el siguiente ejemplo, que tomado de Terrier |1|, es muy conocido. Supongamos que $\overline{M}$ es una subvariedad de dimensión $k=n-1$. Es sabido que entonces puede definirse un campo $N \in |T(\overline{M})|^{\perp}$ unitario de tal forma que si A es un campo normal a $\overline{M}$ se tiene necesariamente:

$$A = f\,N$$

donde f es una función diferenciable en la intersección de $\overline{M}$ con el dominio de A.

Del hecho de ser N unitario resulta que:

$$\langle N, N \rangle = 1$$

y por lo tanto:

$$X\langle N, N \rangle = 0$$

para todo campo $X \in T(\overline{U})$ siendo $\overline{U}$ un abierto cualquiera de $\overline{M}$. En consecuencia:

$$0 = X\langle N, N \rangle = \langle \Delta_X N, N \rangle + \langle N, \Delta_X N \rangle = 2\langle \Delta_X N, N \rangle$$

o sea que $<\Delta_X N, N> = 0$ lo que significa que $\Delta_X N$ es tangente a $\overline{M}$.

Si $A = f\,N$ es un campo normal a $\overline{M}$ y X es tangente a $\overline{M}$ se tiene:

$$L_A X = tg\ \Delta_X A = tg\ \Delta_X (f\,N) = tg\ [(Xf)\,N + f\,\Delta_X N] =$$

$$= tg\ [(Xf)\,N] + f tg\ L_N X = f\,L_N X$$

ya que $tg\ [(Xf)\,N] = 0$ por ser N normal a $\overline{M}$.

Ahora bien, puesto que $\Delta_X N$ es tangente a $\overline{M}$ se cumple que:

$$L_N X = tg\ \Delta_X N = \Delta_X N$$

y en definitiva:

$$L_A X = f\,L_N X$$

Si, finalmente, se dispone de una base $X_1, \ldots, X_{n-1} \in T(\overline{U})$ ortonormal y A tiene dominio G resulta, como dijimos antes, que en $\overline{U} \cap G$ vale la formula:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{n-1} <L_A X_i, X_i>$$

Y por lo tanto $\overline{M}$ es una subvariedad minimal si:

$$\sum_{i=1}^{n-1} <\Delta_{X_i} N, X_i> = 0$$

ya que, como hemos visto:

$$<L_A X_i, X_i> = f <\Delta_{X_i} N, X_i>$$

CASO PARTICULAR

Supongamos una superficie clásica en R^3, S, que venga dada por la función:

$$\chi : E \to \mathbb{R}^3$$

$$\chi : (u,v) \to \chi(u,v)$$

donde E es un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que u,v se han escogido de tal forma que $\frac{\partial\chi}{\partial u}$, $\frac{\partial\chi}{\partial v}$ son ortonormales,es decir que:

$$<\frac{\partial\chi}{\partial u},\frac{\partial\chi}{\partial v}> = 0 \qquad <\frac{\partial\chi}{\partial u} , \frac{\partial\chi}{\partial u}> = <\frac{\partial\chi}{\partial v} , \frac{\partial\chi}{\partial v}> = 1$$

Recordemos que si:

$$E = <\frac{\partial\chi}{\partial u} , \frac{\partial\chi}{\partial u}> \qquad F = <\frac{\partial\chi}{\partial u} , \frac{\partial\chi}{\partial v}> \qquad G = <\frac{\partial\chi}{\partial v} , \frac{\partial\chi}{\partial v}>$$

$$e = <\frac{\partial\chi}{\partial u} , \frac{\partial N}{\partial u}> \qquad f = <\frac{\partial\chi}{\partial u} , \frac{\partial N}{\partial v}> \qquad g = <\frac{\partial\chi}{\partial v} , \frac{\partial N}{\partial v}>$$

la curvatura media de la superficie vale:

$$H_m = \frac{1}{2} \frac{Eg-2fF+eG}{EG-F^2}$$

que en nuestro caso(esto es E=G=1 F=0) queda:

$$H_m = 1/2 \; (e+g)$$

La forma H de minimalidad de S,en cuanto subvariedad de $\mathbb{R}^3$ puede calcularse facilmente:

Si A = f N es un campo normal a S,como $X_1 = \frac{\partial\chi}{\partial u}$,$X_2 = \frac{\partial\chi}{\partial v}$ forman una base ortonormal,resulta según lo expuesto antes que:

$$H(A) = f[<\Delta_{X_1} N,X_1> + <\Delta_{X_2} N,X_2>]$$

y por lo tanto S será una subvariedad minimal si:

$$<\Delta_{X_1} N,X_1> + <\Delta_{X_2} N,X_2> = 0$$

Un calculo sencillo muestra que:

$$\Delta_{X_1} N = \frac{\partial N}{\partial u} \qquad \Delta_{X_2} N = \frac{\partial N}{\partial v}$$

y en consecuencia:

$$<\Delta_{X_1} N, X_1> = e \qquad <\Delta_{X_2} N, X_2> = g$$

Por lo tanto S será minimal si,y solo si,:

$$e + g = 0$$

es decir si,y solo si:

$$H_m = 0$$

que es la definición clásica de superficie mínima.

En resumen:

El concepto de subvariedad minimal es una generalización del de superficie minima.

OTRO CASO PARTICULAR

Un segundo caso particular se tiene cuando M es una superficie y $\overline{M}$ una curva en M.Si T designa,en este caso,un campo unitario tangente a $\overline{M}$ la condición para que $\overline{M}$ sea minimal es que:

$$<\Delta_T N, T> = 0$$

(N sigue,desde luego,designando un campo unitario normal a $\overline{M}$).

TEOREMA 1.10.

$\overline{M}$ es minimal si existe localmente un campo no nulo X tangente a $\overline{M}$ tal que:

$$\Delta_X X = 0$$

El recíproco es cierto tambien.

DEMSOTRACION:

a) Supongamos que $\overline{M}$ sea minimal, según hemos dicho esto equivale a decir que:

$$<\Delta_T N, T> = 0$$

Por otra parte ya dijimos en el caso general que $D_T N$ es tangente a $\overline{M}$ y por lo tanto:

$$\Delta_T N = h\ T$$

donde h es una función diferenciable, esto implica que:

$$0 = <\Delta_T N, T> = <hT, T> = h<T, T> = h \rightarrow h = 0$$

y en consecuencia $\Delta_T N = 0$.

Como N es normal a $\overline{M}$ y T tangente se tiene:

$$<T, N> = 0 \rightarrow T<T, N> = 0 \rightarrow$$

$$<\Delta_T T, N> + <T, \Delta_T N> = 0 \rightarrow$$

$$<\Delta_T T, N> = 0$$

lo cual quiere decir que $\Delta_T T$ es tangente a $\overline{M}$ y por lo tanto proporcional a T, esto es:

$$\Delta_T T = g\ T$$

Consideremos entonces la ecuación diferencial ordinaria:

$$g\ y + Ty = 0$$

y sea y una solución. Llamemos :

$$X = y\ T$$

El siguiente calculo muestra que $\Delta_X X = 0$ tal como nosotros queriamos:

$$\Delta_X X = \Delta_{yT}(yT) = y^2\ \Delta_T T + y\ (Ty)\ T =$$

$$= y^2\ g\ T + y\ (Ty)\ T = y\ [y\ g + Ty]\ T = 0$$

b) Reciprocamente supongamos que exista X, tangente a $\overline{M}$ tal que $\Delta_X X = 0$. Como X es tangente a $\overline{M}$ será:

$$X = y\ T \qquad y \neq 0$$

Igual que antes se tiene:

$$\Delta_X X = y^2\ \Delta_T T + y\ (Ty)\ T$$

pero como $\Delta_X X = 0$ e $y \neq 0$ puede despejarse $\Delta_T T$:

$$\Delta_T T = g\ T \qquad \text{donde-}g = \frac{1}{y}\ (Ty)$$

Esto implica que:

$$<N, \Delta_T T> = 0$$

Y por la misma razón que antes de aqui sigue que:

$$<\Delta_T N, T> = 0$$

O sea que $\overline{M}$ es minimal.

NOTA: Reeordemos que la condición $\Delta_X X$ expresa que la curva es una geodesica.

2.-INTERPRETACION GEOMETRICA.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad de M y K un subconjunto compacto de $\overline{M}$.Supongamos que $(U;x_1,\ldots,x_n)$ es un dominio local de coordenadas en M alrededor de un punto $p \varepsilon K$ y que $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ es un dominio local de coordenadas en $\overline{M}$ en torno de p.Por definición de subvariedad se tiene que:

$$x_i=x_i(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k) \qquad i=1,\ldots,n$$

Sea A un campo normal a $\overline{M}$,cuyo dominio contiene a K y nulo sobre la frontera de K .Sean a_i,$i=1,\ldots,n$ las componentes de A en la base dual de$\{\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n\}$ y sea f cualquier función diferenciable sobre M.Para cada t del intervalo $(-\varepsilon,\varepsilon)$ la subvariedad K(t;A,f) mediante las ecuaciones parametricas:

$$v_i(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k) = u_i + t\, f\, a_i \qquad i=1,\ldots,n$$

Ecuaciones que obviamente estan definidas para cada $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ de $\overline{U}$.

t se elige suficientemente pequeño como para que las ecuaciones anteriores definan para cada $(\overline{X}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ un punto de M.

Como $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k;\overline{U})$ es un sistema local de coordenadas en $\overline{M}$ resulta que una base local de campos en p(en cuanto punto de $\overline{M}$) viene dada por $\partial/\partial\overline{x}_i$ $\quad i=1,\ldots,k$

Por otra parte ,de acuerdo a como se han definido K(t;A,f) viene dada por:

$$X_i(t;A,f) = X_i + t(X_i f)\, A + tf\, \Delta_{X_i} A \qquad i=1,\ldots,k$$

donde $X_i = \partial/\partial\overline{x}_i$

Si $(\overline{U};\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)$ es un dominio local de coordenadas en $\overline{M}$ en torno de un punto $p \varepsilon K$ resulta que el elemento de volumen α de $\overline{M}$ se expresa localmente en $\overline{U}$ por:

$$\alpha(\overline{U}) = \sqrt{g}\ \ d\overline{x}_1 \wedge \ldots\ldots \wedge d\overline{x}_k$$

siendo,como se sabe,:

$$g = \det.\ (<X_i,X_j>) \qquad i,j=1,\ldots,k$$

El volumen de K es por definición la integral:

$$v(K) = \int_K \alpha$$

Igualmente el elemento de volumen $\alpha(t)$ de $K(t;A,f)$ se escribe en $\overline{U}$:

$$\alpha(t;\overline{U}) = \sqrt{g(t)} \quad d\overline{x}_1 \wedge \ \ldots \wedge d\overline{x}_k$$

donde,de la misma manera :

$$g(t) = \det.\ (<X_i(t;A,f),X_j(t;A,f)>) \quad i,j=1,\ldots,k$$

en consecuencia el volumen de $K(t;A,f)$ vale:

$$v[K(t;A,f)] = \int_K \alpha(t)$$

Estas consideraciones permiten,de manera natural,dar la siguiente definición

DEFINICION 1.9.

Diremos que K es un elemento minimal de $\overline{M}$ si para cualesquiera A, f con las condiciones exigidas se verifica que la integral:

$$\int_K \alpha(t)$$

es estacionaria, es decir si:

$$\frac{d}{dt} \int_K \alpha(t) \Big|_{t=0} = 0$$

NOTA: Teniendo en cuenta que $\int_K \alpha(t) = v[K(t;A,f)]$ y que si $t=0$, $K(t;A,f) = K$ la definición anterior expresa que el volumen de K es extremal(máximo o mínimo) respecto de las deformaciones normales de K. El significado geométrico de dicha definición es pues claro.

TEOREMA 1.11.

Sea $(\overline{U};\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_k)$ un sistema local de coordenadas en $\overline{M}$ alrededor de un punto $p \in K$.

Sean, como hasta ahora:

$$X_i = \partial/\partial\overline{x}_i$$

$$X_i(t;A,f) = X_i + t(X_i f)\, A + t\, f\, \Delta_{X_i} A$$

Se verifica que:

$$\frac{d}{dt}\, g(t) \Big|_{t=0} = 2\, f\, g\, \mathrm{tr}\, L_A$$

DEMOSTRACION:

Puesto que:

$$X_i(t;A,f) = X_i + t(X_i f)\, A + t\, f\, \Delta_{X_i} A$$

resulta:

$$\frac{d}{dt} \langle X_i(t;A,f),X_j(t;A,f)\rangle \Big|_{t=0} =$$

$$= \langle X_i(t;A,f)\Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} X_j(t;A,f)\Big|_{t=0}\rangle \quad +$$

$$+ \langle\frac{d}{dt} X_i(t;A,f)\Big|_{t=0}, X_j(t;A,f)\Big|_{t=0}\rangle$$

Ahora bien como:

$$\frac{d}{dt} X_i(t;A,f)\Big|_{t=0} = (X_i f)\ A + f\ \Delta_{X_i} A$$

$$X_i(t;A,f)\Big|_{t=0} = X_i$$

se tiene:

$$\frac{d}{dt} \langle X_i(t;A,f),X_j(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} =$$

$$= \langle X_i,(X_j f)\ A + f\ \Delta_{X_j} A\rangle + \langle (X_i f)\ A + f\ \Delta_{X_i} A,X_j\rangle$$

pero teniendo en cuenta que A es normal a K y por lo tanto:

$$\langle X_i,A\rangle = \langle X_j,A\rangle = 0$$

queda en la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt} \langle X_i(t;A,f),X_j(t;A,f)\rangle_{t=0} =$$

$$= \langle X_i,f\ \Delta_{X_j} A\rangle + \langle f\ \Delta_{X_i} A,X_j\rangle =$$

$$= f\left[\langle X_i,\Delta_{X_j} A\rangle + \langle X_j,\Delta_{X_i} A\rangle\right]$$

Esto se puede escribir de otra forma, basta observar que:

$$<X_i,\Delta_{X_j}A> = <X_i,tg\Delta_{X_j}A + Nor\Delta_{X_j}A> = <X_i,tg\Delta_{X_j}A> =$$

$$= <X_i,L_AX_j>$$

e igualmente:

$$<\Delta_{X_i}A,X_j> = <L_AX_i,X_j>$$

pero por la sección anterior sabemos que:

$$<L_AX_i,X_j> = -<A,V(X_i,X_j)> = -<A,V(X_j,X_i)> =$$

$$= <L_AX_j,X_i>$$

y en definitiva sustituyendo:

$$\frac{d}{dt} <X_i(t;A,f),X_j(t;A,f)> \Big|_{t=0} = 2f <L_AX_i,X_j>$$

el determinante g(t) es,como hemos dicho el siguiente:

$$g(t)=\begin{vmatrix} <X_1(t;A,f),X_1(t;A,f)> & \dots & <X_1(t;A,f),X_k(t;A,f)> \\ \vdots & & \vdots \\ <X_k(t;A,f),X_1(t;A,f)> & \cdots & <X_k(t;A,f),X_k(t;A,f)> \end{vmatrix}$$

de donde teniendo en cuenta la regla para derivar un determinante se tiene:

$$\frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{j=k} b_j$$

donde b_j es el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \langle X_1(t;A,f),X_1(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} & \cdots & \frac{d}{dt}\langle X_1(t;A,f),X_j(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} & \cdots & \langle X_1(t;A,f),X_k(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle X_k(t;A,f),X_1(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} & \cdots & \frac{d}{dt}\langle X_k(t;A,f),X_j(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} & \cdots & \langle X_k(t;A,f),X_k(t;A,f)\rangle\Big|_{t=0} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle X_1,X_1\rangle & \cdots & 2f\ \langle L_A X_1,X_j\rangle & \cdots & \langle X_1,X_k\rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle X_k,X_1\rangle & \cdots & 2f\ \langle L_A X_k,X_j\rangle & \cdots & \langle X_k,X_k\rangle \end{vmatrix}$$

y por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\, g(t)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{j=k} 2f\ G_j$$

donde:

$$G_j = \begin{vmatrix} \langle X_1,X_1\rangle & \cdots & \langle L_A X_1,X_j\rangle & \cdots & \langle X_1,X_k\rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle X_k,X_1\rangle & \cdots & \langle L_A X_k,X_j\rangle & \cdots & \langle X_k,X_k\rangle \end{vmatrix}$$

es el determinante que se obtiene de:

$$g = \begin{vmatrix} <X_1,X_1> & \cdots & <X_1,X_j> & \cdots & <X_1,X_k> \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ <X_k,X_1> & \cdots & <X_k,X_j> & \cdots & <X_k,X_k> \end{vmatrix}$$

cuando se sustituye la columna j $:\{<X_1,X_j>, \ldots ,<X_k,X_j>\}$ por la columna $\{<L_AX_1,X_j>, \ldots ,<L_AX_k,X_j>\}$y como consecuencia de ello el menor del elemento $<X_i,X_j>$ en g coincide con el menor del elemento $<L_AX_i,X_j>$ en G_j.LLamemos C_{ij} a dicho menor:Desarrollando entonces G_j por la columna j resulta:

$$G_j = \sum_{i=1}^{i=k} <L_AX_i,X_j> C_{ij}$$

Ahora bien como,por su definición,L_AX_i es tangente a K se podrá escribir:

$$L_AX_i = \sum_{h=1}^{h=k} a_i^h X_h$$

y por lo tanto:

$$G_j = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{h=1}^{h=k} a_i^h <X_h,X_j> C_{ij} \rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{j=k} G_j = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{h=1}^{h=k} \sum_{j=1}^{j=k} a_i^h <X_h,X_j> C_{ij}$$

pero observemos que fijados los valores de i,h el sumando correspondiente vale:

$$a_i^h \sum_{j=1}^{j=k} <X_h,X_j> \quad C_{ij}$$

Notese que $\sum_{j=1}^{j=k} <X_h,X_j> \quad C_{ij}$ es el resultado de multiplicar en g la fila h por los menores de la fila i y por consiguiente:

$$\sum_{j=1}^{j=k} <X_h,X_j> C_{ij} = \begin{cases} o & \text{si} \quad h \neq i \\ g & \text{si} \quad h=i \end{cases}$$

Haciendo esta sustitución queda:

$$\sum_{j=1}^{j=k} G_j = \sum_{i=1}^{i=k} a_i^i \; g$$

Por definición:

$$\sum_{i=1}^{i=k} a_i^i = \text{tr } L_A$$

lo que implica finalmente que:

$$\frac{d}{dt} g(t) \bigg|_{t=0} = 2fg \; \text{tr}L_A$$

TEOREMA 1.12.

La condición necesaria y suficiente para que K sea un elemento minimal de $\overline{M}$ es que la forma de minimalidad H de $\overline{M}$ sea nula sobre K.

DEMOSTRACION:

Según la definición dada K es un elemento minimal de $\overline{M}$ si:

$$\frac{d}{dt}\int_K \alpha(t)\Big|_{t=0} = 0$$

Ahora bien en $\overline{U}$ se tiene:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\sqrt{g(t)}\Big|_{t=0} d\overline{x}_1\wedge\ldots\wedge d\overline{x}_k =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g(t)}}\Big|_{t=0}\frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0} d\overline{x}_1\wedge\ldots\wedge d\overline{x}_k =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g}}\, 2\, f\, g\, trL_A\, d\overline{x}_1\wedge\ldots\wedge d\overline{x}_k =$$

$$= f\, trL_A\sqrt{g}\, d\overline{x}_1\wedge\ldots\wedge d\overline{x}_k = f\, trL_A\,\alpha$$

y por lo tanto:

$$\int_K \frac{d}{dt}\alpha(t)\Big|_{t=0} = \int_K f\, trL_A\,\alpha$$

como f es arbitraria la integral anterior vale cero si,y solo si trL_A es una función nula sobre K.

COROLARIO

Si $\overline{M}$ es compacta el volumen de $\overline{M}$ es estacionario si,y solo si,la forma de minimalidad de $\overline{M}$ es nula.

El corolario anterior muestra claramente el significado geometrico de la forma de minimalidad.

CAPITULO SEGUNDO

MINIMALIDAD Y ESTRUCTURAS J(4,2)

1.-ESTRUCTURAS J(4,2)

Igual que en el capitulo anterior supondremos en este que M es una variedad diferenciable de clase C^∞, de Haussdorf,paracompacta y de dimensión n.

DEFINICION 2.1.

Una $J(4,2)$-estructura en una variedad M de dimensión par $n=2m$ consiste en un tensor J no nulo del tipo (1,1),clase C^∞ y rango constante r que cumple las dos condiciones siguientes:

1) $J^4 + J^2 = 0$

2) $r = 1/2$ (rango $J^2 + n$)

NOTAS: 1.- Si $z \in M$ es un punto de M entonces J_z es un endomorfismo de M_z.

2.-Una variedad M dotada de una estructuta $J(4,2)$ recibe el nombre de $J(4,2)$-variedad.

TEOREMA 2.1.

Sea M una $J(4,2)$-variedad. Definimos en $T(M)$ los operadores:

$$p = -J^2 \qquad q = J^2 + I$$

donde I es el operador identidad en $T(M)$. Se verifica que p y q son operadores de proyección complementarios.

DEMOSTRACION:

Por la definición de p y q es evidente que:

$$p + q = I$$

Pero además:

a) $p^2 = J^4 = -J^2 = p$

b) $q^2 = (J^2+I)^2 = J^4 + 2J^2 + I = -J^2 + 2J^2 + I = J^2 + I = $
$= q$

c) $pq = qp = -(J^2 + I)\, J^2 = -(J^4 + J^2) = 0$

y por lo tanto el teorema queda demostrado. En este teorema hemos tenido en cuenta que por la definición 2.1. se cumple que $J^4 + J^2 = 0$, en adelante usaremos esta propiedad sin mencionarla.

Como consecuencia de este teorema resulta que

$T(M)$ puede descomponerse en la suma directa:

$$T(M) = p[T(M)] \oplus q[T(M)]$$

donde, por tratarse de dos proyectores p y q, se tiene:

$$p[T(M)] = \{X \in T(M) \mid pX = X\}$$

$$q[T(M)] = \{X \in T(M) \mid qX = X\}$$

$p[T(M)]$ y $q[T(M)]$ son dos distribuciones complementarias que en adelante designaremos por P y Q.

Observese que si $X \in T(M)$ es un campo que pertenece a la distribución P se tiene que :

$$pX = X \quad \text{o sea} \quad -J^2X = X$$

Si X es, por el contrario, un campo de la distribución Q entonces:

$$qX = X \text{ es decir } J^2X + X = X \leftrightarrow J^2X = 0$$

por lo tanto puede afirmarse:

a) J actua sobre la distribución P como una estructura casi-compleja.

b) J actua sobre Q como una estructura casi-tangente.

La descomposición antes citada tiene dos consecuencias inmediatas que vamos a enunciar de manera explicita:

CONSECUENCIA 1

Si $X \in T(M)$ entonces X se descompone de for *ma única en la suma:*

$X = X_1 + X_2$

donde $J^2X_1 = -X_1$, $J^2X_2 = 0$

CONSECUENCIA 2 .

Se verifica:

a) $X \in P \rightarrow JX \in P$

b) $X \in Q \rightarrow JX \in Q$

DEMOSTRACION:

a) $X \in P \rightarrow J^2X = -X \rightarrow J^2(JX) = J(J^2X) = J(-X) = -JX \rightarrow$
$JX \in P$.

b) $X \in Q \rightarrow J^2X = 0 \rightarrow J^2(JX) = J(J^2X) = J(0) = 0 \rightarrow$
$JX \in Q$.

TEOREMA 2.2.

Las distribuciones P y Q son respectivamente de dimensiones 2r-n y 2n-2r.

DEMOSTRACION:

Hemos dicho que $J^2X = 0$ si $X \in Q$ y que $J^2X = -X$ si $X \in P$. Se deduce por lo tanto que $J^2X = 0$ si,y solo si,$X \in Q$,es decir que Q es precisamente el nucleo de J^2,de ello se deduce que:

$$\dim(Q) = n - \text{rango } J^2$$

Ahora bien de la definición 2.1. se tiene que:

$$\text{rango } J^2 = 2r - n$$

y en consecuencia:

$\dim(Q) = n + n - 2r = 2n - 2r$.

Cómo ademś P y Q son distribuciones complementarias:

$\dim(P) + \dim(Q) = n$ de donde:

$\dim(P) = n - \dim(Q) = n -(2n - 2r) = 2r - n$

NOTA:De ser $r = 1/2(\text{rango } J^2 + n)$ se deduce,puesto que necesariamente $0 \leqslant \text{rango } J^2 \leqslant n$,que:

$1/2\, n \leqslant r \leqslant n$

Esto conduce al siguiente corolario:

COROLARIO

a) Si J es de rango mínimo ($r = 1/2n$) M es una variedad casi tangente.

b) Si J es de rango máximo ($r = n$) M es una variedad casi-compleja.

DEMOSTARCION:

En el caso a) se deduce que $\dim(Q) = n$ y por tanto $T(M)=Q$
En el caso b) es $\dim(P)=n$ y entonces $T(M)=P$.En estas condiciones las conclusiones siguen de como actua J sobre Q y P respectivamente.

NOTA: Vamos a demostrar a continuación que la distribución Q puede aún descomponerse es suma directa de otras dos.

TEOREMA 2.3.

Vamos a designar con Q_1 a JQ y sea Q_2 un subespacio complementario de Q_1 en Q. Se verifican entonces las siguientes propiedades:

i) $Q = Q_1 \oplus Q_2$

ii) Q_1 *coincide con el nucleo de* J

iii) Q_1 *y* Q_2 *son ambas de diemnsión* $n-r$.

DEMOSTRACION:

i) Sigue de la definición de Q_1 y Q_2.

ii) y iii) Sea $X \in Q_1 \rightarrow X=JY$, $Y \in Q \rightarrow JX=J^2Y=0 \rightarrow$
$X \in Ker(J) \rightarrow Q_1 \subseteq Ker(J)$.

Por otro lado si $X \in P$ y $JX=o \rightarrow J^2X=0$ pero como $J^2X=-X$ se tiene que $X=0$. Por lo tanto $P \cap Ker(J) = \{\emptyset\} \rightarrow Ker(J) \subseteq Q$
$\rightarrow Ker(J) = Ker(J/Q)$.

Por definición de Q_1 se tiene $Q_1=JQ \rightarrow$

$$dim(Q_1) = rango(J/Q) \rightarrow$$

$dim(Q_1) = dim(Q) - dim(Ker(J/Q)) = dim(Q) - dim(Ker(J)) =$
$= dim(Q) - (n-r) = 2n-2r-(n-r)=n-r=dim(Ker(J))$.

Pero como ya sabemos que $Q_1 \subseteq Ker(J)$ se concluye finalmente; $Q_1 = Ker(J)$.

Para terminar esta sección vamos a incluir un teorema tomado de Yano[1] que proporciona una métrica sobre las $J(4,2)$-variedades que es muy adecuada para esta teoria.

DEFINICION 2.2.

Sea M una $J(4,2)$-variedad. Diremos que una métrica Riemanniana $<\ ,\ >$ en M está adaptada a la $J(4,2)$-estructura si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) P y Q son mutuamente ortogonales respecto de $<\ ,\ >$ es decir:

$$<X,Y> = 0 \qquad \forall\ X \in P \qquad \forall\ Y \in Q$$

2) $<\ ,\ >$ restringuida a P es casi hermitica respecto de J, esto es:

$$<JX,JY> = <X,Y> \qquad \forall\ X,Y \in P.$$

NOTA: Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que si $<\ ,\ >$ es una métrica adaptada en M se cumple:

$$<X,JY> = -<JX,Y> \qquad \forall\ X,Y \in P$$

En efecto si $X,Y \in P$ se tiene que $X = -J^2X$ y por tanto:

$$<X,JY> = -<J^2X,JY> = -<JX,Y>$$

TEOREMA 2.4.

Sea M una $J(4,2)$-variedad. Pueden determinarse un subespacio complementario Q_2 de Q_1 y una métrica Riemanniana $<\ ,\ >$ sobre M de tal manera que:

a) $<\ ,\ >$ es una métrica adaptada en M

b) Q_1 y Q_2 son mutuamente ortogonales res -

pecto de < , > y además J transforma una base ortonormal de Q_2 en una base ortonormal de Q_1.

DEMOSTRACION:

Yano,Houh y Chen|1|.

2.-MINIMALIDAD Y ESTRUCTURAS J(4,2).

2.1.-CONDICION KAEHLERIANA.

DEFINICION 2.3.

Sea M una J(4,2)-variedad. Diremos que $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja de M si se verifican las siguientes condiciones:

1) $JX \in T(\overline{M}) \qquad \forall X \in T(\overline{M})$

2) $T(\overline{M}) \subseteq P$

El nombre de subvariedad casi-compleja resulta adecuado puesto que si se define:

$$\overline{J}X = JX \qquad \forall X \in T(\overline{M})$$

la condición 1) anterior implica que $\overline{J}$ es un endomorfismo de $T(\overline{M})$, y de la condición 2) se tiene:

$$\overline{J}^2X = J^2X = -X \qquad \forall X \in T(\overline{M})$$

de forma que, efectivamente, J induce sobre $\overline{M}$ una estructura casi-compleja $\overline{J}$.

Vamos a suponer que sobre la J(4,2)-variedad se tiene una métrica Riemanniana adaptada $< \, , \, >$.

TEOREMA 2.5.

Si $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja de M se verifica que:

$$\langle X,JY\rangle = -\langle JX,Y\rangle \qquad \forall\, X,Y \in T(\overline{M})$$

DEMOSTRACION:

El teorema es evidente puesto que $X,Y \in T(\overline{M}) \subseteq P$.

La definición 2.3. afirma que si $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja de M entonces JX es tangente a $\overline{M}$ cuando lo es X. Vamos a completar esta propiedad con el teorema siguiente:

TEOREMA 2.6.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de la J(4,2)-variedad M. Se verifica que si A es un campo normal a $\overline{M}$ entonces JA es asimismo normal a $\overline{M}$.

DEMSOTRACION:

Sea $A \in [T(\overline{M})]^{\perp}$ un campo normal a $\overline{M}$. Por definición se tiene entonces:

$$\langle X,A\rangle = 0 \qquad \forall\, X \in T(\overline{M})$$

Ahora bien $JX \in T(\overline{M})$ cuando $X \in T(\overline{M})$ y por lo tanto:

$$\langle JX,A\rangle = 0 \qquad \forall\ X \in T(\overline{M})$$

El campo A puede descomponerse, segun sabemos, en la forma:

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 \in P \qquad A_2 \in Q$$

y por lo tanto podemos escribir:

$$\langle JX,A\rangle = \langle JX,A_1\rangle + \langle JX,A_2\rangle = 0$$

Ahora bien $JX \in P, A_2 \in Q$ y P,Q son mutuamente ortogonales respecto de $\langle\ ,\ \rangle$ de manera que:

$$\langle JX,A_2\rangle = 0 \qquad \rightarrow$$

$$\langle JX,A\rangle=\langle JX,A_1\rangle = 0$$

Pero si tenemos en cuenta que $X,A_1 \in P$ resulta:

$$\langle JX,A_1\rangle = -\langle X,JA_1\rangle \qquad \rightarrow$$

$$\langle X,JA_1\rangle = 0 \qquad [2.1.]$$

De otra parte:

$$\langle X,JA\rangle = \langle X,JA_1\rangle + \langle X,JA_2\rangle$$

Como $A_2 \in Q \rightarrow JA_2 \in Q$, lo que unido a que $X \in P$ da:

$$\langle X,JA_2\rangle = 0$$

y en consecuencia:

$$\langle X,JA\rangle = \langle X,JA_1\rangle = 0$$

de acuerdo con [2.1.]

En definitiva hemos demostrado que:

$$\langle X,JA\rangle = 0 \qquad \forall\ X \in T(\overline{M})$$

lo que quiere decir que:

$$JA \in [T(\overline{M})]^{\perp}$$

y por lo tanto queda demostrado el teorema.

COROLARIO 1

JX es tangente o normal a $\overline{M}$ segun lo sea X.

COROLARIO 2

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de M. Si $X \in T(M)$ se verifica:

$$tgJX = J\,tgX$$

$$NorJX = J\,NorX$$

DEMOSTRACION:

Recordemos que un campo $X \in T(M)$ se descompone de manera única en la forma $X = X_1 + X_2$,$X_1 \in T(\overline{M})$,$X_2 \in [T(\overline{M})]^{\perp}$ y que por definicion es $X_1 = tgX$, $X_2 = NorX$. Por lo tanto se tiene para X y JX:

$$X = tgX + NorX$$

$$JX = tgJX + NorJX$$

Pero de la primera igualdad resulta:

$$JX = J\,tgX + J\,NorX$$

Por el corolario 1 anterior se tiene:

$$J\,tgX \in T(\overline{M}) \qquad J\,NorX \in [T(\overline{M})]^{\perp}$$

y como la descomposición de JX en un campo tangente y otro normal deciamos que es única se concluye:

$$J\,tgX = tgJX \qquad J\,NorX = NorJX$$

Puesto que tenemos en M una métrica Riemanniana queda asociada con ella una conexión afín Δ .

En lo que sigue vamos a suponer que la métrica y la variedad son tales que se verifica la siguiente condición Kaehleriana:

$$\Delta_X JY = J\,\Delta_X Y \qquad [2.2.]$$

para cualesquiera campos $X,Y \in T(M)$.Si $\overline{M}$ es una subvariedad de M usaremos,como en el primer capitulo,la notación $\overline{\Delta}$ para designar la conexión afín inducida en $\overline{M}$ por $<\ ,\ >$.

La condición [2.2.] anterior implica el siguiente teorema:

TEOREMA 2.7.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de la $J(4,2)$-variedad M.Si X,Y son dos campos tangentes a $\overline{M}$ se verifica:

1) $\overline{\Delta}_X JY = J\,\overline{\Delta}_X Y$

2) $V(X,JY) = JV(X,Y)$

DEMOSTRACION:

Recordemos que si $X,Y \in T(\overline{M})$ se tiene:

$$\overline{\Delta}_X Y = \mathrm{tg}\Delta_X Y$$

$$V(X,Y) = \mathrm{Nor}\Delta_X Y$$

y por lo tanto:

$$\Delta_X Y = \overline{\Delta}_X Y + V(X,Y) \qquad \forall\ X,Y \in T(\overline{M}) \qquad [2.3]$$

Como,al ser $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja,$JY \in T(\overline{M})$ resulta:

$$\Delta_X JY = \overline{\Delta}_X JY + V(X,JY)$$

Ahora bien, apliquemos J a los dos miembros de la ecuación [2.3] y tenemos:

$$J\ \Delta_X Y = J\ \overline{\Delta}_X Y + J\ V(X,Y)$$

de donde, teniendo en cuenta la igualdad [2.2] :

$$\Delta_X JY = J\ \overline{\Delta}_X Y + J\ V(X,Y) = \overline{\Delta}_X JY + V(X,JY)$$

Pero, por la definición 2.3. y el teorema 2.6.:

$$\overline{\Delta}_X Y \in T(\overline{M}) \rightarrow J\ \overline{\Delta}_X Y \in T(\overline{M})$$

$$V(X,Y) \in [T(\overline{M})]^{\perp} \rightarrow J\ V(X,Y) \in [T(\overline{M})]^{\perp}$$

y como, además, la descomposición de $\Delta_X JY$ en un campo tangente y otro normal a $\overline{M}$ es única se concluye que:

$$\overline{\Delta}_X JY = J\ \overline{\Delta}_X Y$$

$$V(X,JY) = J\ V(X,Y)$$

Como corolario de este teorema sigue inmediatamente este otro:

TEOREMA 2.8.

Si $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja de M y la conexión afín de M cumple:

$$\Delta_X JY = J\ \Delta_X Y \qquad \forall\ X,Y \in T(M)$$

entonces $\overline{M}$ es una variedad Kaehleriana respecto de la métrica inducida sobre ella.

DEMOSTRACION:

Ya vimos anteriormente que J induce sobre $\overline{M}$ una estructura casi-compleja, además en virtud de que estamos considerando sobre M una métrica adaptada y de que, por la definición 2.3., $T(\overline{M}) \subseteq P$, resulta que la métrica inducida es casi hermítica respecto de J. $\overline{M}$ es, finalmente, una variedad Kaehleriana porque su conexión afín cumple 1) del teorema 2.7.

TEOREMA 2.9.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de la $J(\phi,2)$-variedad M. Si suponemos que $\{X_1,\ldots,X_k\}$ es una base de $T(\overline{M})$, ortonormal respecto de $<\ ,\ >$, entonces $\{JX_1,\ldots,JX_k\}$ es asimismo una base ortonormal de $T(\overline{M})$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que se tiene:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i JX_i = 0 \qquad \text{con algún } \lambda_i \neq 0$$

entonces aplicando J:

$$J \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i JX_i = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i J^2X_i = -\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i X_i = J(0) = 0$$

ya que $J^2X_i = -X_i$ puesto que $X_i \in T(\overline{M}) \subset P$.

Pero la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i X_i = 0$$

es imposible puesto que uno de los λ_i no es nulo y $\{X_1,\ldots,X_k\}$ es una base de $T(\overline{M})$. En consecuencia los $JX_1,\ldots,JX_k$ son k campos independientes de $T(\overline{M})$ y por lo tanto constituyen una base de $T(\overline{M})$. Como además:

$$X_i \in T(\overline{M}) \subseteq P$$

se tiene:

$$<JX_i,JX_j> \;=\; <X_i,X_j> \;=\; \partial_{ij} \qquad i,j=1,\ldots,k$$

puesto que $\{X_1,\ldots,X_k\}$ era una base ortonormal. La igualdad anterior completa la demostración.

TEOREMA 2.10.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de la J(4,2)-variedad M. Se verifica que:

1) $<A,Y> = <JA,JY>$

2) $<J^2A,Y> = -<A,Y>$

cualesquiera que sean $Y \in T(\overline{M})$, $A \in [T(M)]^{\perp}$.

DEMOSTRACION:

Si descomponemos A en la forma:

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 \in P \qquad A_2 \in Q$$

entonces se tiene:

$$<A,Y> = <A_1+A_2,Y> = <A_1,Y> + <A_2,Y> = <A_1,Y>$$

puesto que:

$$<A_2,Y> = 0$$

por ser $A_2 \in Q$, $Y \in T(\overline{M}) \subseteq P$.

DE otra parte:

$$\langle JA, JY\rangle = \langle JA_1 + JA_2, Y\rangle = \langle JA_1, JY\rangle + \langle JA_2, JY\rangle = \langle JA_1, JY\rangle$$

ya que $\langle JA_2, JY\rangle = o$ puesto que:

$$A_2 \in Q \rightarrow JA_2 \in Q$$

$$Y \in P \rightarrow JY \in P$$

Además como $A_1, Y \in P$ se cumple:

$$\langle A_1, Y\rangle = \langle JA_1, JY\rangle$$

y en consecuencia:

$$\langle A, Y\rangle = \langle A_1, Y\rangle = \langle JA_1, JY\rangle = \langle JA, JY\rangle$$

con lo que queda demostrado el apartado 1).Para probar el apartado 2) observese que:

$$\langle J^2A, Y\rangle = \langle J^2A_1, Y\rangle + \langle J^2A_2, Y\rangle = -\langle A_1, Y\rangle$$

ya que:

$$A_1 \in P \rightarrow J^2A_1 = -A_1$$

$$A_2 \in Q \rightarrow J^2A_2 = 0$$

tenemos entonces:

$$\langle J^2A, Y\rangle = -\langle A_1, Y\rangle = -\langle A, Y\rangle$$

($\langle A_1, Y\rangle = \langle A, Y\rangle$ según vimos al demostrar el apartado 1))

COROLARIO

Si $A \in T(M)$ e $Y \in T(\overline{M})$ se verifica:

$\langle A, JY\rangle = -\langle JA, Y\rangle$.

DEMOSTRACION:

Utilizando consecutivamente los apartados 1) y 2) del teo ma anterior se tiene:

$$\langle JA,Y\rangle = \langle J^2A,JY\rangle = -\langle A,JY\rangle$$

teniendo siempre en cuenta que $Y \in T(\overline{M}) \rightarrow JY \in T(\overline{M})$.

Vamos a continuación a demostrar el caracter minimal de las subvariedades casi-complejas de las $J(4,2)$-variedades cuya conexión afín cumple la condición [2.2].

TEOREMA 2.11.

Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada < , > tal que la conexión afín inducida verifica la condición Kaehleriana [2.2]. Se verifica que toda subvariedad casi compleja $\overline{M}$ de M es minimal.

DEMOSTRACION:

Vamos a considerar que $X,Y \in T(\overline{M})$ son dos campos cuales quiera tangentes a $\overline{M}$ y que $A \in [T(\overline{M})]^{\perp}$ es un campo normal a $\overline{M}$, asimismo arbitrario.

La condición [2.2] implica que:

$$\Delta_A JX - J\,\Delta_A X = 0$$

Del hecho de ser Δ la conexión Riemanniana se tiene que:

$$\Delta_A JX = \Delta_{JX}A + [A,JX]$$

$$\Delta_A X = \Delta_X A + [A,X] \rightarrow J\Delta_A X = J\Delta_X A + J\,[A,X]$$

y por lo tanto:

$$\Delta_{JX}A + [A,JX] - J\Delta_X A - J\,[A,X] = 0$$

de donde descomponiendo $\Delta_{JX}A$ y $\Delta_X A$ en sus componentes normal y tangencial y teniendo en cuenta el corolario 2 del teorema 2.6. resulta:

$$\mathrm{tg}\Delta_{JX}A + \mathrm{Nor}\Delta_{JX}A + [A,JX] - \mathrm{tg}\,J\Delta_X A - \mathrm{Nor}\,J\Delta_X A -$$
$$- J\,[A,X] = \mathrm{tg}\Delta_{JX}A + \mathrm{Nor}\Delta_{JX}A + [A,JX] - J\,\mathrm{tg}\Delta_X A -$$
$$- \mathrm{Nor}\,J\Delta_X A - J\,[A,X] = 0.$$

Recordemos que por definición:

$$\mathrm{tg}\Delta_{JX}A = L_A JX \qquad \mathrm{tg}\Delta_X A = L_A X$$

lo que sustituido en la igualdad anterior da:

$$L_A JX + \mathrm{Nor}\Delta_{JX}A + [A,JX] - J\,L_A X - \mathrm{Nor}\,J\Delta_X A - J[A,X] = 0$$

$$\rightarrow \quad \langle L_A JX + \mathrm{Nor}\Delta_{JX}A + [A,JX] - J\,L_A X - \mathrm{Nor}\,J\Delta_X A -$$
$$- J\,[A,X]\,,\,Y\rangle = 0$$

Como Y es,por hipótesis,un campo tangente a $\overline{M}$ y $\mathrm{Nor}\Delta_{JX}A$, $\mathrm{Nor}\,J\Delta_X A$ son normales a $\overline{M}$ se tiene:

$$\langle \mathrm{Nor}\Delta_{JX}A\,,\,Y\rangle = \langle \mathrm{Nor}\,J\Delta_X A\,,\,Y\rangle = 0$$

y teniendo en cuenta esto resulta,en definitiva,que:

$$\langle L_A JX,Y\rangle + \langle [A,JX],Y\rangle - \langle JL_A X,Y\rangle - \langle J[A,X],Y\rangle = 0 \quad [2.4]$$

De acuerdo con el teorema 2.7. y puesto que, por hipótesis $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja se tiene:

$$V(X,JY) = J\,V(X,Y)$$

Como V es además un tensor simétrico se tiene igualmente:

$$V(JX,Y) = V(Y,JX) = J\,V(Y,X) = J\,V(X,Y)$$

y por esto:

$$V(JX,Y) - V(X,JY) = 0$$

lo cual implica que:

$$\langle A,V(JX,Y)\rangle - \langle A,V(X,JY)\rangle = 0$$

Por el teorema 1.9. tenemos:

$$\langle A,V(JX,Y)\rangle = -\langle L_A JX,Y\rangle$$

$$-\langle A,V(X,JY)\rangle = \langle L_A X,JY\rangle$$

Recordemos que, por definición L_A es un endomorfismo de $T(\overline{M})$ y por lo tanto $L_A X$ es tangente a $\overline{M}$ lo mismo que JY ya que $X,Y \in T(\overline{M})$. Entonces, por el teorema 2.5. se deduce que:

$$\langle L_A X,JY\rangle = -\langle JL_A X,Y\rangle$$

lo que implica que:

$$-\langle L_A JX,Y\rangle - \langle JL_A X,Y\rangle = 0$$

y por lo tanto:

$$\langle L_A JX,Y\rangle = -\langle JL_A X,Y\rangle$$

Sustituyamos esta última igualdad en [2.4] y tenemos:

$$\langle L_A JX,Y\rangle + \langle [A,JX],Y\rangle + \langle L_A JX,Y\rangle - \langle J[A,X],Y\rangle = 0$$

de donde:

$$2 \langle L_A JX, Y\rangle = \langle J[A,X], Y\rangle - \langle [A,JX], Y\rangle \qquad [2.5]$$

Por las hipotesis de que partiamos esta igualdad es cierta para cualquier pareja de campos $X,Y \in T(\overline{M})$ tangemtes a $\overline{M}$.En particular si consideramos separadamente las parejas

$$X, JY \in T(\overline{M})$$
$$JX, Y \in T(\overline{M})$$

resultan de [2.5] las dos igualdades siguientes:

$$2 \langle L_A JX, JY\rangle = \langle J[A,X], JY\rangle - \langle [A,JX], JY\rangle \qquad [2.6]$$

$$2 \langle L_A J^2X, Y\rangle = \langle J[A,JX], Y\rangle - \langle [A,J^2X], Y\rangle \qquad [2.7]$$

Si se tiene en cuenta que:

$$L_A JX, Y \in T(\overline{M}) \subseteq P$$

y que po lo tanto:

$$\langle L_A JX, JY\rangle = -\langle JL_A JX, Y\rangle$$

la igualdad [2.6] se puede escribir:

$$-2\langle JL_A JX, Y\rangle = \langle J[A,X], JY\rangle - \langle [A,JX], JY\rangle \qquad [2.8]$$

En cuanto a la igualdad [2.7] puede tambien escribirse de otra manera.En efecto por ser X un campo de P se tiene:

$$J^2X = -X$$

Por el apartado 1) del teorema 2.10 :

$$\langle [A,X], Y\rangle = \langle J[A,X], JY\rangle$$

y por el corolario de este mismo teorema:

$$\langle J[A,JX], Y\rangle = -\langle [A,JX], JY\rangle$$

Estas tres últimas igualdades llevadas a la [2.7] dan:

$$-2\ \langle L_A X,Y\rangle = -\langle [A,JX],JY\rangle + \langle J[A,X],JY\rangle \qquad [2.9]$$

Observese ahora que los segundos miembros de las ecuaciones [2.8] y [2.9] coinciden, por lo tanto podemos igualar asimismo los primeros miembros de dichas ecuaciones y resulta:

$$-2\ \langle JL_A JX,Y\rangle = -2\ \langle L_A X,Y\rangle \quad \rightarrow$$

$$\langle JL_A JX,Y\rangle = \langle L_A X,Y\rangle \qquad \forall\ X,Y \in T(\overline{M}) \qquad [2.10]$$

Para finalizar el teorema tomemos una base $\{X_1,\ldots,X_k\}$ de $T(\overline{M})$ ortonormal respecto de la métrica dada. De acuerdo con lo expuesto en el capitulo primero se tiene entonces:

$$H(A) = trL_A = \sum_{i=1}^{i=k} \langle L_A X_i, X_i\rangle$$

Pero según la ecuación [2.10] :

$$\langle L_A X_i, X_i\rangle = \langle JL_A JX_i, X_i\rangle = -\langle L_A JX_i, JX_i\rangle$$

y en consecuencia:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{i=k} \langle L_A JX_i, JX_i\rangle \qquad [2.11]$$

$\{X_1,\ldots,X_k\}$ es una base ortonormal de $T(\overline{M})$, ello implica, por el teorema 2.9 que $\{JX_1,\ldots,JX_k\}$ es tambien una base ortonormal de $T(\overline{M})$ y por lo tanto:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=k} \langle L_A JX_i, JX_i\rangle$$

de aquí y de [2.11] se deduce:

$$H(A) = -H(A) \quad \rightarrow \quad H(A) = o$$

Como esto es cierto para cualquier campo A normal a $\overline{M}$ resulta que:

$$H = 0$$

y por tanto $\overline{M}$ es una subvariedad minimal y el teorema queda totalmente demostrado.

Supongamos que en el teorema anterior J sea de rango máximo, es decir:

$$\text{rango } J = n$$

entonces, según dijimos en el corolario del teorema 2.2 se verifica que M es una variedad casi-compleja, en la que se verifica además que:

$$T(M) = P$$

En este caso particular para que una subvariedad $\overline{M}$ de M sea casi-compleja es suficiente con que:

$$JX \in T(\overline{M}) \qquad \forall\, X \in T(\overline{M})$$

puesto que la condición:

$$T(\overline{M}) \subseteq P$$

se verifica de manera obvia. M es, en estas condiciones, una variedad Kaehleriana ya que por tratarse de una métrica adaptada:

$$\langle X,Y\rangle = \langle JX,JY\rangle \qquad \forall\, X,Y \in P \leftrightarrow (\forall\, X,Y \in T(M))$$

Con estas consideraciones se deduce que cuando J es de rango máximo el teorema anterior se transforma en el siguiente corolario:

COROLARIO

Si M es una variedad Kaehleriana toda subvariedad $\overline{M}$ de M que cumpla:

$$JX \in T(\overline{M}) \qquad \forall X \in T(\overline{M})$$

es minimal.

Corolario que es una propiedad muy conocida de las variedades Kaehlerianas.

EXISTENCIA.-

Vamos a ocuparnos de demostrar que de hecho en toda J(4,2)-variedad M con una métrica adaptada que cumpla la condición [2.2] pueden encontrarse subvariedades minimales.

TEOREMA 2.12.

En toda J(4,2)-variedad M que cumple la condición [2.2] la distribución P es involutiva.

DEMOSTRACION:

En efecto sean X,Y dos campos que pertenezcan a P, entonces por la definición de P se tiene:

$$J^2X = -X \qquad J^2Y = -Y$$

Hemos de demostrar que el corchete $[X,Y]$ pertenece a P. Ello es fácil pues por tratarse Δ de la conexión Riemanniana:

$$[X,Y] = \Delta_X Y - \Delta_Y X$$

Por lo tanto y utilizando la condición [2.2] :

$$J^2[X,Y] = J^2\Delta_X Y - J^2\Delta_Y X = \Delta_X J^2 Y - \Delta_Y J^2 X =$$

$$= -\Delta_X Y + \Delta_Y X = -[X,Y]$$

en definitiva que:

$$J^2[X,Y] = -[X,Y]$$

lo que implica que:

$$[X,Y] \in P$$

y por lo tanto P es involutiva.

TEOREMA 2.13.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad integral de la distribución involuitva P. Se verifica que $\overline{M}$ es subvariedad casi-compleja de M y por lo tanto minimal.

DEMOSTRACION:

En efecto si $\overline{M}$ es una subvariedad integral de la distribución P se verifica en todo punto $z \in \overline{M}$:

$$\overline{M}_z = P_z$$

($\overline{M}_z$ designa el espacio tangente a $\overline{M}$ en z). De aqui se deduce:

a) $X \in \overline{M}_z \rightarrow X \in P_z \rightarrow J_z X \in P_z$ (De acuerdo con la consecuencia 2 del teorema 2.1) $\rightarrow J_z X \in \overline{M}_z$.

b)

b) Obviamente $\overline{M}_z \in P_z$
Como esto es cierto para cada $z \in \overline{M}$ queda probado que $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja y por lo tanto minimal.

Vamos a completar el teorema anterior demostrando que asimismo Q es una distribución involutiva cuyas subvariedades integrales son minimales.No se trata,desde luego,de aplicar el teorema 2.11. ya que en este caso una tal subvariedad no es casi-compleja.El método de demostración es por eso diferente,sin embargo incluimos aquí este resultado por su paralelismo con el teorema 2.13 al que sirve de complemento.

TEOREMA 2.14.
Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada que cumple la condición [2.2] *.Se verifica que la distribución Q es involutiva.*

DEMOSTRACION:

Sean $X,Y \in Q$.Se tiene:

$$J^2X = J^2Y = 0$$

Aplicando la condición [2.2] se deduce:

$$J^2[X,Y] = J^2(\Delta_X Y - \Delta_Y X) = \Delta_X J^2Y - \Delta_Y J^2X = 0$$

de modo que $J^2[X,Y] = 0$ y en consecuencia:

$$[X,Y] \in Q \qquad \forall\, X,Y \in Q$$

lo que demuestra que Q es involutiva.

TEOREMA 2.15.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad integral de Q. Se verifica que $\overline{M}$ es minimal.

DEMOSTRACION:

Sea A un campo normal a $\overline{M}$. Entonces:

$$\langle X,A\rangle = 0 \qquad \forall\, X \in T(\overline{M})$$

Descompongamos A en la suma:

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 \in P\ ,\ A_2 \in Q \quad \rightarrow$$

$$\langle X,A_1\rangle + \langle X,A_2\rangle = 0$$

Ahora bien como, por hipotesis, $\overline{M}$ es una subvariedad integral de Q resulta que en cada punto $z \in \overline{M}$ se verifica $\overline{M}_z = Q_z$. Esto y el hecho de que $A_1 \in P$ implica, por ser P y Q mutuamente ortogonales:

$$\langle X,A_1\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \langle X,A_2\rangle = 0$$

Como esto es cierto para cada $X \in T(\overline{M})$ resulta:

$$A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A \in P \quad \rightarrow \quad J^2A = -A$$

Teniendo en cuenta, entonces la condición [2.2] se deduce:

$$J^2(\Delta_X A) = \Delta_X J^2 A = \Delta_X(-A) = -\,\Delta_X A$$

esto quiere decir que:

$$\Delta_X A \in P$$

$\Delta_X A$ es, por ello, normal a $\overline{M}$, es decir:

$$tg\ _XA = 0$$

$$L_AX = 0 \qquad \forall X \in T(\overline{M}) \rightarrow$$

$$L_A = 0 \quad \Rightarrow trL_A = 0 \rightarrow H(A) = 0 \rightarrow H = 0$$

lo que significa que $\overline{M}$ es subvariedad minimal,tal como queriamos demostrar.

La condición Kaehleriana:

$$\Delta_X JY = J\ \Delta_X Y$$

puede ser sustituida por otras condiciones más débiles.De algunas de estas vamos a ocuparnos en lo que sigue.Las agrupamos bajo el nombre común de condiciones pseudo-Kaehlerianas.

2.2.-CONDICIONES PSEUDO-KAEHLERIANAS.

A) CONDICION PARAKAEHLERIANA.

DEFINICION 2.4.

Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada < , > .Decimos que M cumple la condición parakaehleriana respecto de < , > si se verifica:

[2.12] $$J\ \Delta_X Y - \Delta_X JY - J\ \Delta_Y X + \Delta_Y JX = 0 \quad \forall X,Y \in T(M)$$

TEOREMA 2.16.

Toda subvariedad casi-compleja $\overline{M}$ de una $J(4,2)$-variedad M que cumple la condición [2.12] es minimal.

DEMOSTRACION:

Sean $X,Y \in T(\overline{M})$ dos campos tangentes a $\overline{M}$ y $A \in [T(\overline{M})]^{\perp}$ un campo normal a $\overline{M}$. Vamos a demostrar primeramente que cualesquiera que sean X,Y,A se verifica la igualdad:

$$\langle L_A X,Y\rangle = \langle L_{JA}X,JY\rangle - \langle L_{JA}JX,Y\rangle - \langle L_A JX,JY\rangle$$

Escribamos la condición [2.12] para los campos $X,A \in T(\overline{M})$ y se tiene:

$$J\,\Delta_X A - \Delta_X JA + \Delta_A JX - J\,\Delta_A X = 0$$

En esta igualdad pueden sustituirse $\Delta_A JX$ y $\Delta_A X$ respectivamente por $\Delta_{JX}A+[A,JX]$ y $\Delta_X A+[A,X]$ ya que Δ es una conexión Riemanniana. Entonces queda:

$$J\,\Delta_X A - \Delta_X JA + \Delta_{JX}A + [A,JX] - J\Delta_X A - J[A,X] = 0 \quad \rightarrow$$

$$- \Delta_X JA + \Delta_{JX}A + [A,JX] - J[A,X] = 0 \quad \rightarrow$$

$$\langle - \Delta_X JA + \Delta_{JX}A + [A,JX] - J[A,X],Y\rangle = 0 \quad \rightarrow$$

$$\langle - \Delta_X JA + \Delta_{JX}A,Y\rangle = \langle J[A,X],Y\rangle - \langle [A,JX],Y\rangle$$

Como hicimos en el teorema 2.11. descomponemos $\Delta_X JA$, $\Delta_{JX}A$ en sus componentes normal y tangente a $\overline{M}$, con esto y teniendo en cuenta que $\langle Nor\Delta_X JA,Y\rangle = \langle Nor\Delta_{JX}A,Y\rangle = 0$ porque

Y es tangente a $\overline{M}$ y que,por definición:$tg\Delta_X JA = L_{JA}X$, $tg\Delta_{JX}A = L_A JX$ la última igualdad queda así:

$$<-L_{JA}X + L_A JX,Y> = <J[A,X],Y> -<[A,JX],Y> \qquad [2.13]$$

La igualdad [2.13] es cierta para cualesquiera $X,Y \in T(\overline{M})$ escribamosla entonces sucesivamente para las parejas $JX,Y \in T(\overline{M})$ y $X,JY \in T(\overline{M})$.Se obtiene:

$$<-L_{JA}JX + L_A J^2X,Y> = <J[A,JX],Y> - <[A,J^2X],Y> \qquad [2.14]$$

$$<-L_{JA}X + L_A JX,JY> = <J[A,X],JY> - <[A,JX],JY> \qquad [2.15]$$

Ahora bien [2.14] se escribe de la siguiente manera,si se sustituye J^2X por $-X$ (ya que $X \in P$):

$$<-L_{JA}JX + L_A X,Y> = <J[A,JX],Y> +<[A,X],Y> \qquad [2.16]$$

De otra parte se tiene,en virtud del teorema 2.10 :

$$<-L_{JA}X,JY> = <JL_{JA}X,Y>$$

$$<J[A,X],JY> =<[A,X],Y>$$

$$<[A,JX],JY> = - <J[A,JX],Y>$$

lo que sustituido en [2.15] da:

$$<JL_{JA}X,Y> + <L_A JX,JY> = <[A,X],Y> + <J[A,JX],Y> \qquad [2.17]$$

Comparando los segundos miembros de [2.16] y [2.17]resulta que:

$$<JL_{JA}X,Y> + <L_A JX,JY> =-<L_{JA}JX + L_A X,Y>$$

$$H(A) = 0 \qquad H = 0$$

y por lo tanto $\overline{M}$ es subvariedad minimal.

EXISTENCIA

TEOREMA 2.17.

Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada < , > que cumple la condición para kachleriana [2.12]. La condición necesaria y suficiente para que la distribución P sea involutiva es que se verifique:

[2.19] $$\Delta_X Y + J\Delta_X JY - J\Delta_Y JX - \Delta_Y X = 0$$

para cualesquiera $X, Y \in P$.

DEMOSTRACION:

Sean X,Y dos campos que pertenezcan a la distribución P. Esto significa que $J^2X = -X, J^2Y = -Y$. Hemos de probar que $[X,Y]$ pertenece a P, es decir $J^2[X,Y] = -[X,Y]$ si, y solo si, se cumple la condición [2.19]. En efecto, en virtud de ser Δ una conexión Riemanniana la condición :

$$J^2[X,Y] = -[X,Y]$$

es equivalente a:

$$J^2(\Delta_X Y - \Delta_Y X) = \Delta_Y X - \Delta_X Y \qquad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \qquad J(J\Delta_X Y - J\Delta_Y X) = \Delta_Y X - \Delta_X Y$$

Pero, por la condición [2.12]:

$$J\Delta_X Y - J\Delta_Y X = \Delta_X JY - \Delta_Y JX$$

Por lo tanto la condición de que P sea involutiva es equivalente a que:

$$J\Delta_X JY - J\Delta_Y JX = \Delta_Y X - \Delta_X Y$$

es decir a que:

$$J\Delta_X JY - J\Delta_Y JX + \Delta_X Y - \Delta_Y X = 0$$

lo que demuestra el teorema.

TEOREMA 2.18.

En las condiciones del teorema 2.17. cualquier subvariedad integral $\overline{M}$ de la distribución involutiva P es minimal.

DEMOSTRACION:

Exactamente como la del teorema 2.13.

B) CONDICION NEARLY-KAEHLERIANA.

DEFINICION 2.5.

Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada < , > .Diremos que M cumple la condición nearly-Kaehleriana respecto de < , > si se verifica:

[2.20] $$\Delta_X JY - J\,\Delta_X Y + \Delta_Y JX - J\,\Delta_Y X = 0 \quad \forall\, X,Y \in T(M)$$

Recordemos que una variedad casi-compleja, casi hermitica respecto de una métrica < , > cuya conexión afín cumple la condición [2.20] recibe el nombre de variedad nearly-kaehleriana. Se verifica el siguiente teorema:

TEOREMA 2.19.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de una $J(4,2)$-variedad M que cumple la condición [2.20]. Se verifica que $\overline{M}$ es una variedad nearly-kaehleriana.

DEMOSTRACION:

Que $\overline{M}$ es una variedad casi-compleja y casi-hermitica respecto de la métrica inducida sobre ella lo hemos visto con anterioridad. Se trata únicamente de probar que, siendo Δ la conexión afín inducida sobre $\overline{M}$, se verifica:

$$\overline{\Delta}_X JY - J\,\overline{\Delta}_X Y + \overline{\Delta}_Y JX - J\,\overline{\Delta}_Y X = 0 \qquad \forall\ X,Y \in T(\overline{M})$$

Recordemos la ecuación de Gauss de $\overline{M}$:

$$\Delta_X Y = \overline{\Delta}_X Y + V(X,Y) \qquad \forall\ X,Y \in T(\overline{M})$$

De ella se deduce que:

$$J\Delta_X Y = J\,\overline{\Delta}_X Y + JV(X,Y)$$

$$\Delta_X JY = \overline{\Delta}_X JY + V(X,JY)$$

$$\Delta_Y JX = \overline{\Delta}_Y JX + V(Y,JX)$$

$$\Delta_Y X = \overline{\Delta}_Y X + V(Y,X) \quad \rightarrow \quad J\Delta_Y X = J\overline{\Delta}_Y X + J\, V(Y,X)$$

De aquí resulta por la condición [2.20]:

$$0 = \Delta_X JY - J\Delta_X Y + \Delta_Y JX - J\Delta_Y X = \overline{\Delta}_X JY - J\overline{\Delta}_X Y + \overline{\Delta}_Y JX - J\overline{\Delta}_Y X$$

$$+ V(X,JY) - JV(X,Y) + V(Y,JX) - JV(Y,X)$$

En la ecuación anterior tenemos un campo igualado a cero, en consecuencia deben anularse indistitamente sus compo - nentes normal y tangente a $\overline{M}$. En particular la componente tangente vale:

$$\overline{\Delta}_X JY - J\,\overline{\Delta}_X Y + \overline{\Delta}_Y JX - J\,\overline{\Delta}_Y X$$

ya que :

$$\overline{\Delta}_X JY - J\,\overline{\Delta}_X Y + \overline{\Delta}_Y JX - J\,\overline{\Delta}_Y X \in T(\overline{M})$$

$$V(X,JY)-JV(X,Y)+V(Y,JX)-JV(Y,X) \in [T(\overline{M})]^{\perp}$$

en virtud de la definición 2.3 y del teorema 2.6.La compo nente tangente igualada a cero concluye la demostración.

TEOREMA 2.20.

Toda subvariedad casi-compleja $\overline{M}$ de una $J(4,2)$-variedad M que cumpla la condición nearly-kaehleriana [2.20] es minimal.

DEMOSTRACION:

Probaremos que en este caso se cumple tambien la igualdad

$$<L_AX,Y> = <L_{JA}X,JY> - <L_{JA}JX,Y> - <L_AJX,JY> \qquad [2.18]$$

para cualesquiera campos X,Y tangentes a $\overline{M}$ y A normal a $\overline{M}$.Basta escribir para ello,la condición nearly-kaehleriana para los campos X,A ε T(M).Se tiene:

$$\Delta_X JA - J\Delta_X A + \Delta_A JX - J\Delta_A X = 0$$

Utilizando,entonces,el mismo razonamiento que en el teorema 2.16 se obtiene de la igualdad anterior esta otra:

$$<L_{JA}X-2JL_AX+L_AJX,Y> = <J[A,X],Y> -<[A,JX],Y> \qquad [2.21]$$

Como la igualdad [2.21] es cierta,como decimos,para cualesquiera X,Y ε T($\overline{M}$) podemos aplicarla sucesivamente a las parejas de campos X,JY ε T($\overline{M}$) y JX,Y ε T($\overline{M}$) resultando las dos igualdades siguientes:

$$<L_{JA}JX-2JL_AJX+L_AJ^2X,Y> = <J[A,JX],Y> - <[A,J^2X],Y> \qquad [2.22]$$

$$<L_{JA}X-2JL_AX+L_AJX,JY> = <J[A,X],JY> - <[A,JX],JY> \qquad [2.23]$$

Si en [2.22] y [2.23] hacemos modificaciones semejantes a las hechas en [2.14] y [2.15] resulta:

$$<L_{JA}JX-2JL_AJX-L_AX,Y> = <J[A,JX],Y> + <[A,X],Y> \qquad [2.24]$$

$$<L_{JA}X-2JL_AX+L_AJX,JY> = <[A,X],Y> + <J[A,JX],Y> \qquad [2.25]$$

Observemos que los segundos miembros de [2.24] y [2.25] coinciden.Por lo tanto podemos igualar asimismo los prime ros miembros y se tiene:

$$<L_{JA}JX-2JL_AJX-L_AX,Y> = <L_{JA}X-2JL_AX+L_AJX,JY> \qquad [2.26]$$

De [2.26] se obtiene ya inmediatamente [2.18] sin más que aplicar convenientemente el teorema 2.10(y su corolario). Una vez demostrada la igualdad [2.18] se continua la demostración de este teorema como la del 2.16.

C) CONDICION QUASI-KAEHLERIANA.

DEFINICION 2.6.

Sea M una J(4,2)-variedad. Diremos que M cumple la condición quasi-kaehleriana respecto de una métrica adaptada en M si:

[2.27] $$\Delta_X JY - J\Delta_X Y + \Delta_{JX} J^2 Y - J\Delta_{JX} JY = 0 \quad ; \quad \forall\, X,Y \in T(M)$$

En el caso particular de que M fuese una variedad casi-compleja recibiría el nombre de variedad quasi-kaehleriana.

TEOREMA 2.21.

Si $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja de una J(4,2)-variedad M que cumple la condición [2.27] entonces $\overline{M}$ es una variedad quasi-kaehleriana.

DEMOSTRACION:

Totalmente analoga a la del teorema 2.19.

TEOREMA 2.22.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad casi-compleja de una J(4,2)-variedad M que cumple la condición quasi-kaehleriana [2.27]. Se verifica que $\overline{M}$ es subvariedad minimal.

DEMOSTRACION:

De acuerdo con la condición [2.27] si X,Y son dos campos tangentes a $\overline{M}$ se cumple:

$$\Delta_X JY - J\Delta_X Y + \Delta_{JX} J^2 Y - J\Delta_{JX} JY = 0 \qquad [2.28]$$

Ahora bien si $X \in T(\overline{M})$ se deduce de la definición 2.3 que JX pertenece asimismo a $T(\overline{M})$. Podemos, por tanto, reemplazar en [2.28] Y por JX y resulta:

$$\Delta_X J^2 X - J\Delta_X JX + \Delta_{JX} J^3 X - J\Delta_{JX} J^2 X = 0$$

Pero, puesto que $\overline{M}$ es una subvariedad casi-compleja, se cumple que $T(\overline{M}) \subseteq P$, de donde $X \in P$, es decir que:

$$J^2 X = -X$$

Con esto la última igualdad queda:

$$-\Delta_X X - J\Delta_X JX - \Delta_{JX} JX + J\Delta_{JX} X = 0 \qquad [2.29]$$

Descompogamos $\Delta_X X, \Delta_X JX, \Delta_{JX} X$ y $\Delta_{JX} JX$ en sus componentes nor mal y tangente a $\overline{M}$.De acuerdo con la ecuación de Gauss se tiene entonces:

$$\Delta_X X = \overline{\Delta}_X X + V(X,X)$$

$$\Delta_X JX = \overline{\Delta}_X JX + V(X,JX)$$

$$\Delta_{JX} X = \overline{\Delta}_{JX} X + V(JX,X)$$

$$\Delta_{JX} JX = \overline{\Delta}_{JX} JX + V(JX,JX)$$

Sustituyendo estas igualdades en [2.29] se tiene:

$$- \overline{\Delta}_X X - J\, \overline{\Delta}_X JX - \overline{\Delta}_{JX} JX + J\, \overline{\Delta}_{JX} X -$$

$$- V(X,X) - J\, V(X,JX) - V(JX,JX) + J\, V(JX,X) = 0$$

En esta ecuación tenemos un campo igualado a cero,como consecuencia de ello ha de ser nula su componente normal es decir que:

$$-V(X,X) - J\, V(X,JX) - V(JX,JX) + J\, V(JX,X) = 0 \qquad [2.30]$$

de [2.30],teniendo en cuenta que $V(X,JX) = V(JX,X)$,ya que V es un tensor simétrico,se deduce:

$$V(JX,JX) = - V(X,X) \qquad [2.31]$$

Sea ahora $\{X_1,\ldots,X_k\}$ una base de $T(\overline{M})$ ortonormal respecto de < , > .En virtud de la nota que sigue a la definición 1.8 resulta que si A es cualquier campo normal a $\overline{\overline{M}}$ se verifica:

$$H(A) = - \sum_{i=1}^{i=k} \langle A, V(X_i,X_i)\rangle$$

de donde por [2.30] :

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=k} \langle A, V(JX_i, JX_i) \rangle$$

pero como según el teorema 2.9 $\{JX_1, \ldots, JX_k\}$ es tambien una base ortonormal de $T(\overline{M})$ resulta que por otra parte ha de ser:

$$H(A) = - \sum_{i=1}^{i=k} \langle A, V(JX_i, JX_i) \rangle$$

por lo que:

$$H(A) = -H(A) \rightarrow H(A) = 0 \rightarrow H = 0$$

En consecuencia queda demostrado que $\overline{M}$ es subvariedad minimal.

3.-J(3,1) y J(4,2) SUBVARIEDADES.

3.1.-J(3,1)-SUBVARIEDADES.

DEFINICION 2.6.

Una estructura J(3,1) en una variedad diferenciable N consiste en un tensor J no-nulo del tipo (1,1), clase C^∞, rango constante y tal que:

$$J^3 + J = 0$$

TEOREMA 2.23.

Sea M una J(4,2)-variedad y $\overline{M}$ una subvarie-

dad de M tal que:

$JX \in T(\overline{M}) \qquad \forall X \in T(\overline{M})$

Se verifica que J induce sobre $\overline{M}$ una $J(3,1)$-estructura si, y solo si:

$T(\overline{M}) \cap Q_2 = \{0\}$

DEMOSTRACION:

En efecto si $X \in T(\overline{M})$ se tiene, por el teorema 2.1:

$$X = X_1 + X_2$$

donde $X_1 = p(X) \in P, X_2 = q(X) \in Q$. Ahora bien, teniendo en cuenta la hipotesis resulta que:

$X \in T(\overline{M}) \rightarrow JX \in T(\overline{M}) \rightarrow J^2X \in T(\overline{M}) \rightarrow J^2X+X \in T(\overline{M}) \rightarrow$ $(J^2+I)X = q(X) = X_2 \in T(\overline{M})$. En consecuencia:

$$X_2 \in T(\overline{M}) \rightarrow \left\{\begin{matrix} X_2 \notin Q_2 \\ o \\ X_2 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} X_2 \in Q_1 \\ o \\ X_2 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow JX_2 = 0$$

$\rightarrow (J^3 + J)X_2 = 0.$

De otra parte como $X_1 \in P$ se cumple:

$$J^2X_1 = - X_1 \rightarrow (J^2+I)X_1 = 0 \rightarrow (J^3+J)X_2 = 0$$

En definitiva se tiene:

$$(J^3+J)X = (J^3+J)X_1 + (J^3+J)X_2 = 0+0 = 0$$

Por lo tanto hemos probado que en las hipotesis del teorema, J induce sobre $\overline{M}$ una $J(3,1)$-estructura.

Reciprocamente admitamos que J induce sobre $\overline{M}$ una tal estructura y demostremos que entonces $T(\overline{M}) \cap Q_2 = \{0\}$.

En efecto sea $X \in T(\overline{M}) \cap Q_2$. Se tiene:

$$X \in Q_2 \rightarrow X \in Q \rightarrow J^2X = 0 \rightarrow J^3X = 0$$

Por otra parte, en virtud de la hipotesis:

$$(J^3+J)X = 0 \rightarrow J^3X + JX = 0$$

de donde como $J^3X = 0$ se deduce que $JX = 0$, lo que significa que $X \in Ker(J) = Q_1$. Finalmente como $X \in Q_1$, $X \in Q_2$ y Q_1 y Q_2 no tienen en común más que el cero se concluye que $X = o$ lo que demuestra el teorema.

DEFINICION 2.7.
Una subvariedad $\overline{M}$ de la $J(4,2)$-variedad M que cumpla las condiciones del teorema anterior recibe el nombre de $J(3,1)$-subvariedad

TEOREMA 2.24.
Sea $\overline{M}$ una $J(3,1)$-subvariedad de la $J(4,2)$-variedad M. Si en cada punto $z \in \overline{M}$ llamamos:

$\overline{P} = T(\overline{M}) \cap P$

$\overline{Q} = T(\overline{M}) \cap Q$

entonces se verifica que:

$T(\overline{M}) = \overline{P} \oplus \overline{Q}$.

DEMOSTRACION:

Sea $X \in T(\overline{M})$. En virtud del teorema 2.1 (consecuencia 1) X se descompone de manera única en la forma:

$$X = X_1 + X_2$$

donde $X_1 = p(X) \in P, X_2 = q(X) \in Q$. Ahora bien, de acuerdo con la definición 2.6 se tiene:

$$X \in T(\overline{M}) \rightarrow JX \in T(\overline{M}) \rightarrow J^2X \in T(\overline{M}) \rightarrow$$
$$p(X) \in T(\overline{M}) \rightarrow X_1 \in T(\overline{M}) \rightarrow X_1 \in T(\overline{M}) \cap P = \overline{P}$$

Analogamente se demuestra que $X_2 \in \overline{Q}$ con lo que se termina el teorema.

COROLARIO

Puede determinarse una base de $T(\overline{M})$ ortonormal respecto de $<\ ,\ >$ de la forma

$\{X_1,\ldots,X_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$

donde $X_1,\ldots,X_s \in \overline{P}$

$X_{s+1},\ldots,X_k \in \overline{Q}$

TEOREMA 2.25.

Sea $\{X_1,\ldots,X_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ una base de $T(\overline{M})$ ortonormal respecto de $<\ ,\ >$ .Se verifica que $\{JX_1,\ldots,JX_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ es asimismo una base ortonormal de $T(\overline{M})$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que se tiene:

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i JX_i + \sum_{i=s+1}^{i=k} \lambda_i X_i = 0 \qquad [2.32]$$

con algún $\lambda_i \neq 0$.Necesariamente ha de haber $\lambda_i \neq 0$ con

$i = 1,\dots,s$, pues si fuera $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$ se tendría:

$$\sum_{i=s+1}^{i=k} \lambda_i X_i = 0 \qquad \text{con algún } \lambda_i \neq 0$$

lo que contradice que $\{X_1,\dots,X_s,X_{s+1},\dots,X_k\}$ es una base de $T(\overline{M})$. Supongamos, pues, que es $\lambda_1 \neq 0$. Aplicando J a los dos miembros de [2.32] se tiene:

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i J^2 X_i + \sum_{i=s+1}^{i=k} \lambda_i J X_i = 0$$

Ahora bien:

$$J^2 X_i = -X_i \qquad \text{para } i=1,\dots,s$$

$$JX_i = 0 \qquad \text{para } i=s+1,\dots,k$$

ya que $X_1,\dots,X_s \in \overline{P}, X_{s+1},\dots,X_k \in \overline{Q} \subset Q_1$. En consecuencia resulta que:

$$-\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i X_i = 0 \qquad \text{con} \qquad \lambda_1 \neq 0$$

y esto no es posible porque $\{X_1,\dots,X_s,X_{s+1},\dots,X_k\}$ era una base de $T(\overline{M})$. En definitiva hemos demostrado que $\{JX_1,\dots,JX_s,X_{s+1},\dots,X_k\}$ constituye una base de $T(\overline{M})$. Que además es una base ortonormal respecto de $<\ ,\ >$ se deduce del hecho de hecho de serlo $\{X_1,\dots,X_k\}$, de que:

$$<JX_i,JX_j> = <X_i,X_j> \qquad i=1,\dots,s$$

y de que $\overline{P}$ y Q son mutuamente ortogonales.

TEOREMA 2.26.

Sea $\overline{M}$ una $J(3,1)$-subvariedad de la $J(4,2)$-va *dad M con una métrica adaptada cuya conexión afín cumple la condición [2.2]. Sea $\{X_1,\ldots,X_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ una base de $T(\overline{M})$ ortonormal respecto de $<\ ,\ >$ tal que:*

$X_1,\ldots,X_s \in \overline{P}$

$X_{s+1},\ldots,X_k \in \overline{Q}$

Una condición necesaria y suficiente para que $\overline{M}$ sea una subvariedad minimal de M es que se cumpla:

$$\sum_{i=s+1}^{i=k} <L_A X_i, X_i> = 0$$

para todo campo A normal a $\overline{M}$ tal que $A \in Q$

DEMOSTRACION:

Antes de empezar la demostración señalemos que el teorema muestra que la minimalidad de $\overline{M}$ es independiente de la parte que tenga su espacio tangente en $\overline{P}$ y de los campos normales a $\overline{M}$ que pertenezcan a P.

Vamos a empezar la demostración probando que si A es un campo arbitrario normal a $\overline{M}$ se verifica:

$$<L_A X_i, X_i> = -<L_A JX_i, JX_i> \quad i=1,\ldots,s \qquad [2.33]$$

Usaremos, para ello, un método semejante al utilizado en el teorema 2.11. Sim embargo en elcaso de las J(3,1)-subvariedades no son ciertas las igualdades:

$$tgJX = J\ tgX$$

$$V(X,JY) = J\,V(X,Y)$$

Por este motivo,aunque seguiremos la linea de la demostración del teorema 2.11,justificaremos cada paso.

Sean $X,Y \in \overline{P}$ dos campos tangentes a $\overline{M}$ y A un campo cualquiera normal a $\overline{M}$.Exactamente como en el teorema 2.11 se tiene:

$$tg\Delta_{JX}A + Nor\Delta_{JX}A + [A,JX] - tg\,J\Delta_X A - NorJ\Delta_X A - J[A,X] = o$$

de donde como:

$$tg\Delta_{JX}A = L_A JX \qquad <NorJ\Delta_X A,Y> = 0$$

resulta :

$$<L_A JX + [A,JX] - tgJ\Delta_X A - J[A,X],Y> = 0 \qquad [2.34]$$

Ahora bien:

$$<tgJ\Delta_X A,Y> = <tgJ\Delta_X A,Y> + <NorJ\Delta_X A,Y> = <J\Delta_X A,Y>$$

Por el teorema 2.10 sabemos que:

$$<J\Delta_X A,Y> = -<\Delta_X A,JY>$$

y por lo tanto:

$$<tgJ\Delta_X A,Y> = -<\Delta_X A,JY> = -<tg\Delta_X A,JY> - <Nor\Delta_X A,JY> =$$

$$= -<tg\Delta_X A,JY> = <Jtg\Delta_X A,Y>$$

ya que $<Nor\Delta_X A,JY> = 0$ porque $JY \in T(\overline{M})$en virtud de la hipótesis y ya que $-<tg\Delta_X A,JY> = <Jtg\Delta_X A,Y>$ por el teorema 2.10.Teniendo en cuenta que $tg\Delta_X A = L_A X$ y sustituyendo en [2.34] queda:

$$<L_A JX + [A,JX] - JL_A X - J[A,X],Y> = 0 \qquad [2.35]$$

Recordemos que en el primer capitulo demostramos que:

$$<L_A X,Y> = -<A,V(X,Y)> \qquad \forall\ X,Y \in T(\overline{M})$$

Teniendo en cuenta esto resulta:

$$<JL_A X,Y> + <L_A JX,Y> = -<L_A X,JY> + <L_A JX,Y> =$$

$$= <A,V(X,JY)> - <A,V(JX,Y)> = <A,V(X,JY)> -$$

$$-<A,V(Y,JX)>$$

ya que V es un tensor simétrico.Tambien en el primer capitulo demostramos que:

$$V(X,Y) = \mathrm{Nor}\Delta_X Y$$

Como además:

$$<A,\mathrm{tg}\Delta_X JY> = <A,\mathrm{tg}\Delta_Y JX> = 0$$

por ser A normal a $\overline{M}$,se tiene:

$$<JL_A X,Y> + <L_A JX,Y> = <A,V(X,JY)> - <A,V(Y,JX)> =$$

$$= <A,\mathrm{Nor}\Delta_X JY> + <A,\mathrm{tg}\Delta_X JY> - <A,\mathrm{Nor}\Delta_Y JX> - <A,\mathrm{tg}\Delta_Y JX>$$

$$= <A,\Delta_X JY> - <A,\Delta_Y JX> = <A,\Delta_X JY-\Delta_Y JX> =$$

$$= <A,J\Delta_X Y-J\Delta_Y X> = <A,J[X,Y]>$$

donde hemos utilizado que $J\Delta_X Y = \Delta_X JY, J\Delta_Y X = \Delta_Y JX$ por la condición [2.2].

Ahora bien $X,Y \in T(\overline{M})$ y por lo tanto $[X,Y] \in T(\overline{M})$,de donde por la hipotesis,$J[X,Y] \in T(\overline{M})$ y en consecuencia:

$$<A,J[X,Y]> = 0$$

Por lo tanto:

$$<JL_AX,Y> + <L_AJX,Y> = 0 \rightarrow$$

$$<JL_AX,Y> = -<L_AJX,Y>$$

lo que sustituido en [2.35] da:

$$<L_AJX + [A,JX] + L_AJX - J[A,X],Y> = 0 \rightarrow$$

$$2<L_AJX,Y> = <J[A,X],Y> - <[A,JX],Y>$$

Procediendo, a partir de aquí, como en el teorema 2.11 se llega a [2.33].

Por definición, como $\{X_1,\ldots,X_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ es una base ortonormal de $T(\overline{M})$ se tiene:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} <L_AX_i,X_i> + \sum_{i=s+1}^{i=k} <L_AX_i,X_i>$$

Sustituyendo, en $H(A)$, $<L_AX_i,X_i>$ por $-<L_AJX_i,JX_i>$ de acuerdo con [2.33] resulta:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{i=s} <L_AJX_i,JX_i> + \sum_{i=s+1}^{i=k} <L_AX_i,X_i> \qquad [2.36]$$

Pero como por otro lado y según el teorema 2.25 $\{JX_1,\ldots,JX_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ es asimismo una base ortonormal de $T(\overline{M})$ se tiene:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} <L_AJX_i,JX_i> + \sum_{i=s+1}^{i=k} <L_AX_i,X_i> \qquad [2.37]$$

de [2.36] y [2.37] se deduce (sumando) que:

$$H(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=s+1}^{i=k} \langle L_A X_i, X_i \rangle$$

Descompongamos ahora A en la forma:

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 \in P, A_2 \in Q$$

Se tiene entonces:

$$\langle L_A X_i, X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i} A, X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i}(A_1+A_2), X_i \rangle =$$

$$= \langle tg(\Delta_{X_i} A_1 + \Delta_{X_i} A_2), X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i} A_1 + tg\Delta_{X_i} A_2, X_i \rangle$$

$$= \langle L_{A_1} X_i, X_i \rangle + \langle L_{A_2} X_i, X_i \rangle$$

Ahora bien como $A_1 \in P$ se verifica que $J^2 A_1 = -A_1$, y por tanto utilizando la condición [2.2] :

$$J^2 \Delta_{X_i} A_1 = \Delta_{X_i} J^2 A_1 = - \Delta_{X_i} A_1$$

lo que significa que:

$$\Delta_{X_i} A_1 \in P \rightarrow \langle \Delta_{X_i} A_1, X_i \rangle = 0$$

ya que $X_i \in Q$ y P y Q son mutuamente ortogonales. Como consecuencia, y puesto que $\langle Nor_{X_i} A_1, X_i \rangle = 0$ por ser X_i tangente a $\overline{M}$, se obtiene:

$$\langle L_{A_1} X_i, X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i} A_1, X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i} A_1, X_i \rangle +$$

$$+ \langle Nor\Delta_{X_i} A_1, X_i \rangle = \langle \Delta_{X_i} A_1, X_i \rangle = 0$$

En definitiva tenemos:

$$\langle L_A X_i, X_i \rangle = \langle L_{A_2} X_i, X_i \rangle$$

y por consiguiente:

$$H(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=s+1}^{i=k} \langle L_{A_2} X_i, X_i \rangle$$

La condición $H(A) = 0$ para todo $A \in [T(\overline{M})]^{\perp}$(Es decir la condición "$\overline{M}$ es subvariedad minimal")es,pues,equivalente a que:

$$\sum_{i=s+1}^{i=k} \langle L_{A_2} X_i, X_i \rangle = 0$$

Falta demostrar(para que tengan sentido L_{A_1}, L_{A_2})que A_1, A_2 son normales a $\overline{M}$.Lo haremos unicamente para A_2.

Sea $X \in T(\overline{M})$ cualquier campo tangente a $\overline{M}$.Si X se descompone en:

$$X = X_1 + X_2 \qquad X_1 \in P, X_2 \in Q$$

sabemos que $X_1 = -J^2 X, X_2 = (J^2 + I)X$.Resulta entonces,por ser A normal a $\overline{M}$:

$$0 = \langle X,A \rangle = \langle X_1 + X_2, A_1 + A_2 \rangle = \langle X_1, A_1 \rangle + \langle X_2, A_2 \rangle +$$

$$+ \langle X_1, A_2 \rangle + \langle X_2, A_1 \rangle = \langle X_1, A_1 \rangle + \langle X_2, A_2 \rangle$$

ya que $\langle X_1, A_2 \rangle = \langle X_2, A_1 \rangle = 0$ por ser P y Q mutuamente ortogonales.Ahora bien $X_1 = -J^2 X \in T(\overline{M})$ ya que $X \in T(\overline{M})$. En consecuencia:

$$\langle X_1, A \rangle = 0$$

pero $\langle X_1, A \rangle = \langle X_1, A_1 \rangle + \langle X_1, A_2 \rangle = \langle X_1, A_1 \rangle$.Lo que implica que:

$$\langle X_1, A_1 \rangle = 0 \quad \rightarrow$$

$$0 = \langle X,A \rangle = \langle X_2, A_2 \rangle$$

Por lo tanto:

$$<X,A_2> = <X_1,A_2> + <X_2,A_2> = <X_2,A_2> = 0$$

lo que, al ser cierto para todo $X \in T(\overline{M})$, demuestra que A es normal a $\overline{M}$, con lo que se concluye el teorema.

COROLARIO (Existencia)

La distribución $P+Q_1$ es involutiva y cualquier subvariedad integral suya $\overline{M}$ es una $J(3,1)$-subvariedad de M que además es minimal.

DEMOSTRACION:

Veamos ante todo que la distribución $P+Q_1$ es involutiva.
Sean $X,Y \in P+Q_1$, esto implica que:

$$X = X_1+X_2 \qquad X_1 \in P, X_2 \in Q_1$$

$$Y = Y_1+Y_2 \qquad Y_1 \in P, Y_2 \in Q_1$$

Por lo tanto:

$$\Delta_X Y = \Delta_{X_1} Y_1 + \Delta_{X_2} Y_1 + \Delta_{X_1} Y_2 + \Delta_{X_2} Y_2$$

Como $Y_1 \in P$ resulta que $J^2 Y_1 = -Y_1 \quad \rightarrow$

$$J^2 \Delta_{X_1} Y_1 = \Delta_{X_1} J^2 Y_1 = -\Delta_{X_1} Y_1 \rightarrow \Delta_{X_1} Y_1 \in P$$

$$J^2 \Delta_{X_2} Y_1 = \Delta_{X_2} J^2 Y_1 = -\Delta_{X_2} Y_1 \rightarrow \Delta_{X_2} Y_1 \in P$$

Como $Y_2 \in Q_1 \rightarrow JY_2 = 0 \rightarrow$

$$J\Delta_{X_1} Y_2 = \Delta_{X_1} JY_2 = 0 \rightarrow \Delta_{X_1} Y_2 \in Q_1$$

$$J\Delta_{X_2}Y_2 = \Delta_{X_2}JY_2 = 0 \rightarrow \Delta_{X_2}Y_2 \in Q_1$$

de modo que:

$$\Delta_X Y = (\Delta_{X_1}Y_1 + \Delta_{X_2}Y_1) + (\Delta_{X_1}Y_2 + \Delta_{X_2}Y_2)$$

donde:

$$\Delta_{X_1}Y_1 + \Delta_{X_2}Y_1 \in P \qquad \Delta_{X_1}Y_2 + \Delta_{X_2}Y_2 \in Q_1$$

esto quiere decir que $\Delta_X Y \in P+Q_1$.Analogamente se demues - tra que $\Delta_Y X \in P+Q_1$ y por tanto:

$$[X,Y] = \Delta_X Y - \Delta_Y X \in P+Q_1$$

lo que prueba que $P+Q_1$ es involutiva.

Sea $\overline{M}$ una subvariedad integral de $P+Q_1$.En cada punto $z \in \overline{M}$ se verifica,por ello,que:

$$\overline{M}_z = P_z + Q_{1_z} \rightarrow$$

$$T(\overline{M}) \cap Q_2 = \{0\}$$

Además si $X \in T(\overline{M}) \rightarrow X \in P+Q_1 \rightarrow$

$$X = X_1 + X_2 \qquad X_1 \in P, X_2 \in Q_1 \rightarrow$$

$$JX = JX_1 + JX_2 = JX_1 + 0 = JX_1$$

pero $X_1 \in P \rightarrow JX_1 \in P \rightarrow JX \in P \rightarrow JX \in P+Q_1 = T(\overline{M})$

Por lo tanto $\overline{M}$ satisface las hipotesis del teorema 2.23 y es,por ello,una $J(3,1)$-subvariedad de M.Veamos que es minimal.

Sea $\{X_1,\ldots,X_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ con $X_1,\ldots,X_s \in P, X_{s+1},\ldots$

$..,X_k \in Q_1$ (en este caso es evidente que $\overline{P} = P$ y $\overline{Q} = Q_1$ de acuerdo con la definición de $\overline{P}$ y $\overline{Q}$) una base ortonormal de $T(\overline{M})$.

Para cada X_i,$i=s+1,\ldots,k$ se tiene:

$$X_i \in Q_1 \rightarrow JX_i = 0 \rightarrow$$

$$J\Delta_{X_i}X_i = \Delta_{X_i}JX_i = 0 \rightarrow \Delta_{X_i}X_i \in Q_1 \rightarrow$$

$$\Delta_{X_i}X_i \in P+Q_1 \rightarrow \Delta_{X_i}X_i \in T(\overline{M})$$

Si $A \in Q$ es cualquier campo normal a $\overline{M}$ se verifica entonces que:

$$<\Delta_{X_i}X_i,A> = 0 \qquad i = s+1,\ldots,k$$

Como además(por ser A normal) se cumple que $<tg\Delta_{X_i}X_i,A>=0$ tenemos:

$$<A,V(X_i,X_i)> = <A,Nor\Delta_{X_i}X_i> = <A,Nor\Delta_{X_i}X_i> + <A,tg\Delta_{X_i}X_i>$$

$$= <A,\Delta_{X_i}X_i> = 0 \qquad i = s+1,\ldots,k$$

Pero si tenemos en cuenta que $<A,V(X_i,X_i)> = <L_AX_i,X_i>$ se deduce:

$$<L_AX_i,X_i> = 0 \qquad i = s+1,\ldots,k \rightarrow$$

$$\sum_{i=s+1}^{i=k} <L_AX_i,X_i> = 0$$

lo que,por el teorema 2.26,implica que $\overline{M}$ es subvariedad minimal de M.

Supongamos que la $J(4,2)$-variedad M posee una métrica adaptada tal que Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales respecto de dicha métrica(Teorema 2.4.)

COROLARIO 2

Toda $J(3,1)$-subvariedad $\overline{M}$ que cumpla:

$<J[A,JX],X> = <[A,JX],JX>$

para todo $A \in [T(\overline{M})]^{\perp}, JX \in T(\overline{M})$ es minimal.

DEMOSTRACION:

En efecto si $\{X_1,\ldots,X_s,X_{s+1},\ldots,X_k\}$ es una base ortonormal de $T(\overline{M})$ con $X_{s+1},\ldots,X_k \in Q_1$ se verifica,por la definición de Q_1 que $X_i = JY_i$,$Y_i \in Q_2$,$i=s+1,\ldots,k$.Aplicando entonces la hipotesis se deduce para $i=s+1,\ldots,k$ que:

$$<[A,X_i],X_i> = <[A,JY_i],JY_i> = <J[A,JY_i],Y_i>$$

Ahora bien por la definición de Q_1 se cumple que $J[A,JX_i]$ pertenece a Q_1,mientras que por otro lado $Y_i \in Q_2$.Como además Q_1,Q_2 son mutuamente ortogonales se tiene que:

$$<J[A,JY_i],Y_i> = 0 \rightarrow <[A,X_i],X_i> = 0$$

Por hipotesis sabemos que $<X_i,X_i> = 1 \rightarrow A<X_i,X_i> = 0$ pero,por ser Δ una conexión Riemanniana,$A<X_i,X_i> =$ $<\Delta_A X_i,X_i> + <\Delta_A X_i,X_i> \rightarrow <\Delta_A X_i,X_i> = 0$ y por lo tanto:

$$<L_A X_i,X_i> = <\Delta_{X_i} A,X_i> = <\Delta_{X_i} A,X_i> - <\Delta_A X_i,X_i> =$$
$$= <[X_i,A],X_i> = 0$$

lo que al ser cierto para $i=s+1,\ldots,k$ demuestra que $\overline{M}$ es subvariedad minimal

3.2.-J(4,2)-SUBVARIEDADES

Vamos a considerar en esta sección una J(4,2)-variedad M con una métrica adaptada $< , >$ tal que Q_1, Q_2 sean mutuamente ortogonales respecto de $< , >$ y tal que J transforme una base ortonormal de Q_2 en una base ortonormal de Q_1 (Teorema 2.4).

DEFINICION 2.8.

Sea M una J(4,2)-variedad. Diremos que $\overline{M}$ es una J(4,2)-subvariedad de M si cumple las dos condiciones siguientes:

1) $JX \in T(\overline{M}) \qquad \forall X \in T(\overline{M})$

2) El tensor $\overline{J}$ definido por:

$\overline{J}X = JX \qquad \forall X \in T(\overline{M})$

induce sobre $\overline{M}$ una J(4,2)-estructura.

TEOREMA 2.27.

Sea $\overline{M}$ una J(4,2)-subvariedad de M. Si llamamos:

$\overline{P} = T(\overline{M}) \cap P; \overline{Q}_1 = T(\overline{M}) \cap Q_1; \overline{Q}_2 = T(\overline{M}) \cap Q_2$

entonces se verifica que:

$T(\overline{M}) = \overline{P} \oplus \overline{Q}_1 \oplus \overline{Q}_2$

y además $\overline{J}$ transforma una base ortonormal de $\overline{Q}_2$ en una base ortonormal de $\overline{Q}_1$.

DEMOSTRACION:

Sea $X \in T(\overline{M})$.En virtud del teorema 2.1 se puede escribir:

$$X = X_o + Y$$

donde $X_o = -J^2X \in P, Y = (J^2+I)X \in Q$.Como,por hipotesis $JX \in T(\overline{M})$ para todo $X \in T(\overline{M})$se deduce que:

$$X_o \in T(\overline{M}) \qquad Y \in T(\overline{M})$$

Por el teorema 2.3 Y se puede descomponer a su vez en :

$$Y = X_1 + X_2$$

donde $X_1 = JX \in Q_1, X_2 \in Q_2$ .Por lo tanto:

$$X_1 = JX \in T(\overline{M}) \qquad X_2 = Y - X_1 \in T(\overline{M})$$

En definitiva tenemos que:

$$X = X_o+X_1+X_2$$

$X_o \in P \cap T(\overline{M}), X_1 \in T(\overline{M}) \cap Q_1, X_2 \in T(\overline{M}) \cap Q_2$,lo que demuestra la primera parte del teorema.Sea ahora $\{X_1,\ldots,X_h\}$ una base ortonormal de $\overline{Q}_2$.Veamos que $JX_1,\ldots,JX_h$ son campos independientes de $\overline{Q}_1$.En efecto como $X_1,\ldots,X_h \in \overline{Q}_2 \rightarrow X_1,\ldots,X_h \in Q_2 \rightarrow JX_1,\ldots,JX_h \rightarrow Q_1$.Como además $X_1,\ldots,X_h \in T(\overline{M}) \rightarrow JX_1,\ldots,JX_h \in T(\overline{M}) \rightarrow JX_1,\ldots,JX_h \in T(\overline{M}) \cap Q_2 \rightarrow JX_1,\ldots,JX_h \in \overline{Q}_2$.Supongamos que se tiene:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i JX_i = 0 \quad \text{con(p.e.) } \lambda_1 \neq 0$$

esto implica que:

$$J\left[\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i\right] = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in Q_1$$

Como además $\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in T(\overline{M})$ se deduce que $\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in \overline{Q}_1$

Por otra parte al ser $X_1,\ldots,X_h$ una base $\overline{Q}_2$ se tiene que $\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in \overline{Q}_2$. De modo que $\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i$ pertenece simultaneamente a $\overline{Q}_1$ y $\overline{Q}_2$ lo que implica que:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i = 0$$

pero esto es imposible ya que $\lambda_1 \neq 0$ y $X_1,\ldots,X_h$ son campos independientes. En definitiva hemos demostrado que JX_1 $\ldots,JX_h$ son campos independientes de $\overline{Q}_1$. Esto significa que $\{JX_1,\ldots,JX_h\}$ es una base de $\overline{Q}_1$ ya que $\overline{Q}_1$ y $\overline{Q}_2$ tienen la misma dimensión(es decir h) puesto que por definición $\overline{M}$ es una $J(4,2)$-variedad. Veamos que se trata de una base ortonormal respecto de $<\ ,\ >$.

De acuerdo con el teorema 2.4 puede escogerse una base de Q_2, sea $\{Z_1,\ldots,Z_{n-r}\}$, tal que $\{JZ_1,\ldots,JZ_{n-r}\}$ es una base ortonormal de Q_1. Para $i = 1,\ldots,h$ se tiene que $X_i \in \overline{Q}_2 \rightarrow$ $X_i \in Q_2 \rightarrow$

$$X_i = \sum_{j=1}^{j=n-r} a_{ij} Z_j \rightarrow JX_i = \sum_{j=1}^{j=n-r} a_{ij} Z_j$$

Un simple calculo demuestra entonces que:

$$\partial_{ik} = \langle X_i, X_k \rangle = \sum_{h,t=1}^{n-r} a_{ih}\, a_{kt} = \langle JX_i, JX_k \rangle$$

Con esto queda terminada la demostración del teorema.

COROLARIO

Si $\overline{M}$ es una $J(4,2)$-subvariedad de M puede determinarse una base de $T(\overline{M})$, ortonormal *respecto de < , > de la forma:*

$\{Z_1,\ldots,Z_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$

donde:

$Z_1,\ldots,Z_s \in P; X_1,\ldots,X_h \in Q_2; JX_1,\ldots,JX_h \in Q_1.$

NOTA:Cabe señalar en el corolario anterior que puesto que J induce sobre $\overline{M}$ una J(4,2)-estructura se verifica que si rango($\overline{J}$)=$\overline{r}$ y dim($\overline{M}$)=k entonces s=2$\overline{r}$-k y h=k-$\overline{r}$.

TEOREMA 2.28.

Si $\{Z_1,\ldots,Z_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ es una base ortonormal de $T(\overline{M})$ se cumple que: $\{JZ_1,\ldots,JZ_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ es asimismo una base ortonormal de $T(\overline{M})$

DEMOSTRACION:

Es fácil demostrar que $\{JZ_1,\ldots,JZ_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ es una base de $T(\overline{M})$.Supongamos que tuviesemos:

$$\sum_{i=1}^{i=s}\lambda_i JZ_i + \sum_{j=1}^{j=h}\mu_j X_j + \sum_{t=1}^{t=h}\nu_t JX_t = 0 \qquad [2.38]$$

donde alguno de los coeficientes que figuran en [2.38] fuera distinto de cero.Necesariamente habria de ser al menos uno de los λ_i distinto de cero ya que si $\lambda_1=\ldots=\lambda_s = 0$ [2.38] se reduce a :

$$\sum_{j=1}^{j=h}\mu_j X_j + \sum_{t=1}^{t=h}\nu_t JX_t = 0$$

donde alguno de los coeficientes no es cero lo cual es imposible ya que $X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h$ son campos independientes por hipótesis. Podemos, pues, suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Si aplicamos J a los dos miembros de [2.38] y tenemos en cuenta que $J^2Z_i = -Z_i$ y que $J^2X_j = 0$, entonces resulta:

$$-\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i Z_i + \sum_{j=1}^{j=h} \mu_j JX_j = 0$$

donde $\lambda_1 \neq 0$. Esto es una contradicción porque los campos $Z_1, \ldots, Z_s, JX_1, \ldots, JX_h$ son independientes por hipotesis. De modo que queda demostrado que $\{JZ_1,\ldots,JZ_s, X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ son campos independientes y por lo tanto forman una base de $T(\overline{M})$.

Si se tiene en cuenta que, según la hipotesis, $\{Z_1,\ldots,Z_s, X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ es una base ortonormal, que:

$$\langle JZ_i, X_j\rangle = \langle JZ_i, JX_j\rangle = 0$$

(porque $JZ_i \in P$ y $X_j, JX_j \in Q$) y que:

$$\langle JZ_i, JZ_j\rangle = \langle Z_i, Z_j\rangle$$

(Puesto que la métrica es adaptada) entonces es inmediato demostrar que $\{JZ_1,\ldots,JZ_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ es igualmente una base ortonormal.

TEOREMA 2.29.

Sea M una $J(4,2)$-variedad con una métrica adaptada $\langle\ ,\ \rangle$ tal que Q_1, Q_2 sean mutuamente ortogonales respecto de $\langle\ ,\ \rangle$. Suponga-

mos que $\overline{M}$ es una $J(4,2)$-subvariedad de M y que $\{Z_1,\ldots,Z_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$ es una base de $T(\overline{M})$ ortonormal respecto de $<\ ,\ >$ en la que:

$Z_1,\ldots,Z_s \in P; X_1,\ldots,X_h \in Q_2; JX_1,\ldots,JX_h \in Q_1$

Una condición necesaria y suficiente para que $\overline{M}$ sea subvariedad minimal de M es que se verifique:

$$\sum_{i=1}^{i=h} <L_A X_i, X_i> = 0$$

para todo campo A normal a $\overline{M}$ tal que $A \in Q_2$

DEMOSTRACION:

Supongamos que A sea un campo cualquiera normal a $\overline{M}$.Exactamente como en el teorema 2.26 se demuestra que:

$$<L_A Z_i, Z_i> = -<L_A JZ_i, JZ_i> \qquad i=1,\ldots,s \qquad [2.39]$$

Por otra parte sabemos que si $X,Y \in T(\overline{M})$ entonces:

$$<L_A X,Y> = -<A,V(X,Y)>$$

En particular tenemos para $t=1,\ldots,h$:

$$<L_A JX_t, JX_t> = -<A,V(JX_t,JX_t)> =$$

$$= -<A,\mathrm{Nor}\Delta_{JX_t} JX_t> = -<A,\mathrm{Nor}\Delta_{JX_t} JX_t> -<A,\mathrm{tg}\Delta_{JX_t} JX_t>$$

ya que $<A,\mathrm{tg}\Delta_{JX_t} JX_t> = 0$ por ser A un campo normal.Por lo tanto tenemos que:

$$<L_A JX_t, JX_t> = -<A,\Delta_{JX_t} JX_t> = -<A,J\Delta_{JX_t} X_t>$$

Como $X_t \in Q_2$ se tiene que $J^2X_t = 0$ de donde:

$$<L_A JX_t, JX_t> = -<A, J\Delta_{JX_t} X_t> + <A, \Delta_{X_t} J^2 X_t> =$$

$$= -<A, J\Delta_{JX_t} X_t> + <A, J\Delta_{X_t} JX_t> =$$

$$= -<A, J(\Delta_{JX_t} X_t - \Delta_{X_t} JX_t)> = -<A, J[JX_t, X_t]>$$

Ahora bien X_t, JX_t son ambos tangentes a $\overline{M}$ de modo que $[JX_t, X_t]$ es tambien tangente a $\overline{M}$ y lo mismo ocurre con $J[JX_t, X_t]$. Como además A es normal a $\overline{M}$ se concluye que:

$$<A, J[JX_t, X_t]> = 0$$

Y por lo tanto:

$$<L_A JX_t, JX_t> = 0 \qquad t=1,\ldots,h \qquad [2,40]$$

Teniendo en cuenta que, por el teorema 2.28 $\{JZ_1,\ldots,JZ_s, X_1,\ldots,X_h, JX_1,\ldots,JX_h\}$ es tambien una base ortonormal de $T(\overline{M})$ tenemos, por definición, simultaneamente:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} <L_A Z_i, Z_i> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j> + \sum_{t=1}^{t=h} <L_A JX_t, JX_t>$$

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} <L_A JZ_i, JZ_i> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j> + \sum_{t=1}^{t=h} <L_A JX_t, JX_t>$$

Teniendo en cuenta [2.39] y [2.40] estas dos igualdades se transforman en estas otras:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{i=s} <L_A JZ_i, JZ_i> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j>$$

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} <L_A JZ_i, JZ_i> + \sum_{j=1}^{j=h} <L_A X_j, X_j>$$

de donde sumando resulta que:

$$H(A) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=h} \langle L_A X_i , X_i \rangle$$

Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que $\overline{M}$ sea subvariedad minimal es que:

$$\sum_{j=1}^{j=h} \langle L_A X_i , X_i \rangle = 0$$

para todo campo A normal a $\overline{M}$. Vamos a ver, finalmente, que basta con que el campo A pertenezca a Q_2. En efecto A puede descomponerse en la forma:

$$A = A_o + A_1 + A_2 \qquad A_o \in P, A_1 \in Q_1, A_2 \in Q_2$$

Veamos ante todo que A_0, A_1, A_2 son normales a $\overline{M}$. Sea X cualquier campo tangente a $\overline{M}$. Descompogamos X en la forma:

$$X = X_o + X_1 + X_2 \qquad X_o \in P, X_1 \in Q_1, X_2 \in Q_2$$

Sabemos que $X_o = -J^2X, Y = X_1 + X_2 = (J^2+I)X, X_1 = JY$. Por lo tanto, en virtud de las hipotesis, se deduce que:

$$X_o \in T(\overline{M}) \qquad X_1 \in T(\overline{M}) \qquad X_2 \in T(\overline{M})$$

$\langle A_o, X_1 \rangle = \langle A_o, X_2 \rangle = 0$ ya que P, Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales, en consecuencia:

$$\langle A_o, X \rangle = \langle A_0, X_o \rangle + \langle A_o, X_1 \rangle + \langle A_o, X_2 \rangle = \langle A_o, X_o \rangle$$

Por la misma razón:

$$\langle A, X_o \rangle = \langle A_o, X_o \rangle + \langle A_1, X_o \rangle + \langle A_2, X_o \rangle = \langle A_o, X_o \rangle$$

Pero $\langle A, X_o \rangle = 0$ puesto que X_o es tangente a $\overline{M}$. Por lo tanto

$$\langle A_o, X \rangle = 0$$

Esto demuestra que A_o es normal a $\overline{M}$. Igualmente se prueba que lo son A_1, A_2.

Teniendo en cuenta esto vamos a probar que:

$$<L_{A_o}X_j, X_j> = <L_{A_1}X_j, X_j> = 0 \qquad [2.41]$$

Lo haremos únicamente para A_o. Como $A_o \in P \rightarrow J^2A_o = -A_o$

$$\rightarrow \qquad J^2\Delta_{X_j}A_o = \Delta_{X_j}J^2A_o = -\Delta_{X_j}A_o \rightarrow \Delta_{X_j}A_o \in P$$

Como además, $X_j \in Q$ resulta:

$$<\Delta_{X_j}A_o, X_j> = 0$$

Por ser X_j tangente a $\overline{M}$ se tiene que:

$$<Nor\Delta_{X_j}A_o, X_j> = 0$$

de donde:

$$<L_{A_o}X_j, X_j> = <tg\Delta_{X_j}A_o, X_j> = <tg\Delta_{X_j}A_o, X_j> +$$

$$+ <Nor\Delta_{X_j}A_o, X_j> = <\Delta_{X_j}A_o, X_j> = 0$$

Utilizando [2.41] se tiene:

$$<L_AX_j, X_j> = <L_{A_o}X_j, X_j> + <L_{A_1}X_j, X_j> + <L_{A_2}X_j, X_j> =$$

$$= <L_{A_2}X_j, X_j>$$

En definitiva $\overline{M}$ será subvariedad minimal si, y solo si:

$$\sum_{j=1}^{j=h} <L_{A_2}X_j, X_j> = o$$

donde $A_2 \in Q_2$. El teorema queda por lo tanto demostrado.

Para terminar vamos a demostrar en lo que sigue que toda $J(4,2)$-subvariedad de una $J(4,2)$-variedad es minimal. Recordemos que estamos considerando una $J(4,2)$-variedad M con una métrica adaptada $< , >$ tal que Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales respecto de $< , >$. Asimismo recordemos que hemos supuesto que la conexión afín inducida por $< , >$ cumple la condición [2.2] .

TEOREMA 2.30.

Si X,Y son dos campos pertenecientes a la distribución Q_2 se verifica que:

$<X,Y> = <JX,JY>$

DEMOSTRACION:

Tomemos una base de Q_2, sea $\{X_1,\ldots,X_{n-r}\}$, ortonormal respecto de $< , >$. Como $X,Y \in Q_2 \rightarrow$

$$X = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i X_i \qquad Y = \sum_{j=1}^{n-r} \mu_j X_j \qquad [2.42]$$

de donde:

$$<X,Y> = \sum_{i=1}^{n-r} \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_i \mu_j <X_i,X_j> =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-r} \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_i \mu_j \partial_{ij} = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \mu_i$$

De [2.42] se deduce que:

$$JX = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i JX_i \qquad JY = \sum_{j=1}^{n-r} \mu_j JX_j$$

lo que implica que:

$$<JX,JY> = \sum_{i=1}^{n-r} \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_i \mu_j <JX_i,JX_j>$$

Pero según el teorema 2.4 $\{JX_1,\dots,JX_{n-r}\}$ es una base ortonormal de Q_1 de modo que $<JX_i,JX_j> = \partial_{ij}$ y en consecuencia:

$$<JX,JY> = \sum_{i=1}^{n-r} \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_i \mu_j \partial_{ij} = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \mu_i = <X,Y>$$

TEOREMA 2.31.

Sea $\overline{M}$ una $J(4,2)$-subvariedad de la $J(4,2)$-variedad M. Se verifica que si A es un campo normal a $\overline{M}$ que pertenece a Q_2 entonces JA es tambien normal a $\overline{M}$.

DEMOSTRACION:

En virtud del teorema 2.27(corolario)podemos tomar una base $\{Z_1,\dots,Z_s,X_1,\dots,X_h,JX_1,\dots,JX_h\}$ de $T(\overline{M})$ tal que:

$Z_1,\dots,Z_s \in P$; $X_1,\dots,X_h \in Q_2$; $JX_1,\dots,JX_h \in Q_1$

Si A es un campo normal a $\overline{M}$ se tiene:

$$<A,X_i> = 0 \qquad i=1,\dots,h$$

Si A pertenece además a la distribución Q_2 ,como X_i pertenece tambien a Q_2 se tiene por el teorema 2.30:

$$0=<A,X_i> = <JA,JX_i> \qquad i=1,\dots,h \qquad [2.43]$$

Ahora bien $A \in Q_2$ implica que $JA \in Q_1$, de donde, teniendo en cuenta que P, Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales resulta:

$$<JA, Z_i> = 0 \qquad i=1,\dots,s \qquad [2.44]$$

$$<JA, X_i> = 0 \qquad i=1,\dots,h \qquad [2,44]$$

[2.43] y [2.44] demuestran que JA es normal a $\overline{M}$.

TEOREMA 2.32.

Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada como la del teorema 2.4. Si X es un campo que pertenece a la distribución Q_2 se verifica:

$$\Delta_Y X \in Q_2 \qquad \forall\, Y \in T(M)$$

DEMOSTRACION:

Ante todo como $X \in Q_2$ se tiene que $X \in Q \rightarrow J^2X = 0 \rightarrow$

$$J^2 \Delta_Y X = \Delta_Y J^2 X = 0 \rightarrow \Delta_Y X \in Q$$

Sea Z cualquier campo perteneciente a Q_1. Al ser Q_1 y Q_2 mutuamente ortogonales se deduce que:

$$<X,Z> = 0 \rightarrow Y<X,Z> = 0$$

Ahora bien como Δ es una conexión Riemanniana:

$$Y<X,Z> = <\Delta_Y X, Z> + <Y, \Delta_X Z>$$

de donde:

$$<\Delta_Y X, Z> + <Y, \Delta_X Z> = 0 \qquad [2.45]$$

Como $Z \in Q_1 \rightarrow JZ = 0 \rightarrow J\Delta_X Z = \Delta_X JZ = 0 \rightarrow \Delta_X Z \in Q_1 \rightarrow$

$$<Y, \Delta_X Z> = 0$$

Por lo tanto [2.45] queda así:

$$<\Delta_Y X, Z> = 0$$

Esto es cierto para todo $Z \in Q_1$ de modo que:

$$\Delta_Y X \in Q_1^{\perp}$$

Como además $\Delta_Y X \in Q$ resulta que $\Delta_Y X$ pertenece al comple - mento ortogonal de Q_1 en Q, es decir:

$$\Delta_Y X \in Q_2$$

TEOREMA 2.33.

Sea M una J(4,2)-variedad con una métrica adaptada < , > tal que Q_1 y Q_2 son mutuamente ortogonales respecto de < , > y tal que J transforma una base ortonormal de Q_2 en una base ortonormal de Q_1. Supongamos además que la conexión Riemanniana de M cumple la condición [2.2]. Se verifica que toda J(4,2)-subvariedad $\overline{M}$ de M es minimal.

DEMOSTRACION:

De acuerdo con el teorema 2.29 es suficiente con demos - trar que si tomamos una base $\{Z_1,\ldots,Z_s,X_1,\ldots,X_h,JZ_1,\ldots,JZ_h\}$ de $T(\overline{M})$ tal que:

$$Z_1,\ldots,Z_s \in P \;;\; X_1,\ldots,X_h \in Q_2 \;;\; JX_1,\ldots,JX_h \in Q_1$$

entonces se verifica que:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \langle L_A X_i, X_i \rangle = 0$$

para cualquier campo A normal a $\overline{M}$ que pertenezca a Q_2.

Por definición sabemos que $L_A X_i = tg\Delta_{X_i} A$. Si tenemos en cuenta que $\langle Nor\Delta_{X_i} A, X_i \rangle = o$ por ser X_i tangente a $\overline{M}$ resulta que:

$$\langle L_A X_i, X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i} A, X_i \rangle = \langle tg\Delta_{X_i} A, X_i \rangle + \langle Nor\Delta_{X_i} A, X_i \rangle =$$

$$= \langle \Delta_{X_i} A, X_i \rangle \qquad [2.46]$$

Ahora bien A ε Q_2, Por lo tanto(según el teorema 2.32):

$$\Delta_{X_i} A \ \varepsilon \ Q_2$$

Asimismo X_i ε Q_2, lo que por el teorema 2.30 implica que:

$$\langle \Delta_{X_i} A, X_i \rangle = \langle J\Delta_{X_i} A, JX_i \rangle = \langle \Delta_{X_i} JA, JX_i \rangle$$

El teorema 2.31 demuestra que JA es normal a $\overline{M}$, de modo que utilizando el mismo razonamiento que en [2.46]:

$$\langle L_{JA} X_i, JX_i \rangle = \langle \Delta_{X_i} JA, JX_i \rangle$$

Por el capitulo primero sabemos que:

$$\langle L_{JA} X_i, JX_i \rangle = -\langle JA, V(X_i, JX_i) \rangle$$

de donde, teniendo en cuenta que V es un tensor simétrico, que, por definición, $V(JX_i, X_i) = Nor\Delta_{JX_i} X_i$ y que, por ser JA normal a $\overline{M}$, $\langle JA, tg\Delta_{JX_i} X_i \rangle = 0$, tenemos:

$$\langle JA, V(X_i, JX_i)\rangle = \langle JA, V(JX_i, X_i)\rangle =$$

$$= \langle JA, \mathrm{Nor}\Delta_{JX_i} X_i\rangle = \langle JA, \mathrm{Nor}\Delta_{JX_i} X_i\rangle + \langle JA, \mathrm{tg}\Delta_{JX_i} X_i\rangle =$$

$$= \langle JA, \Delta_{JX_i} X_i\rangle$$

Ahora bien $JA \in Q_1$ puesto que $A \in Q_2$, $\Delta_{JX_i} X_i \in Q_2$ porque $X_i \in Q_2$(teorema 2.32) y Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales, en consecuencia:

$$\langle JA, \Delta_{JX_i} X_i\rangle = 0 \rightarrow \langle JA, V(X_i, JX_i)\rangle = 0 \rightarrow$$

$$\langle L_{JA} X_i, JX_i\rangle = 0 \rightarrow \langle \Delta_{X_i} JA, JX_i\rangle = 0 \rightarrow$$

$$\langle \Delta_{X_i} A, X_i\rangle = 0 \rightarrow \langle L_A X_i, X_i\rangle = 0 \rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{i=h} \langle L_A X_i, X_i\rangle = 0$$

con lo que queda demostrado que $\overline{M}$ es una subvariedad minimal de M.

APENDICE AL CAPITULO SEGUNDO

MINIMALIDAD Y ESTRUCTURAS J(4,-2)

DEFINICION A.1.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una J(4,-2)-estructura en M es un tensor J ($J \neq 0$, $J \neq I$), del tipo (1,1), de clase C^∞ y rango constante r tal que:

1) $J^4 - J^2 = 0$

2) $r = 1/2\ (\text{rango}(J^2) + n)$

NOTA: A una variedad M en la que se ha dado una J(4,-2) es tructura se le llama $J(4,-2)$-variedad.

Igual que en el caso de las $J(4,2)$-variedades se verifica que los operadores:

$$p = J^2 \qquad q = I-J^2$$

son proyectores complementarios y en consecuencia:

$$T(M) = P \oplus Q$$

donde:

$$P = p[T(M)] = \{X \in T(M) \mid J^2X = X\}$$

$$Q = q[T(M)] = \{X \in T(M) \mid J^2X = 0\}$$

NOTA: De acuerdo a como se han definido p y q resulta que J actua sobre P como una estructura casi-producto y sobre Q como una estructura casi-tangente.Además se tiene que si $r = n/2$ entonces $P = \{0\}$ y M es una variedad casi-tangente y si $r=n$ $Q = \{0\}$ y M es una variedad casi-producto. Las dimensiones de P y Q son,como en el caso de las $J(4,2)$ variedades,:

$$\dim(P) = 2r-n \qquad \dim(Q) = 2n-2r$$

De la msima manera si llamamos:

$$Q_1 = JQ$$

resulta que:

$$Q_1 = \mathrm{Ker}(J) \text{ y } \dim(Q_1) = n-r$$

Una métrica adaptada en una $J(4,-2)$-variedad M es una métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ tal que:

1) $\langle X,Y\rangle = \langle JX,JY\rangle \qquad \forall\ X,Y \in P$

2) P y Q son mutuamente ortogonales respecto de $\langle\ ,\ \rangle$.

TEOREMA A.1.

Si M es una $J(4,-2)$-variedad puede determinarse una distribución complementaria Q_2 de Q_1 en Q y una métrica adaptada $\langle\ ,\ \rangle$ en M tal que:

1) Q_1 y Q_2 son mutuamente ortogonales respecto de $\langle\ ,\ \rangle$.

2) J transforma una base ortonormal de Q_2 en una base ortonormal de Q_1.

DEMOSTRACION:

Puede verse la prueba de este teorema en Yano [1].

En una $J(4,-2)$-variedad M vamos a llamar:

$$P_1 = \{X \in P \mid JX = X\}$$

$$P_2 = \{X \in P \mid JX = -X\}$$

TEOREMA A.2.

Se verifica que $P = P_1 \oplus P_2$ y además P_1 y P_2 son mutuamente ortogonales respecto de *cualquier métrica adaptada en M.*

DEMOSTRACION:

Sea $X \in P \;\rightarrow\; J^2X = X$. Llamemos:

$$X_1 = \frac{1}{2}(J^3+J^2)X$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(J^2-J^3)X$$

Teniendo en cuenta que $J^2X=X$ resulta que:

a) $X_1+X_2 = \frac{1}{2}(J^2X+J^2X) = J^2X = X$

$$JX_1 = \frac{1}{2}(J^4+J^3)X = \frac{1}{2}(J^2J^2X+J^3X) = \frac{1}{2}(J^2X+J^3X) = X_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad X_1 \in P_1$$

$$JX_2 = \frac{1}{2}(J^3X-J^4X) = \frac{1}{2}(J^3X-J^2J^2X) = \frac{1}{2}(J^3X-J^2X) = -X_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad X_2 \in P_2$$

b) $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ ya que si $X \in P_1 \cap P_2 \quad \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} X \in P_1 \rightarrow JX = X \\ X \in P_2 \rightarrow JX = -X \end{array}\right\} \rightarrow X = -X \rightarrow X = 0$$

De a) y b) se sigue que $P = P_1 \oplus P_2$. Sea, entonces, $<\ ,\ >$ una métrica adaptada en M y tomemos $X_1 \in P_1, X_2 \in P_2$. Resulta:

$$X_1 \in P_1, X_2 \in P_2 \rightarrow X_1, X_2 \in P \rightarrow <X_1,X_2> = <JX_1,JX_2>$$

pero de otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \in P_1 \rightarrow JX_1 = X_1 \\ X_2 \in P_2 \rightarrow JX_2 = -X_2 \end{array}\right\} \rightarrow <JX_1,JX_2> = -<X_1,X_2>$$

Por lo tanto:

$$<X_1,X_2> = -<X_1,X_2> \rightarrow <X_1,X_2> = 0$$

En todo este apéndice vamos a considerar en M una métrica adaptada como la del teorema A.1.Como consecuencia de esto resulta que podemos escribir:

$$T(M) = P \oplus Q = P_1 \oplus P_2 \oplus Q = P \oplus Q_1 \oplus Q_2 =$$

$$= P_1 \oplus P_2 \oplus Q_1 \oplus Q_2$$

donde las distribuciones P_1,P_2,Q_1,Q_2 son mutuamente ortogonales respecto de dicha métrica.

Vamos a suponer igualmente que la conexión afín inducida verifica la ya conocida condición |2.2|:

$$\Delta_X JY = J\Delta_X Y \qquad \forall\ X,Y \in T(M)$$

TEOREMA A.3.

Si X,Y son dos campos cualesquiera pertenecientes a la distribución Q_2 se verifica:
$<X,Y> = <JX,JY>$

DEMOSTRACION:

La misma del teorema 2.30.

TEOREMA A.4.

Se verifican las siguientes propiedades:

1) $X \in P_i \rightarrow \Delta_Y X \in P_i \quad \forall\, Y \in T(M) \quad i=1,2$

2) $X \in Q_i \rightarrow \Delta_Y X \in Q_i \quad \forall\, Y \in T(M) \quad i=1,2$

DEMOSTRACION:

1) Sea $X \in P_1$.Por definición de P_1 resulta que $X \in P$ y además $JX = X$.Entonces:

$X \in P \rightarrow J^2X = X \rightarrow J^2\Delta_Y X = \Delta_Y J^2 X = \Delta_Y X \rightarrow \Delta_Y X \in P$

$JX = X \rightarrow J\Delta_Y X = \Delta_Y JX = \Delta_Y X$

Por lo tanto resulta que $\Delta_Y X \in P$ y $J\Delta_Y X = \Delta_Y X$.Eso significa que $\Delta_Y X \in P_1$.

La demostración para el caso de P_2 es totalmente analoga.

2) Sea $X \in Q_1 \rightarrow JX = o \rightarrow J\Delta_Y X = \Delta_Y JX = 0 \rightarrow \Delta_Y X \in Q_1$

La demostración para Q_2 es identica a la del teorema 2.32

TEOREMA A.5.

P_1, P_2, Q_1, Q_2 son distribuciones involutivas y cualquier subvariedad integral $\overline{M}$ de una de ellas es subvariedad minimal de M.

DEMOSTRACION:

Haremos la demostración unicamente para el caso de la distribución P_1.

a) Sean $X,Y \in P_1$.Por el teorema A.4 tenemos que $\Delta_X Y$, $\Delta_Y X$ pertenecen tambien a P_1.Por lo tanto:

$$[X,Y] = \Delta_X Y - \Delta_Y X \in P_1$$

lo que demuestra que P_1 es involutiva.

b) Sea $\overline{M}$ una subvariedad integral de P_1. En cada punto $z \in \overline{M}$ se cumple, por ello, que:

$$\overline{M}_z = P_{1_z}$$

Teniendo en cuenta además que P_1, P_2, Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales y que $T(M) = P_1 \oplus P_2 \oplus Q_1 \oplus Q_2$ se deduce que:

$$\overline{M}_z^{\perp} = P_{2_z} \oplus Q_{1_z} \oplus Q_{2_z}$$

De esta manera si A es un campo normal a $\overline{M}$ puede escribirse:

$$A = A_2 + A_1' + A_2'$$

donde $A_2 \in P_2, A_1' \in Q_1$ y $A_2' \in Q_2$. En consecuencia si $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ es una base ortonormal de $T(\overline{M})$ tenemos, por el teorema A.4 que:

$$\Delta_{X_i} A_2 \in P_2 \qquad \Delta_{X_i} A_1' \in Q_1 \qquad \Delta_{X_i} A_2' \in Q_2$$

de donde, como $X_i \in P_1$, resulta:

$$<\Delta_{X_i} A_2, X_i> = <\Delta_{X_i} A_1', X_i> = <\Delta_{X_i} A_2', X_i> = 0$$

Ahora bien ya hemos demostrado repetidamente que:

$$<\Delta_{X_i} A, X_i> = <L_A X_i, X_i>$$

para cualquier campo A normal a $\overline{M}$. En consecuencia:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=k} <L_A X_i, X_i> = \sum_{i=1}^{i=k} <\Delta_{X_i} A, X_i> =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=k} \{<\Delta_{X_i} A_2, X_i> + <\Delta_{X_i} A_1', X_i> + <\Delta_{X_i} A_2', X_i>\} = 0$$

lo que significa que $\overline{M}$ es subvariedad minimal.

DEFINICION A.2.

Sea M una $J(4,-2)$-variedad. Una subvariedad $\overline{M}$ de dimensión par $k=2h$ recibe el nombre de subvariedad casi-tangente si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1) $JX \in T(\overline{M}) \quad \forall\, X \in T(\overline{M})$

2) $T(\overline{M}) \subseteq Q$

3) $rango(J/_{T(\overline{M})}) = h$

TEOREMA A.6.

Si $\overline{M}$ es una subvariedad casi-tangente de la $J(4,-2)$-variedad M y llamamos:

$\overline{Q}_1 = J[T(\overline{M})]$

entonces se verifica que $\overline{Q}_1 = Ker(J/_{T(\overline{M})})$

DEMOSTRACION:

LLamemos $\overline{J} = J/_{T(\overline{M})}$ .Por definición se tiene:

$$\overline{Q}_1 = J[T(\overline{M})] = \overline{J}[T(\overline{M})]$$

Por lo tanto:

$$\dim(Q_1) = \dim \overline{J}[T(\overline{M})] = rango(\overline{J}) = h$$

De otra parte si $X \in \overline{Q}_1 \rightarrow X \in J[T(\overline{M})]$. Pero $T(\overline{M}) \subseteq Q$ por hipotesis, luego:

$$X \in JQ = Q_1 \rightarrow JX = 0 \rightarrow \bar{J}X = 0 \rightarrow X \in \mathrm{Ker}(\bar{J}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{Q}_1 \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{J})$$

Además:

$$\dim \mathrm{Ker}(\bar{J}) = k - \mathrm{rango}(\bar{J}) = k-h = 2h-h = \dim(\bar{Q}_1)$$

En definitiva:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{Q}_1 \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{J}) \\ \dim(\bar{Q}_1) = \dim \mathrm{Ker}(\bar{J}) \end{array}\right\} \rightarrow \bar{Q}_1 = \mathrm{Ker}(\bar{J})$$

COROLARIO 1

$\bar{Q}_1 \subseteq Q_1$

DEMOSTRACION:

$$\bar{Q}_1 = \mathrm{Ker}(\bar{J}) \subseteq \mathrm{Ker}(J) = Q_1$$

COROLARIO 2

Sea $\bar{Q}_2$ el complemento ortogonal en $T(\bar{M})$ de $\bar{Q}_1$. Se verifica:

1) $T(\bar{M}) = \bar{Q}_1 \oplus \bar{Q}_2$ y además $\bar{Q}_2 \subseteq Q_2$

2) J transforma una base ortonormal de $\bar{Q}_2$ en una base ortonormal de $\bar{Q}_1$.

DEMOSTRACION:

1) Que $T(\bar{M}) = \bar{Q}_1 \oplus \bar{Q}_2$ sigue de la definición de $\bar{Q}_2$. Como consecuencia un campo $X \in T(\bar{M})$ puede descomponerse, de manera única en la suma:

$$X = X_1 + X_2 \qquad X_1 \in \overline{Q}_1, X_2 \in \overline{Q}_2$$

Veamos que $\overline{Q}_2 \subseteq Q_2$. Si $X \in \overline{Q}_2 \rightarrow X \in T(\overline{M}) \rightarrow X \in Q$ y por lo tanto puede escribirse:

$$X = X_1' + X_2' \qquad X_1' \in Q_1, X_2' \in Q_2$$

donde, como sabemos $X_1' = JX$. Pero $X \in T(\overline{M}) \rightarrow JX = X_1' \in$ $\in T(\overline{M}) \rightarrow X_2' = X - X_1' \in T(\overline{M})$.

Además $X_1' = JX$ y $X \in T(\overline{M})$, esto implica que:

$$X_1' \in J[T(\overline{M})] = \overline{Q}_1 \rightarrow X_1' \in \overline{Q}_1$$

De otra parte sea Z cualquier campo perteneciente a $\overline{Q}_1$. Por el corolario 1 del teorema A.6 sabemos que $Z \in Q_1$. Como además $X_2' \in Q_2$ y Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales resulta que:

$$\langle X_2', Z\rangle = 0$$

Esto unido a que $X_2' \in T(\overline{M})$ demuestra que X_2' pertenece al complemento ortogonal en $T(\overline{M})$ de $\overline{Q}_1$, es decir a $\overline{Q}_2$. Por lo tanto se tiene:

$$X = X_1' + X_2' \qquad X_1' \in \overline{Q}_1, X_2' \in \overline{Q}_2$$

Pero como, por hipotesis, $X \in \overline{Q}_2$ tambien podemos poner:

$$X = 0 + X \qquad 0 \in \overline{Q}_1, X \in \overline{Q}_2$$

y como la descomposición de X tiene que ser única se concluye que:

$$X = X_2' \rightarrow X \in Q_2 \rightarrow \overline{Q}_2 \subseteq Q_2$$

2) Sea $\{X_1, \ldots, X_h\}$ una base ortonormal de $\overline{Q}_2$($\overline{Q}_2$ tiene di-

mensión h ya que $T(\overline{M}) = \overline{Q}_1 \oplus \overline{Q}_2$ y por lo tanto $\dim(\overline{Q}_2) = \dim T(\overline{M}) - \dim(\overline{Q}_1) = k - h = h$). Probemos que $\{JX_1, \ldots, JX_h\}$ es una base ortonormal de $\overline{Q}_1$ para lo cual basta, ya que $\dim(\overline{Q}_1) = h$, con demostrar que son campos independientes de $\overline{Q}_1$. Ante todo como $X_1, \ldots, X_h \in \overline{Q}_2 \to X_1, \ldots, X_h \in T(\overline{M}) \to JX_1, \ldots, JX_h \in J[T(\overline{M})] = \overline{Q}_1$. Veamos que son campos independientes. Supongamos, por reducción al absurdo, que se tuviese:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i JX_i = o \qquad \text{con algún } \lambda_i \neq 0$$

resultaria entonces:

$$J\left[\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i\right] = 0 \to \sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in \overline{Q}_1$$

Pero:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in \overline{Q}_2 \qquad \text{porque} \qquad X_i \in \overline{Q}_2$$

y por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i \in \overline{Q}_1 \cap \overline{Q}_2$$

por lo que necesariamente ha de ser:

$$\sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i X_i = o$$

lo que es imposible porque uno de los λ_i era distinto de cero y, por hipotesis, $X_1, \ldots, X_h$ eran campos independientes de $\overline{Q}_2$.

$\{JX_1, \ldots, JX_h\}$ es además una base ortonormaldde $\overline{Q}_1$ ya que

$$<X_i, X_j> = \partial_{ij}$$

por ser $\{X_1, \ldots, X_h\}$ una base ortonormal y entonces:

$$<JX_i, JX_j> = <X_i, X_j> = \partial_{ij}$$

en virtud del teorema A.3 y puesto que $X_i \in \overline{Q}_2 \rightarrow X_i \in Q_2$

COROLARIO

Puede determinarse una base $\{X_1, \ldots, X_h, JX_1, \ldots, JX_h\}$ *de* $T(\overline{M})$ *ortonormal respecto de* $< , >$ *tal que:*

$X_1, \ldots, X_h \in \overline{Q}_2 \subseteq Q_2$

$JX_1, \ldots, JX_h \in \overline{Q}_1 \subseteq Q_1$

TEOREMA A.7.

Si $A \in Q_2$ *es un campo normal a* $\overline{M}$ *se verifica que* JA *es tambien normal a* $\overline{M}$.

DEMOSTRACION:

Igual que en el teorema 2.31

TEOREMA A.8.

Toda subvariedad casi-tangente $\overline{M}$ *de una* $J(4,-2)$*-variedad* M *cuya métrica cumpla la condición* [2.2] *es minimal.*

DEMOSTRACION:

Sea $\{X_1,\dots,X_h,JX_1,\dots,JX_h\}$ $X_1,\dots,X_h \in Q_2$ $,JX_1,\dots,JX_h \in$ $\in Q_1$ una base ortonormal de $T(\overline{M})$ y sea A un campo normal a $\overline{M}$. Descompongamos A en la forma:

$$A = A_o + A_1 + A_2 \qquad A_o \in P, A_1 \in Q_1, A_2 \in Q_2$$

Se demuestra igual que en el teorema 2.29 que A_o, A_1, A_2 son normales a $\overline{M}$.

Si recordamos que:

$$<L_A X, X> = <\Delta_X A, X>$$

para todo campo A normal a $\overline{M}$ y todo $X \in T(\overline{M})$ y además te nemos en cuenta el teorema A.4 resulta:

$$<L_{A_o} X_i, X_i> = <\Delta_{X_i} A_o, X_i> = 0$$

$$<L_{A_o} JX_i, JX_i> = <\Delta_{JX_i}, JX_i> = 0$$

ya que $\Delta_{X_i} A_o, \Delta_{JX_i} A_o \in P, X_i \in Q_2, JX_i \in Q_1$ y P, Q_1, Q_2 son mutuamente ortogonales.

Exactamente como en el teorema 2.29 se demuestra que:

$$<L_{A_1} JX_i, JX_i> = <L_{A_2} JX_i, JX_i> = 0$$

$$<L_{A_1} X_i, X_i> = o$$

y como en el teorema 2.33 que:

$$<L_{A_2} X_i, X_i> = 0$$

por lo que podemos poner:

$$<L_A X_i, X_i> = <L_{A_o} X_i, X_i> + <L_{A_1} X_i, X_i> + <L_{A_2} X_i, X_i> = 0$$

y analogamente:

$$<L_A JX_i, JX_i> = o$$

En consecuencia:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=h} <L_A X_i, X_i> + \sum_{i=1}^{i=h} <L_A JX_i, JX_i> = 0$$

lo que demuestra que $\overline{M}$ es subvariedad minimal de M.

DEFINICION A.3.

Sea M una J(4,-2)-variedad. Una subvariedad $\overline{M}$ de M recibe el nombre de J(4,-2)-subvarie dad si:

1) $JX \in T(\overline{M}) \qquad \forall\, X \in T(\overline{M})$

2) J induce sobre $\overline{M}$ una J(4,-2)-estructura.

TEOREMA A.9.

Sea $\overline{M}$ una J(4,-2)-subvariedad de la J(4,-2) variedad M y llamemos:

$$\overline{P}_i = P_i \cap T(\overline{M}) \qquad \overline{Q}_i = Q_i \cap T(\overline{M}) \qquad i=1,2$$

se verifica que:

$$T(\overline{M}) = \overline{P}_1 \oplus \overline{P}_2 \oplus \overline{Q}_1 \oplus \overline{Q}_2$$

DEMOSTRACION:

Analoga a la del teorema 2.27.

Como en dicho teorema 2.27 se demuestra además que J trans forma una base ortonormal de $\overline{Q}_2$ en una base ortonormal de $\overline{Q}_1$. Ello da lugar al siguiente corolario:

COROLARIO

Si $\overline{M}$ es una $J(4,-2)$-subvariedad puede determinarse una base de $T(\overline{M})$:

$\{Z_1,\ldots,Z_t,Z_{t+1},\ldots,Z_s,X_1,\ldots,X_h,JX_1,\ldots,JX_h\}$

ortonormal respecto de < , > tal que:

$Z_1,\ldots,Z_t \in P_1$

$Z_{t+1},\ldots,Z_s \in P_2$

$X_1,\ldots,X_h \in Q_2$

$JX_1,\ldots,JX_h \in Q_1$

TEOREMA A.10.

Si $\overline{M}$ es una $J(4,-2)$-subvariedad y $A \in Q_2$ es un campo normal a $\overline{M}$ se verifica que JA es asimismo normal a $\overline{M}$.

DEMOSTRACION:

Como la del teorema 2.31.

TEOREMA A.11.

Sea M una $J(4,2)$-variedad con una métrica adaptada como la del teorema A.1. y cuya conexión afín cumple la condición [2.2]. Si M

$\overline{M}$ es una $J(4,-2)$-subvariedad de M se verifica que la condición necesaria y suficiente para que $\overline{M}$ sea subvariedad minimal es que:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \langle L_{A_1} Z_i, Z_i\rangle = \sum_{j=t+1}^{j=s} \langle L_{A_2} Z_j, Z_j\rangle = 0$$

para todo campo A_1 normal a $\overline{M}$ que pertenezca a P_1 y todo campo A_2 normal a $\overline{M}$ que pertezca a P_2.

DEMOSTRACION:

Demostrar que $\overline{M}$ es subvariedad minimal equivale a probar que:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=t} \langle L_A Z_i, Z_i\rangle + \sum_{j=t+1}^{j=s} \langle L_A Z_j, Z_j\rangle + \sum_{i'=1}^{i'=h} \langle L_A X_{i'}, X_{i'}\rangle + \sum_{i'=1}^{i'=h} \langle L_A JX_{i'}, JX_{i'}\rangle = 0$$

para todo campo A normal a $\overline{M}$.

Igual que en el teorema A.8 se demuestra que:

$$\langle L_A X_{i'}, X_{i'}\rangle = \langle L_A JX_{i'}, JX_{i'}\rangle = o$$

y por lo tanto:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=s} \langle L_A Z_i, Z_i\rangle + \sum_{j=t+1}^{j=s} \langle L_A Z_j, Z_j\rangle \qquad [A.1]$$

Si descomponemos A en la forma:

$$A = A_1 + A_2 + A' \qquad A_1 \in P_1, A_2 \in P_2, A' \in Q$$

resulta por el teorema A.4 que:

$$\Delta_{Z_i} A_1 \in P_1 \qquad \Delta_{Z_i} A_2 \in P_2$$

Además $A' \varepsilon\ Q \rightarrow \ \Delta_{Z_i} A' \varepsilon\ Q$. Por lo tanto, como $Z_i\ \varepsilon\ P_1$,:

$$<\Delta_{Z_i} A_2, Z_i> \ = \ <\Delta_{Z_i} A', Z_i> \ = 0$$

de donde:

$$<L_A Z_i, Z_i> \ = <\Delta_{Z_i} A, Z_i> \ = <\Delta_{Z_i} A_1, Z_i> \ + <\Delta_{Z_i} A_2, Z_i> \ +$$

$$+ \ <\Delta_{Z_i} A', Z_i> \ = \ <\Delta_{Z_i} A_1, Z_i> \ = \ <L_{A_1} Z_i, Z_i>$$

Analogamente:

$$<L_A Z_j, Z_j> \ = \ <L_{A_2} Z_j, Z_j>$$

Por lo que sustituyendo en [A.1] se tiene:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{i=t} <L_{A_1} Z_i, Z_i> \ + \sum_{j=t+1}^{j=s} <L_{A_2} Z_j, Z_j>$$

Del mismo modo:

$$H(JA) = \sum_{i=1}^{i=t} <L_{JA_1} Z_i, Z_i> \ + \sum_{j=t+1}^{j=s} <L_{JA_2} Z_j, Z_j>$$

pero $A_1\ \varepsilon\ P_1 \rightarrow JA_1 = A_1, A_2\ \varepsilon\ P_2 \rightarrow JA_2 = -A_2$, lo que implica:

$$H(JA) = \sum_{i=1}^{i=t} <L_{A_1} Z_i, Z_i> \ - \sum_{j=t+1}^{j=s} <L_{A_2} Z_j, Z_j>$$

de modo que:

$$H(A) + H(JA) = 2 \sum_{i=1}^{i=t} <L_{A_1} Z_i, Z_i>$$

$$H(A) - H(JA) = 2 \sum_{j=t+1}^{j=s} <L_{A_2} Z_j, Z_j>$$

Si $\overline{M}$ es subvariedad minimal resulta que $H(A) = 0$ para todo campo A normal a $\overline{M}$ de modo que $H(A) = H(JA) = 0$, de donde $H(A) + H(JA) = H(A) - H(JA) = 0$ y por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \langle L_{A_1} Z_i, Z_i \rangle = \sum_{j=t+1}^{j=s} \langle L_{A_2} Z_j, Z_j \rangle = 0$$

luego la condición del teorema es necesaria. Recíprocamente si:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \langle L_{A_1} Z_i, Z_i \rangle = \sum_{j=t+1}^{j=s} \langle L_{A_2} Z_j, Z_j \rangle = o$$

se tiene que:

$$H(A) + H(JA) = 0$$

$$H(A) - H(JA) = 0$$

de donde:

$$2\,H(A) = 0 \qquad H(A) = 0$$

por lo que $\overline{M}$ será subvariedad minimal.

B I B L I O G R A F I A

BERGER-GOSTIAUX

Geometrie Differentielle.Armand Collin-1972

Paris.

BISHOP-CRITENDEN

Geometrie of manifolds.Academic Press-1964

New York.

CLARK R.S. y BRUCKHEIM R.

Sur les structures presque tangentes.C.R.Academie Sciences.Paris.

EISENHART L.P. [1]

Riemannian Geometrie.Princeton University Press

Sexta Edición-1966.

EISENHART L.P. [2]

A teatrise on the differential geometrie of curves and surfaces.Dover Publications Inc.New York

ELIOPOULUS H.

Structures presque tangentes sur les varietes differentiables.C.R.Academie Sciences.Paris 1962.

GADEA P.

Estructuras polinomicas de tipo $\phi(4,\pm 2)$ y estructuras casi-tangentes.Universidad de Santiago de Compostela 1973.

GADEA P.

Conditions necessaires d'existence d'une structure presque tangente.A publicar en los Anales del Instituto Fourier.Grenoble.

GODBILLON

Geometrie differentielle et mecanique analytique Hermann,Paris 1969

GRAY A.

Minimal varieties and almost hermitian submanifolds.Universidad de California.

GRIFONE J. [1]

Structures presque γ-complexes.These,Grenoble 1965.

GRIFONE J. [2]

Structures presque tangentes et connexions non homogenes.Grenoble 1971.

GUGGENHEIMER

Differential Geometrie.Mc Graw Hill.New York 1963.

HELGASON S.

Differential Geometrie and symetric Spaces. Academic Press.New York 1963.

HICKS N.

Notes on Differential Geometrie. Van Nostrand Rienhold Company. New York 1971.

KOBAYASHI and NOMIZU

Foundations of Differential Geometrie (Volumenes I y II). Interscience. New York 1963.

KOSZUL

Lectures on fibre bundles and Differential Geometrie. Tata Institute of fundamental research. Bombay 1960.

MALLIAVIN

Geometrie Differentielle intrinsique. Hermann Paris 1972.

MATSUSHIMA

Differentiable manifolds. Pure and applied Mathematics. New York 1972.

SPIVAK

Differential Geometrie. Vol I y II. 1970

STEMBERG

Lectures on Differential Geometrie. Prentice Hall 1964. New Jersey.

TERRIER J.

Sous-varietes minimales. Ecole polytechnique federale. Zurich 1967.

VIDAL ABASCAL E.

Geometria Diferencial. Dossat. Madrid. 1969.

VIDAL ABASCAL E.

Geometria integral sobre las superficies curvas Santiago de Compostela.C.S.I.C 1950

VIDAL COSTA

COnexiones en las variedades casi-producto y foliaciones.Departamento de Geometria y Topologia Santiago de Compostela 1971.

YANO K. [1]

On a structure f satisfying $f^3+f=0$.Technical Report,n°12 (1961) University of Washinton.

YANO K. [2]

On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3+f=0$.Tensor N.S.(14)

YANO K. [3]

Almost complex structures induced in tangent bundles.Journal of Mathematics (16) 1967.

YANO K. HOUH C. y CHEN B.

Structures defined by a tensor field of tipe (1,1) satisfying $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$.Tensor N.S.(23) 1972

— 190 —

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. ANTONIO CARMELO ALCARAZ MARTINEZ titulada "MINIMALIDAD Y J(4,±2) ESTRUCTURAS".

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "cum laude"

Sevilla, ___ de ___ 19__

El Vocal,	El Vocal,	El Vocal,