

Trabajo fin de grado
Ingeniería Aeroespacial

Análisis del frenado magnético en un sistema de
caída libre

Autor: Jorge Herena Panadero

Tutor: Antonio González Fernández

Departamento de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo fin de grado
Ingeniería Aeroespacial

Análisis del frenado magnético en un sistema de caída libre

Autor:

Jorge Herena Panadero

Tutor:

Antonio González Fernández
Profesor titular de Universidad

Departamento de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Trabajo fin de grado: Análisis del frenado magnético en un sistema de caída libre

Autor: Jorge Herena Panadero

Tutor: Antonio Fernández González

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El secretario del Tribunal

A mi familia

A mi tutor

Agradecimientos

Este trabajo fin de grado supone una meta, que, a nivel personal, era inalcanzable cuando todo comenzó, pero que ya está llegando a su fin.

Quisiera dar las gracias a mi familia por el constante apoyo en este duro camino. En especial a mis padres, que han estado a mi lado en todos y cada uno de los días de esta carrera, en las buenas y en las malas. Sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

Gracias, también, al Dr. D. Antonio González Fernández, mi tutor, por su paciencia y entrega a este trabajo, pues ha hecho todo lo que ha estado en sus manos.

Gracias a todos los amigos que la Universidad me ha brindado.

Jorge Herena Panadero
Estudiante de Ingeniería Aeroespacial
Sevilla, 2018

Resumen

Este trabajo fin de grado tiene por objeto el análisis de la fuerza de frenado magnético que experimenta un imán de cierta longitud cuando cae por el interior de un tubo de metal conductor. Este movimiento lleva consigo la aparición de corrientes inducidas, denominadas corrientes de Foucault. Dichas corrientes son consecuencia del campo magnético que genera el imán en el interior del tubo.

A su vez, las corrientes de Foucault generan un campo magnético que produce una fuerza sobre el imán en movimiento, de la misma dirección y sentido opuesto al mismo. Esta es la fuerza de frenado en caída libre que experimenta el imán a lo largo de su recorrido en el interior del tubo. Este tema es tratado en numerosas publicaciones científicas, por lo que se va a partir de un dipolo magnético (ya estudiado).

Tras este análisis, la novedad está en la resolución del problema asociado a un imán de longitud finita y la dependencia de las variables del problema con dicha longitud. El problema es abordable como una superposición de dipolos en el problema anterior.

En la primera parte del trabajo se ha llevado a cabo el desarrollo del problema analíticamente, atendiendo a las ecuaciones de la Física, y posteriormente se han llevado a cabo una serie de experimentos para ver la relación entre ambos resultados. Estos resultados muestran, que a pesar de las hipótesis simplificadoras realizadas para la resolución del problema, los resultados se ajustan de forma aceptable a los experimentos.

Abstract

The object of this project is the analysis of the magnetic braking force experienced by a certain length magnet when it falls inside a conductive metal pipe. This movement carries with it the appearance of induced currents, called eddy currents. These currents are a consequence of the magnetic field generated by the magnet inside the pipe.

In turn, eddy currents generate a magnetic field that produces a force on the motion magnet, along the same direction but opposite the motion. This is the braking force in the free fall that the magnet experiences along its path, inside the pipe. This subject is treated in numerous scientific publication, so it is going from a magnetic dipole (already studied).

After this analysis, the novelty is the resolution of the associated problem with a finite length magnet and the dependence of the problem variables with the length. The problem is approachable as a superposition of dipoles in the previous problem.

At first, the problem was developed analytically, attending to Physics equation, and subsequently, a serie of experiments were carried out to study the relation between both results. These results show despite the simplifying assumptions made to solve the problem, the results are adjusted in an acceptable way to the experiments.

Índice

Agradecimientos	ixx
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xixx
1 Introducción	1
1.1. <i>Conceptos básicos</i>	1
1.2. <i>Aplicaciones prácticas</i>	3
1.2.1. <i>Ejemplo de aplicación práctica</i>	3
2 Modelo del sistema	5
2.1. <i>Dipolo magnético</i>	6
2.2. <i>Barra imanada</i>	8
3 Caída de un dipolo puntual	9
3.1. <i>Ecuaciones</i>	10
3.1.1. <i>Primera forma</i>	10
3.1.2. <i>Segunda forma</i>	11
3.2. <i>Solución</i>	12
3.2.1. <i>Primera forma</i>	12
3.2.2. <i>Segunda forma</i>	15
3.2.3. <i>Ejemplo numérico</i>	16
3.3 <i>Gráficas</i>	16
4 Caída de un imán de longitud finita	19
4.1. <i>Ecuaciones</i>	19
4.2. <i>Solución</i>	20
4.2.1 <i>Cálculo de la potencia disipada integrando en el espesor</i>	25
5 Experimentos	26
5.1. <i>Medidas</i>	26
5.1.1. <i>Medida de la masa</i>	26
5.1.2. <i>Medida del campo magnético</i>	27
5.1.3. <i>Primera estimación del tiempo de caída</i>	32
5.1.4. <i>Medida exacta del tiempo de caída</i>	34
5.1.5. <i>Comparación con resultados analíticos</i>	35
6 Aplicaciones	38
7 Conclusiones	41
Referencias	42
Anexo	43

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4–1. Valores de interpolación $G(b^*)$	23
Tabla 5–1. Algunos valores del campo magnético de un imán frente a la distancia de la sonda	30
Tabla 5–2. Algunos valores del campo magnético de dos imanes frente a la distancia de la sonda	31
Tabla 5–3. Tiempos de caída en primera aproximación para tres imanes distintos	33
Tabla 5–4. Tiempos de caída para dos imanes distintos	34
Tabla 5–5. Valores de la constante de fricción	35

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Fuerzas que actúan sobre el imán en su movimiento	1
Figura 1-2. C. Magnético $\mathbf{B}(t)$ generado por una espira por la que circula una corriente de intensidad $I(t)$	2
Figura 1-3. Sistema de frenado magnético para un motor eléctrico	4
Figura 1-4. Esquema de las fuerzas de frenado inducidas	4
Figura 2-1. Esquema del momento magnético de un electrón orbitando alrededor del núcleo	5
Figura 2-2. Modelo de Ampère y Gilbert, respectivamente	6
Figura 2-3. Dipolo que cae en el interior de un tubo de metal conductor	7
Figura 2-4. Barra imanada que cae en el interior de un tubo de metal conductor	8
Figura 3-1. Campo generado por el dipolo que cae en el interior de un tubo metálico conductor	9
Figura 3-2. Comportamiento cualitativo del campo eléctrico generado por un dipolo magnético	13
Figura 3-3. Comportamiento cualitativo de la potencia disipada a lo largo del tubo en el caso del dipolo	14
Figura 3-4. Velocidad de caída del dipolo	17
Figura 3-5. Posición del dipolo	18
Figura 4-1. Comportamiento del valor de $G(b^*)$ calculada numéricamente	24
Figura 5-1. Báscula digital de precisión OHAUS Scout Pro	27
Figura 5-2. Sistema para medición de campo magnético	27
Figura 5-3. Dipolo representado como una distribución de corrientes: solenoide	28
Figura 5-4. Dipolo representado como dos discos independientes	29
Figura 5-5. Ajuste del campo magnético generado por el dipolo magnético	31
Figura 5-6. Ajuste del campo magnético generado por la barra imanada	32
Figura 5-7. Sistema de medición del tiempo de caída	33
Figura 6-1. Sistema real de amortiguador magnético	39
Figura 6-2. Esquema de un sistema de amortiguación magnético	39

1 INTRODUCCIÓN

*El trabajo de James Clerk Maxwell cambió el mundo
para siempre.*

- Albert Einstein -

El sistema a estudiar es un imán que cae por el interior de un tubo metálico vertical. Para ello se toma la hipótesis de que el imán cae totalmente centrado en el eje del tubo, sin ningún tipo de oscilación en su movimiento. Por otro lado, se supone que el tubo es infinitamente largo en comparación con la longitud del imán, por lo que se desprecian los efectos de borde.

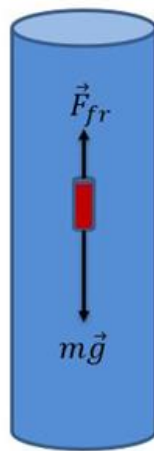


Figura 1-1. Fuerzas que actúan sobre el imán en su movimiento.

El imán, en su movimiento de caída, está sometido a dos fuerzas, el peso propio debido a la gravedad y la fuerza de frenado (Figura 1-1). Por eso, en este capítulo se describirán los principios de esta fuerza de frenado, antes de comenzar con la resolución del problema en sí.

1.1 Conceptos básicos

Cuando se habla de campos eléctricos y campos magnéticos estacionarios o permanentes, los problemas de ambos se encuentran desacoplados como si de problemas independientes se tratara. Sin embargo, cuando se tienen campos variables en el tiempo el enfoque del problema cambia, ya que existe una dependencia entre ellos. Faraday comprobó que la variación de un campo magnético lleva asociada la aparición de un campo eléctrico, de la misma forma que Maxwell predijo que la variación de un campo eléctrico lleva consigo la aparición de un

campo magnético, hecho que fue demostrado experimentalmente por Hertz. Este hecho es el fundamento que diferencia los campos magnéticos y eléctricos estacionarios de los variables en el tiempo [1].

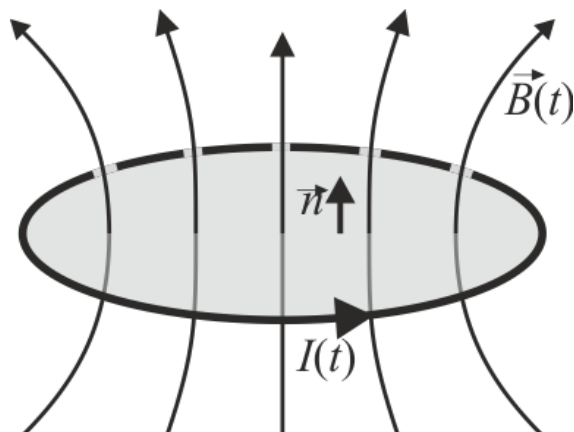


Figura 1-2. Campo magnético $B(t)$ generado por una espira por la que circula una corriente de intensidad $I(t)$.

Imagen obtenida de [3]

En la figura 1-2 se representa que, para el caso de una espira por la que circula una corriente $I(t)$ aparece un campo magnético variable en el tiempo $\mathbf{B}(t)$. En el caso contrario, cuando se induce a una corriente, a partir de un campo magnético variable en el tiempo, el sentido de dicha corriente, depende del comportamiento del campo, es decir, si este aumenta o disminuye.

Por tanto, se puede hablar en estos casos de campos electromagnéticos, cuyo comportamiento viene determinado por las ecuaciones de Maxwell.

Ahora se está en condiciones de hablar de la ley de inducción, cuyo fundamento es la aparición de una fuerza electromotriz ante un campo magnético variable en el tiempo y matemáticamente se puede expresar mediante la Ley de Faraday [2]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

De forma integral, tomando la integral de superficie y mediante el Teorema de Stokes se obtiene:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{Fuerza electromotriz inducida} \equiv \varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{Flujo magnético} \equiv \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Así queda determinada la fuerza electromotriz inducida en un circuito, para el caso en que este esté en movimiento en el seno de un campo magnético, a partir de la variación del flujo magnético como:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Se debe indicar que el signo negativo viene dado por la **Ley de Lenz**, que afirma que el sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la variación de flujo magnético.

1.2 Aplicaciones prácticas

Tras el fundamento físico de los campos electromagnéticos, no solo hay una simple cuestión matemática en la que están basados, sino que son de gran interés en diversas ramas de la ingeniería y tecnología. La idea es poder utilizar la inducción electromagnética para producir campos eléctricos a partir de magnéticos y viceversa.

El objeto de este trabajo fin de grado radica en el estudio de la caída libre de una barra imanada en el interior de un tubo metálico, para estudiar la fuerza de frenado que experimenta dicha barra en su recorrido a lo largo de la caída. Por tanto, la aplicación directa en este caso es el frenado magnético.

Son muchos los usos y aplicaciones del frenado magnético, también conocido como frenado por corrientes de Foucault o corrientes de remolino (eddy currents). Estos sistemas de frenado son empleados en diversos campos de la ingeniería como, por ejemplo, frenado de grandes vehículos de transporte como camiones, trenes o ferrocarriles, pero también son de gran interés en la industria.

Por eso, a modo de introducción, se va a mostrar de una forma detallada un sistema utilizado como sistema de frenado magnético en motores eléctricos. La idea está fundamentada en disponer de un sistema, en que se puedan realizar pruebas y comprobaciones de motores antes de su instalación en la aplicación industrial final. Estas pruebas, se realizan principalmente para comprobar aspectos, tales como valores de temperatura alcanzados en los elementos constituyentes, relaciones entre las variables del problema, intensidades de corriente en las bobinas de inducción, etc.

Esto es simplemente un ejemplo de sistema en el que se utiliza el frenado magnético, basado en las corrientes de Foucault, pero hay otras muchas aplicaciones fuera del campo industrial donde se puede encontrar este sistema.

A continuación, se presentan una serie de ejemplos donde el frenado magnético es de aplicación:

- Atracciones como montañas rusas y actividades de puenting. Ventaja de precisión y mantenimiento. La energía cinética es disipada en forma de calor por efecto Joule. Se tiene la ventaja de que, a mayores velocidades, mayor es el efecto. Desventaja de que a bajas velocidades siguen siendo imprescindibles los frenos mecánicos.
- Medidores de consumo eléctrico. Permite el calibrado y ajuste de los discos y elementos que los forman.
- Algunos tacómetros.
- Análisis de piezas en ensayos no destructivos.

De hecho, al final de este trabajo fin de grado, se tratará de una forma más desarrollada y extensa el empleo de las corrientes de Foucault en el diseño de amortiguadores. Esto lleva consigo la gran ventaja de eliminar la fricción entre los componentes del amortiguador, y la reducción de mantenimiento que el sistema tiene asociado.

1.2.1 Ejemplo de aplicación práctica

El sistema que se va a mostrar a continuación está diseñado para motores que no excedan los 4 Kw de potencia y las 4500 rev/min. Se puede indicar que el sistema es modificable para actuar sobre sistemas con potencias y regímenes de giro superiores, pero eso no atañe a este trabajo [4].

Los elementos de los que consta el sistema son (Figura 1-3):

1. Soporte de balanza
2. Balanza
3. Mesa de anclaje del motor
4. Rejilla de protección
5. Discos de frenado
6. Eje de acople al motor
7. Bobinas de inducción

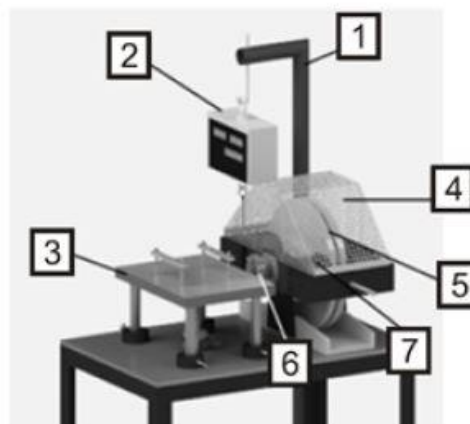


Figura 1-3. Sistema de frenado magnético para un motor eléctrico.

Imagen obtenida de [4]

Como se puede observar, en este caso el movimiento no es lineal sino rotatorio, pero el principio físico en el que descansa su funcionamiento es idéntico al que atañe a este trabajo, por eso se cree de gran interés como muestra de la variedad de aplicaciones que se pueden tener.

El motor se ancla a la mesa para tal fin, y su eje se conecta a la toma de los discos de frenado. Por otro lado, el sistema se conecta a una fuente de corriente, de forma que aparece un campo magnético a causa de la circulación de una intensidad de corriente por las bobinas.

El disco de frenado, de material conductor, al estar en movimiento en el seno de un campo magnético experimenta una fuerza contraria a la de su movimiento que produce su frenado y por ende el frenado del eje del motor al que está conectado.

De este sistema en concreto se han realizado una serie de ensayos que muestran las variables indicadas anteriormente, pero no son de interés en esta introducción.

A continuación, se muestra el fenómeno de forma gráfica (Figura 1-4):

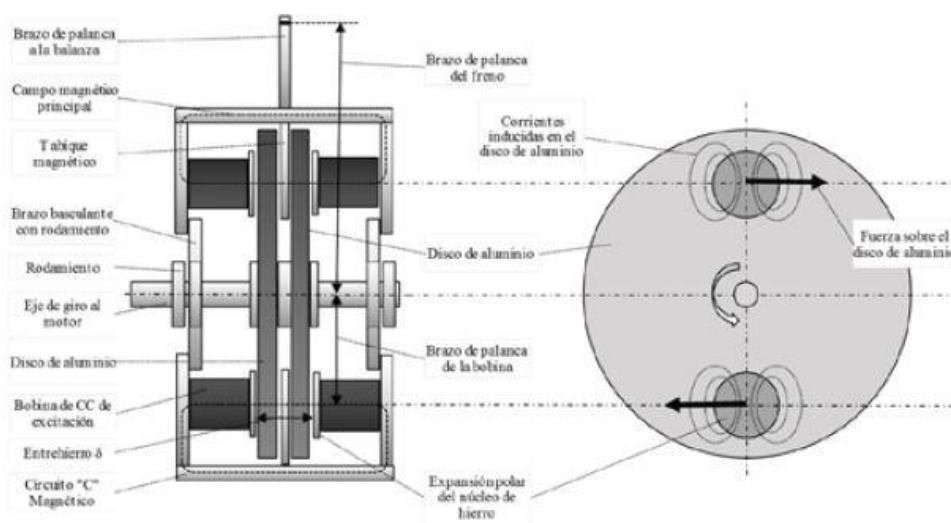


Figura 1-4. Esquema de las fuerzas de frenado inducidas.

Imagen obtenida de [4]

2 MODELO DEL SISTEMA

La Teoría de la Relatividad se debe en sus orígenes a las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético.

- Albert Einstein -

En este segundo capítulo se va a tratar el campo magnético generado por materiales magnéticos, a partir del concepto de la imanación de materia. Se presentará el concepto de potencial vector asociado a un dipolo puntual y se realizará el cálculo de dicho potencial para el caso de la barra imanada. Con ello se podrá obtener el campo magnético generado por cada uno de ellos.

A partir de la unidad básica que forma la materia, el átomo, se puede establecer el campo magnético generado por un determinado material. Todos los medios materiales están formados por átomos, y a su vez, estos átomos cuentan con un electrón que orbita en torno al núcleo del mismo.

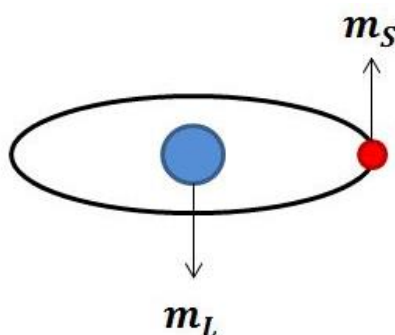


Figura 2-1. Esquema del momento magnético de un electrón orbitando alrededor del núcleo.

Con este concepto, se puede definir el momento magnético de un átomo que bajo el estudio de la Mecánica Cuántica se denomina spin (Figura 2-1). Debe notarse que el electrón, a modo de semejanza, es equivalente a una corriente que pasa por una espira infinitesimal.

Por otro lado, en un medio material magnético se puede definir el concepto de imanación (\mathbf{M}), que se representa como el momento dipolar magnético por unidad de volumen del medio material en el que se esté estableciendo, de forma que se puede designar como:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{m}_i$$

2.1. Dipolo magnético

Se puede definir el dipolo magnético como una semejanza al campo generado por un pequeño circuito eléctrico, cuando la distancia al circuito es mucho mayor que las dimensiones del mismo. Por tanto, se puede encontrar definido como una pequeña espira, que, aunque es válido como modelo, lo que verdaderamente define al dipolo magnético es el campo que produce.

Dicho esto, se debe indicar que hay dos formas distintas de ver un dipolo, que llevan a los dos modelos que se utilizan en la literatura.

Por un lado, el modelo de Ampère, que considera el dipolo como una pequeña espira de corriente eléctrica, y por otro lado el modelo de Gilbert, que define el dipolo como dos polos magnéticos separados en el interior del mismo (Figura 2-2) [5].

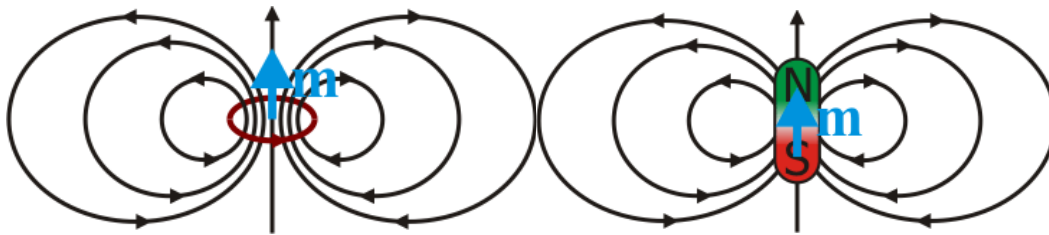


Figura 2-2. Modelo de Ampère y Gilbert, respectivamente.

Imagen obtenida de [5]

Esto trasladado a un imán cilíndrico de cierta longitud (Figura 2-3), implica que, en base a estos dos modelos, el imán puede ser tratado de dos formas:

- Según el modelo de Gilbert, sería un sólido con dos distribuciones de carga independientes, es decir, dos polos con el mismo valor de carga y signo opuesto. De esta forma se definirían las líneas de campo \mathbf{H} , salientes del polo positivo y entrantes al polo negativo.
- Según el modelo de Ampère, dicho imán podría modelarse como una superposición de corrientes de magnetización \mathbf{K} , es decir, una superposición de infinitas espiras de corriente, que darían lugar a una bobina.

Para el caso de un dipolo magnético puntual que está situado en el origen de coordenadas del sistema de referencia, el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ generado es:

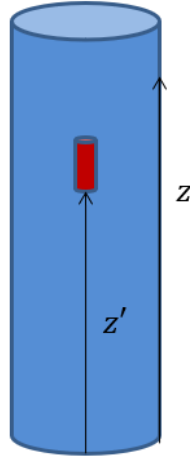
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Ahora bien, si el dipolo se encuentra situado en una posición definida por \mathbf{r}' , el potencial vector viene dado por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(m\mathbf{u}_z) \times (\rho\mathbf{u}_\rho + (z - z')\mathbf{u}_z)}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\rho\mathbf{u}_\theta}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Generalizando para una distribución de volumen que está en \mathbf{r}' , se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$



El campo magnético generado por dicho dipolo puntual es:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

Donde el vector que define la posición relativa viene dado como:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + (z - z') \mathbf{u}_z$$

Que bajo la siguiente propiedad:

$$\nabla \times (a\mathbf{F}) = \nabla a \times \mathbf{F} + a \nabla \times \mathbf{F}$$

Queda como:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right]$$

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r} = 3\mathbf{m} - \mathbf{m} = 2\mathbf{m}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

Y finalmente se obtiene la expresión del campo magnético generado por un dipolo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{-3\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{m}r^2}{r^5} \right)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} \right)$$

2.2. Barra imanada

La barra imanada se puede modelar como una superposición de dipolos (Figura 2-4), de forma que una vez realizado el estudio del potencial vector para el caso del dipolo magnético simple, basta con extender el resultado, como la contribución de todos los dipolos a un punto del exterior del material magnético, para conseguir así el potencial vector creado por la barra imanada en cada uno de los anillos (elementos diferenciales del tubo).

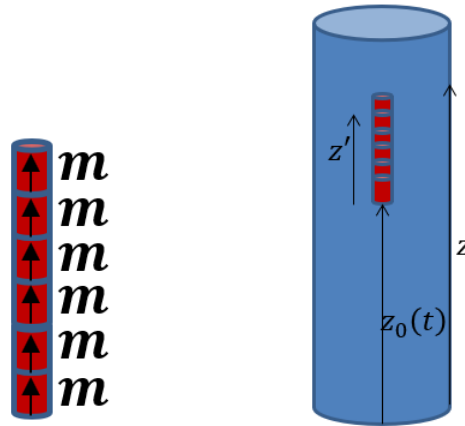


Figura 2-4. Barra imanada que cae en el interior de un tubo de metal conductor.

Se parte del potencial vector generado por un elemento diferencial de volumen, que vendría dado por:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dm\mathbf{u}_z) \times (\rho\mathbf{u}_\rho + (z - z')\mathbf{u}_z)}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dm\rho\mathbf{u}_\theta}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}dV = \frac{m}{b} dz'\mathbf{u}_z$$

Integrando a lo largo de toda la barra:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{z_0(t)}^{z_0(t)+b} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\rho}{b(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz'\mathbf{u}_\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{b\rho} \left[\frac{z_0(t) + b - z}{\sqrt{\rho^2 + (z_0(t) + b - z)^2}} - \frac{z_0(t) - z}{\sqrt{\rho^2 + (z_0(t) - z)^2}} \right] \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho A & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A) \mathbf{u}_z$$

3 CAÍDA DE UN DIPOLO PUNTUAL

Si he visto más lejos ha sido porque he subido a hombros de gigantes.

- Isaac Newton -

Antes de entrar en el estudio detallado de este trabajo, se cree imprescindible el estudio exhaustivo del caso de un dipolo puntual que cae en el interior de un tubo metálico, objeto de análisis en numerosos artículos científicos.

Por ello, supongamos un dipolo magnético que cae por el interior de un tubo de metal conductor (Figura 3-1), como puede ser el cobre. El dipolo genera un campo magnético variable en el tiempo por el hecho de que está en movimiento, de forma que, debido a la presencia de ese campo magnético variable, aparece en el tubo una fuerza electromotriz inducida (ε), según la ley de inducción de Faraday. Esta fuerza electromotriz inducida hace que a su vez el dipolo experimente una fuerza de frenado magnético con la misma dirección y sentido opuesto al movimiento del mismo [6].

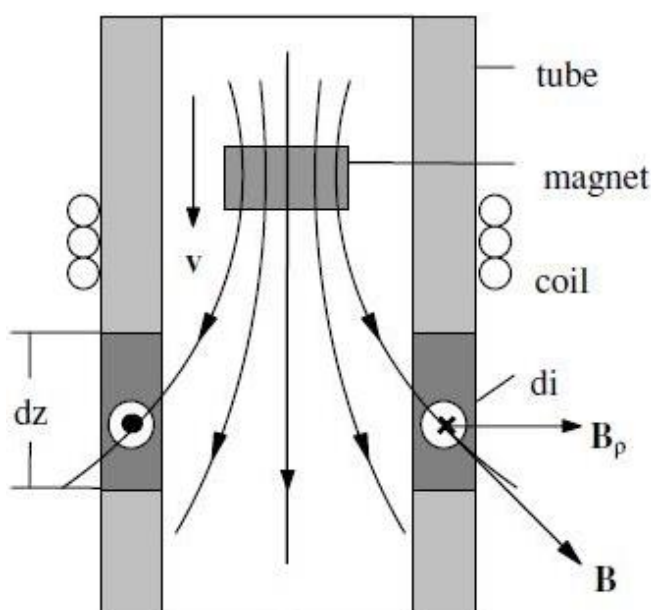


Figura 3-1. Campo generado por el dipolo que cae en el interior de un tubo metálico conductor.

Imagen obtenida de [6]

En cuanto al movimiento del dipolo se puede observar experimentalmente que existen dos zonas de movimiento. Una primera fase de régimen transitorio, que no es objeto de este estudio. Ya se debe anticipar que esa primera zona en régimen transitorio es muy pequeña en comparación con el total de la caída.

A continuación, el dipolo alcanza una zona de velocidad constante, que se denomina velocidad terminal y será un parámetro fundamental para el estudio de la fuerza que experimenta el mismo en su caída.

Así que el fin último será la obtención de la fuerza de frenado que experimenta el dipolo como función de la velocidad del mismo y una constante que se puede determinar experimentalmente, obteniéndose una expresión de la forma:

$$\mathbf{F} = -K\mathbf{v}$$

Ahora bien, este problema es abordable por dos caminos distintos, aunque evidentemente ambos llevan al mismo resultado final.

Por un lado, se puede plantear a partir de la fuerza que experimenta el dipolo en movimiento en el seno del campo magnético generado por las corrientes inducidas en el tubo, y por otro lado se puede ver a partir de la potencia disipada en el tubo.

Cuando un objeto se encuentra a una cierta altura, posee una determinada cantidad de energía potencial. Si este cuerpo se deja caer, la energía potencial disminuye a la vez que aumenta la energía cinética, debido a un aumento de su velocidad. Sin embargo, en este problema la cosa cambia, ya que, si el dipolo se deja caer en el interior del tubo, este no aumenta su velocidad, de hecho, ya se explicó anteriormente que esta permanece constante en prácticamente toda la caída.

Entonces para que se cumpla el principio de conservación de energía, debe ocurrir algún fenómeno que justifique la energía potencial perdida en el movimiento. Este fenómeno es la potencia disipada en las paredes del tubo.

3.1 Ecuaciones

3.1.1 Primera forma

A partir de la Ley de Inducción de Faraday, se tiene que para el caso de una espira inmóvil en el seno de un campo magnético variable en el tiempo:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{ con } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi\end{aligned}$$

Que, para el caso del campo eléctrico en una espira circular cerrada, que tiene la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E\mathbf{u}_\theta \\ \phi &= 0, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

Una vez determinado el campo eléctrico \mathbf{E} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \sigma \equiv \text{conductividad del tubo}$$

$$dP_{dis} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}dV$$

$$P_{dis} = \int_V \sigma E^2 dV$$

Esta potencia que se acaba de calcular, coincide con la disipación de energía potencial. Por tanto, ha de ser igual a la potencia de las fuerzas no conservativas que actúan sobre el dipolo. En este caso, la fuerza de frenado magnético.

Ya determinada la potencia disipada, se puede obtener la fuerza de frenado que experimenta el dipolo despejando, mediante dicha igualdad, de la siguiente expresión:

$$P_{dis} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

3.1.2 Segunda forma

El proceso para hallar el campo eléctrico sería el mismo que en el caso anterior.

Una vez determinado el campo eléctrico \mathbf{E} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \sigma \equiv \text{conductividad del tubo}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\delta, \delta \equiv \text{espesor del tubo}$$

Teniendo en cuenta que el tubo se considera formado por espiras circulares de espesor dz , y que por cada una de dichas espiras circula una corriente de intensidad dI , la intensidad de corriente inducida en cada uno de los elementos diferenciales dz es:

$$dI = Kdz = J\delta dz$$

Ahora se está en disposición de obtener la fuerza $d\mathbf{F}$ que experimenta el dipolo a su paso por un elemento diferencial dz . Para ello se utiliza la fuerza de Lorentz sobre una corriente lineal.

$$d\mathbf{F} = dI \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Como ya se comentó al principio del primer capítulo, debido a que la longitud del tubo es mucho más grande que la longitud del imán, se considera para la resolución del problema un tubo de longitud infinita, en el que se desprecian los efectos de borde.

Por tanto, la fuerza total que experimenta el dipolo en su caída es:

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{F}$$

3.2 Solución

3.2.1 Primera forma

Debemos comenzar con el cálculo de la potencia disipada, que ya hemos desarrollado:

$$P_{dis} = \int_V \sigma E^2 dV$$

$$dV = 2\pi a dz \delta$$

$$P_{dis} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma E^2 2\pi a \delta dz$$

Ahora, utilizando la expresión para el campo eléctrico a partir del potencial vector, deducida en el apartado anterior, se obtiene:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t}, \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = v$$

$$\mathbf{E} = -v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z'} = -v \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m(z-z')}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} \mathbf{u}_\theta$$

Antes de continuar con el desarrollo, se podría realizar una representación gráfica con el fin de obtener la forma del campo eléctrico generado por dicho dipolo. Para ello, se adimensionaliza la expresión de la que se quiere obtener el comportamiento a partir del siguiente cambio de variable:

$$z = z' + az^*$$

Realizando el cambio de variable, el campo eléctrico obtenido queda:

$$E = v \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3ma}{a^5} \frac{z^*}{(1+z^{*2})^{\frac{5}{2}}}$$

Ahora estamos en condiciones de representar el comportamiento cualitativo del campo eléctrico (Figura 3-2):

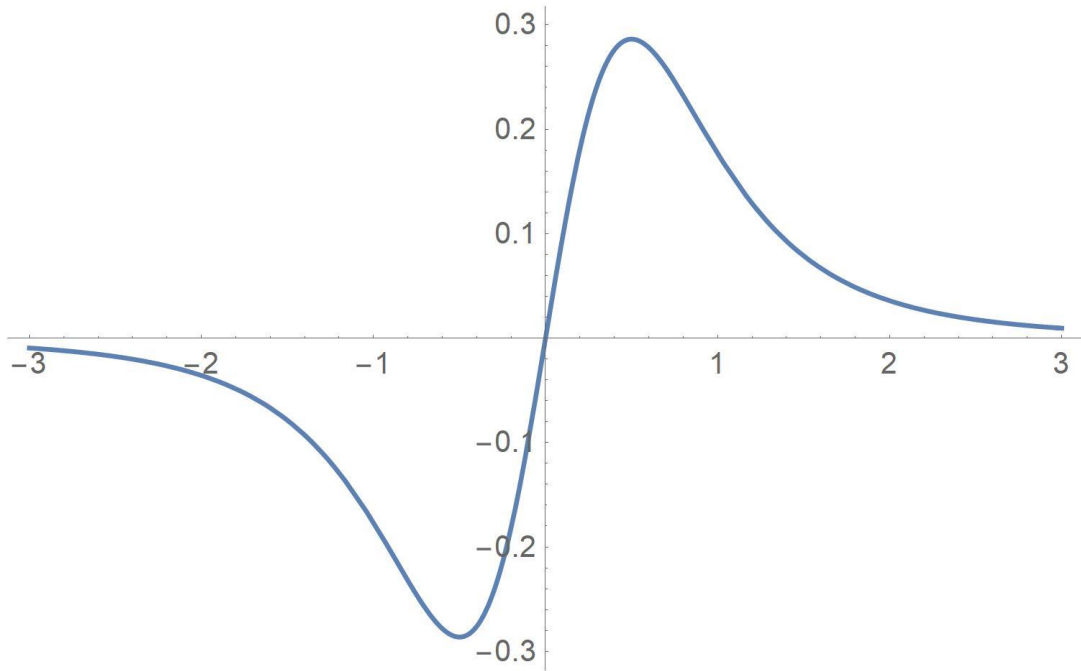


Figura 3-2. Comportamiento cualitativo del campo eléctrico generado por un dipolo magnético.

Una vez realizada esta representación gráfica, se continúa con el cálculo principal de la potencia disipada, de la que también habrá que sacar el comportamiento cualitativo.

$$P_{dis} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \left(-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m(z-z')}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} v \right)^2 2\pi a \delta dz$$

Realizando el cambio de variable $z_1 = z - z_0$ la integral quedaría:

$$P_{dis} = \sigma \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} 9m^2 v^2 2\pi a \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z_1)^2}{(a^2 + (z_1)^2)^5} dz_1$$

Ahora, con el cambio de variable $z_1 = \rho \tan \alpha$, se reduce a:

$$P_{dis} = \sigma \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} 9m^2 v^2 2\pi a \delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 (\tan \alpha)^2 a \frac{1}{(\cos \alpha)^2} (\cos \alpha)^{10}}{a^{10}} d\alpha$$

$$P_{dis} = \sigma \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} 9m^2 \frac{1}{a^7} v^2 2\pi a \delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha)^2 (\cos \alpha)^6 d\alpha = \sigma \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} 9m^2 \frac{1}{a^7} \frac{5\pi}{128} v^2 2\pi a \delta$$

$$P_{dis} = \frac{45}{1024} \frac{\mu_0^2}{a^6} \sigma m^2 \delta v^2$$

Para obtener la representación de la potencia disipada, se puede expresar dicho parámetro como:

$$P_{dis} = \int p dz, \text{ con } p = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m(z-z')}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} v \right)^2$$

Así que la expresión de p quedaría como:

$$p = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m}{a^4} v \right)^2 \frac{z^{*2}}{(1+z^{*2})^5}$$

Así que el comportamiento cualitativo de la potencia disipada a lo largo del tubo sería (Figura 3-3):

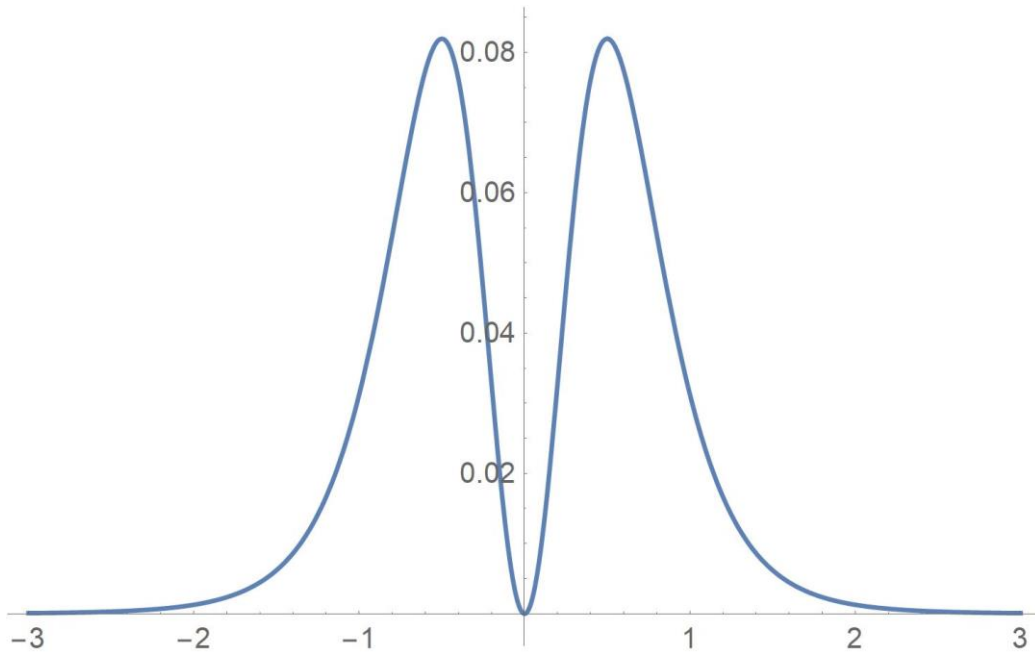


Figura 3-3. Comportamiento cualitativo de la potencia disipada a lo largo del tubo en el caso del dipolo.

Tras analizar el comportamiento del campo eléctrico generado por el dipolo y la potencia disipada en el tubo, se observa que se tiene dos extremos. En el caso del campo eléctrico, máximo y mínimo relativos, mientras que en la potencia disipada, dos máximos relativos. Esto se debe a que lo que cuenta es la derivada, que justo en el centro, para el caso de la potencia disipada, es nula. Por tanto, estos máximos vienen dados por el momento en que el dipolo se acerca y se aleja al elemento diferencial del tubo.

Finalmente, a partir de la igualdad que se ha explicado anteriormente entre la potencia disipada y la potencia de las fuerzas no conservativas, se puede obtener la expresión de la fuerza de frenado que experimenta el dipolo:

$$P_{dis} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{45}{1024} \frac{\mu_0^2}{a^6} \sigma m^2 \delta \mathbf{v}$$

3.2.2 Segunda forma

Puesto que el campo eléctrico está calculado en la forma anterior, comenzamos con el cálculo de la intensidad de corriente:

$$dI = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \frac{3m(z-z')}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} v \delta dz$$

Hay que especificar que la componente B_ρ produce fuerza vertical y la componente B_z produce fuerza radial, por lo que la fuerza resultante es vertical. La simetría hace que la componente radial se anule.

La fuerza que genera el elemento diferencial sobre el dipolo:

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \frac{3m(z-z')}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} v \delta 2\pi a B_\rho dz \mathbf{u}_z$$

Para el caso del dipolo en el interior de un tubo es conveniente expresarlo en coordenadas cilíndricas, obteniendo de esta forma la componente radial del campo magnético que es la que nos interesa para determinar la fuerza:

$$B_\rho = B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m(z-z')\rho}{(\rho^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \frac{3m(z-z')}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} v \delta 2\pi a \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m(z-z')a}{(a^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}}} \right] dz \mathbf{u}_z$$

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \sigma \frac{9m^2 a (z-z')^2}{(\rho^2 + (z-z')^2)^5} v \delta 2\pi a dz \mathbf{u}_z$$

De esta forma, la fuerza total es:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \sigma 9m^2 a v \delta 2\pi a \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z-z')^2}{(\rho^2 + (z-z')^2)^5} dz \right] \mathbf{u}_z = \frac{45}{1024} \frac{\mu_0^2}{a^6} \sigma m^2 \delta v \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{F} = -\frac{45}{1024} \frac{\mu_0^2}{a^6} \sigma m^2 \delta v$$

Como se puede comprobar y era de esperar, los resultados de la fuerza de frenado sobre el dipolo, son idénticos por los dos caminos abordados.

3.2.3 Ejemplo numérico

Se van a dar los resultados analíticos para el caso del tubo que posteriormente se va a utilizar en los experimentos. El diámetro exterior del mismo es de 12 mm, el espesor de 1 mm y la conductividad del cobre es de $5,96 \times 10^7 \frac{S}{m}$.

Para el cálculo de la fuerza se va a utilizar el diámetro medio. Por ello, teniendo en cuenta que el espesor del tubo es 1 mm, se utiliza un diámetro de 11 mm.

Por tanto, la fuerza de frenado es:

$$\mathbf{F} = 149000m^2v\mathbf{u}_z(\text{N}), \text{ con } m(\text{Am}^2) \text{ y } v\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

3.3 Gráficas

Para obtener las curvas que representan la posición y velocidad como función del tiempo, se realiza el equilibrio de fuerzas vertical, tomando M como la masa del dipolo y considerando la velocidad positiva hacia abajo:

$$M_s \frac{dv}{dt} = M_s g - F = M_s g - Kv$$

Integrando la expresión en t se obtiene:

$$v(t) = \frac{M_s g}{K} - \frac{M_s g}{K} e^{-t \frac{K}{M_s}}; \quad v(t) = V_T \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donde se pueden definir los siguientes parámetros:

$$\text{Constante de tiempo: } \tau = \frac{M_s}{K}$$

$$\text{Velocidad terminal: } V_T = \frac{M_s g}{K}$$

Una vez definida la velocidad, se vuelve a integrar para obtener la posición, obteniéndose finalmente:

$$z(t) = V_T \tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

En la figura 3-4 se representa la velocidad del dipolo. Para dicha curva se han tomado los valores asociados al dipolo con el que posteriormente se van a realizar los experimentos. Utilizando valores de $\tau = 0,04\text{s}$ y $V_T = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ para la constante de tiempo y la velocidad terminal respectivamente, se obtiene:

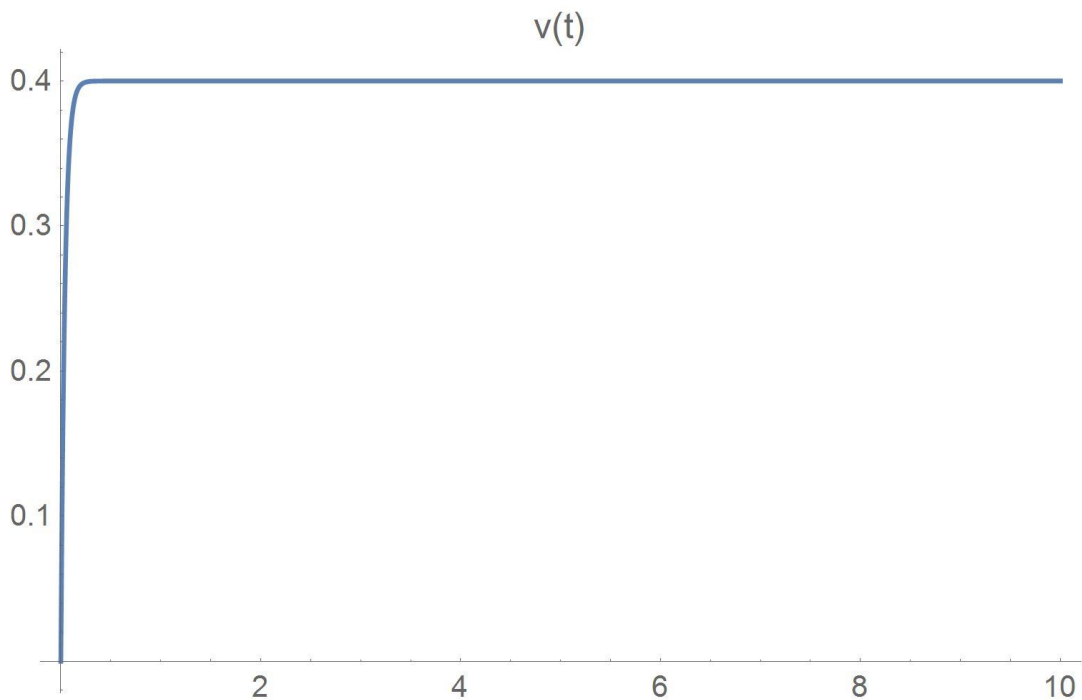


Figura 3-4. Velocidad de caída del dipolo.

Como se puede comprobar, la duración del régimen transitorio del movimiento es muy pequeño respecto al tiempo total de caída, como ya se había anticipado anteriormente. Tras aproximadamente 0,25 segundos se alcanza el valor de la velocidad terminal.

En la figura 3-5 se muestra la posición del dipolo respecto del tiempo obteniéndose como era de esperar una recta desde el origen de coordenadas.

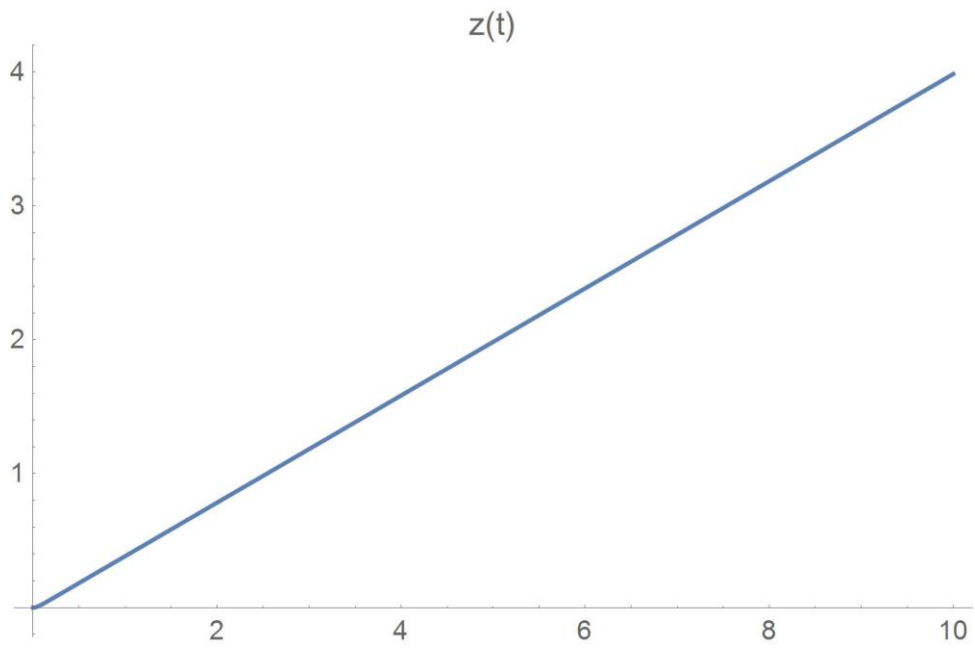


Figura 3-5. Posición del dipolo.

4 CAÍDA DE UN IMÁN DE LONGITUD FINITA

*Lo importante en ciencia no es tanto obtener nuevos hechos
como descubrir nuevas formas de pensar sobre ellos.*

- William Lawrence Bragg-

Una vez analizado el caso del dipolo magnético, se está en condiciones para entrar en el objeto de este trabajo fin de grado, el análisis de la caída libre en el interior de un tubo de una barra imanada de una longitud dada. El objetivo es llegar a la dependencia funcional de dicha longitud de la barra en el problema planteado.

Como se ha visto anteriormente, hay dos formas de proceder para determinar la fuerza de frenado magnético: mediante análisis de fuerzas o mediante la potencia disipada. Por cuestión de sencillez en el planteamiento se procederá con el cálculo de la potencia disipada.

4.1 Ecuaciones

El desarrollo de ecuaciones para el caso de la barra imanada es exactamente el mismo.

A partir de la Ley de Inducción de Faraday, se tiene que para el caso de una espira inmóvil en el seno de un campo magnético variable en el tiempo:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{ con } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi\end{aligned}$$

Que, para el caso del campo eléctrico en una espira circular cerrada, que tiene la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E \mathbf{u}_\theta \\ \phi &= 0, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

Una vez determinado el campo eléctrico \mathbf{E} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \sigma \equiv \text{conductividad del tubo}$$

$$dP_{dis} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

$$P_{dis} = \int_V \sigma E^2 dV$$

Ya determinada la potencia disipada, como se explicó en el capítulo anterior, se puede obtener la fuerza de frenado que experimenta el dipolo despejando de la siguiente expresión:

$$P_{dis} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

4.2 Solución

Debemos comenzar con el cálculo de la potencia disipada, que ya hemos desarrollado:

$$P_{dis} = \int_V \sigma E^2 dV$$

$$dV = 2\pi a dz \delta$$

$$P_{dis} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma E^2 2\pi a dz \delta$$

Para este caso sigue siendo válida la hipótesis del tubo infinito, ya que, aunque ahora la barra tiene una determinada longitud, esta es mucho menor que la longitud del propio tubo.

En caso de que la longitud de la barra imanada no pueda ser considerada mucho menor que la del tubo, dicha hipótesis dejaría de ser válida y el cálculo de la potencia disipada pasaría a ser:

$$P_{dis} = \int_0^h \sigma E^2 2\pi a dz \delta$$

Para el cálculo del campo eléctrico producido por la barra imanada, se toma el potencial vector obtenido anteriormente para dicho caso y partir del mismo se obtiene el nuevo campo eléctrico para el mismo.

Sin embargo, en este caso la expresión del potencial vector para el caso de la barra imanada, resulta de una cierta complejidad para obtener el campo eléctrico a partir de ella. Por ello vamos a utilizar la siguiente identidad matemática.

A partir de la función:

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx$$

La derivada de la misma se puede obtener a partir de la llamada Fórmula de Leibniz:

$$F'(t) = b'(t)f(b) - a'(t)f(a)$$

Por tanto, para el caso del campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial t} = v$$

$$\mathbf{E} = -v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{z_0(t)}^{z_0(t)+b} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ma}{b(a^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' \mathbf{u}_\theta$$

Por lo explicado anteriormente, mediante el teorema indicado se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ma}{b} \left[\frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathbf{u}_\theta$$

Y por tanto el campo eléctrico generado por la barra imanada queda:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ma}{b} v \left[\frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathbf{u}_\theta$$

$$P_{dis} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \left(-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ma}{b} v \left[\frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right)^2 2\pi a \delta dz$$

$$\begin{aligned}
P_{dis} = & \sigma 2\pi a \delta \frac{\mu_0^2 m^2 a^2}{16\pi^2 b^2} v^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^3} dz \right. \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^3} dz \\
& \left. - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^{\frac{3}{2}}} dz \right]
\end{aligned}$$

En esta expresión, las dos primeras integrales se pueden calcular de forma analítica, cuyo resultado se muestra a continuación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^3} dz = \frac{1}{8a^5} \left[\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right] = \frac{3\pi}{8a^5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^3} dz = -\frac{1}{8a^5} \left[-\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \right] = \frac{3\pi}{8a^5}$$

La tercera y última integral que aparece no tiene solución analítica, por lo que recurrimos a los métodos numéricos para obtener su solución. En este caso se va a utilizar Wolfram Mathematica 11.2 como software para hacer el cálculo numérico de esta integral.

Adimensionalizando la expresión mediante los cambios de variable pertinentes se llega a:

$$z = z_0 + ax^*$$

$$b = ab^*$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t) - b)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(a^2 + (z - z_0(t))^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{1}{a^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(1 + (x^* - b^*)^2)(1 + x^{*2})]^{\frac{3}{2}}} dx^*$$

De esta forma llegamos a la integral como función de la longitud de la barra. Definiendo la función que sigue se pueden obtener una serie de valores para su posterior interpolación.

$$G(b^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(1 + (x^* - b^*)^2)(1 + x^{*2})]^{\frac{3}{2}}} dx^*$$

Usando Mathematica, se obtiene el siguiente conjunto de valores que permite la interpolación de la función a partir de los mismos (tabla 4-1).

b^*	$G(b^*)$
0,1	1,17259
0,3	1,12998
0,5	1,05166
0,7	0,94910
0,9	0,83490
1,1	0,71977
1,3	0,61151
1,5	0,51443
1,7	0,43025
1,9	0,35891
2,1	0,29938
2,3	0,25015
2,5	0,20966
2,7	0,17643
2,9	0,14914
3,1	0,12670
3,3	0,10820
3,5	0,09284
3,7	0,08009
3,9	0,06943

Tabla 4-1. Valores de interpolación de $G(b^*)$.

A partir de esta serie de valores se puede estudiar el comportamiento de forma gráfica de la función definida, resultando como sigue (Figura 4-1):

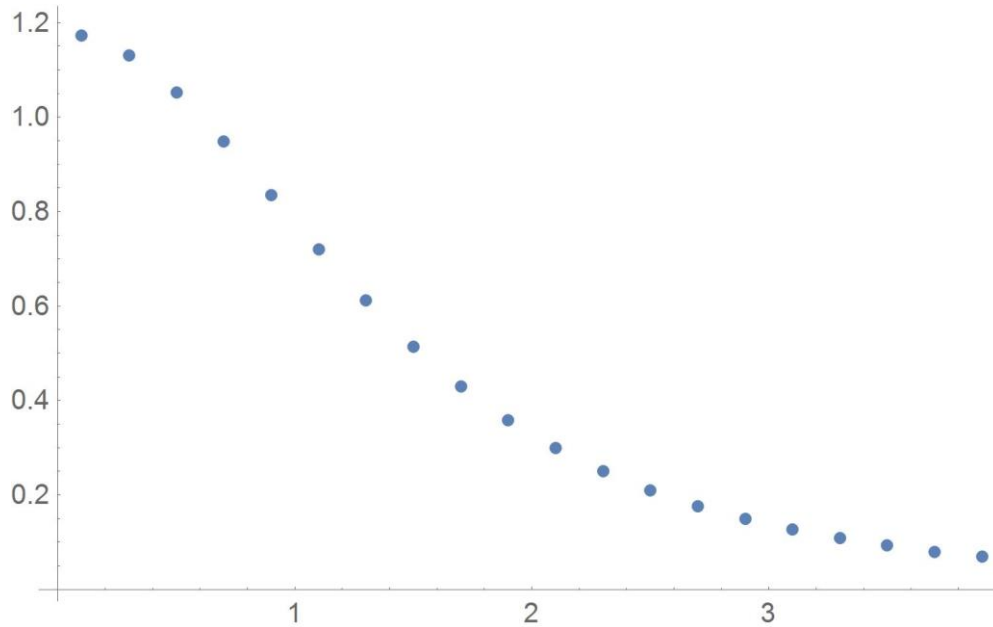


Figura 4-1. Comportamiento del valor de $G(b^*)$ calculada numéricamente.

Tras este análisis, es evidente que el valor de esta integral tiende a cero. Esto ocurre debido a que cuando la longitud de la barra imanada es lo suficientemente larga, las cargas magnéticas de la misma situadas en sus extremos, disipan la potencia de forma independiente. Es decir, el problema sería como si primero pasara una de las cargas y tras un instante la otra.

Esto permite justificar que la tercera integral que se ha calculado numéricamente, para llegar a un resultado de la potencia disipada es nula.

Por tanto, se llega a la siguiente expresión de la potencia disipada en el caso de la barra imanada:

$$P_{dis} = \sigma 2\pi a \delta \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{m^2 a^2}{b^2} v^2 \left[2 \times \frac{3\pi}{8a^5} \right] = \frac{3}{32} \sigma \frac{1}{a^2} \delta \mu_0^2 m^2 v^2$$

Por el mismo motivo, ya explicado en el apartado anterior, se puede obtener la fuerza despejando:

$$P_{dis} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{3}{32} \sigma \frac{1}{a^2} \delta \mu_0^2 m^2 \mathbf{v}$$

4.2.1 Cálculo de la potencia disipada integrando en el espesor

Para afinar el cálculo de la potencia disipada en el caso de la barra imanada, se va a recalculer integrando también en el espesor del tubo, y poder dar así un resultado mucho más exacto.

Por tanto, en la expresión que se obtuvo para dicha potencia se va a sustituir el radio a por un diámetro general ρ , integrando entre el radio interior y el exterior.

Esto resulta:

$$P_{dis} = \sigma \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{m}{b} \right)^2 \frac{3\pi^2}{2} v^2 \int_a^{a+\delta} \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{3}{32} \sigma \mu_0^2 \left(\frac{m}{b} \right)^2 \frac{\delta}{a(a+\delta)} v^2$$

Finalmente, para llegar a la fuerza de frenado de la barra imanada, despejando de la siguiente ecuación:

$$P_{dis} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{3}{32} \sigma \mu_0^2 \left(\frac{m}{b} \right)^2 \frac{\delta}{a(a+\delta)} \mathbf{v}$$

5 EXPERIMENTOS

Imaginada la hipótesis, menester es someterla a la sanción de la experiencia, para lo cual escogemos experimentos u observaciones precisas, complejas y concluyentes.

- Santiago Ramón y Cajal-

Una vez realizados los problemas del dipolo y la barra imanada de forma analítica con su correspondiente solución asociada, es el momento de comenzar con el análisis de los resultados experimentales. Estos resultados serán una pieza fundamental para la comprobación de lo obtenido anteriormente en base a la teoría y estudiar así cómo de buenas son las hipótesis realizadas para su resolución.

La medida fundamental para dicha comparación son los tiempos de caída obtenidos en cada uno de los casos. Pero antes de esta medida son necesarias una serie de medidas previas, que nos permitirán obtener resultados concretos para la solución analítica obtenida, y así realizar la comprobación final.

Por tanto, dentro de este apartado se van a desarrollar una serie de subapartados en los que se mostrarán las medidas en el laboratorio, previas a la medición del tiempo de caída.

5.1 Medidas

5.1.1 Medida de la masa

En primer lugar, resulta necesario realizar un pesaje de todos y cada uno de los imanes que se van a utilizar en los experimentos por dos motivos. El primero de ellos porque no todos estos imanes tienen la misma masa, por lo que habrá que identificar la masa de cada uno para la aplicación numérica de las expresiones obtenidas en los resultados analíticos. En segundo lugar, porque hay que saber qué imán se está utilizando en cada momento cuando se realicen las medidas de los tiempos.

Para ello se va a utilizar una báscula digital de precisión OHAUS Scout Pro. Se va a realizar el pesaje de un total de 2 imanes.

Los pesos de cada uno de estos imanes son:

- Dipolo 1 (color azul): 4,64 g
- Dipolo 2 (color amarillo): 4,67 g



Figura 5-1. Báscula digital de precisión OHAUS Scout Pro.

5.1.2 Medida del campo magnético

Para tener una primera aproximación de los tiempos calculados analíticamente es necesario dar un valor de la imanación, por lo que resulta obligatorio realizar una serie de medidas del campo magnético que produce el imán en función de su posición.

Para ello se utiliza el propio imán, una sonda de medición del campo magnético y un tornillo micrométrico montado sobre un banco de laboratorio. De esta forma se puede obtener el campo magnético que produce el imán en función de su posición, ya que el tornillo micrométrico montado sobre el banco nos permite desplazar el imán respecto al extremo de la sonda cada 0,01mm. Para ello se han realizado las mediciones del campo magnético que produce un imán, y posteriormente el que produce la superposición de dos imanes, para obtener tal campo en el caso de la barra imanada. En ambos casos se ha realizado un recorrido total de 2 cm.

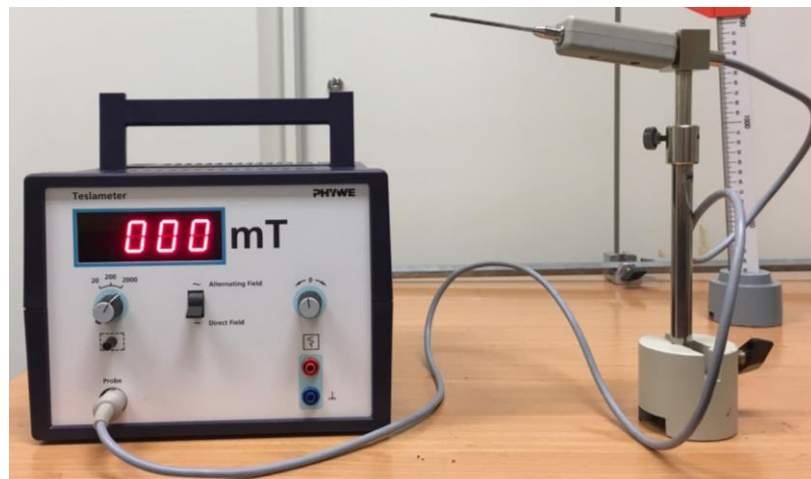


Figura 5-2. Sistema para medición del campo magnético.

Una vez realizadas las mediciones convenientes que se han descrito, es necesario procesar dicha información y obtener un modelo que se ajuste lo máximo posible a este conjunto de datos y poder disponer así de la función del campo magnético en función de la posición. Esto será necesario tanto en el caso del dipolo magnético como en el caso de la barra imanada.

Para ello, se pueden usar dos modelos distintos como ya se ha tratado en el trabajo. Por un lado, se tiene el modelo de Gilbert, que trataría el elemento volumétrico como dos distribuciones de carga independientes, en el que las líneas de campo \mathbf{H} irían del polo positivo al negativo. Para el caso que se está estudiando, el imán o la

barra imanada, quedarían representados como dos discos del mismo valor de carga, uno de ellos negativo y el otro positivo.

Por otro lado, el modelo de Ampère, trata el elemento volumétrico como una distribución de corrientes de magnetización \mathbf{K} . Por tanto, el imán y la barra imanada se representarían como una distribución uniforme de dichas corrientes. Al superponer la acción de todas ellas, el imán puede ser tratado como un solenoide infinito.

Para la obtención de un modelo que se aproxime a los resultados experimentales, se va tomar el imán de esta última forma, ya que los resultados obtenidos se ajustan perfectamente a los experimentales.

A continuación, se muestra el desarrollo de la obtención del campo magnético según dicho modelo. De este, derivarán cuatro constantes que tomaremos para el cálculo numérico de los valores experimentales. Esto nos permitirá hacer la comparación entre dichos valores y los obtenidos de forma analítica.

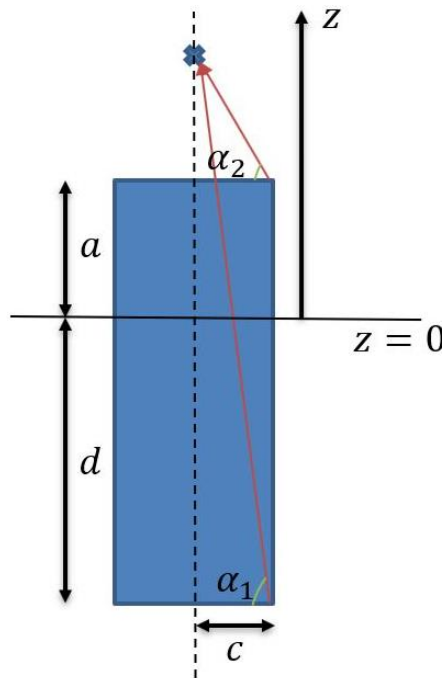


Figura 5-3. Dipolo representado como una distribución de corrientes: solenoide.

De esta imagen (Figura 5-3), se puede obtener el valor de la distancia al punto donde se quiere el valor del campo magnético, medida desde cada uno de los extremos del dipolo.

$$\sin \alpha_2 = \frac{z - a}{\sqrt{c^2 + (z - a)^2}} \quad \sin \alpha_1 = \frac{z - d}{\sqrt{c^2 + (z - d)^2}}$$

Por tanto, de esta forma y atendiendo al modelo utilizado, el campo magnético generado en un punto genérico quedaría:

$$B = A \left(\frac{z - a}{\sqrt{c^2 + (z - a)^2}} - \frac{z - d}{\sqrt{c^2 + (z - d)^2}} \right), \quad A = \frac{\mu_0 M_0}{2}$$

Donde $\{A, a, d, c\}$ son las constantes a determinar, que nos darán una expresión para el campo magnético en función de z .

Aunque esta sea la forma elegida de calcular estas constantes, la expresión obtenida impone una gran limitación y es que esta sólo es válida en el centro del imán o la barra imanada, en el caso que corresponda. Al tratarse de un solenoide infinito, habría que resolver el problema de un solenoide semi-infinito. Pero esto resulta de tal complejidad que no se cree conveniente desarrollarla.

Por tanto, para solventar este problema, se procede usando los valores obtenidos mediante este modelo, al relacionarlos con los parámetros del modelo de campo magnético que proporciona el modelo de Gilbert. Según este último (Figura 5-4), el imán se considera como dos discos de carga de valor q_m .

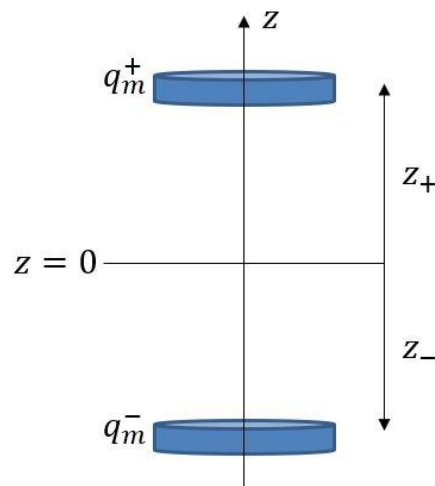


Figura 5-4. Dipolo representado como dos discos independientes.

Aquí conviene resaltar que, con el objetivo de hallar el flujo y por tanto la inducción, dichos discos pueden ser considerados como cargas puntuales, pero a la hora de realizar el ajuste requerido, dicho modelo considera que son discos completos.

De esta forma para el cálculo de las corrientes inducidas, el campo magnético se puede aproximar por:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q_m \left(\frac{1}{(z - z_+)^2} - \frac{1}{(z - z_-)^2} \right), \quad q_m = M_0 \pi c^2$$

Donde al sustituir el valor de q_m queda:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} q_m = \frac{\mu_0}{4\pi} M_0 \pi c^2 = \frac{\mu_0 M_0 c^2}{4} = \frac{Ac^2}{2}$$

Con esta expresión, ya se puede obtener valores numéricos de este término, que permitirán hallar el valor de la constante K que aparece en la expresión de la fuerza de frenado, y finalmente su comparación con los valores obtenidos experimentalmente.

Medida con un imán

En este caso se ha realizado un primer barrido, desplazando el imán respecto al extremo de la sonda con un incremento de 0,05 mm hasta recorrer un total de 5 mm. Después se ha realizado un segundo barrido hasta llegar a los 10 mm con un incremento de 0,1 mm. Por último, se ha completado hasta los 2 cm de distancia con un paso de 0,2 mm.

Algunos de los resultados obtenidos se incluyen en la tabla que se muestra a continuación y en el Anexo se incluye la tabla con la totalidad de los resultados.

z(mm)	B(mT)
0,00	-130,7
0,05	-128,5
0,10	-125,8
0,15	-123,1
0,20	-120,6
0,25	-118,0
0,30	-115,6
0,35	-113,2
0,40	-110,8
0,45	-108,8
0,50	-106,6
0,55	-104,5

Tabla 5-1. Algunos valores del campo magnético de un imán frente a la distancia de la sonda.

Una vez obtenido el conjunto de datos, con la ayuda de Wolfram Mathematica 11.2, se puede obtener un modelo no lineal que se ajuste a estos valores. Se debe indicar que el software utilizado para hallar dicho modelo no da información acerca de la incertidumbre y por eso no parece reflejada.

Por tanto, de esta forma se obtiene la siguiente aproximación, que permite tener valores numéricos para comenzar con los cálculos:

$$B = 504,5548 \left(\frac{z + 3,0500}{\sqrt{8,2555 + (z + 3,0500)^2}} - \frac{z + 18,2110}{\sqrt{8,2555 + (z + 18,2110)^2}} \right)$$

Si representamos esta función junto con el listado de los valores medidos experimentalmente, se puede observar que el ajuste entre ambas curvas es prácticamente perfecto.

En la siguiente gráfica (Figura 5-5) se muestra en color rojo los puntos medidos experimentalmente y en azul la curva del modelo de ajuste que se ha obtenido.

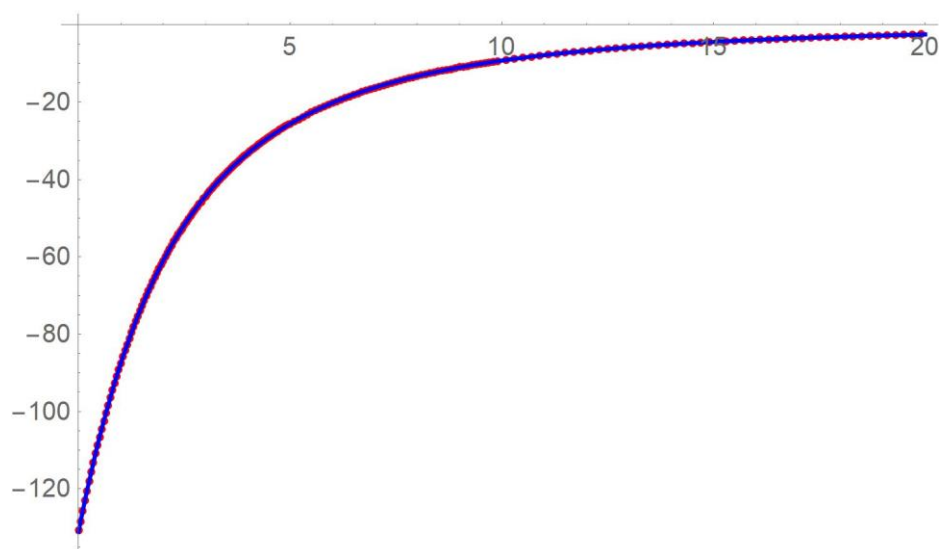


Figura 5-5. Ajuste del campo magnético generado por el dipolo magnético

Como ya se ha descrito en este apartado, con los valores obtenidos del modelo $\{A, a, b, c\}$, se puede tener una primera aproximación del valor de K , de forma analítica.

Medida con dos imanes

De la misma forma que se han realizado las mediciones del campo magnético generado por el imán se han realizado los de la barra imanada. Estas mediciones se han llevado a cabo a partir de la superposición de dos imanes.

En este caso, se ha vuelto a barrer una distancia total de 2 cm, midiendo en el primer centímetro cada 0,1 mm y cada 0,2 mm en el segundo.

A continuación, se muestran algunos de los resultados obtenidos en la medición. La tabla general con la totalidad de los resultados se incluye en el Anexo.

$z(\text{mm})$	$B(\text{mT})$
0,0	-132,1
0,1	-126,5
0,2	-121,7
0,3	-116,9
0,4	-112,4
0,5	-108,0
0,6	-104,0
0,7	-100,1
0,8	-96,4
0,9	-92,8
1,0	-89,4
1,1	-86,2

Tabla 5-2. Algunos valores del campo magnético de dos imanes frente a la distancia de la sonda.

De forma análoga a lo que se ha hecho para el caso del dipolo, con el software de Wolfram Mathematica 11.2 se puede obtener otra función para el caso de la barra imanada mediante un modelo no lineal, obteniendo la siguiente expresión con otros valores:

$$B = 444,258 \left(\frac{z + 2,9400}{\sqrt{9,0705 + (z + 2,9400)^2}} - \frac{z + 31,7516}{\sqrt{9,0705 + (z + 31,7516)^2}} \right)$$

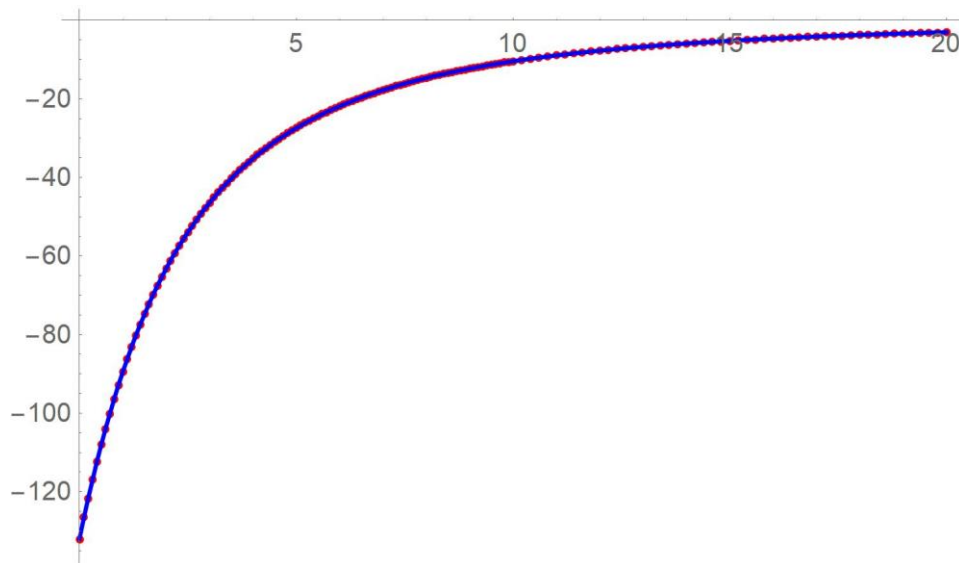


Figura 5-6. Ajuste del campo magnético generado por la barra imanada

Como se puede observar (Figura 5-6), con los valores obtenidos se tiene un ajuste perfecto entre los valores medidos experimentalmente y la curva obtenida a partir del modelo no lineal.

5.1.3 Primera estimación del tiempo de caída

Para la medición de los tiempos de caída, el sistema utilizado es algo más complejo. El sistema utilizado consta de (figura 5-7):

- 2 sensores de posición
- Contador
- Barra soporte
- Cables de conexión
- Pie soporte
- Nueces
- Pinzas
- Tubo
- Placa metálica rígida

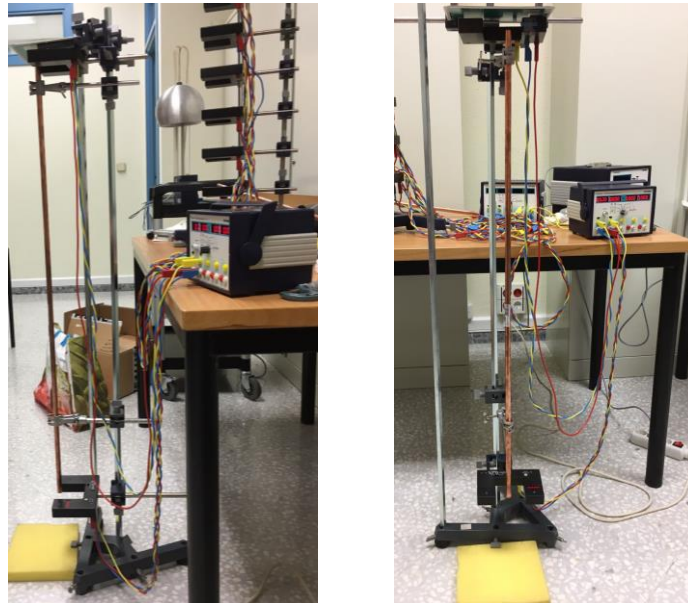


Figura 5-7. Sistema de medición del tiempo de caída.

En cuanto al funcionamiento del sistema, consta de dos sensores. El primero, se encuentra al inicio del tubo y abre el contador del tiempo cuando el imán ha pasado completamente (flanco de bajada). El segundo, situado al final del tubo, detiene dicho contador en el momento que el imán ha salido completamente por la parte inferior, proporcionando así el tiempo que el imán ha tardado en caer a lo largo del tubo utilizado.

En una primera aproximación, sin el sistema disparador montado y preparado para realizar el experimento, se hacen una serie de medidas con 3 imanes distintos, midiendo el tiempo de caída de cada uno de ellos 10 veces consecutivas para verificar que el sistema está bien montado y ajustado. Estos experimentos se han realizado dejando caer el imán por el interior del tubo con la mano, pues como ya se ha comentado, la única finalidad es verificar el sistema y que se obtienen mediciones razonables.

A continuación, se muestran los datos obtenidos:

AZUL		AMARILLO		VERDE	
Medida	t(s)	Medida	t(s)	Medida	t(s)
1	2,035	1	1,876	1	1,914
2	1,916	2	1,729	2	1,934
3	1,965	3	1,822	3	1,969
4	1,935	4	1,849	4	1,932
5	1,877	5	1,818	5	1,963
6	1,974	6	1,748	6	2,035
7	2,015	7	1,763	7	1,938
8	1,976	8	1,757	8	1,947
9	1,932	9	1,817	9	2,020
10	1,943	10	1,872	10	1,926
T. Medio (s)	1,96(3)	T. Medio (s)	1,80(3)	T. Medio (s)	1,96(2)

Tabla 5-3. Tiempos de caída en primera aproximación para tres imanes distintos

De esta forma, en primera aproximación, se puede confirmar que el sistema está preparado para la realización de las medidas exactas, pues los tiempos obtenidos son razonables.

5.1.4 Medida exacta del tiempo de caída

Una vez se ha comprobado que efectivamente, el sistema está correctamente montado, y las células están dispuestas de forma que la medida del tiempo de caída en el interior del tubo es correcta, se procede a la medida del tiempo de caída usando el sistema disparador.

La razón de la utilización de un sistema rígido para dejar caer el imán en el interior del tubo es interceder lo menos posible en su movimiento antes de comenzar la caída.

Manualmente se produce un par sobre dicho imán y el rozamiento con las paredes es demasiado grande, para considerar exactas estas medidas.

Las medidas se han realizado con dos imanes distintos, cuyo peso varía ligeramente debido a la tolerancia de fabricación, pero su valor nominal es el mismo. A continuación, se muestran dichas medidas del tiempo, junto con las longitudes del tubo y del imán, que permiten estimar la velocidad terminal de caída por el interior del tubo.

AZUL (4,64 g)			AMARILLO (4,67 g)		
Medida	t(s)	v(mm/s)	Medida	t(s)	v(mm/s)
1	2,045	475,794621	1	2,1	463,333333
2	1,873	519,487453	2	2,038	477,428852
3	1,906	510,493179	3	2,146	453,401678
4	1,931	503,883998	4	2,135	455,737705
5	1,805	539,058172	5	2,185	445,308924
6	1,83	531,693989	6	2,126	457,666980
7	1,965	495,165394	7	2,166	449,215143
8	1,805	539,058172	8	2,136	455,524345
9	1,887	515,633280	9	2,168	448,800738
10	1,915	508,093995	10	2,081	467,563671
T. Medio (s)		1,90(5)	T. Medio (s)		2,13(3)
V. Media (mm/s)		514(13)	V. Media (mm/s)		457(6)

Tabla 5-4. Tiempos de caída para dos imanes distintos.

Llegando a estos valores de velocidad terminal, se está en condiciones de obtener la constante de frenado experimental (K) de la que se hablaba al comienzo de este trabajo fin de grado, con el objetivo final de calcular la fuerza de frenado en la caída del imán por el interior del tubo.

En el Capítulo 3, se mostraba la expresión de dicha fuerza, quedando:

$$\mathbf{F} = -K\mathbf{v}, \quad K = \frac{M_s g}{V_T}$$

Por tanto, para el caso de los dos imanes anteriores, se obtienen los siguientes resultados para $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$:

	M_s (kg)	V_T (m/s)	K (kg/s)
AZUL	0,00464(1)	0,514(3)	0,0885(6)
AMARILLO	0,00467(1)	0,457(6)	0,0981(13)

Tabla 5-5. Valores de la constante de fricción.

5.1.5 Comparación con resultados analíticos

El objetivo de este apartado es la comparación de los resultados que se han obtenido en los experimentos anteriormente descritos y los resultados que se obtuvieron en los capítulos 3 y 4 de este trabajo fin de grado.

Cómo ya se explicó en el primer capítulo, la idea generalizada que permite la comparación entre ambos métodos, es la obtención de la constante de fricción K , que, junto a la velocidad, definen la fuerza de frenado experimentada por el imán.

Por tanto, a continuación, se va a llevar a cabo dicha comparación para el caso del imán.

Imán

Experimentalmente, ya se ha obtenido la velocidad de caída para el caso de dos imanes semejantes, cuyos resultados se han mostrado anteriormente. Esta velocidad, junto con la masa de cada uno de los imanes, ha permitido la obtención de la constante de fricción en la caída de los mismos. Esta constante de fricción está indicada en la Tabla 5-5.

Tomando la expresión calculada en el capítulo 4, es posible calcular dicha constante.

$$P_{dis} = \frac{3}{32} \sigma \mu_0^2 \left(\frac{m}{b}\right)^2 \frac{\delta}{a(a + \delta)} v^2$$

Donde el valor de la constante de fricción viene dado por:

$$K = \frac{3}{32} \sigma \mu_0^2 \left(\frac{m}{b}\right)^2 \frac{\delta}{a(a + \delta)}$$

En esta expresión, todos los datos geométricos son conocidos, pero el factor $(\mu_0 m)^2$ se debe extraer de las mediciones del campo magnético realizadas. Para ello, de la relación entre los dos modelos usados para definir el imán (Gilbert y Ampère) se obtiene:

$$\frac{\mu_0 M_0}{4} c^2 = \frac{Ac^2}{2}, \quad \mu_0 M_0 = 2A$$

Donde A , es el valor obtenido numéricamente en el modelo del imán. Si ahora se desarrolla el término $\mu_0 m$ queda como:

$$\mu_0 m = \mu_0 (M_0 c^2 \pi (d - a)); \quad \mu_0 m = 2Ac^2 \pi (d - a)$$

La expresión de la constante quedaría de la siguiente manera:

$$K = \frac{3}{32} \sigma (2A)^2 c^4 \pi^2 \frac{\delta}{a(a + \delta)}$$

De esta forma, ya se puede calcular exactamente el valor de la constante, y así, la comparación con los valores mostrados de dicha constante anteriormente. Para el primer experimento, los valores que darán el resultado de la constante son:

$$A = 504,5548 \times 10^{-3} \text{ T}$$

$$c = 2,87324 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$a = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\sigma_{Cu} = 5,96 \times 10^7 \text{ S/m}$$

$$\delta = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Con todos estos valores, se obtiene que la constante de fricción K tiene un valor de:

$$K = 0,1275 \text{ kg/s}$$

Por tanto, tras llegar a este resultado, se puede afirmar que con las hipótesis realizadas en el procedimiento y el error que se haya cometido en las mediciones, los resultados están en concordancia entre la parte analítica y experimental.

Analíticamente se habían calculado valores de esta constante para los dos imanes utilizados, obteniendo los valores de:

- $K(4,64 \text{ g}) = 0,0885(6) \text{ kg/s}$
- $K(4,67 \text{ g}) = 0,0981(13) \text{ kg/s}$

La diferencia entre los resultados analíticos y experimentales se puede obtener como el cociente entre ambos valores, de forma que cuanto más próximo a la unidad esté el número, más se ajustarán los dos resultados.

$$C = \frac{K_{exp}}{K_{teórico}}$$

Dicho esto, los valores de este cociente son:

$$C_1 = 0,6941$$

$$C_2 = 0,7694$$

De esta forma, se puede comprobar que los resultados obtenidos por ambos métodos se ajustan de forma correcta, a pesar de las hipótesis simplificativas realizadas para la resolución del problema.

La diferencia entre C_1 y C_2 se debe a que en primer lugar son medidas independientes, y aunque se ha intentado realizar los experimentos con el máximo de rigurosidad, siempre se comete algún error.

En segundo lugar, se trata de imanes distintos por lo que es aceptable que haya cierta diferencia.

6 APLICACIONES

Las ciencias aplicadas no existen, solo las aplicaciones de la ciencia.

- Louis Pasteur -

Todo lo desarrollado en este trabajo fin de grado es una justificación del efecto de las corrientes inducidas en un tubo, por el movimiento de un dipolo (o barra imanada) en su interior. Pero se debe hacer notar que es el fundamento de muchos sistemas, que a día de hoy se encuentran en pleno desarrollo y tienen grandes vistas al futuro.

Hay que tener en cuenta, como ya se ha visto, que el movimiento de un imán por el interior de un tubo de metal conductor, induce unas corrientes inducidas en este, que, a su vez, generan un campo magnético, responsable del frenado del imán. El fenómeno es semejante, aunque no igual, si el imán permanece inmóvil, y es el tubo el que se desplaza respecto a dicho imán.

Al comienzo del documento ya se trató la utilidad de este fenómeno como sistema de frenado de un banco de prueba de motores eléctricos, pero otro de los sistemas que están en desarrollo y puede ser de gran interés para dicho fenómeno es su aplicación en amortiguadores. Estos pueden ser utilizados en una gran diversidad de campos, desde el sector automovilístico, hasta en grandes máquinas de cualquier tipo de industria.

De hecho, ya hay desarrollos puestos en pie, testados en laboratorio e instalados en algunos ámbitos de maquinaria industrial. A continuación, se hace una breve descripción de uno de estos sistemas.

Ejemplo

En la siguiente imagen, aparece representado el diseño concreto de un amortiguador magnético, que ya ha sido modelado y desarrollado. En este esquema, se pueden diferenciar los tres elementos fundamentales del sistema. En primer lugar, el imán de la parte superior, unido a un vástago, un segundo imán inferior que está fijado y que genera una fuerza de repulsión entre los dos imanes para controlar el movimiento de la parte móvil y además evitar el impacto entre ambas partes. Por último, el sistema consta de un plato anular de aluminio, en el que se inducen las corrientes, al pasar el imán móvil a través del mismo [7].

En este sistema, la presencia del muelle es sustituida por el imán inferior que permanece inmóvil (figura 6-1).

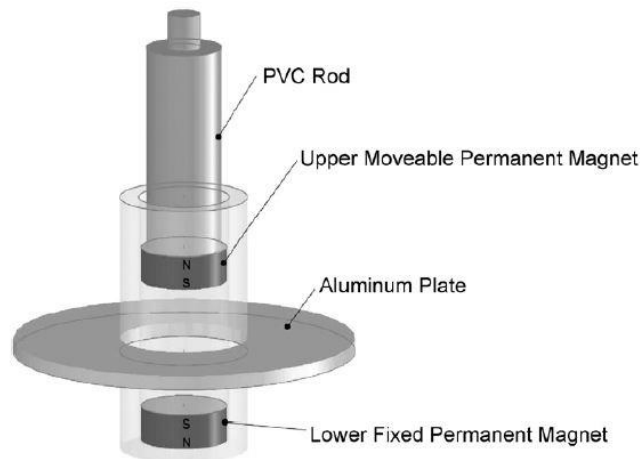


Figura 6-1. Sistema real de amortiguador magnético.

Imagen obtenida de [7]

Este es el fenómeno que puede ser aprovechado para el diseño de un amortiguador magnético, pues la fuerza de frenado se reduce al producto de una constante y la velocidad a la que el imán cae, como si de un medio viscoso se tratase.

Si se analiza un sistema de amortiguación hidráulico tradicional con uno basado en el frenado magnético, se obtienen dos ventajas fundamentales relacionadas entre ellas. La fricción entre elementos móviles en el interior del amortiguador desaparece, y por ende, el mantenimiento de los mismos disminuye en gran medida, con respecto a los sistemas de amortiguación tradicionales.

Por el contrario, la principal desventaja que deriva de la utilización de las corrientes parásitas en dichos sistemas es la generación de calor por potencia disipada, como se ha visto en este trabajo. Esto produciría el calentamiento del sistema, por lo que sería necesario un sistema de refrigeración apropiado para contrarrestar dicho efecto.

Por todo esto se cree necesario hacer una breve introducción al uso del freno magnético en un amortiguador. Para ello, supongamos el problema principal de este documento, es decir, un dipolo magnético que cae por el interior de un tubo de metal conductor, y al que ahora se le añade un muelle de constante elástica K_e .

El problema planteado sería como aparece a continuación (Figura 6-2):

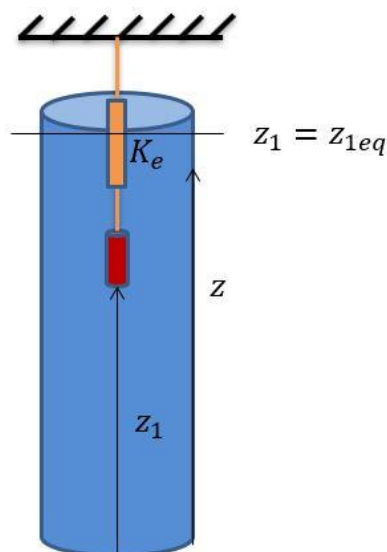


Figura 6-2. Esquema de un sistema de amortiguación magnético.

A partir de este esquema se pueden obtener las ecuaciones de movimiento [8] que permiten analizar el movimiento del dipolo, en el interior del tubo, teniendo en cuenta que el efecto de la fuerza de frenado es idéntico al ya desarrollado en apartados anteriores.

Por tanto, sobre dicho dipolo afecta la gravedad, la fuerza recuperadora del muelle (F_K), y la fuerza de frenado por corrientes inducidas (F).

La ecuación que rige el movimiento viene dada por:

$$M_s \ddot{z}_1 = -M_s g + K_e (z_1 - z_{1eq}) - K v$$

$$x = z_1 - z_{1eq}$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{K_e}{M_s}, \beta = \frac{K}{2M_s}$$

Por último, para estudiar el comportamiento del sistema, se sabe que se pueden dar tres tipos de comportamiento en función de los datos del problema:

Si $\beta > \omega_0$ el sistema es sobreamortiguado

Si $\beta < \omega_0$ el sistema es subamortiguado

Si $\beta = \omega_0$ el sistema es crítico

Por tanto, dependerá de ciertas variables del problema el comportamiento de dicho sistema. Para ello se debe estudiar la dependencia funcional de estos parámetros.

$$\beta = f(K, M_s) = f(a, \sigma, m, \delta)$$

$$\omega_0 = f(K_e, M_s)$$

Por tanto, dadas estas relaciones se puede observar que son varios los parámetros que influyen en el comportamiento del sistema.

Por un lado, β depende de los parámetros del tubo, es decir, la conductividad del material y geoméricamente, del espesor y el diámetro del mismo. Por otro lado, depende de la magnetización del imán utilizado.

En cuanto al parámetro ω_0 , este depende de dos valores. En primer lugar, de la constante elástica del muelle que se utilice en el sistema. En segundo lugar, de la masa del imán.

Por tanto, como se puede ver, en relación al objeto de este trabajo fin de grado, el comportamiento del sistema depende en gran medida de la longitud del imán o en su caso, barra imanada.

Tanto la imanación, como la masa de dicho imán, son funciones de la longitud. En mayor medida, se ha podido comprobar en los experimentos, que la dependencia funcional entre la longitud de la barra y la imanación es mucho menor, en comparación con la variación de la masa al aumentar la longitud de dicho imán.

7 CONCLUSIONES

Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano.

-Isaac Newton-

En el Capítulo 1 se ha hecho una introducción al problema planteado, dando a conocer que la fuerza de frenado magnético es el primer objetivo de este trabajo. Así mismo se ha llevado a cabo una descripción del principio de esta fuerza, así como el desarrollo de todos los aspectos involucrados en el problema. Se han tratado los aspectos relacionados con campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo y el concepto de inducción. Por último, se ha hecho una breve presentación a nivel general de aplicaciones en las que el frenado magnético es de interés, así como el desarrollo de un ejemplo en concreto.

En el Capítulo 2 se ha tratado el campo magnético generado por materiales magnéticos a partir del concepto de imanación de la materia. Así mismo se han planteado las ecuaciones para el cálculo del campo magnético del dipolo y la barra imanada, a partir de la función potencial vector de los mismos.

En el Capítulo 3, se ha analizado el problema de la caída de un dipolo puntual por el interior de un tubo de metal conductor, a partir de lo desarrollado anteriormente. Se ha resuelto el problema desde el punto de vista energético, así como desde el cálculo de las corrientes inducidas, mediante el cálculo del campo eléctrico generado por el dipolo puntual y la barra imanada. Finalmente se ha llegado al cálculo de la fuerza de frenado en ambos casos. También se han calculado las funciones de la posición y velocidad del dipolo a lo largo de su caída, mostrando los resultados que posteriormente se ensayarán.

En el Capítulo 4, se ha llevado a cabo la solución del problema para el caso de la barra imanada, llegando a la expresión de la fuerza de frenado que esta experimenta en su caída por el interior del tubo, y su análisis en función de la longitud de la misma. Para ello, el proceso seguido ha sido el análogo al del capítulo anterior, con la excepción de que, en este caso, se ha tenido que calcular numéricamente parte del proceso.

En el Capítulo 5, se ha realizado la parte experimental del trabajo. En este se incluyen todas las variables que se han tenido que medir en laboratorio para la realización de los experimentos (masa y campo magnético del imán). Se ha llegado a los modelos que ajustan los datos medidos del campo magnético en el caso de un imán y de dos imanes superpuestos mediante un modelo no lineal. Finalmente se han realizado las mediciones del tiempo de caída para el cálculo de la velocidad en la misma. Esto ha permitido comparar la constante de la fuerza de frenado en el caso experimental y analítico, llegando a la conclusión de que ambos se ajustan de forma correcta.

En el último, Capítulo 6, se ha profundizado más sobre las aplicaciones del frenado magnético en la actualidad, mostrando un ejemplo de amortiguador magnético que ya ha sido diseñado, fabricado y construido. También se ha hecho una breve descripción del fundamento físico de este tipo de amortiguadores, mostrando la relación entre las variables del problema y el comportamiento de dicho sistema. De esta forma se pretende dar a conocer que el problema no es sólo una cuestión matemática, sino que es origen de muchos desarrollos futuros y de gran interés en algunos ya presentes.

REFERENCIAS

- [1] Marcelo Rodríguez Danta, Antonio González Fernández, Consuelo Bellver Cebreros. “Campos electromagnéticos”. 2ª edición. Universidad de Sevilla, 1996
- [2] David K.Cheng. “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”. 2ª edición. S.A. Alhambra Mexicana, 2014
- [3] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “*Ley de Faraday (GIE)*”. [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Faraday_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Faraday_(GIE))
- [4] Omar D. Gallo, Rubén M. J Gonella, Diego M. Ferreyra, Alberto J. Díaz.” Freno de corrientes parásitas para ensayo de motores eléctricos”. Ciencia, Docencia y Tecnología. 28 283-296 (2017)
- [5] Wiki Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. “Dipolo magnético”. http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo_magnético
- [6] G Donoso, C L Ladera, P Martin. “Magnet fall inside a conductive pipe: motion and the role of the pipe wall thickness”. Eur. J. Phys. 30 855-869 (2009) doi:10.1088/0143-0807/31/3/002
- [7] Babak Ebrahimi, Mir Behrad Khamesee, M. Farid Golnaraghi. “*Design and modeling of a magnetic shock absorber based on eddy current damping effect*”. Journal of Sound and Vibration. **315** 875-889 (2008)
- [8] G Donoso, C L Ladera, P Martin. “Magnetically coupled magnet-spring oscillators”. Eur. J. Phys. 31 433-452 (2010) doi:10.1088/0143-0807/31/3/002

ANEXO

Tabla 1. Medidas experimentales del campo magnético generado por un imán (versión completa)

z(mm)	B(mT)
0,00	-130,7
0,05	-128,5
0,10	-125,8
0,15	-123,1
0,20	-120,6
0,25	-118,0
0,30	-115,6
0,35	-113,2
0,40	-110,8
0,45	-108,8
0,50	-106,6
0,55	-104,5
0,60	-102,5
0,65	-100,4
0,70	-98,4
0,75	-96,4
0,80	-94,5
0,85	-92,7
0,90	-91,0
0,95	-89,2
1,00	-87,5
1,05	-85,8
1,10	-84,2
1,15	-82,7
1,20	-81,1
1,25	-79,6
1,30	-78,1
1,35	-76,7
1,40	-75,3
1,45	-73,9
1,50	-72,6
1,55	-71,3
1,60	-70,0
1,65	-68,8
1,70	-67,6

z(mm)	B(mT)
1,75	-66,4
1,80	-65,3
1,85	-64,1
1,90	-63,0
1,95	-62,0
2,00	-61,0
2,05	-59,9
2,10	-59,0
2,15	-58,0
2,20	-57,0
2,25	-56,0
2,30	-55,2
2,35	-54,2
2,40	-53,3
2,45	-52,7
2,50	-51,8
2,55	-51,0
2,60	-50,2
2,65	-49,4
2,70	-48,6
2,75	-47,9
2,80	-47,1
2,85	-46,3
2,90	-45,9
2,95	-44,9
3,00	-44,3
3,05	-43,6
3,10	-42,9
3,15	-42,3
3,20	-41,7
3,25	-41,0
3,30	-40,4
3,35	-39,9
3,40	-39,3
3,45	-38,7

z(mm)	B(mT)
3,50	-38,1
3,55	-37,6
3,60	-37,0
3,65	-36,5
3,70	-36,0
3,75	-35,5
3,80	-35,0
3,85	-34,5
3,90	-34,0
3,95	-33,6
4,00	-33,1
4,05	-32,6
4,10	-32,2
4,15	-31,8
4,20	-31,3
4,25	-30,9
4,30	-30,5
4,35	-30,1
4,40	-29,7
4,45	-29,3
4,50	-28,9
4,55	-28,6
4,60	-28,2
4,65	-27,8
4,70	-27,5
4,75	-27,1
4,80	-26,8
4,85	-26,4
4,90	-26,1
4,95	-25,8
5,00	-25,6
5,10	-25,0
5,20	-24,4
5,30	-23,8
5,40	-23,2

z(mm)	B(mT)
5,50	-22,6
5,60	-22,1
5,70	-21,6
5,80	-21,1
5,90	-20,6
6,00	-20,2
6,10	-19,8
6,20	-19,4
6,30	-18,9
6,40	-18,5
6,50	-18,1
6,60	-17,7
6,70	-17,3
6,80	-16,9
6,90	-16,6
7,00	-16,3
7,10	-15,9
7,20	-15,6
7,30	-15,3
7,40	-15,0
7,50	-14,7
7,60	-14,3
7,70	-14,1
7,80	-13,8
7,90	-13,5
8,00	-13,2
8,10	-13,0
8,20	-12,7
8,30	-12,5
8,40	-12,3
8,50	-12,0
8,60	-11,8

z(mm)	B(mT)
8,70	-11,6
8,80	-11,4
8,90	-11,2
9,00	-10,9
9,10	-10,8
9,20	-10,6
9,30	-10,4
9,40	-10,2
9,50	-10,0
9,60	-9,8
9,70	-9,7
9,80	-9,5
9,90	-9,4
10,10	-9,0
10,30	-8,7
10,50	-8,5
10,70	-8,2
10,90	-7,9
11,10	-7,7
11,30	-7,4
11,50	-7,2
11,70	-7,0
11,90	-6,8
12,10	-6,6
12,30	-6,4
12,50	-6,2
12,70	-6,0
12,90	-5,8
13,10	-5,7
13,30	-5,5
13,50	-5,4
13,70	-5,2

z(mm)	B(mT)
13,90	-5,1
14,10	-4,9
14,30	-4,8
14,50	-4,7
14,70	-4,6
14,90	-4,4
15,10	-4,3
15,30	-4,2
15,50	-4,1
15,70	-4,0
15,90	-3,9
16,10	-3,8
16,30	-3,7
16,50	-3,6
16,70	-3,6
16,90	-3,5
17,10	-3,4
17,30	-3,3
17,50	-3,2
17,70	-3,1
17,90	-3,1
18,10	-3,0
18,30	-2,9
18,50	-2,9
18,70	-2,8
18,90	-2,8
19,10	-2,7
19,30	-2,6
19,50	-2,5
19,70	-2,5
19,90	-2,4

Tabla 2. Medidas experimentales del campo magnético generado por dos imanes (versión completa)

z(mm)	B(mT)	z(mm)	B(mT)
0	-132,1	4,2	-33,4
0,1	-126,5	4,3	-32,5
0,2	-121,7	4,4	-31,7
0,3	-116,9	4,5	-30,9
0,4	-112,4	4,6	-30,2
0,5	-108,0	4,7	-29,4
0,6	-104,0	4,8	-28,7
0,7	-100,1	4,9	-28,0
0,8	-96,4	5,0	-27,4
0,9	-92,8	5,1	-26,7
1,0	-89,4	5,2	-26,1
1,1	-86,2	5,3	-25,5
1,2	-83,2	5,4	-24,9
1,3	-80,3	5,5	-24,4
1,4	-77,4	5,6	-23,8
1,5	-74,7	5,7	-23,4
1,6	-72,2	5,8	-22,8
1,7	-69,8	5,9	-22,3
1,8	-67,5	6,0	-21,9
1,9	-65,3	6,1	-21,4
2,0	-63,2	6,2	-20,9
2,1	-61,2	6,3	-20,5
2,2	-59,3	6,4	-20,1
2,3	-57,4	6,5	-19,7
2,4	-55,6	6,6	-19,3
2,5	-53,9	6,7	-18,9
2,6	-52,3	6,8	-18,5
2,7	-50,7	6,9	-18,1
2,8	-49,2	7,0	-17,8
2,9	-47,7	7,1	-17,4
3,0	-46,4	7,2	-17,1
3,1	-45,0	7,3	-16,7
3,2	-43,8	7,4	-16,4
3,3	-42,6	7,5	-16,1
3,4	-41,4	7,6	-15,8
3,5	-40,2	7,7	-15,5
3,6	-39,1	7,8	-15,2
3,7	-38,1	7,9	-14,9
3,8	-37,0	8,0	-14,7
3,9	-36,1	8,1	-14,4
4,0	-35,1	8,2	-14,1
4,1	-34,2	8,3	-13,9

z(mm)	B(mT)
8,4	-13,6
8,5	-13,4
8,6	-13,2
8,7	-12,9
8,8	-12,7
8,9	-12,5
9,0	-12,3
9,1	-12,1
9,2	-11,9
9,3	-11,7
9,4	-11,5
9,5	-11,3
9,6	-11,1
9,7	-10,9
9,8	-10,7
9,9	-10,6
10,0	-10,4
10,2	-10,1
10,4	-9,8
10,6	-9,5
10,8	-9,2
11,0	-8,9
11,2	-8,7
11,4	-8,4
11,6	-8,2
11,8	-7,9
12,0	-7,7
12,2	-7,5
12,4	-7,3
12,6	-7,1
12,8	-6,9
13,0	-6,7
13,2	-6,5
13,4	-6,4

z(mm)	B(mT)
13,6	-6,2
13,8	-6,1
14,0	-5,9
14,2	-5,8
14,4	-5,6
14,6	-5,5
14,8	-5,4
15,0	-5,2
15,2	-5,1
15,4	-5,0
15,6	-4,9
15,8	-4,7
16,0	-4,6
16,2	-4,5
16,4	-4,4
16,6	-4,3
16,8	-4,2
17,0	-4,1
17,2	-4,0
17,4	-4,0
17,6	-3,9
17,8	-3,8
18,0	-3,7
18,2	-3,6
18,4	-3,6
18,6	-3,5
18,8	-3,4
19,0	-3,3
19,2	-3,3
19,4	-3,2
19,6	-3,2
19,8	-3,1
20,0	-3,0

