

Trabajo de Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial

Estudio de los puntos de cruce para órbitas
de pequeña excentricidad y con traza
repetida

Autor: Alejandro Montero Miñán

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

Dpto. Ingeniería Aeroespacial
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

Estudio de los puntos de cruce para órbitas de pequeña excentricidad y con traza repetida

Autor:

Alejandro Montero Miñán

Tutor:

Rafael Vázquez Valenzuela

Profesor Titular

Dpto. Ingeniería Aeroespacial
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Trabajo de Fin de Grado: Estudio de los puntos de cruce para órbitas de pequeña excentricidad y con traza repetida

Autor: Alejandro Montero Miñán
Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Resumen

Uno de los mayores problemas a la hora de controlar y recuperar los datos obtenidos de un satélite se debe a que el número de oportunidades viene limitado por la localización del centro desde donde se recuperan y de los parámetros de la propia órbita. Por esta razón, las órbitas con traza repetida, las cuales tienen la peculiaridad de que, tras un número de revoluciones, vuelven a sobrevolar los mismos puntos de la Tierra, son muy ventajosas, ya que permiten controlar de forma precisa los puntos de observación y recuperación de datos. Además, este tipo de trazas pueden presentar puntos de cruce, es decir, puntos que el satélite sobrevuela dos veces antes de que la traza se repita. Estos puntos son de especial interés para la colocación de estos centros de recuperación de datos y observación de satélites, ya que permiten duplicar el número de ventanas de observación. Este documento se encarga de caracterizar con el mayor grado de detalle posible cómo los distintos elementos orbitales afectan a la disposición y cantidad de estos puntos de cruce en órbitas geocéntricas de excentricidad pequeña.

Para ello, primero se desarrollan brevemente algunos conceptos necesarios de Mecánica orbital, además de realizar un pequeño resumen del caso circular ya estudiado en otros documentos para que sirva de introducción. Tras esto, se obtendrán las ecuaciones que permiten obtener la posición de los puntos de corte, se explicará su resolución y se analizará cómo afecta la variación de algunos elementos orbitales, por ejemplo, la excentricidad, el argumento de perigeo o la inclinación. Después, se ilustrará con ejemplos la precisión y las limitaciones del modelo utilizado para resolver el problema. Por último, se incluirán algunas conclusiones generales y se discutirán algunas líneas de trabajo que podrían tomarse en un futuro a partir de este trabajo.

Abstract

One of the greatest problems when monitoring and retrieving data obtained from a satellite is that the number of actual chances is limited by the location of the retrieving site and the parameters of the orbit. For this reason, repeated groundtrack orbits, whose main characteristic is the repetition of the points that this satellite flies by after a given number of complete periods, are really important, as they allow a precise control of the observing and retrieving points. Also, this type of groundtracks can have crossover points, meaning, points by which the satellite flies by twice before the groundtrack repeats. These points are very interesting for the location of an observation site, because, as mentioned before, they provide twice the number of observation windows. This document tries to characterize as deeply as possible how the different orbital elements influence the position and number of these crossover points in geocentric low eccentricity orbits.

For this, first various orbital mechanics' concepts are faintly described, followed by a short sum up of the previous studied circular case, which serves as a introduction. Then, equations to calculate the crossover points' location are obtained, their resolution process explained, as well as how the variations of some orbital elements such as inclination, eccentricity or perigee argument affects the position or ammount of these crossover points. Also, the precision and limitations of the model used to solve this problem is discussed. Finally, some conclusions and some new research paths are included.

Índice Abreviado

<i>Resumen</i>	I
<i>Abstract</i>	III
<i>Índice Abreviado</i>	V
<i>Notación</i>	XV
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes históricos	3
1.2 Descripción y clasificación de satélites	3
1.3 Objetivos y alcance del proyecto	4
1.4 Estructura del proyecto	4
2 Conceptos básicos de mecánica orbital	5
2.1 Mecánica orbital	5
2.2 Leyes horarias	8
2.3 Elementos orbitales	10
2.4 Definición y determinación de trazas	12
2.5 Definición de λ_u	16
3 Resumen del problema circular	17
3.1 Obtención de la ecuación maestra	17
3.2 Resolución de la ecuación	19
3.3 Inclinaciones críticas	25
4 Problema excéntrico	27
4.1 Obtención de la ecuación maestra	27
4.2 Resolución de la ecuación maestra aproximada	30
4.3 Obtención de función de simetría de las soluciones u_2	34
4.4 Análisis de sensibilidad	36
4.5 Determinación del número de inclinaciones críticas de forma analítica	74
4.6 Precisión y limitaciones del modelo	82
5 Conclusiones y trabajo futuro	91
5.1 Conclusiones	91
5.2 Trabajo futuro	91
6 Referencias	93

Índice

<i>Resumen</i>	I
<i>Abstract</i>	III
<i>Índice Abreviado</i>	V
<i>Notación</i>	XV
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes históricos	3
1.2 Descripción y clasificación de satélites	3
1.3 Objetivos y alcance del proyecto	4
1.4 Estructura del proyecto	4
2 Conceptos básicos de mecánica orbital	5
2.1 Mecánica orbital	5
2.2 Leyes horarias	8
2.3 Elementos orbitales	10
2.4 Definición y determinación de trazas	12
2.4.1 Trigonometría esférica	13
2.4.2 Cálculo de la traza	14
2.4.3 Órbitas con traza repetida	15
2.5 Definición de λ_u	16
3 Resumen del problema circular	17
3.1 Obtención de la ecuación maestra	17
3.2 Resolución de la ecuación	19
3.2.1 Región de soluciones	19
3.2.2 Caso impar	20
3.2.3 Caso par	22
3.3 Inclinaciones críticas	25
4 Problema excéntrico	27
4.1 Obtención de la ecuación maestra	27
4.2 Resolución de la ecuación maestra aproximada	30
4.3 Obtención de función de simetría de las soluciones u_2	34
4.4 Análisis de sensibilidad	36
4.4.1 Variación con la excentricidad	36
4.4.2 Variación con el argumento del perigeo ω :	47
4.4.3 Variación con la excentricidad y el argumento del perigeo conjuntamente	59
4.4.4 Inclinaciones críticas	62
4.5 Determinación del número de inclinaciones críticas de forma analítica	74
4.5.1 Número de soluciones para $i = 0^\circ$	74

Existencia de puntos críticos	74
Introducción de soluciones a través de las asíntotas	75
Introducción de soluciones a través de los extremos $-\pi, \pi$	77
4.5.2 Particularización para $i=180^\circ$	77
Existencia de puntos críticos	77
Introducción de soluciones a través de las asíntotas	78
Introducción de soluciones a través de los extremos $-\pi, \pi$	78
4.5.3 Determinación del número de soluciones introducidas por cada inclinación crítica	78
4.5.4 Cálculo del número de inclinaciones críticas	81
4.6 Precisión y limitaciones del modelo	82
5 Conclusiones y trabajo futuro	91
5.1 Conclusiones	91
5.2 Trabajo futuro	91
6 Referencias	93

Lista de imágenes

1.1	Ejemplo de órbita circular con traza repetida y puntos de cruce	1
1.2	Ejemplo de órbita con excentricidad, traza repetida y puntos de cruce	2
2.1	Sistema de referencia utilizado para el desarrollo del problema de los dos cuerpos	6
2.2	Descripción de elipses	7
2.3	Descripción de la circunferencia auxiliar	9
2.4	Descripción de la circunferencia auxiliar	9
2.5	(2018). Sistema de referencia ecuatorial inercial [Imagen]. Obtenido de https://lco.global/spacebook/equatorial-coordinate-system/	10
2.6	Descripción de la órbita en su propio plano	11
2.7	Descripción del plano orbital	11
2.8	Sistema de referencia ecuatorial no inercial	12
2.9	Ejemplos de proyecciones de la superficie terrestre	12
2.10	Ejemplo de triángulo esférico	13
2.11	Triángulo esférico (zoom)	13
2.12	Órbita genérica	14
2.13	Ejemplo de representación de traza (con su retraso nodal)	15
2.14	Ejemplo de representación de traza repetida	15
2.15	Relación u y λ_u para órbita directa	16
2.16	Relación u y λ_u para órbita retrógrada	16
3.1	Ejemplo de órbita circular del caso impar con sus respectivos puntos de cruce obtenidos	22
3.2	Ejemplo de órbita circular del caso par con sus respectivos puntos de cruce obtenidos	24
3.3	Trazas de una órbita circular con $k = 5$ y $m = 4$ y varias inclinaciones (I)	25
3.4	Trazas de una órbita circular con $k = 5$ y $m = 4$ y varias inclinaciones (II)	25
3.5	Trazas de una órbita circular con $k = 3$ y $m = 1$ y varias inclinaciones	26
4.1	Ejemplo de órbita con traza repetida cada 3 revoluciones ($k=3$) y cada día ($m=1$), de excentricidad $e=0.1$, inclinación 80° y argumento de perigeo $\omega = 50^\circ$.	32
4.2	Ejemplo de órbita con traza repetida cada 5 revoluciones ($k=5$) y cada 4 días ($m=4$), de excentricidad $e=0.05$, inclinación 120° y argumento de perigeo $\omega = 50^\circ$.	32
4.3	Traza de la órbita resuelta en la tabla 4.1	33
4.4	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=1$, $i=80^\circ$ y $\omega = 50^\circ$ (incluidas las dos órbitas ilustradas en la tabla)	38
4.5	Zoom 1 de la gráfica 4.4	38
4.6	Zoom 2 de la gráfica 4.4	39
4.7	Zoom 3 de la gráfica 4.4	39
4.8	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=85^\circ$ y $\omega = -35^\circ$	40
4.9	Zoom 1 de la gráfica 4.8	40
4.10	Zoom 2 de la gráfica 4.8	41
4.11	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=6$, $m=5$, $i=87^\circ$ y $\omega = 90^\circ$	41

4.12	Zoom 1 de la gráfica 4.11	42
4.13	Zoom 2 de la gráfica 4.11	42
4.14	Zoom 3 de la gráfica 4.11	43
4.15	Zoom 4 de la gráfica 4.11	43
4.16	Zoom 5 de la gráfica 4.11	44
4.17	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=7$, $m=3$, $i=85^\circ$ y $\omega = -15^\circ$	44
4.18	Zoom 1 de la gráfica 4.17	45
4.19	Zoom 2 de la gráfica 4.17	45
4.20	Zoom 3 de la gráfica 4.17	46
4.21	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=1$, $i=80^\circ$ y $e=0.05$	48
4.22	Zoom 1 de la gráfica 4.21	48
4.23	Zoom 2 de la gráfica 4.21	49
4.24	Zoom 3 de la gráfica 4.21	49
4.25	Zoom 2 de la gráfica 4.21	50
4.26	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$	50
4.27	Zoom 1 de la gráfica 4.26	51
4.28	Zoom 2 de la gráfica 4.26	51
4.29	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$	52
4.30	Zoom 1 de la gráfica 4.29	52
4.31	Zoom 2 de la gráfica 4.29	53
4.32	Zoom 3 de la gráfica 4.29	53
4.33	Zoom 4 de la gráfica 4.29	54
4.34	Zoom 5 de la gráfica 4.29	54
4.35	Zoom 6 de la gráfica 4.29	55
4.36	Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=7$, $m=3$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$	55
4.37	Zoom 1 de la gráfica 4.36	56
4.38	Zoom 2 de la gráfica 4.36	56
4.39	Zoom 3 de la gráfica 4.36	57
4.40	Zoom 4 de la gráfica 4.36	57
4.41	Zoom 5 de la gráfica 4.36	58
4.42	Variación de la posición del punto de corte situado en el hemisferio Norte con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=83^\circ$ $k=3$ y $m=1$	59
4.43	Zoom de la gráfica 4.42	59
4.44	Variación de la posición de uno de los puntos de corte situados en el hemisferio Sur con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=87^\circ$ $k=3$ y $m=2$	60
4.45	Variación de la posición de uno de los puntos de corte situados en el hemisferio Norte con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=85^\circ$ $k=3$ y $m=1$	60
4.46	Variación de la posición del punto de corte situado sobre el Ecuador con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=85^\circ$ $k=7$ y $m=3$	61
4.47	Zoom de la gráfica 4.46	61
4.48	Ejemplo de órbita con traza repetida cada 5 revoluciones ($k=5$) y cada tres días ($m=3$), de excentricidad $e=0.05$, argumento del perigeo $\omega = 30^\circ$ e inclinación crítica.	62
4.49	Ejemplo de órbita con traza repetida cada 9 revoluciones ($k=9$) y cada 7 días ($m=7$), de excentricidad $e=0.025$, argumento del perigeo $\omega = 70^\circ$ e inclinación crítica.	63
4.50	Primer par de inclinaciones críticas	64
4.51	Segundo par de inclinaciones críticas	65
4.52	Quinta inclinación crítica	65
4.53	Primer par de inclinaciones críticas	65
4.54	Segundo par de inclinaciones críticas	66
4.55	Primera inclinación crítica	66
4.56	Último par de inclinaciones críticas	66
4.57	Variación con la excentricidad de las inclinaciones críticas para órbitas del caso impar	68
4.58	Variación con la excentricidad de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m impar	68
4.59	Variación con la excentricidad de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m par	69
4.60	Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso impar	69
4.61	Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso impar (zoom)	69
4.62	Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m impar	70

4.63	Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m par	70
4.64	Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m par (zoom)	70
4.65	Ejemplo de tangencia en el hemisferio opuesto para órbita con $k=7$, $m=5$, $e=0.03$, segunda inclinación crítica y argumento del perigeo $\omega = -70^\circ$.	72
4.66	Generación de nuevos puntos de corte para inclinaciones cercanas a cero con excentricidades pequeñas y k y m grandes	75
4.67	Función $\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)$ con $\frac{m}{k}$ genérico	80
4.68	Función $\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)$ con $\frac{m}{k} \approx 1$	80
4.69	Valor de excentricidad que hace que se anule el término C con $u_2^* = -\frac{3\pi}{4}$ y $\omega = \frac{\pi}{2}$	81
4.70	Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud del punto de corte situado en el hemisferio Norte con $k=3$, $m=1$ e $i=83^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo.	84
4.71	Zoom de la gráfica 4.70	85
4.72	Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud de uno de los puntos de corte situado en el hemisferio Sur con $k=3$, $m=2$ e $i=87^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo.	85
4.73	Zoom de la gráfica 4.72	86
4.74	Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud de uno de los puntos de corte situado en el hemisferio Norte con $k=6$, $m=5$ e $i=83^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo.	86
4.75	Zoom de la gráfica 4.74	87
4.76	Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud del punto de corte situado sobre el Ecuador con $k=7$, $m=3$ e $i=85^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo.	87
4.77	Zoom de la gráfica 4.76	88
4.78	Creación de nuevos puntos de corte para excentricidades altas en una órbita con $e=0.9$, $k=3$, $m=1$, $i=0.1$ rad y $\omega = 0^\circ$	88
4.79	Zoom de la gráfica 4.78	89
4.80	Creación de nuevos puntos de corte para excentricidades altas en una órbita con $e=0.77$, $k=7$, $m=3$, $i=0.1$ rad y $\omega = 0^\circ$	89
4.81	Zoom de la gráfica 4.80	90

Índice de Tablas

3.1	Soluciones de la ecuación (3.25) para órbita circular del caso impar con $i = 83^\circ$, $k = 5$ y $m = 3$	22
3.2	Soluciones de la ecuación (3.37) para órbita circular del caso par con $i = 85^\circ$, $k = 4$ y $m = 3$	24
4.1	Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones no lineales completo para una órbita cuyas características son $k=3$, $m=2$, $\omega = 25^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.15$	33
4.2	Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación (4.41) y la ecuación maestra aproximada para una órbita cuyas características son $k=3$, $m=1$, $\omega = 20^\circ$, $i=80^\circ$ y $e=0.05$	35
4.3	Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación (4.41) y la ecuación maestra aproximada para una órbita cuyas características son $k=5$, $m=1$, $\omega = 20^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$	35
4.4	Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación (4.41) y la ecuación maestra aproximada para una órbita cuyas características son $k=7$, $m=6$, $\omega = 20^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$	35
4.5	Variación de la posición de algunos puntos de corte de la órbita con traza repetida cuyos elementos orbitales son $k=3$, $m=1$, $i=80^\circ$ y $\omega = 50^\circ$	37
4.6	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=5$, $e=0.03$, $\omega = 70^\circ$	64
4.7	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=4$, $e=0.03$, $\omega = 70^\circ$	65
4.8	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8$, $m=3$, $e=0.05$, $\omega = -20^\circ$	66
4.9	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=5$ y $e=0$	67
4.10	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=4$ y $e=0$	67
4.11	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8$, $m=3$ y $e=0$	67
4.12	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=5$, $e=0.03$, $\omega = 70^\circ$	82
4.13	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=4$, $e=0.03$, $\omega = 70^\circ$	82
4.14	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8$, $m=3$, $e=0.05$, $\omega = -20^\circ$	82
4.15	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=5$ y $e=0$	82
4.16	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7$, $m=4$ y $e=0$	82
4.17	Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8$, $m=3$ y $e=0$	82
4.18	Tabla comparativa para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$ con $e=0.25$	83
4.19	Tabla comparativa para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$ con $e=0.35$	83
4.20	Tabla comparativa para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$ con $e=0.45$	83

Notación

\vec{R}_i	Vector de posición de la masa i
m_i	Masa i
G	Constante de gravitación universal
\ddot{x}	Segunda derivada respecto al tiempo de la variable x
μ	Parámetro gravitacional de masa combinadas
\in	Energía específica
\vec{h}	Momento cinético específico
p	Parámetro de la cónica
\vec{r}	Vector de posición del satélite desde el foco no vacante
θ	Anomalía verdadera
r_p	Radio de periápsis
r_a	Radio de apoápsis
a	Semieje mayor de la elipse
b	Semieje menor de la elipse
c	Distancia del origen de coordenadas a uno de los focos de la elipse
e	Excentricidad de la órbita
n	Velocidad angular
T	Periodo de la órbita
Δt	Tiempo transcurrido entre dos posiciones de la órbita
M	Anomalía media
E	Anomalía excéntrica
Υ	Primer punto de Aries
Ω	Nodo ascendente
ω	Argumento de perigeo/periápsis
i	Inclinación de la órbita
$RAAN$ o Ω	Ascensión recta del nodo ascendente
$\bar{\omega}$	Longitud del perigeo
u	Argumento de latitud
ϕ	Latitud
λ	Longitud
λ_T	Longitud verdadera
GST_0	Ascensión recta del meridiano de Greenwich en $t=0$
\oplus	Referencia a la Tierra
SAT	Referencia al satélite
$\Delta\lambda$	Retraso nodal
k	Número de revoluciones completas del satélite que tarda en repetirse la traza
m	Número de días sidéreos que tarda en repetirse la traza
λ_u	Ángulo utilizado para el cálculo de trazas

r	Número de revoluciones necesarias para encontrar un punto de corte
$\delta_{i,j}$	Coeficiente (i,j) de la delta de Kronecker
$[]$	Parte entera
sin	Función seno
cos	Función coseno
tan	Función tangente
arcsin	Función arco seno
arc cos	Función arco coseno
arctan	Función arco tangente
\leq	Menor o igual
\geq	Mayor o igual
$>$	Mayor
$<$	Menor
$\frac{\partial}{\partial}$	Derivada parcial
<i>rad.</i>	Radianes
<i>revs.</i>	Revoluciones
<i>Sol.</i>	Solución
<i>aprox.</i>	Aproximadamente
<i>N – S</i>	Norte-Sur

1 Introducción

El uso de satélites artificiales para la investigación, la comunicación o incluso para misiones bélicas es ya un hecho cotidiano en nuestras vidas. Para diseñar la órbita un satélite y hacer que cumpla una cierta misión, una de las herramientas de mayor utilidad es la traza del satélite, que no es más que el conjunto de puntos que este sobrevuela a lo largo de su órbita. En concreto, cuando esta traza se cierra, se dice que el satélite se encuentra en una órbita de traza repetida. Este tipo concreto de trazas, puede presentar puntos de corte o "crossover points" que son aquellos puntos de la superficie sobre los que pasa el satélite dos veces sin que su traza se haya repetido aún. Estos puntos son de especial interés para ciertas misiones, ya que suponen una doble oportunidad para la observación, para la toma de datos o para la transferencia de los mismos. Se incluyen a continuación un par de ejemplos de trazas repetidas en las que además pueden observarse "crossover points" o puntos de cruce:

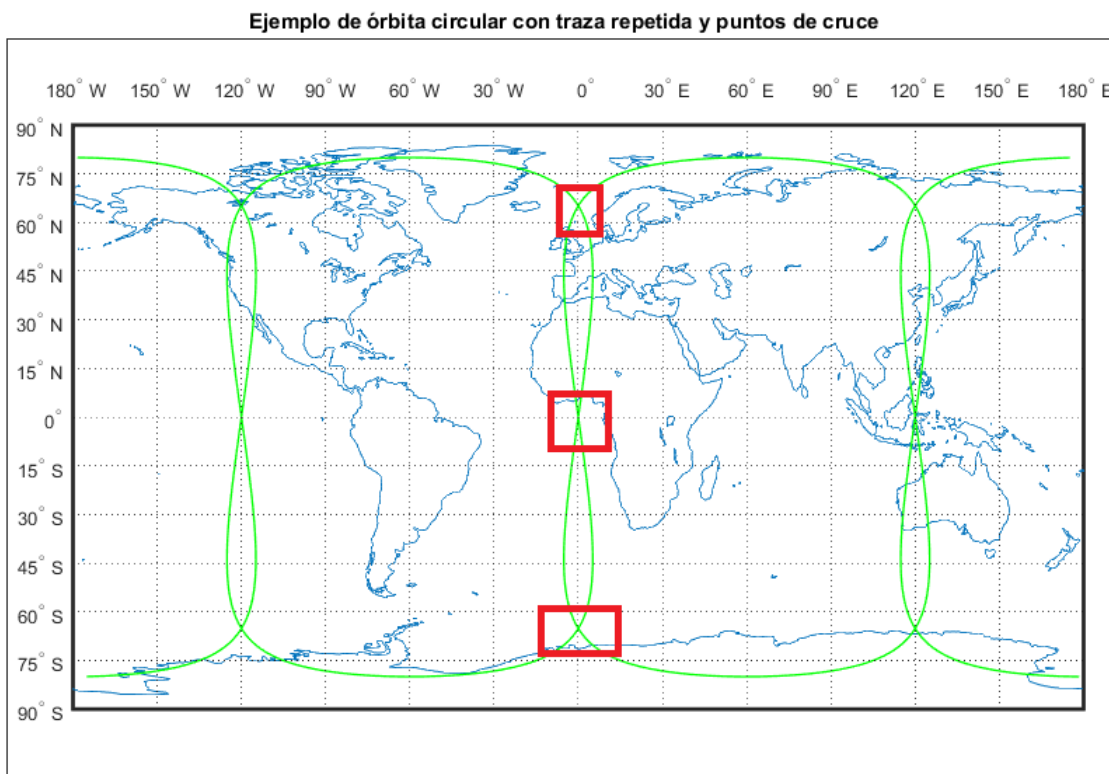


Imagen 1.1 Ejemplo de órbita circular con traza repetida y puntos de cruce.

En 1.1 puede verse cómo la traza del satélite (línea verde) se cierra sobre sí misma, de forma que sea cual sea el tiempo que lleve el satélite en órbita, se encontrará siempre sobre la misma curva (idealmente). Además, marcados en rojo pueden verse los denominados anteriormente puntos de cruce o "crossover points", que

son el objetivo de estudio de este documento. En concreto, 1.1 corresponde a la traza de una órbita circular. El caso circular ha sido estudiado por Eva Tesón Muñoz en **”Estudio detallado de los puntos de cruce de las trazas de satélites geocéntricos”** (ref. [1]). En este documento, se estudia cómo afectan los distintos parámetros de la órbita (elementos orbitales) a la localización y cantidad de estos puntos de cruce para órbitas circulares, tanto de forma analítica como mediante cálculo numérico. Además se realiza una breve introducción a este mismo estudio generalizado para órbitas excéntricas. El estudio completo del caso circular se encuentra resumido en el capítulo 3, que servirá como introducción al tema propio de este documento.

La extensión de este estudio a órbitas excéntricas es posible ya que la introducción de esta excentricidad no evita que la traza pueda cerrarse sobre sí misma, y producir además puntos de cruce, tal y como puede verse en 1.2:

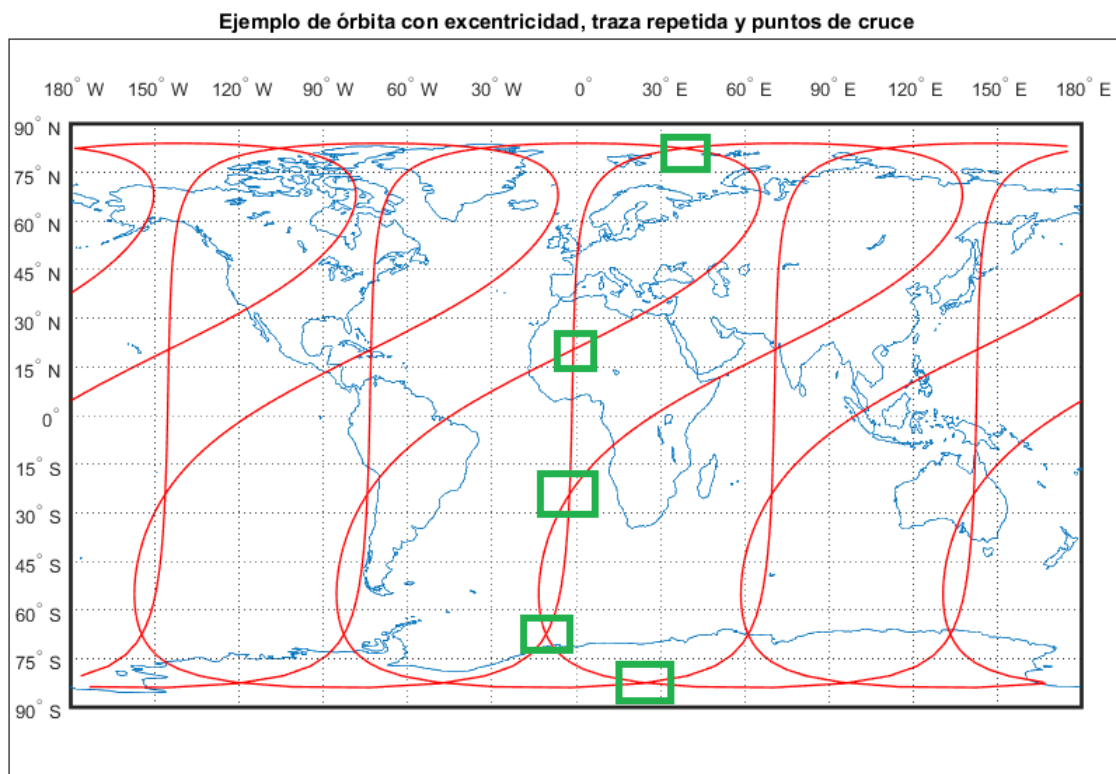


Imagen 1.2 Ejemplo de órbita con excentricidad, traza repetida y puntos de cruce.

Este documento constituye una extensión del estudio realizado en [1] para órbitas circulares, particularizado para órbitas geocéntricas de pequeña excentricidad (a lo largo del documento se detallará qué órbitas engloba este adjetivo ”pequeña”), en concreto, se estudia la localización de estos puntos de corte en función de los elementos orbitales del satélite y la influencia de la variación de estos parámetros sobre los puntos de corte. Al poderse calcular el número de puntos de corte y su situación sobre un mapa terrestre, es posible emplazar los centros de observación y recopilación de datos en estos puntos de corte, o diseñar una órbita de forma que ciertos puntos específicos de la superficie sean observados más de una vez por el satélite.

La principal diferencia con respecto a [1] es que, debido a la complejidad de las ecuaciones al introducir la excentricidad, en este documento se va a hacer uso de una aproximación de la ecuación para excentricidad pequeña, la cual se explicará con detalle en el capítulo 4, de forma que los resultados deberán compararse con los obtenidos al resolver el problema real, para poder comprobar su exactitud. Además, en el caso circular no puede estudiarse la variación de la posición de estos puntos de corte respecto a la excentricidad o al argumento del perigeo, ya que el primer elemento orbital es nulo para el caso circular, y el segundo solo puede definirse en órbitas excéntricas.

Todos estos conceptos, como el de traza o el de elemento orbital, se definirán con más detalle en el capítulo 2.

1.1 Antecedentes históricos

Durante varios siglos, las personas han estado interesadas en el cielo y en los cuerpos que en él se encuentran. Esto los condujo a intentar estudiar el comportamiento de los mismos, y a elaborar teorías de cómo y por qué estos cuerpos celestes se movían de la forma que lo hacían. La primera teoría que se considera correcta a la hora de describir el movimiento de los cuerpos en el espacio fue la formulada por Kepler en el siglo XVII, la cual se compone principalmente de tres leyes, las cuales son la base de la mecánica orbital.

A finales del mismo siglo, Newton desarrolla la teoría de gravitación universal, así como el cálculo diferencial, los cuales son de suma importancia para todos los desarrollos matemáticos realizados en este documento.

Estos dos grandes acontecimientos forman la base para todos los desarrollos y estudios relacionados con la mecánica celeste posteriores. Además, durante la Guerra Fría, Estados Unidos y la Unión Soviética intentan hacer uso de estos conocimientos para poner en órbita el primer satélite artificial de la historia. El primero en conseguir este gran hito fue la URSS, cuando el 4 de octubre de 1957 puso en órbita el Sputnik-1. Desde ese momento, el número de satélites artificiales que orbitan alrededor de la Tierra ha crecido exponencialmente, así como sus campos de aplicación.

Para poder controlar, monitorizar y corregir las trayectorias de estos satélites artificiales, se desarrolló la Astrodinámica, la ciencia que aplica la mecánica celeste a los satélites artificiales, la cual es la base para los estudios realizados en este documento.

1.2 Descripción y clasificación de satélites

Un satélite es todo aquel cuerpo que orbita alrededor de un planeta. En concreto, este documento se centra en el estudio de los satélites artificiales, y más concretamente, de los geocéntricos, es decir, de aquellos que orbitan alrededor de la Tierra (aunque puede realizarse fácilmente una extrapolación a cualquier otro planeta tomando los parámetros correspondientes al mismo).

Actualmente, los satélites tienen formas muy variadas para poder desempeñar sus funciones concretas. Van desde telescopios de más de 13 toneladas hasta micro-satélites enfocados a la toma de muestras o a la transmisión de información. Además, a excepción de estos micro-satélites que están entrando ahora en auge, la producción en serie de satélites completamente similares está muy limitada, debido al elevado coste de lanzamiento. Por esta misma razón, usualmente se han construido satélites grandes que sean capaces de desarrollar varias tareas, y su diseño se hacía de forma casi individual.

La clasificación principal de los satélites se basa en las características de su órbita. Debido a la amplia variedad de órbitas existentes, se describen aquí únicamente las más utilizadas.

- **Órbitas LEO (Low Earth Orbit):** son aquellas que no se extienden más allá de los 2.000 km. Además, se suele evitar las órbitas a alturas inferiores a 300 km debido a los problemas que genera la resistencia atmosférica. Estas órbitas son las más próximas a la Tierra, por lo que son aquellas para las cuales es necesario una menor energía para poner en órbita al satélite.

Por otra parte, debido a la atmósfera residual y a la forma no esférica de la Tierra, este tipo de órbita sufre perturbaciones, haciendo necesario el uso de combustible en el satélite para mantener la órbita nominal.

Un ejemplo de cuerpo artificial que orbita en este tipo de órbita es la Estación Espacial Internacional.

- **Órbitas geoestacionarias GEO:** son aquellas cuya principal característica es que el satélite siempre sobrevuela el mismo punto terrestre. Esto se consigue al hacer que el satélite tenga una órbita síncrona, la cual es un tipo de órbita cuyo periodo coincide con el de rotación terrestre, circular y ecuatorial. Este tipo de órbitas son muy utilizadas por satélites de comunicaciones, ya que permanecen "fijos" sobre el mismo punto de la Tierra.

La desventaja de este tipo de órbitas es que, para que el satélite tenga el mismo periodo que el de rotación de la Tierra, su distancia a la misma debe ser 35.786 km, lo que supone que es necesario una gran cantidad de energía para llevar el satélite hasta su órbita destino.

Junto con el anterior, estos dos tipos de órbitas son las más utilizadas actualmente.

- **Órbitas MEO (Medium Earth Orbit):** son las que se encuentran entre las órbitas LEO y GEO. Proporcionan una mayor cobertura que las órbitas LEO y necesitan un menor coste energético para su uso.

- **Órbitas de alta excentricidad:** debido a que las órbitas geoestacionarias deben ser ecuatoriales, las regiones más cercanas a los polos no consiguen una buena cobertura. A raíz de esto, se desarrollaron dos órbitas que se conocen actualmente como de alta excentricidad: las órbitas Molniya y Tundra. La órbita Molniya fue utilizada por la URSS para suplir esta falta de cobertura en sus zonas polares.
- **Constelaciones:** por último, un caso concreto de órbitas son aquellas que se coordinan entre sí para llevar a cabo una tarea. Este conjunto de satélites coordinados forman una constelación. Estas constelaciones no tienen por qué ser de un único tipo de los descritos anteriormente, sino que se pueden combinar varias altitudes y excentricidades para reducir el número de satélites necesarios. Una de las más conocidas es la constelación de satélites GPS, la cual se utiliza globalmente para posicionar dispositivos electrónicos.

1.3 Objetivos y alcance del proyecto

Como ya se ha comentado anteriormente, el objetivo principal de este documento es el estudio de los puntos de cruce en órbitas de pequeña excentricidad y de traza repetida:

- Se realizan desarrollos matemáticos con el fin de obtener las ecuaciones exactas y aproximadas que permiten la obtención de la localización de los puntos de corte de la traza (si existiesen) en función de los elementos orbitales del satélite.
- Se desarrollan códigos en la plataforma *MATLAB* que, haciendo uso de las ecuaciones previamente obtenidas, permiten calcular la posición de estos puntos y representarlos sobre un mapa terrestre.
- Se estudia la influencia de los distintos elementos orbitales en la posición de estos puntos de corte, todo ello mediante desarrollos matemáticos apoyados por simulaciones en *MATLAB*.
- Se realiza un primer acercamiento a la determinación analítica del número de puntos de cruce y de inclinaciones críticas para cada órbita.
- También se estudia la validez de la aproximación que se realiza para la obtención de estos puntos de corte, comparándola con las ecuaciones exactas numéricamente.

Con estos estudios se pretende facilitar la labor de diseño de este tipo de órbitas, en las que es necesario la existencia de uno o varios puntos de corte sobre puntos concretos de la superficie, las cuales, actualmente, se diseñan a base de prueba y error.

1.4 Estructura del proyecto

La estructura del documento es la siguiente:

En primer lugar, se realiza una pequeña descripción de los acontecimientos históricos que han hecho posible que este estudio se lleve a cabo, así como una descripción general de los satélites artificiales actuales y su clasificación.

Después, y para poder entender los desarrollos posteriores, se dedica un capítulo a la introducción de los conceptos básicos de la mecánica orbital, como por ejemplo la definición de la traza de un satélite y la obtención de las ecuaciones que la describen.

Una vez que se han introducido las herramientas que se utilizarán a lo largo del desarrollo de este documento, se comienza estudiando las órbitas cuya traza se repite y además presentan puntos de cruce, pero restringidas a las órbitas circulares, porque, como podrá comprobarse, supone una simplificación del problema. Este capítulo tiene únicamente como objetivo servir de resumen del trabajo realizado en [1] y de introducción para el estudio del problema genérico, que es el tema central del presente documento.

Tras el estudio del problema circular, se pasa a generalizar las ecuaciones incluyendo ahora la excentricidad a la órbita, de forma que se verá cómo cada uno de los elementos orbitales relevantes influyen en estos puntos de cruce, tanto en su número como en su localización.

Por último, se incluyen una serie de conclusiones que pueden obtenerse de este documento, y algunas posibles líneas de investigación futura.

2 Conceptos básicos de mecánica orbital

Antes de profundizar en el tema principal de este documento, los puntos de cruce en trazas repetidas, es necesario introducir una serie de conceptos que serán necesarios para el desarrollo del mismo.

Primero, se estudiará la mecánica orbital mediante el problema de los dos cuerpos, de forma que pueda caracterizarse su movimiento en el espacio al estar sometido a la atracción gravitatoria de otro cuerpo, centrándonos en el estudio de un cuerpo muy masivo central (planeta) y un cuerpo de masa despreciable en comparación (satélites artificiales). Después, una vez caracterizada la órbita en el espacio tridimensional del cuerpo poco masivo, será necesario estudiar cómo esta órbita se proyecta sobre la superficie del planeta, es decir, qué puntos sobrevuela el satélite a lo largo de su órbita. Esto definirá una curva que se conoce como traza, la cual es el objeto principal de estudio de este documento, ya que es esta curva la que se cortará a sí misma para generar los puntos de cruce de interés.

2.1 Mecánica orbital

El estudio del movimiento de los cuerpos en el espacio sometidos a fuerzas gravitatorias fue posible gracias a las contribuciones de Kepler y Newton: la demostración de que toda órbita puede expresarse como una cónica y la teoría de la gravedad y la matemática diferencial, respectivamente. En principio, el estudio dinámico de los cuerpos en el espacio se utilizaba para la comprensión de los movimientos de los planetas principalmente, pero desde la creación y puesta en órbita del primer satélite artificial por la URSS, su aplicación a estos satélites artificiales para controlar su posición y orientación ha ido creciendo.

En una primera aproximación, para estudiar cómo se mueven dos cuerpos en el espacio se realizan las siguientes hipótesis:

- La única fuerza que actúa sobre los cuerpos es la atracción gravitatoria entre los mismos.
- Las masas se pueden considerar puntuales y localizadas en el centro de masas de cada cuerpo. Se denominan m_1 y m_2 .

Esta última hipótesis no parece muy adecuada para el estudio de cuerpos masivos como los planetas, pero Newton demostró que un cuerpo esférico con densidad constante a capas produce el mismo campo gravitatorio que una masa puntual cuya masa sea equivalente a la del cuerpo esférico.

Estas son las hipótesis del denominado **Problema de los dos cuerpos**.

El sistema de referencia y la denominación de los vectores de posición son los siguientes:

\vec{R}_i es el vector de posición de la masa m_i (con $i = 1,2$) y \vec{r} es el vector de posición relativa de una de las masas respecto a la otra, de forma que se cumple $\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{r}$.

Debido a la primera hipótesis, la fuerza resultante en cada uno de los cuerpos será:

$$F_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

$$F_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2)$$

Donde G es la constante de gravitación universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

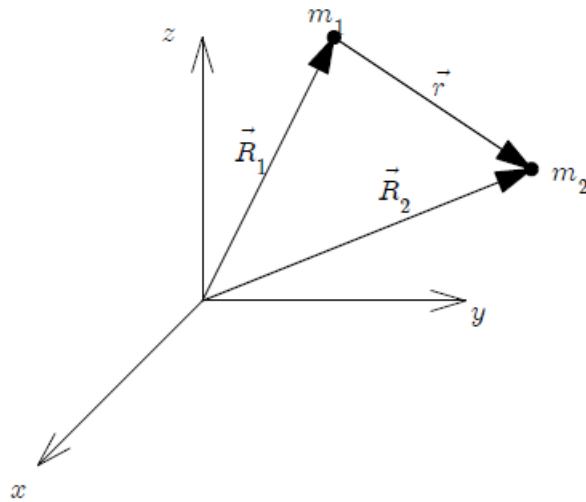


Imagen 2.1 Sistema de referencia utilizado para el desarrollo del problema de los dos cuerpos.

Puede demostrarse que el centro de masas sigue un movimiento inercial, de forma que puede trasladarse el origen del sistema al centro de masas sin alterar ninguna propiedad del propio sistema.

Si se plantean las ecuaciones de los movimientos de cada partícula mediante la Segunda Ley de Newton haciendo uso de las fuerzas por las que se ve afectada cada masa, se obtiene:

$$\ddot{\vec{R}}_1 = \frac{Gm_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.3)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.4)$$

En lugar de estudiar el movimiento de cada masa por separado, resulta más atractivo estudiar el movimiento relativo de los cuerpos entre sí, es decir, determinar el vector \vec{r} en cada instante, ya que usando el sistema de referencia cuyo origen es el centro de masas, pueden conocerse los vectores de posición de las dos masas conocido el vector de posición relativa \vec{r} mediante las siguientes relaciones:

$$\vec{r}_1 = -\vec{r} \frac{m_2}{m_2 + m_1} \quad (2.5)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} \frac{m_1}{m_2 + m_1} \quad (2.6)$$

Si se resta (2.3) a (2.4), puede obtenerse la ecuación diferencial que determina la evolución del vector de posición relativa y, por tanto, la ecuación del movimiento:

$$\ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.7)$$

En (2.7), μ representa el **parámetro gravitacional de masas combinadas**, el cual, para movimientos de satélites alrededor de planetas (o incluso de planetas alrededor de estrellas) puede aproximarse como $\mu \approx Gm_1$ (siendo m_1 la mayor de las masas).

Estudiando la conservación de ciertas cantidades, en concreto, de la energía específica ε y del momento cinético específico \vec{h} , se llega a la conclusión de que todas las órbitas pueden describirse mediante una cónica, es decir, mediante la siguiente ecuación:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (2.8)$$

Donde p es el llamado **parámetro de la cónica**, y cuya expresión es $p = \frac{h^2}{\mu}$

Debido a que este documento se centra en órbitas cerradas alrededor de planetas (y más en concreto alrededor de la Tierra), se asumirá que la excentricidad e de la órbita es menor que 1 y mayor o igual que 0, de forma que la órbita sea cerrada.

Para concluir este apartado, se incluyen aquellos elementos necesarios para caracterizar una elipse:

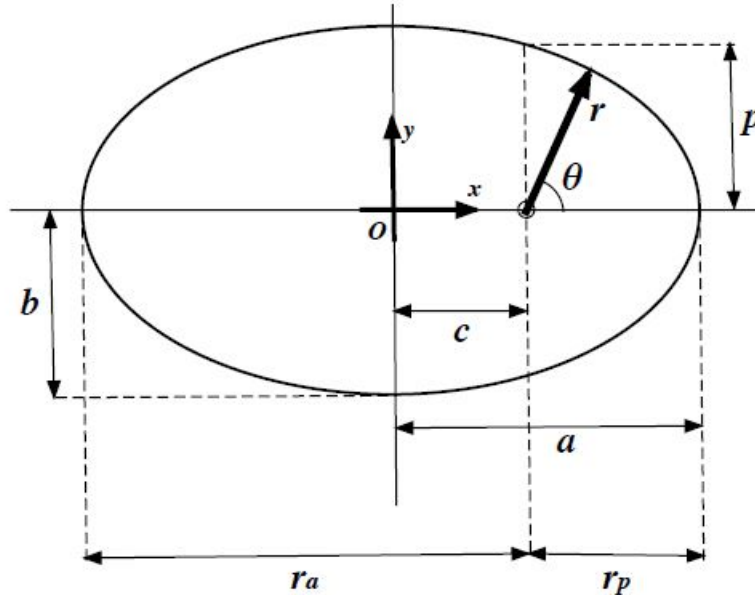


Imagen 2.2 Descripción de elipses.

- El vector de posición r se mide desde uno de los focos de la elipse, el cual se conoce como foco no vacante.
- La línea que une ambos focos de la elipse se conoce como **línea de ápsides**.
- El ángulo θ se conoce como **anomalía verdadera**, y es el ángulo que forma el vector de posición r con la línea de ápsides. La ecuación que relaciona este ángulo con el valor del vector de posición es (2.8).
- r_p hace referencia al radio de periápsis, es decir, la distancia del foco no vacante al punto más cercano al mismo.
- r_a por el contrario, hace referencia a la distancia desde el foco no vacante al punto más lejano de la elipse, el apoápsis.
- a es el semieje mayor de la elipse, mientras que b el semieje menor. La distancia del origen de coordenadas a uno de los focos es c .
- p es la distancia del foco no vacante al punto situado directamente en su vertical.
- e es la excentricidad de la órbita. Es una medida de la diferencia entre ambos semiejes, es decir, de la desviación con respecto a una circunferencia. A partir de a y b : $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Normalmente todos los parámetros de la elipse se describen a partir del semieje mayor a y la excentricidad e .

2.2 Leyes horarias

Mediante el estudio anterior se ha demostrado que las órbitas pueden describirse mediante curvas cónicas, pero se ha eliminado de esta descripción la dependencia con el tiempo. Para el control y estudio de satélites será necesario establecer una relación entre el tiempo transcurrido desde un cierto instante de referencia y la posición del satélite sobre su órbita. En estas relaciones, el instante de referencia será el último paso por el periápsis.

Antes de comenzar con la obtención de la ley horaria es necesario introducir una serie de conceptos:

- **Velocidad angular media:** sería la velocidad angular que tendría el satélite en todo momento si la órbita fuese circular. Su expresión es $n_{sat} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2\pi}{T}$, siendo T el periodo de la órbita.
- **Anomalía media:** ángulo que habría recorrido un satélite en una órbita circular en un tiempo Δt :

$$M = n_{sat} \Delta t \quad (2.9)$$

- Debido a la simetría de las elipses, el tiempo que tarda el satélite en alcanzar el apoápsis desde el periápsis es exactamente la mitad del periodo. Gracias a esta propiedad, la anomalía circular M y la verdadera θ coinciden en apoápsis y periápsis y también pueden calcularse los tiempos relacionados con posiciones posteriores al apoápsis mediante la siguiente relación $\Delta t(\theta) = T - \Delta t(2\pi - \theta)$, siendo $\Delta t(\theta)$ el tiempo transcurrido desde el último paso por periápsis hasta la posición cuya anomalía verdadera es θ .

Para la parametrización de la elipse será necesario hacer uso de una circunferencia auxiliar, tangente a la elipse en apoápsis y periápsis. Esta circunferencia auxiliar cumple las relaciones expuestas en la imagen 2.3. A partir de esta circunferencia, se define la **anomalía excéntrica** como: dado un valor de anomalía verdadera θ^* se tiene un valor de distancia al foco no vacante r^* . Desde ese punto de la elipse de coordenadas r^*, θ^* se traza una vertical hasta la circunferencia auxiliar y se une este punto con el origen de coordenadas. El ángulo que forman esta última recta y la línea de ápsides define la anomalía excéntrica, variable que se usará para parametrizar la elipse (descripción gráfica en la imagen 2.4). Esta relación es puramente geométrica, para obtener la relación analítica entre la anomalía verdadera θ y la anomalía excéntrica E se hace uso de la primera relación que aparece en la imagen 2.3. Teniendo en cuenta que de la definición de la anomalía excéntrica puede extraerse que las distancias verticales del punto de la elipse y de la circunferencia a la línea de ápsides son respectivamente $y_e = r \sin \theta$ y $y_c = a \sin E$ (con a el semieje mayor de la elipse) y que ambas distancias se relacionan a través de la primera expresión de la imagen 2.3, se llega a:

$$a \sqrt{1 - e^2} \sin E = r \sin \theta \quad (2.10)$$

Observando la geometría se llega también a una relación entre las distancias horizontales al origen de coordenadas:

$$a \cos E - ae = r \cos \theta \quad (2.11)$$

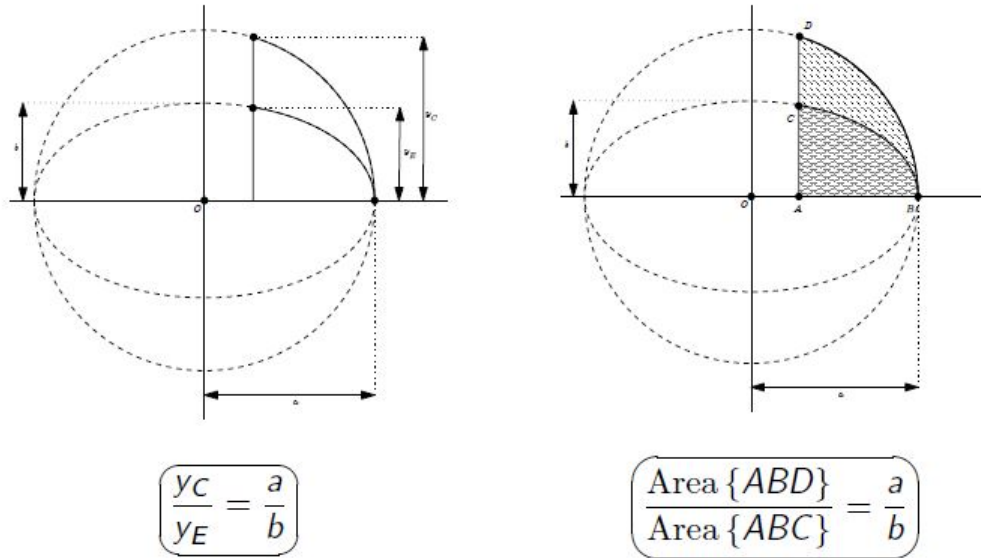


Imagen 2.3 Descripción de la circunferencia auxiliar.

Operando con las expresiones (2.9) y (2.10) para despejar r y sustituirla en una de las dos expresiones, puede obtenerse finalmente una ecuación que relaciona directamente la anomalía verdadera con la anomalía excéntrica (haciendo también uso de algunas relaciones trigonométricas):

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.12}$$

Para obtener una relación entre el tiempo transcurrido desde el último paso por periápsis y la anomalía verdadera, sería necesario ahora relacionar las anomalías excéntrica y media. Para ello, se hace uso de la segunda ley de Kepler: la velocidad areolar en una órbita es constante. Con esto, y realizando una serie de operaciones, puede llegarse a la **ecuación de Kepler**:

$$M = E - e \sin E \tag{2.13}$$

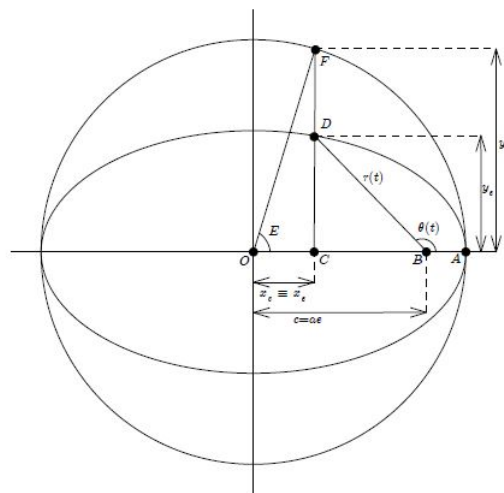


Imagen 2.4 Descripción de la circunferencia auxiliar.

Haciendo uso de (2.13), (2.12) y (2.9) puede relacionarse directamente la anomalía verdadera θ y el tiempo transcurrido desde el último paso por periápsis mediante el siguiente método:

A partir de la anomalía verdadera de un cierto punto de la órbita, se calcula el tiempo que debe transcurrir desde el paso por periápsis:

- Primero, a partir de θ y con (2.12), se calcula la anomalía excéntrica E asociada.
- Después, con la anomalía excéntrica correspondiente y la ecuación de Kepler (2.13), se calcula la anomalía media M (esta ecuación debe resolverse de forma numérica).
- Por último, a partir de la definición de la anomalía media (2.9), se obtiene el tiempo transcurrido desde el último paso por periápsis.

En caso de que se quisiera resolver el problema contrario, es decir, la determinación de la anomalía verdadera que ocuparía el cuerpo transcurrido un tiempo desde el paso por periápsis, se seguirá el mismo proceso pero de forma inversa.

Aclaración con respecto a la nomenclatura: debido a que este documento se centra en el estudio de órbitas geocéntricas, los puntos de periápsis y apoápsis también pueden denominarse perigeo y apogeo, respectivamente. Por esta razón se utilizará en adelante esta nomenclatura en lugar de la genérica utilizada hasta ahora.

Esta ley horaria se simplificará haciendo uso de un desarrollo en serie de Taylor de segundo orden con la excentricidad como variable, para poder simplificar los cálculos asociados a la determinación de la posición de los puntos de corte en una órbita geocéntrica de excentricidad pequeña. El desarrollo de la aproximación de la ley horaria puede verse en la referencia [3], y su uso en este documento en el capítulo 4.

2.3 Elementos orbitales

Los elementos orbitales son parámetros que definen geoméricamente por completo la órbita. Estos elementos (para órbitas geocéntricas) se definen en un sistema de referencia geocéntrico ecuatorial, cuyo plano XY contiene el Ecuador y cuyo eje X se identifica con el primer punto de Aries Υ , el cual, aunque se llama punto, realmente define una dirección, la que se obtiene al unir la Tierra con el Sol durante el equinoccio de primavera. El ángulo que forma la proyección sobre el Ecuador de la recta que une el satélite con el origen de coordenadas y el eje X se conoce como **ascensión recta**, mientras que el ángulo formado por esta misma recta que une el satélite con el origen y el Ecuador se conoce como **declinación**.

Antes de definir los elementos como tal, es necesario introducir una serie de conceptos que facilitarán esta definición:

- Existen dos planos clave en la definición de una órbita: el plano de referencia y el plano orbital. El primero es, como su nombre indica, el plano a partir del cual se toman medidas y direcciones. Puede ser, por ejemplo, la eclíptica para el estudio de planetas, el plano que contiene el Ecuador, etc... Por otra parte, el plano orbital es aquel en el que está contenida la propia órbita.
- La recta en la que se cortan estos dos planos determina la línea de nodos. El punto en el cual el satélite cruza el plano de referencia de Sur a Norte se conoce como **nodo ascendente** Ω , mientras que el punto en el que lo hace de Norte a Sur es el **nodo descendente** Υ .
- El vector que une el centro de la Tierra con el nodo ascendente se denomina \vec{n} , y será útil a la hora de medir ángulos.

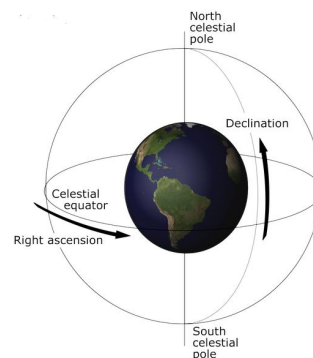


Imagen 2.5 (2018). Sistema de referencia ecuatorial inercial [Imagen]. Obtenido de <https://lco.global/spacebook/equatorial-coordinate-system/>.

Con esto, pueden describirse los elementos orbitales que definirán geoméricamente la órbita. Para órbitas no degeneradas (las cuales se aclararán más tarde) son los siguientes:

Descripción de la órbita en su propio plano:

- **Semieje mayor a :** ya se definió cuando se explicaron los distintos elementos de una elipse.
- **Excentricidad e :** ya definida.
- **Argumento de periápsis ω :** es el ángulo entre el nodo ascendente y el punto de periápsis en el plano orbital, medido en la dirección del movimiento.

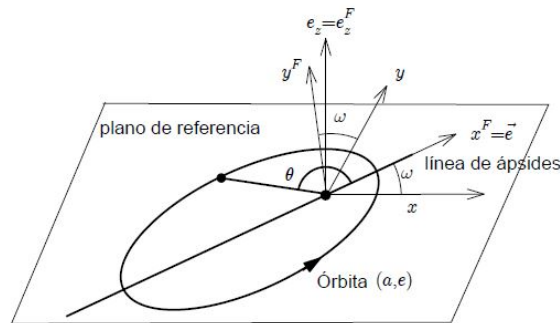


Imagen 2.6 Descripción de la órbita en su propio plano.

Descripción de la ubicación del plano orbital:

- **Inclinación i :** es el ángulo entre los planos de referencia y orbital. Se debe medir "mirando" el plano orbital desde el nodo ascendente, es decir, "enfrentándose" al vector \vec{n} . Esto hace que $i \in [0, \pi]$. Si $i \in [0, \frac{\pi}{2})$, la órbita será directa, mientras que en caso contrario, esta se denominará retrógrada. Para el caso $i = \frac{\pi}{2}$, las órbitas son polares. Otra forma más fácil de medir la inclinación es obteniendo el ángulo que forman el vector momento cinético de la órbita ($\vec{r} \times \vec{v}$) y el vector normal al plano del Ecuador en dirección al polo Norte.
- **Ascensión recta del nodo ascendente RAAN o Ω :** como indica su nombre, es el ángulo que forma el eje X del sistema de referencia (que viene definido por el primer punto de Aries) y el vector \vec{n} .

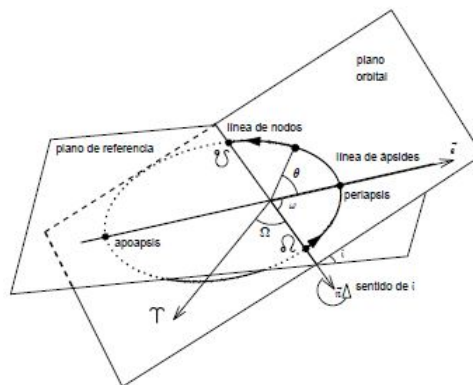


Imagen 2.7 Descripción del plano orbital.

Para caracterizar la posición del propio cuerpo sobre su órbita, será necesario definir su anomalía verdadera θ , quedando completamente definida entonces la posición del cuerpo en cuestión mediante la siguiente terna de datos: $\{a, e, \omega, RAAN, i, \theta\}$. Cabe aclarar que la anomalía verdadera puede sustituirse por la excéntrica E, la media M o incluso el tiempo transcurrido desde el último paso por periápsis.

Por último, se explican los casos degenerados mencionados anteriormente, en los que uno o varios elementos orbitales no están bien definidos, con lo que es necesario utilizar otros:

- **Órbitas elípticas ecuatoriales:** en este caso ni Ω ni ω están bien definidos, al no existir línea de nodos. Se sustituye por el ángulo longitud del perigeo $\bar{\omega} = \Omega + \omega$, el cual indica el ángulo entre el primer punto de Aries Υ y el perigeo de la órbita medido en sentido antihorario.

- **Órbitas circulares:** en este caso, al no existir una variación del radio, la línea de ápsides no puede definirse, y por tanto tampoco ω . Por ello, se utiliza el ángulo argumento de latitud $u = \theta + \omega$ para medir la posición del satélite desde \varnothing en el sentido del movimiento. Cabe aclarar que esta variable u no tiene limitado su uso a órbitas circulares, ya que aunque ω esté definida, puede calcularse el argumento de latitud para órbitas excéntricas mediante su definición.
- **Órbitas circulares ecuatoriales:** en este caso no existe ni línea de nodos ni línea de ápsides, de forma que ni Ω , ni ω ni θ están bien definidos. Por ello se usa la longitud verdadera $\lambda_T = \Omega + \omega + \theta$, que es el ángulo formado entre el satélite y el primer punto de Aries Υ .

2.4 Definición y determinación de trazas

Se define traza como la curva proyectada sobre la superficie terrestre (o del planeta central) formada por todos los puntos que sobrevuela el satélite (puntos subsatélite).

Debido a que es necesario tener en cuenta la rotación terrestre, el sistema de referencia utilizado no será el mismo, sino que en este caso rotará con la Tierra. En este caso, el plano XY seguirá coincidiendo con el Ecuador, pero el eje X será en todo momento la recta que une el origen del sistema y el punto de corte del meridiano de Greenwich con el Ecuador. De esta forma, el eje X del sistema rotará a la misma velocidad que la Tierra. Las coordenadas de este sistema de referencia son la **longitud** λ de un punto, siendo esta el ángulo que forman el meridiano de Greenwich y el meridiano que contiene el punto en cuestión y la **latitud** ϕ , que es el ángulo que forma la recta que une el punto de estudio con el Ecuador.

Dicho esto, las trazas se representarán como gráficas del tipo $(\phi(t), \lambda(t))$. Para representar la superficie terrestre sobre la que se incluirá esta curva, pueden utilizarse dos tipos distintos de proyecciones. Las dos más comunes son las siguientes:

- **Proyección cilíndrica equidistante:** es un tipo de proyección en la que las distancias iguales abarcan ángulos iguales. Por tanto, no es una transformación conforme, pero permite representar la Tierra en una superficie finita. Debido al uso de esta escala lineal para latitud y longitud, los puntos cercanos a los polos quedarán deformados, de forma que las distancias estarán más deformadas cuanto más alejadas estén del Ecuador. (Imagen 2.9a)
- **Proyección estereográfica:** proyección conforme sobre un plano tangente a uno de los polos. Esta proyección respeta los ángulos pero no las áreas, pero es muy útil para estudiar trazas con inclinaciones cercanas a 90° . (Imagen 2.9b)

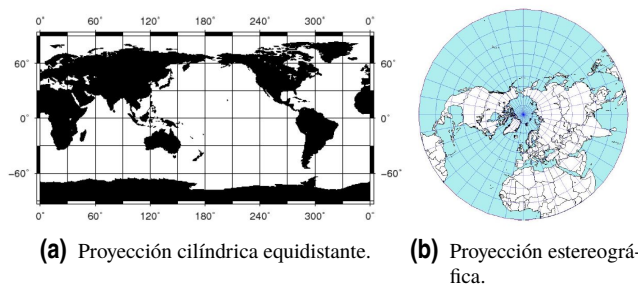


Imagen 2.9 Ejemplos de proyecciones de la superficie terrestre.

Para obtener ecuaciones con las que determinar las trazas, es necesario hacer uso de la trigonometría esférica, por lo que se va a hacer una pequeña introducción de la misma:

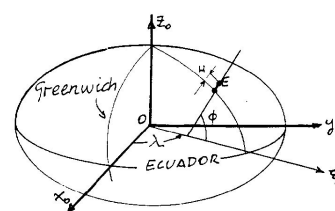


Imagen 2.8 Sistema de referencia ecuatorial no inercial.

2.4.1 Trigonometría esférica

Se define como parte de la geometría esférica que estudia los polígonos que se forman sobre la superficie de una esfera, en especial, los triángulos. Un triángulo en geometría esférica se forma mediante la intersección de 3 rectas esféricas, las cuales se definen como la intersección de un plano que contiene el origen de la esfera y la superficie de la misma.

En un triángulo esférico existen seis ángulos: los formados entre las rectas en los vértices, que se denominan α , β y γ (los cuales no suman 180°) y tres ángulos interiores, a, b y c que se oponen a los anteriores. Si el radio de la esfera es unitario, entonces a, b y c (en radianes) corresponden a las longitudes de los arcos que forman el triángulo; por ello se denominan "lados", mientras que α , β y γ son los "ángulos" del triángulo.

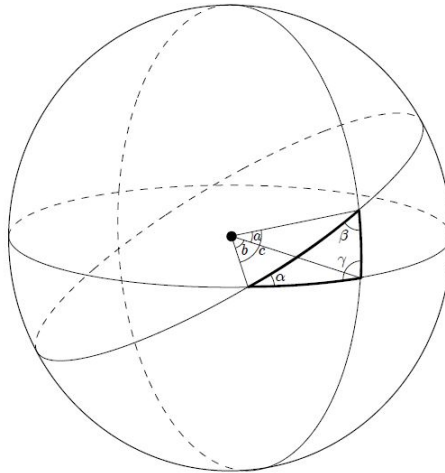


Imagen 2.10 Ejemplo de triángulo esférico.

A la derecha puede verse el triángulo esférico por sí solo. En esta geometría y utilizando la nomenclatura de 2.11 se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \tag{2.14}$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \tag{2.15}$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b \tag{2.16}$$

$$\cos \gamma = -\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos c \tag{2.17}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \tag{2.18}$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \tag{2.19}$$

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma \tag{2.20}$$

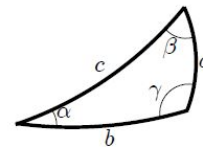


Imagen 2.11 Triángulo esférico (zoom).

Haciendo uso de las relaciones trigonométricas (2.14)-(2.20) pueden calcularse expresiones con las que se puede representar la traza de un satélite.

2.4.2 Cálculo de la traza

Puede obtenerse una expresión analítica de la traza siempre que se conozca la ascensión recta del meridiano de Greenwich (GST_0) y los elementos orbitales del satélite en el instante de referencia $t=0$. En la imagen 2.12 se representa una órbita genérica en un instante cualquiera. Si al triángulo esférico que se forma mediante el ecuador, el meridiano sobre el que se encuentra el satélite y la proyección de la propia órbita sobre la superficie terrestre se le aplican las relaciones trigonométricas descritas anteriormente, se llega a:

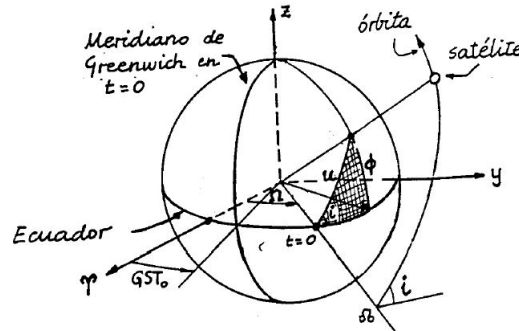


Imagen 2.12 Órbita genérica.

$$\sin(\phi(t)) = \sin(u(t)) \sin(i) \tag{2.21}$$

$$\tan(GST_0 + \omega_{\oplus}t + \lambda(t) - \Omega) = \tan(u) \cos(i) \tag{2.22}$$

Donde ω_{\oplus} es la velocidad angular de rotación de la Tierra

De esta forma, las ecuaciones que determinarán la traza serán:

$$\phi(t) = \arcsin(\sin(u(t)) \sin(i)) \tag{2.23}$$

$$\lambda(t) = \arctan(\tan(u(t)) \cos(i)) - GST_0 - \omega_{\oplus}t + \Omega \tag{2.24}$$

Para representarla, sería necesario contar con una función de la forma $u = u(t)$, la cual puede obtenerse de forma muy sencilla para el caso circular, pero no para el caso elíptico. Al representarse normalmente estas trazas de forma numérica, se barrerán distintos valores de t , con los que se calcularán los valores correspondientes de θ mediante el proceso explicado en el apartado "Leyes horarias". Con estos valores de θ , puede calcularse el valor correspondiente de u conocido el argumento del perigeo, y por tanto, los valores de ϕ y λ correspondientes a ese instante de tiempo.

Una peculiaridad de las trazas es que, a pesar de que la órbita (sin considerar perturbaciones) permanece inalterable en el tiempo, su proyección sobre la superficie terrestre no lo hace, debido a la propia rotación de la Tierra. Esta rotación hace que tras un periodo del satélite, la traza se haya visto desplazada hacia el Oeste una cierta cantidad de grados, la cual será proporcional al propio periodo del satélite y a la velocidad angular de la Tierra como $\Delta\lambda = -\omega_{\oplus}T_{SAT}$ y que se denomina **retraso nodal**. Esto puede verse en la siguiente traza de ejemplo, en la que únicamente se representa un periodo orbital:

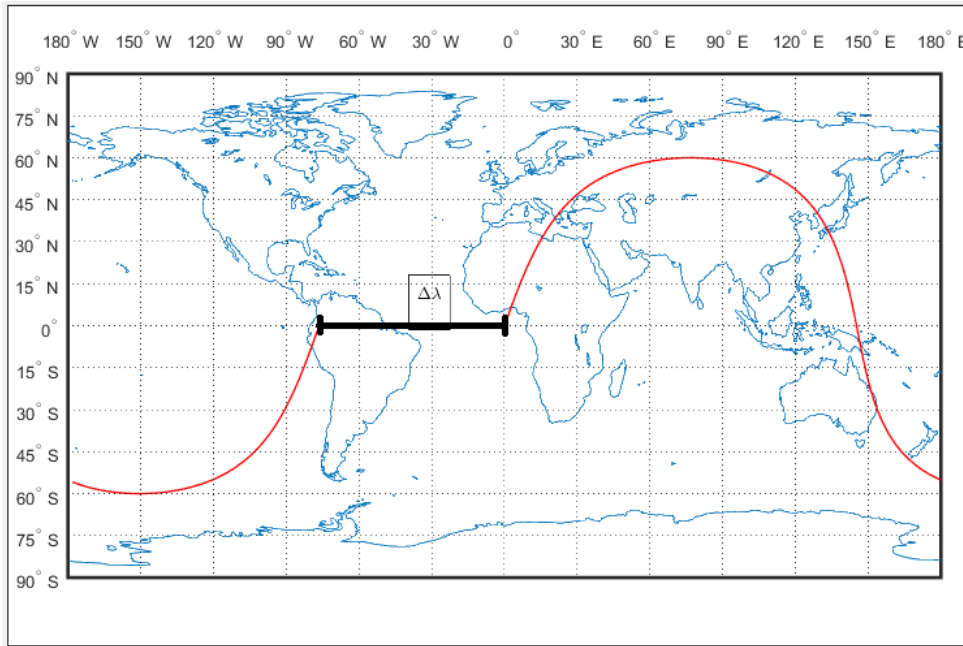


Imagen 2.13 Ejemplo de representación de traza (con su retraso nodal).

2.4.3 Órbitas con traza repetida

El estudio en el que se centra este documento es la determinación de los puntos de corte en órbitas cuya traza es repetida pero, ¿qué significa que la traza es repetida? Esto quiere decir que tras un cierto número de periodos, la traza se cierra sobre sí misma, generando una única curva sobre la superficie terrestre independientemente del número de periodos que se representen. Para que esto sea posible, el retraso nodal Δλ debe ser múltiplo de 2π. Esto se traduce en que el periodo orbital del satélite debe ser múltiplo o submúltiplo del periodo de rotación de la Tierra, de forma que se cumpla:

$$T_{SAT} = \frac{m}{k} T_{\oplus} \tag{2.25}$$

En (2.25) *k* y *m* son dos números enteros, coprimos, que representan el número de periodos orbitales que deben transcurrir para que la traza se repita y el número de días sidéreos (no son exactamente 24h sino un poco menos) necesarios que para que esto ocurra, respectivamente. Esta nomenclatura será la que se utilice en el resto del documento.

Se incluye a continuación una traza de ejemplo de una órbita cuya traza se repite cada 5 días y 6 revoluciones (*k* = 6 y *m* = 5):

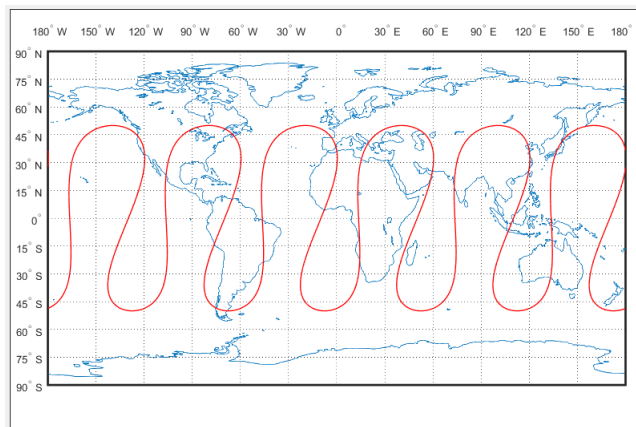


Imagen 2.14 Ejemplo de representación de traza repetida.

2.5 Definición de λ_u

Debido a que para los posteriores desarrollos matemáticos se hará uso de la variable λ_u , incluiremos aquí su definición: esta representa el ángulo que recorre la traza proyectada sobre el Ecuador, a partir del nodo ascendente, hacia el Este y sin tener en cuenta la rotación terrestre. Se puede calcular del triángulo de la imagen 2.12 de varias formas, por ejemplo $\tan(\lambda_u) = \tan(u) \cos(i)$. Es importante tener en cuenta que, en función de si la órbita es directa o retrógrada, será necesario ajustar la solución para que λ_u se encuentre en el mismo cuadrante que u para órbitas directas, y en cuadrantes opuestos para órbitas retrógradas (el primer cuadrante es el opuesto del cuarto y el segundo lo es del tercero). Si la órbita es polar, λ_u solo puede tomar dos valores, $\lambda_u = 0$ cuando $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\lambda_u = 180$ cuando $u \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Para ilustrar esta necesidad de ajuste, se incluyen dos esquemas para cada uno de los casos mencionados no degenerados: una órbita directa y otra retrógrada:

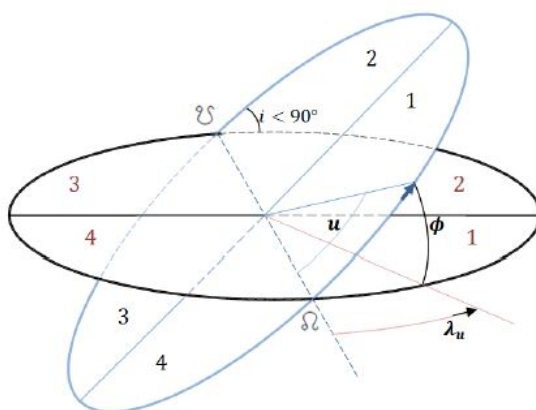


Imagen 2.15 Relación u y λ_u para órbita directa.

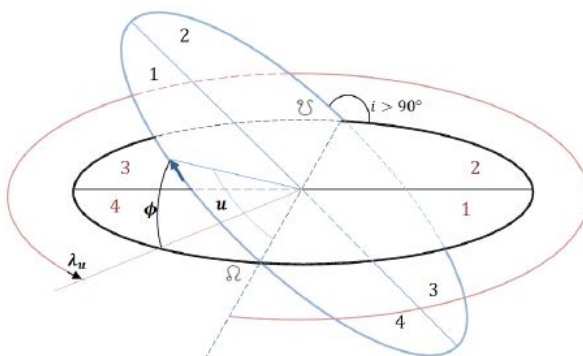


Imagen 2.16 Relación u y λ_u para órbita retrógrada.

3 Resumen del problema circular

Para analizar el problema de los puntos de corte en órbitas con trazas repetidas, se comienza estudiando el caso más sencillo, que son aquellas órbitas cuya excentricidad es nula, es decir, las circulares.

En este capítulo se obtendrá una ecuación maestra general para determinar los argumentos de latitud y el número de periodos orbitales que han de transcurrir para que se produzcan estos cruces, además de analizar cómo solucionar esta ecuación para los dos casos que pueden darse en función de los parámetros de la órbita: \mathbf{k} y \mathbf{m} , todo ello de manera sucinta, ya que este estudio ya ha sido realizado en [1].

3.1 Obtención de la ecuación maestra

Se denomina ecuación maestra a aquella que permite la obtención de los argumentos de latitud para los que se obtienen puntos de cruce, así como el número de periodos orbitales que han de transcurrir desde la vuelta de referencia para que se produzcan estos cruces. Las ecuaciones de partida son las siguientes:

$$\sin(u) \sin(i) = \sin(\phi) \quad (3.1)$$

$$\tan(\lambda_u) = \tan(u) \cos(i) \quad (3.2)$$

$$\Omega + \lambda_u = GST_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda \quad (3.3)$$

Los puntos de cruce serán aquellos cuyas latitud ϕ y longitud λ sean iguales sin tener el mismo argumento de latitud u , ya que el satélite no puede pasar dos veces por un mismo punto en el mismo sentido sin haberse repetido la traza, es decir, se cumplirá que (diferenciando los puntos mediante los subíndices $_1$ y $_2$):

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3.4)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (3.5)$$

$$u_1 \neq u_2 \quad (3.6)$$

$$\lambda_{u,1} \neq \lambda_{u,2} \quad (3.7)$$

Como la órbita es la misma durante todo el análisis y no se están considerando en este documento las perturbaciones existentes, los parámetros Ω e i se mantienen constantes durante todo el estudio. Además, los parámetros propios del planeta alrededor del que orbitan los satélites en cuestión (en este caso la Tierra), GST_0 y ω_{\oplus} , también se mantienen constantes.

Con estas consideraciones, y con las ecuaciones (3.1)-(3.7), puede obtenerse la ecuación maestra para la resolución del problema circular:

Primero se particulariza (3.1) para los puntos $_1$ y $_2$, para después dividir estas ecuaciones entre sí, obteniendo:

$$\frac{\sin(u_1)}{\sin(u_2)} = 1 \quad (3.8)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.6), la única relación entre los argumentos de latitud que cumple la ecuación (3.8) es:

$$u_2 = \pi - u_1 \quad (3.9)$$

Si ahora se siguen los mismos pasos con la ecuación (3.2), se llega a:

$$\frac{\tan(\lambda_{u,1})}{\tan(\lambda_{u,2})} = \frac{\tan(u_1)}{\tan(u_2)} = -1 \quad (3.10)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $\tan(u_2) = -\tan(u_1)$, debido a la relación (3.9) que se cumple entre los argumentos de latitud. Dada la ecuación (3.10), las posibles relaciones entre las variables $\lambda_{u,1}$ y $\lambda_{u,2}$ son $\lambda_{u,1} = -\lambda_{u,2}$ o $\lambda_{u,2} = \pi - \lambda_{u,1}$. Para comprobar cuál de las dos es la correcta, se hace uso de la relación entre las variables u y λ_u , (3.2), la cual además depende de si la inclinación es mayor o menor de $\frac{\pi}{2}$. Al hacer uso de esta relación, puede verse que, ya sea la órbita directa ($i < \frac{\pi}{2}$) o retrógrada ($i > \frac{\pi}{2}$), la relación que se obtiene entre las variables λ_u es:

$$\lambda_{u,2} = \pi - \lambda_{u,1} \quad (3.11)$$

Una vez obtenidas las relaciones entre las variables u_1 , u_2 , $\lambda_{u,1}$ y $\lambda_{u,2}$, se procede a obtener la ecuación maestra como tal. Para ello, se particulariza la ecuación (3.3) para ambos puntos y se restan entre sí, de forma que se obtiene otra relación entre $\lambda_{u,1}$ y $\lambda_{u,2}$, que viene dada a través del tiempo que transcurre desde que pasa por primera vez por la latitud y longitud del punto de cruce, hasta que vuelve a pasar.

$$\lambda_{u,2} - \lambda_{u,1} = \omega_{\oplus}(t_2 - t_1) \quad (3.12)$$

Para no trabajar con las unidades temporales, estas se relacionan con los argumentos de longitud a través de la ley horaria para órbitas circulares:

$$u_i = u_0 + n_{sat}(t_i - t_0) - 2\pi r_i \quad (3.13)$$

Donde $n_{sat} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}}$ es la velocidad angular del satélite, a el semieje mayor de la órbita, $\mu_{\oplus} \approx Gm_{\oplus}$ es el parámetro gravitacional de la Tierra, el subíndice i hace referencia a cualquiera de los dos puntos que se analizan, el subíndice 0 al instante de referencia y r representa el número de órbitas completas que ha dado el satélite desde el momento t_0 . Para simplificar el problema, se asumirá que las variables 1 corresponden a parámetros de la primera vuelta, es decir, $r_1 = 0$, de forma que los puntos de corte que se extraerán serán los correspondientes a esta órbita "inicial" con el resto. Después bastará aplicar las propiedades de repetición de la traza para obtener el resto de puntos de corte, o simplemente tener en cuenta que esta órbita "inicial" puede ser cualquiera. Con esto, si se particulariza la ecuación (3.13) para ambos puntos y se restan entre sí, se llega a la siguiente relación:

$$u_2 - u_1 = n_{sat}(t_2 - t_1) - 2\pi r \quad (3.14)$$

Donde ahora r representa el número de vueltas completas realizadas desde la vuelta de referencia hasta que se obtiene el punto de cruce. Despejando de (3.14) el tiempo transcurrido entre ambos sobrevuelos del mismo punto sobre la Tierra y, teniendo en cuenta que, por ser una órbita de traza repetida, se cumple que $\frac{\omega_{\oplus}}{n_{sat}} = \frac{m}{k}$ y sustituyendo la relación obtenida en (3.12), se consigue otra expresión que relaciona las variables u y λ_u , además de la ecuación (3.2):

$$\lambda_{u,2} - \lambda_{u,1} = \frac{m}{k}(u_2 - u_1 + 2\pi r) \quad (3.15)$$

Aplicando las relaciones (3.9) y (3.11) para dejar la ecuación (3.15) únicamente en función de variables 2 , se obtiene la relación que han de cumplir u_2 y $\lambda_{u,2}$ para que pertenezcan a un punto de corte de la traza:

$$\lambda_{u,2} = \frac{\pi}{2} + \frac{m}{k}(u_2 - \frac{\pi}{2} + \pi r) \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.2) se obtiene una ecuación en u_2 que aporta los argumentos de latitud para los cuales se da un punto de corte en la órbita número r (desde la referencia):

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left[\frac{\pi}{2} - u_2 - \pi r\right]\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (3.17)$$

En esta ecuación, las posibles soluciones de u_2 se encontrarán en el intervalo $[-\pi, \pi]$, mientras que r podrá encontrarse en el intervalo $[0, k-1]$, ya que si el satélite completa k periodos, su traza se estará repitiendo, y lógicamente sobrevolará de nuevo los mismos puntos.

3.2 Resolución de la ecuación

En esta sección se explica cómo ha de modificarse la ecuación maestra previamente obtenida para su resolución analítica, aunque no es competencia de este documento incluir esta resolución analítica completa, porque ya ha sido llevada a cabo en [1]. Lo que sí se va a explicar con detalle es cómo se obtienen las soluciones de esta ecuación maestra de manera numérica, ya que estas soluciones pueden ser la base para la obtención de las correspondientes a esta misma ecuación para órbitas excéntricas, como se explicará más adelante.

Para resolver la ecuación maestra, primero se reescribe haciendo uso de la propiedad de la tangente $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + p\pi)$ con p un número entero real, de forma que queda:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{m}{k} - \pi\frac{r}{k}\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (3.18)$$

Donde ahora r es otra variable distinta, que sigue representando el número de periodos completos que ha realizado el satélite desde el primer sobrevuelo hasta el segundo, pero que sigue un orden distinto al de la primera variable, todo ello para simplificar la ecuación. Por comodidad, y debido a que más adelante se realizarán otros cambios de variable en r , todas estas variables se llamarán igual, pero es necesario remarcar que cada vez que se modifique la ecuación maestra, la variable r será distinta, debiendo, una vez resuelta la ecuación pertinente, deshacer todos los cambios de variable para obtener el número de vueltas reales que el satélite ha completado entre ambos sobrevuelos.

3.2.1 Región de soluciones

La ecuación (3.18) presenta simetrías respecto a la variable u_2 si se modifica el valor de r que se analiza. Por ejemplo, se comprueba que si $u_2 = u_2^*$ es solución de (3.18) para un $r = r^*$, entonces $u_2 = -u_2^*$ es solución para otro r distinto:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \left(-u_2^* - \frac{\pi}{2}\right)\frac{m}{k} - \pi\frac{r'}{k}\right) = \tan(-u_2^*) \cos(i) \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta que $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$, y que u_2^* es solución de la ecuación (3.18), debe cumplirse que:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{m}{k}u_2^* + \frac{m}{k}\frac{\pi}{2} + \pi\frac{r'}{k} = \frac{\pi}{2} + \left(u_2^* - \frac{\pi}{2}\right)\frac{m}{k} - \pi\frac{r^*}{k} \quad (3.20)$$

De donde se obtiene la relación entre la r' para la cual $-u_2^*$ es solución de la ecuación (3.18): $r' = k - m - r^*$. Gracias a esta simetría, puede reducirse el intervalo de las soluciones u_2 de $[-\pi, \pi]$ a $[0, \pi]$.

Repitiendo este proceso con una solución del tipo $u_2 = \pi - u_2^*$, se llega a otra relación de este tipo, en la que existe otro valor de la variable r' para el cual $\pi - u_2^*$ es solución de (3.18): $r' = k - r^*$. Gracias a la simetría de las soluciones con respecto a $\frac{\pi}{2}$, puede reducirse el intervalo de r que se analiza a la mitad, es decir, de $[0, k-1]$ a $[0, \frac{k-1}{2}]$ si k es impar o a $[0, \frac{k}{2}]$ si k es par.

Con estas simplificaciones, el problema a resolver será:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + (u_2 - \frac{\pi}{2})\frac{m}{k} - \pi\frac{r}{k}\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (3.21)$$

Con $u_2 \in [0, \pi]$ y $r \in [0, \frac{k-1}{2}]$ si k es impar o $r \in [0, \frac{k}{2}]$ si k es par.

En función de si la diferencia $m - k$ es par o impar, la resolución del problema se hará de una forma u otra, explicándose ambas a continuación.

3.2.2 Caso impar

Que el término $m - k$ pueda expresarse cómo $2l$, siendo l un número entero, permite simplificar la ecuación maestra:

$$\tan\left(u_2 \frac{m}{k} - \frac{\pi(r+l)}{k}\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (3.22)$$

Aplicando la propiedad de la tangente descrita anteriormente, por la cual se le puede sumar un múltiplo entero de π al argumento de la misma sin alterar el resultado, se puede cambiar el término $-\frac{r+l}{k}$ por $\frac{mr}{k}$, para facilitar el cambio de variable que se realizará a continuación. Al igual que en el caso anterior, la nueva variable se simboliza a través de r , pero es distinta a la correspondiente al término $-\frac{r+l}{k}$. Definiendo ahora una variable auxiliar como:

$$z = \frac{u_2 + \pi r}{k} \quad (3.23)$$

Con esta variable es posible simplificar enormemente la ecuación maestra:

$$\tan(mz) = \tan(kz) \cos(i) \quad (3.24)$$

Donde ahora, la nueva variable z estará definida en el intervalo $[0, \pi \frac{k+1}{2k}]$, tomando el valor 0 únicamente para $u_2 = r = 0$.

Debido a las discontinuidades que presenta la ecuación maestra (3.24), es mejor para su manipulación expresarla de la siguiente forma:

$$\cos(kz) \sin(mz) = \cos(mz) \sin(kz) \cos(i) \quad (3.25)$$

Es necesario tener en cuenta que al pasar de la expresión de la ecuación maestra (3.24) a la (3.25) se introduce una solución nueva, la cual no es en realidad una solución de la ecuación original. Esta solución falsa corresponde a $z = \frac{\pi}{2}$, y se debe a que los términos $\cos(mz)$ y $\cos(kz)$ se anulan para este valor de z , al ser ambos m y k números enteros e impares. Puede comprobarse mediante la aproximación al límite y la aplicación de L'Hopital que el valor $z = \frac{\pi}{2}$ no es solución de la ecuación (3.24), con lo que al calcular las soluciones de la expresión (3.25) será necesario descartar este valor.

Aplicando las relaciones trigonométricas para las sumas y restas de ángulos, la expresión final de la ecuación maestra queda:

$$F(z, i) = (1 - \cos(i)) \sin((k+m)z) - (1 + \cos(i)) \sin((k-m)z) \quad (3.26)$$

La expresión (3.26) permite obtener las soluciones de forma tanto analítica como numérica, así como la realización de varios estudios relacionados con la inclinación de la órbita y el número de puntos de corte que se obtienen para cada inclinación. Pero, como ya se ha explicado, en este documento se desarrollará la obtención numérica de las soluciones a la ecuación (3.26).

Para resolver de forma eficiente y rápida la ecuación, en [2] se propone un método que hace uso de los coeficientes de una serie de Fourier para generar una matriz, con la que calcular los ceros de esta misma serie a partir de sus autovalores. Debido a la forma de la ecuación (3.26), esta puede escribirse como una serie de Fourier con un número de coeficientes distintos de cero finito: 2. Estos coeficientes serán $a_{j=k+m} = 1 - \cos(i)$ y $a_{j=k-m} = -(1 + \cos(i))$, mientras que el resto serán cero. Con esto, el desarrollo de Fourier de la ecuación (3.26) queda como:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{N+1} a_j \sin(jz) \quad (3.27)$$

En la expresión (3.27), el límite superior $N+1$ es el valor de j a partir del cual todos los coeficientes son nulos, es decir $N = k + m - 1$. Una vez que se ha expresado la ecuación maestra como una serie de Fourier, puede hacerse uso del procedimiento explicado en [2] para obtener los ceros de la serie. Para ello, será necesario calcular la matriz "compañera" $N \times N$ asociada a la serie de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 C_{1k} &= \frac{1}{2} \delta_{2,k}, \text{ donde } k=1, \dots, N \\
 C_{jk} &= \frac{1}{2} \delta_{j-1,k} + \frac{1}{2} \delta_{j+1,k}, \text{ donde } k=1, \dots, N \text{ y } j=2, \dots, N-1 \\
 C_{Nk} &= -\frac{a_{k-1}}{2a_N} + \frac{1}{2} \delta_{N-1,k}, \text{ donde } k=1, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Una vez calculada la matriz, se obtienen los autovalores x_l de la misma, y las raíces de la función $F(z)$ serán:

$$z^* = \{0, \pi, \pm \arccos(x_l)\} + 2\pi p \text{ donde } l=1, \dots, N \text{ y } p = \text{cualquier número entero} \tag{3.29}$$

Las soluciones z^* que son válidas para el análisis serán aquellas reales y contenidas en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, ya que en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi \frac{k+1}{2k})$ puede demostrarse que no existen soluciones de la ecuación (3.26). Además de las obtenidas por este método, es necesario añadir la solución $z^* = 0$, ya que siempre será solución independientemente de los valores de k, m e i , siempre que los dos primeros sean impares.

Una vez obtenidas las soluciones z^* , será necesario deshacer los cambios de variables realizados para calcular las soluciones u_2^* y los periodos completos correspondientes r . Para ello, estudiando la expresión (3.23), puede verse que r puede calcularse como la parte entera de $\frac{kz^*}{\pi}$, ya que la solución u_2^* no será mayor que π , y por tanto el término $\frac{u_2^*}{\pi}$ siempre será menor que 1:

$$r = \left\lceil \frac{kz^*}{\pi} \right\rceil = \left\lceil \frac{u_2^*}{\pi} \right\rceil + \lceil r \rceil \tag{3.30}$$

Donde $\lceil \cdot \rceil$ representa la operación **parte entera**.

Una vez obtenida r , las soluciones u_2^* se calculan a partir de la definición de z (3.23):

$$u_2^* = kz^* - \pi r \tag{3.31}$$

A la hora de calcular las soluciones u_2^* es necesario tener en cuenta que el intervalo de definición de esta variable es $[0, \pi]$, con lo que en el caso de no estar contenida en este intervalo, habrá que sumarle $2p\pi$, siendo p un número entero que haga que u_2^* pertenezca a este intervalo.

Una vez obtenidas estas soluciones u_2^* será necesario aplicar las simetrías que se vieron en el apartado anterior, con respecto a 0 y con respecto a $\pm \frac{\pi}{2}$, es decir, al conjunto de soluciones calculado a partir de la matriz "compañera" de la serie de Fourier habrá que añadirle las soluciones $-u_2^*, \pi - u_2^*$ y $u_2^* - \pi$. De nuevo, habrá que tener en cuenta que el intervalo original de definición de la variable u_2 era $[-\pi, \pi]$, con lo que habrá que sumar de nuevo $2p\pi$, siendo p otro número entero que hace que cualquiera de estas soluciones se encuentre dentro de su intervalo de definición.

Con esto, se habrían deshecho los cambios de variable realizados desde (3.22), pero los valores de r obtenidos no se corresponden con los valores de r que hacen que las soluciones u_2^* resuelvan realmente la ecuación maestra original (3.17). Debido a que los valores de r que consiguen esto serán necesarios para uno de los métodos posteriores de resolución del problema excéntrico, será necesario calcularlos. Teniendo las soluciones u_2^* basta con despejar r de (3.17) para poder calcular sus valores.

Una vez obtenidas las soluciones u_2^* y los valores de r que hacen que sean soluciones de (3.17), pueden calcularse las latitudes y longitudes de los puntos de corte haciendo uso de las expresiones (3.1)-(3.3) y de la ley horaria (3.13).

Se incluye a continuación un caso resuelto de una órbita circular del caso impar:

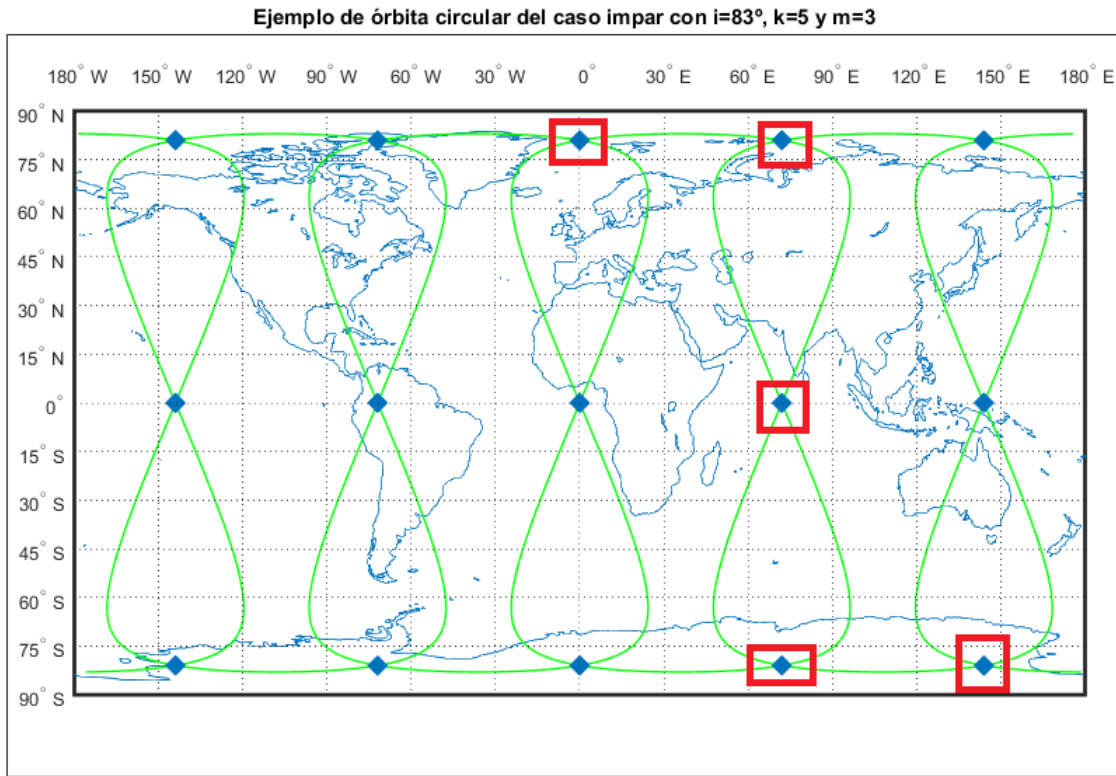


Imagen 3.1 Ejemplo de órbita circular del caso impar con sus respectivos puntos de cruce obtenidos.

En la imagen 3.1 pueden verse los distintos puntos de cruce de una órbita circular con $i = 83^\circ$, $k = 5$ y $m = 3$ marcados sobre la propia traza del satélite. Aparecen marcados todos los puntos de cruce, ya que, primero, se ha resuelto la ecuación (3.25) siguiendo el procedimiento descrito en este apartado y después se han calculado la posición del resto a través del retraso nodal. Los puntos de cruce que se obtienen de (3.25) siguiendo el método descrito son los siguientes:

Tabla 3.1 Soluciones de la ecuación (3.25) para órbita circular del caso impar con $i = 83^\circ$, $k = 5$ y $m = 3$.

u_2 [rads.]	r [revs.]	ϕ [°]	λ [°]
1.4709	3	80.9671	72
0	3	0	72
1.6707	2	80.9671	0
-1.4709	3	-80.9671	72
-1.6707	4	-80.9671	144

En la imagen 3.1 pueden verse los puntos de corte que realmente se obtienen de la ecuación (3.25) marcados en rojo, y como estos se corresponden a los puntos de corte de la primera revolución del satélite con el resto de vueltas.

3.2.3 Caso par

De nuevo es necesario modificar la ecuación (3.18) para poder llegar a una ecuación maestra que sea resoluble de manera sencilla numéricamente y que posibilite el análisis de la misma. En este caso, la diferencia $m - k$ no es un múltiplo de 2, de forma que para preparar la ecuación para los cambios de variable posteriores, se realiza un cambio de variable en r :

$$\tan\left(u_2 \frac{m}{k} + \frac{\pi(k+m)}{2k} + \frac{m\pi r}{k}\right) = \tan(u_2) \cos(i) \tag{3.32}$$

Un aspecto a destacar de esta ecuación es que los valores $u_2 = 0$ y $u_2 = \pi$ no son soluciones de la misma. Si ahora se realiza el mismo cambio de variable que en el caso impar (3.23):

$$\tan\left(mz + \frac{\pi(m+k)}{2k}\right) = \tan(kz) \cos(i) \quad (3.33)$$

Manipulando la ecuación y definiendo un nuevo cambio de variable (3.34), se llega a (3.35):

$$w = z + \frac{\pi}{2k} \quad (3.34)$$

$$\tan\left(mw + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(kw - \frac{\pi}{2}\right) \cos(i) \quad (3.35)$$

Teniendo en cuenta que $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \tan(\alpha - \frac{\pi}{2})$ y que $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$, la ecuación (3.35) puede expresarse como:

$$\tan(kw) = \tan(mw) \cos(i) \quad (3.36)$$

De nuevo esta ecuación presenta discontinuidades, con lo que será mejor trabajar con la siguiente:

$$\cos(mw) \sin(kw) = \cos(kw) \sin(mw) \cos(i) \quad (3.37)$$

En este caso, el paso de (3.36) a (3.37) no introduce ninguna solución nueva, ya que o k o m será un número par, y por tanto se cumplirá que o $\cos(k\frac{\pi}{2}) \neq 0$ o que $\cos(m\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

Haciendo uso de las propiedades de la suma y resta de senos y reescribiendo (3.37), puede comprobarse que esta ecuación puede desarrollarse también mediante una serie finita de suma de senos, por lo que será posible volver a aplicar el método descrito en [2] para calcular las soluciones de la misma:

$$F(w, i) = (1 - \cos(i)) \sin((m+k)w) + (1 + \cos(i)) \sin((k-m)w) \quad (3.38)$$

Si se escribe $F(w, i)$ como $F(w) = \sum_{j=1}^{N+1} a_j \sin(jw)$, los únicos coeficientes distintos de cero serán $a_{k-m} = 1 + \cos(i)$ y $a_{k+m} = 1 - \cos(i)$, y el límite superior del sumatorio será de nuevo $N = k + m - 1$.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso impar, y teniendo en cuenta que en este caso ni $w = 0$ ni $w = \pi$ son soluciones de la ecuación maestra, se obtienen las soluciones w^* de (3.38). A partir de estas pueden obtenerse las soluciones z^* deshaciendo el cambio de variable (3.34) y, una vez que se hayan calculado las soluciones z^* , el proceso de obtención de las soluciones u_2^* es el mismo que en el caso impar.

Después será necesario aplicar de nuevo las simetrías con respecto a 0 y $\pm \frac{\pi}{2}$ para obtener el conjunto completo de soluciones, así como calcular los valores del parámetro r de forma que estas soluciones u_2^* resuelvan la ecuación maestra original (3.17). Una vez hecho esto, será posible obtener los valores de las latitudes y las longitudes de los puntos de corte utilizando de nuevo las relaciones (3.1)-(3.3) y la ley horaria (3.13).

Se incluye de nuevo un ejemplo de órbita circular resuelta:

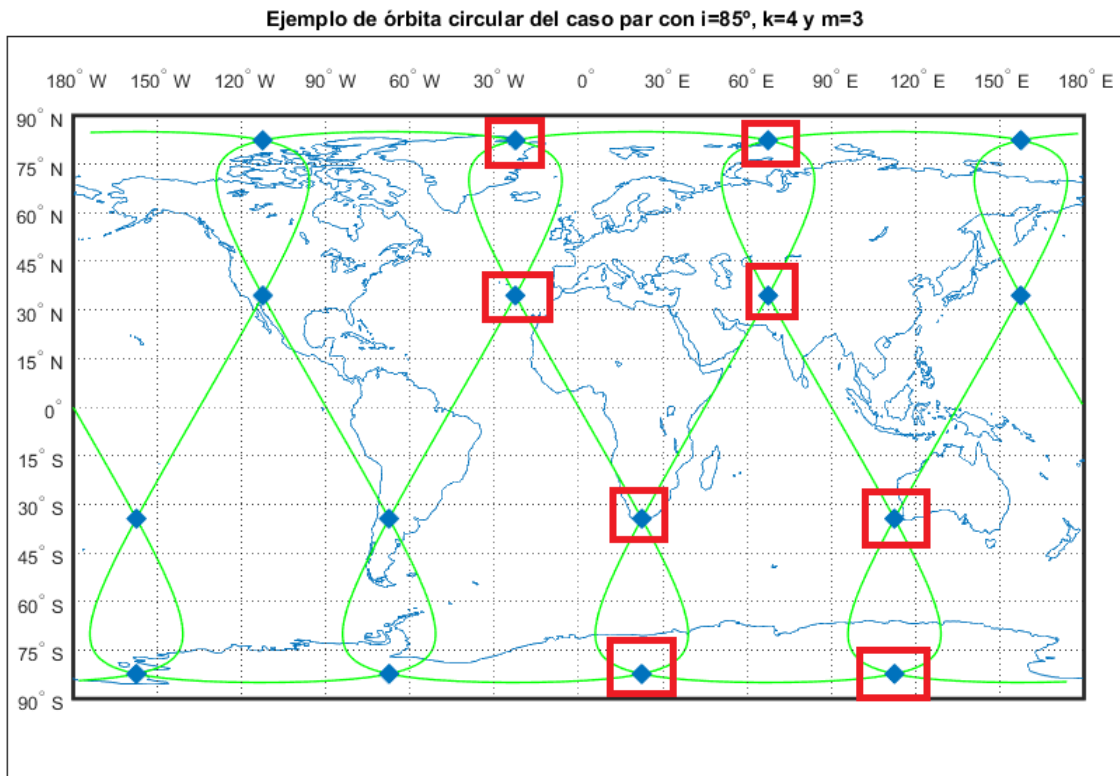


Imagen 3.2 Ejemplo de órbita circular del caso par con sus respectivos puntos de cruce obtenidos.

En la imagen 3.2 se ven de nuevo los distintos puntos de cruce de una órbita circular con $i = 85^\circ$, $k = 4$ y $m = 3$ marcados sobre la propia traza del satélite. Aparecen marcados, al igual que para el caso impar, todos los puntos de cruce, ya que, primero, se ha resuelto la ecuación (3.37) siguiendo el procedimiento descrito en este apartado y después se han calculado la posición del resto a través del retraso nodal. Los puntos de cruce que se obtienen de (3.37) siguiendo el método descrito son los siguientes:

Tabla 3.2 Soluciones de la ecuación (3.37) para órbita circular del caso par con $i = 85^\circ$, $k = 4$ y $m = 3$.

u_2 [rads.]	r [revs.]	ϕ [°]	λ [°]
0.6036	1	34.4349	67.5
1.4696	1	82.3514	67.5
2.5380	3	34.4349	-22.5
-0.6036	0	-34.4349	22.5
-2.5380	2	-34.4349	112.5
1.6719	3	82.3514	-22.5
-1.4696	0	-82.3514	22.5
-1.6719	2	-82.3514	112.5

De nuevo, en la imagen 3.2 se han marcado en rojo los puntos de corte que se obtienen resolviendo la ecuación (3.37), correspondiéndose de nuevo con los puntos de corte de la primera revolución con el resto. En este caso cabe aclarar que, cuando la solución obtenida es del tipo $r = 0$ y $u_2 < 0$, esto no implica que la primera revolución se corta a sí misma, sino que se corta con la revolución $r = k - 1$. Esta forma de representar la solución se debe a la definición del intervalo de interés de u_2 ($[-\pi, \pi]$). Basta con explicar que en realidad un argumento de latitud u_2 negativo corresponde a la revolución "anterior", ya que la propia revolución va de $u_2 \in [0, \pi]$. En el caso de la primera revolución, $u_2 < 0$ implica que se están considerando posiciones de la última.

3.3 Inclinaciones críticas

Para terminar este resumen del estudio del caso circular, se introduce el concepto de inclinaciones críticas, ya que su existencia e influencia en la posición y cantidad de los puntos de corte será estudiada también en el problema excéntrico.

El concepto de inclinación crítica se define en [1] como aquella inclinación de la órbita que provoca una tangencia en algún punto de su traza. Esto implica que, para inclinaciones menores que la crítica, existirá un menor número de puntos de cruce que para una inclinación mayor a la crítica. Se ilustra esta definición con dos ejemplos, uno del caso par y otro del caso impar:

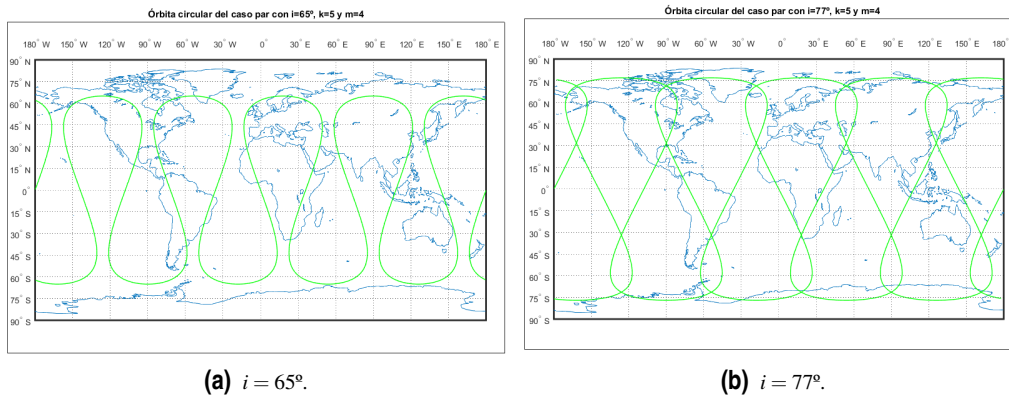


Imagen 3.3 Trazas de una órbita circular con $k = 5$ y $m = 4$ y varias inclinaciones (I).

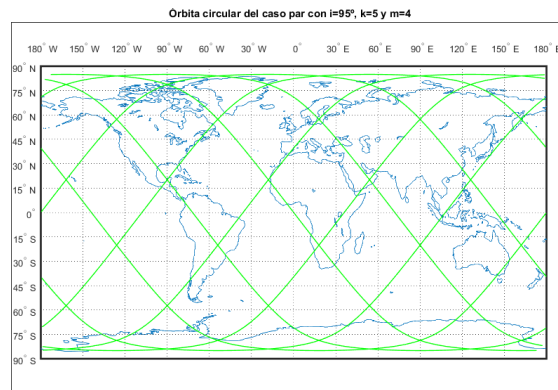


Imagen 3.4 Trazas de una órbita circular con $k = 5$ y $m = 4$ y varias inclinaciones (II).

Observando las imágenes 3.3a, 3.3b y 3.4 es fácil deducir que entre $i = 65^\circ$ e $i = 77^\circ$ existirá una inclinación crítica, ya que el número de puntos de cruce de una órbita a otra se ha visto aumentado. De la misma forma, entre $i = 77^\circ$ e $i = 95^\circ$ existirá otra inclinación crítica, ya que de nuevo el número de puntos de corte en la gráfica 3.4 es mayor que en 3.3b.

Por ilustrar también el caso impar, se incluyen también las siguientes gráficas:

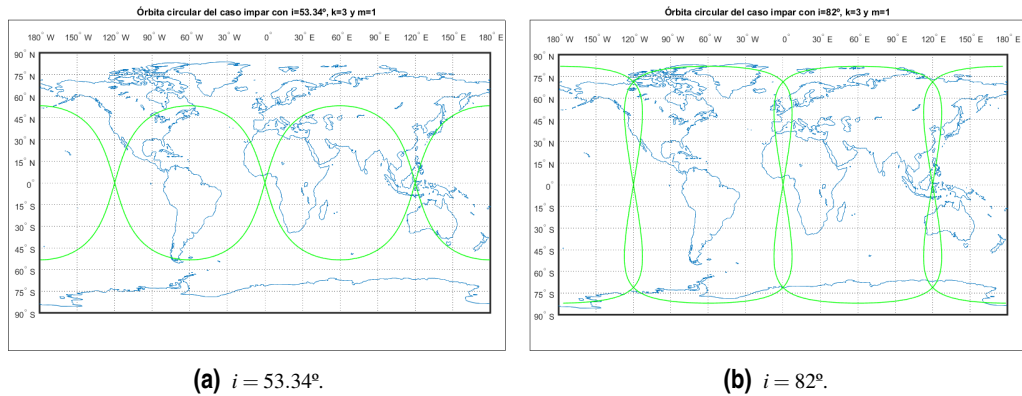


Imagen 3.5 Trazas de una órbita circular con $k = 3$ y $m = 1$ y varias inclinaciones.

De nuevo, puede verse cómo entre $i = 53^\circ$ e $i = 82^\circ$ existirá una inclinación crítica, ya que el número de puntos de cruce se ha visto aumentado de una órbita a otra.

En [1] se realiza un estudio detallado de estas inclinaciones para las órbitas circulares, así como la influencia de estas en el número de puntos de cruce. En el presente documento, se estudiará también qué influencia tiene la inclinación de la órbita en el número de puntos de cruce, y cómo la inclusión de la excentricidad afecta a la cantidad y al valor de estas inclinaciones críticas.

4 Problema excéntrico

El desarrollo del problema circular servirá de base para el objetivo principal de este documento: la determinación de los puntos de corte de órbitas geocéntricas con excentricidad y traza repetida.

En este capítulo se determinarán tres posibles métodos para la obtención de estos puntos de corte en los casos en los que la órbita sea excéntrica, además de realizarse varios estudios de sensibilidad, es decir, se analizará cómo la variación de algunos elementos orbitales afecta a la posición y cantidad de puntos de corte.

4.1 Obtención de la ecuación maestra

En el caso excéntrico, si se quiere determinar con completa precisión la localización de los puntos de corte, será necesario hacer uso de la ley horaria para órbitas excéntricas, de forma que la "ecuación maestra" a obtener será un sistema de 3 ecuaciones no lineales con 3 incógnitas. Debido a que la resolución de este sistema es muy costosa en recursos y tiempo, después se realizará una aproximación de esta ley horaria mediante Taylor, de forma que podrá reducirse este sistema a una única ecuación muy similar a la obtenida en el caso circular.

Como ya se ha comentado, primero se va a determinar el sistema de ecuaciones que proporciona de manera exacta la posición de los puntos de corte para órbitas excéntricas de traza repetida. Para ello, se parte de las mismas ecuaciones que en el caso circular:

$$\sin(u) \sin(i) = \sin(\phi) \quad (4.1)$$

$$\tan(\lambda_u) = \tan(u) \cos(i) \quad (4.2)$$

$$\Omega + \lambda_u = GST_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda \quad (4.3)$$

Las condiciones para que exista un punto de corte es que se cumplan las siguiente relaciones (de nuevo las mismas que en el caso circular):

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (4.4)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (4.5)$$

$$u_1 \neq u_2 \quad (4.6)$$

$$\lambda_{u,1} \neq \lambda_{u,2} \quad (4.7)$$

Al igual que en el capítulo dedicado a las órbitas circulares, no se están considerando las perturbaciones que afectan a la órbita, de forma que, los elementos orbitales de la misma permanecen invariables durante su estudio: Ω , i , e y ω . De forma similar al caso circular, se particularizan las ecuaciones (4.1) y (4.2) para ambos puntos y se dividen entre sí, llegando de nuevo a las mismas relaciones:

$$\sin(u_1) = \sin(u_2) \quad (4.8)$$

$$\tan(\lambda_{u,1}) = -\tan(\lambda_{u,2}) \quad (4.9)$$

Atendiendo a las relaciones (4.6) y (4.7), así como por similitud con el caso circular, se llega a las siguientes relaciones entre los argumentos de latitud y entre ambas λ_u :

$$u_2 = \pi - u_1 \quad (4.10)$$

$$\lambda_{u,2} = \pi - \lambda_{u,1} \quad (4.11)$$

Una vez obtenidas estas relaciones, se particulariza la ecuación (4.3) para ambos puntos y se restan entre sí, para obtener una relación entre el tiempo transcurrido entre ambos sobrevuelos del mismo punto y la variación del parámetro λ_u en ambos periodos:

$$\lambda_{u,2} - \lambda_{u,1} = \omega_{\oplus}(t_2 - t_1) \quad (4.12)$$

Tras esto, en el caso circular, se aplicaba la ley horaria para obtener otra relación entre las variables u y λ_u , además de (4.2). En este caso también se va a aplicar la ley horaria, pero al tener excentricidad la órbita, esta ley horaria no relaciona directamente los argumentos de latitud y los incrementos de tiempo, sino que se relacionan las anomalías medias M_i con los incrementos de tiempo:

$$M_i = M_0 + n_{sat}(t_i - t_0) - 2\pi r_i \quad (4.13)$$

De nuevo el subíndice i hace referencia a cualquiera de los dos puntos, el subíndice 0 se corresponde con el instante de referencia, el parámetro r_i indica el número de periodos completos que el satélite ha realizado desde la órbita de referencia y la velocidad angular del satélite sigue teniendo la misma definición:

$$n_{sat} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}}, \text{ con } \mu_{\oplus} \text{ el parámetro gravitacional de la Tierra y } a \text{ el semieje mayor de la órbita.}$$

De nuevo, a lo largo de todo el desarrollo, se tomará como órbita de referencia la inicial, de forma que todos los puntos de corte que se obtengan del sistema de ecuaciones (y posteriormente de la ecuación maestra aproximada) serán los correspondientes a esta primera órbita. Esto implica que $r_1 = 0$ y $r_2 = r$. Para obtener los puntos de corte del resto de órbitas entre sí, basta con propagar los de la primera órbita mediante el retraso nodal o tener en cuenta que esta órbita de referencia podría ser cualquiera.

Particularizando (4.13) para ambos puntos y restando ambas ecuaciones se llega a una relación entre los incrementos de tiempo y de anomalía media muy similar al del caso sin excentricidad:

$$M_2 - M_1 = n_{sat}(t_2 - t_1) - 2\pi r \quad (4.14)$$

La anomalía media se puede relacionar directamente con la anomalía excéntrica E_i mediante la ecuación de Kepler:

$$M_i = E_i - e \sin(E_i) \quad (4.15)$$

Particularizando (4.15) para ambos puntos y sustituyendo las relaciones en (4.14) se llega a una ecuación a partir de la cual puede obtenerse el tiempo transcurrido entre ambos sobrevuelos si se conocen las anomalías excéntricas del punto de corte para ambos periodos:

$$E_2 - e \sin(E_2) - E_1 + e \sin(E_1) + 2\pi r = n_{sat}(t_2 - t_1) \quad (4.16)$$

Si se despeja el incremento de tiempo $t_2 - t_1$ de (4.16) y se introduce en (4.12) teniendo en cuenta que por tratarse de un satélite con traza repetida la relación que existe entre las velocidades angulares del satélite y de la Tierra ω_{\oplus} y n_{sat} es $\frac{\omega_{\oplus}}{n_{sat}} = \frac{m}{k}$, se llega a la siguiente ecuación que relaciona las anomalías excéntricas E con las variables λ_u :

$$2\lambda_{u,2} - \pi = \frac{m}{k}(E_2 - e \sin(E_2) - E_1 + e \sin(E_1) + 2\pi r) \quad (4.17)$$

Es necesario tener en cuenta que para obtener (4.17) se ha utilizado la relación entre ambas λ_u que proporciona la ecuación (4.11). Si se despeja $\lambda_{u,2}$ de (4.17) y se sustituye en (4.2) particularizada para los puntos $_2$ se puede obtener la primera ecuación del sistema:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{m}{2k}(E_2 - e \sin(E_2) - E_1 + e \sin(E_1) + 2\pi r)\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (4.18)$$

Para completar el sistema de ecuaciones es necesario establecer las relaciones entre las anomalías excéntricas E_1 y E_2 con el argumento de latitud u_2 . Para ello, se hace uso de la definición de la anomalía excéntrica (4.19), que la relaciona directamente con la anomalía verdadera y la definición del argumento de latitud (4.20), que lo relaciona con la anomalía verdadera:

$$\tan\left(\frac{E_i}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \quad (4.19)$$

$$u_i = \theta_i + \omega \quad (4.20)$$

Particularizando estas ecuaciones para ambos puntos y teniendo en cuenta la relación obtenida entre u_2 y u_1 , pueden obtenerse las dos ecuaciones restantes del sistema, de forma que este queda como:

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{m}{2k}(E_2 - e \sin(E_2) - E_1 + e \sin(E_1) + 2\pi r)\right) = \tan(u_2) \cos(i) \\ \tan\left(\frac{E_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\pi - u_2 - \omega}{2}\right) \\ \tan\left(\frac{E_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{u_2 - \omega}{2}\right) \end{cases} \quad (4.21)$$

Como ya se ha comentado, este sistema de ecuaciones no lineales es complejo de resolver, pero en caso de hacerlo, aporta con exactitud el argumento de latitud u_2 , las anomalías excéntricas E_1 y E_2 , así como el número de periodos completos que ha realizado el satélite r para los cuales se da un punto de corte.

Para poder trabajar de forma similar al caso circular, se va a aproximar la ley horaria de la órbita mediante varios desarrollos de Taylor de orden 2, tal y como viene explicado en [3].

Los pasos para obtener la ecuación maestra aproximada son los mismos que para obtener el sistema completo hasta (4.14). A partir de ahí, se hará uso de la relación aproximada (4.22) entre la anomalía media y la anomalía verdadera para llegar a una relación entre λ_u y u .

$$M_i \approx \theta_i - 2e \sin(\theta_i) + \frac{3e^2}{4} \sin(2\theta_i) \quad (4.22)$$

Si se particulariza (4.22) para ambos puntos y se sustituyen ambas relaciones en (4.14) se llega a:

$$n_{sat}(t_2 - t_1) = 2\pi r + \theta_2 - \theta_1 - 2e \sin(\theta_2) + 2e \sin(\theta_1) + \frac{3e^2}{4} \sin(2\theta_2) - \frac{3e^2}{4} \sin(2\theta_1) \quad (4.23)$$

Haciendo uso de $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ y teniendo en cuenta la relación existente entre θ_2 y θ_1 $\theta_2 + 2\omega = \pi - \theta_1$ (obtenida de restar a ambos miembros de la relación (4.10) el argumento del perigeo ω) puede llegarse a la siguiente ecuación:

$$n_{sat}(t_2 - t_1) = \theta_2 - \theta_1 - 4e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) + \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - \omega) \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2\pi r \quad (4.24)$$

Teniendo en cuenta que $\theta_2 - \theta_1 = u_2 - u_1$, puede usarse (4.24) para obtener una relación entre u_2 , u_1 , $\lambda_{u,2}$ y $\lambda_{u,1}$, si se despeja de (4.24) el tiempo transcurrido entre ambos sobrevuelos y se introduce en (4.12):

$$\lambda_{u,2} - \lambda_{u,1} = \frac{\omega \oplus}{n_{sat}} \left(u_2 - u_1 - 4e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right) + \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - 2\omega) \sin(u_2 - u_1) + 2\pi r \right) \quad (4.25)$$

Haciendo uso de las relaciones previamente establecidas entre las variables u_1 y u_2 para los puntos de corte y teniendo en cuenta la relación existente entre las velocidades angulares de la Tierra y del satélite por tratarse de una órbita con traza repetida, puede obtenerse una relación directa entre $\lambda_{u,2}$ y u_2 además de (4.2):

$$\lambda_{u,2} = \frac{\pi}{2} + \frac{m}{k} \left(u_2 - \frac{\pi}{2} - 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2 - \pi) + \pi r \right) \quad (4.26)$$

Con esta relación puede obtenerse la ecuación maestra aproximada para la determinación de los puntos de corte en órbitas excéntricas, sustituyendo (4.26) en (4.2) una vez particularizada para los puntos 2 . La ecuación maestra aproximada es la siguiente:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} + 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin(u_2 - \frac{\pi}{2}) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2 - \pi) - \pi r\right)\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (4.27)$$

Puede comprobarse que si se hace $e = 0$, la ecuación maestra aproximada (4.27) que se ha obtenido coincide con la que se obtuvo para el caso circular (3.17).

Por último, aplicando relaciones trigonométricas, puede simplificarse (4.27) de la siguiente forma:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right)\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (4.28)$$

4.2 Resolución de la ecuación maestra aproximada

Debido a la no linealidad de la ecuación (4.28), la forma más rápida y eficiente de resolverla es de forma numérica. Para ello, se proponen dos métodos distintos:

-La utilización de la función **fzero** de *MATLAB*, la cual calcula el valor de una variable de referencia que hace cero la función que se implemente en el comando. Para que el código funcione correctamente, la función **fzero** necesita un iterante inicial, es decir, un valor de la variable con la que resuelve la función lo más cercano posible a la solución real. Este valor inicial de u_2 se obtiene al resolver el problema circular, razón por la cual era necesario identificar para qué valores de r cada solución u_2^* resuelve la ecuación (3.17), ya que r será un parámetro que también habrá que introducir en la nueva ecuación (4.28) para resolverla. Este método obtiene de forma precisa los puntos de corte asociados a las soluciones correspondientes circulares, pero presenta el inconveniente de que, en caso de generarse nuevas soluciones no asociadas a ningún punto de corte circular, el programa no las calculará.

-La aproximación de la ecuación maestra mediante polinomios, y el cálculo de todas sus soluciones para cada uno de los valores posibles de r mediante el comando **roots**. Esta aproximación es posible gracias al paquete de *MATLAB* **chebfun**, el cual permite una aproximación muy precisa y rápida de funciones con mucha variabilidad. Para obtener más información o su descarga puede consultarse [4]. Debido a la robustez y sencillez de este método, será el utilizado principalmente. Dicho esto, se explicarán ambos.

La ecuación (4.28) presenta discontinuidades, por lo que será necesario modificarla para poder trabajar con ella cómodamente en *MATLAB*. Para eliminar la discontinuidades, se multiplican ambos miembros por los cosenos de los argumentos de ambas tangentes, con el fin de eliminar los denominadores de la ecuación:

$$\begin{aligned} & \cos(u_2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right)\right) = \\ & = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right)\right) \sin(u_2) \cos(i) \quad (4.29) \end{aligned}$$

Al tratar con esta nueva ecuación (4.29), es necesario comprobar si se introducen nuevas "soluciones" que antes no estaban, las cuales será necesario descartar. Sabiendo que la función $\tan(\alpha)$ se anula para los mismos valores que lo hace $\sin(\alpha)$ y diverge cuando $\cos(\alpha) = 0$ (y por tanto aquellos valores que anulen el coseno no serán soluciones de la ecuación $\tan(\alpha) = 0$), será necesario comprobar si existen valores de u_2 que anulan a la vez ambos cosenos de la ecuación (4.29) y no tenerlos en cuenta en caso de que los comandos **fzero** o **roots** los tome como soluciones del problema. Para ello, y sabiendo que $\cos(u_2)$ se anula para $u_2 = \frac{(2g+1)\pi}{2}$ siendo g un número entero, será necesario comprobar para qué valores de g y r se anula el coseno del miembro derecho.

Si se sustituye $u_2 = \frac{(2g+1)\pi}{2}$ en el argumento del coseno del miembro derecho, puede comprobarse que los términos multiplicados por la excentricidad se anulan, ya que en ambos casos van multiplicados por $\cos(\frac{(2g+1)\pi}{2})$ y $\sin(2g\pi)$ respectivamente, siendo g un entero, de forma que ambos términos serán iguales a 0. Teniendo esto en cuenta, será necesario encontrar los valores de g y r que hacen que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(2g+1)\pi}{2} - \pi r\right)\right) = 0 \quad (4.30)$$

Los valores para los que se anula la función cos son aquellos múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, es decir, se deberá cumplir (4.31) siendo j cualquier número entero:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(2g+1)\pi}{2} - \pi r\right) = \frac{(2j+1)\pi}{2} \quad (4.31)$$

Operando con (4.31) se obtiene la siguiente relación entre los parámetros g , r y j :

$$\frac{m}{k}(g+r) = j \quad (4.32)$$

Con todo esto, el método para discernir entre las soluciones reales y las que no corresponden a la ecuación maestra original es el siguiente:

1.- Comprobar si la solución de los comandos **fzero** o **roots** puede expresarse de la forma $u_2^* = \frac{(2g+1)\pi}{2}$, siendo g un número entero.

2.- En caso de que 1.- sea posible, comprobar si el número $\frac{g+r}{k}$ es un entero, siendo r el número de periodos completos para el cual u_2^* es solución. En caso de serlo, será necesario descartar la solución e introducir un nuevo iterante inicial o simplemente no tener en cuenta esa solución, ya que, como se verá más adelante, algunos puntos de cruce pueden desaparecer al introducir la excentricidad.

Una vez calculadas todas las soluciones u_2^* y descartadas todas las "soluciones falsas" tal y como se acaba de explicar, pueden utilizarse las ecuaciones (4.1)-(4.3) así como la ley horaria aproximada para calcular las latitudes y longitudes de los puntos de corte. Esta ley horaria aproximada puede encontrarse en [3] desarrollada, pero por comodidad se incluye a continuación:

$$\Delta t \approx \frac{u_i - \omega + 2\pi r - 2e \sin(u_i - \omega + 2\pi r) + \frac{3e^2}{4} \sin(2(u_i - \omega + 2\pi r)) - M_0}{n_{sat}} \quad (4.33)$$

Para resolver la ecuación (4.33) es necesario tener en cuenta que Δt es el tiempo transcurrido desde el instante de referencia t_0 hasta el momento en el que se tiene el argumento de latitud u_i en la vuelta número r desde la referencia. En caso de que el argumento de latitud del instante de referencia t_0 sea distinto de 0, será necesario calcular la anomalía media en ese instante M_0 para tenerla en cuenta en la ecuación a través de las relaciones (4.15),(4.19) y (4.20).

Se incluyen a continuación ejemplos resueltos para distintos valores de k , m , i , ω y e :

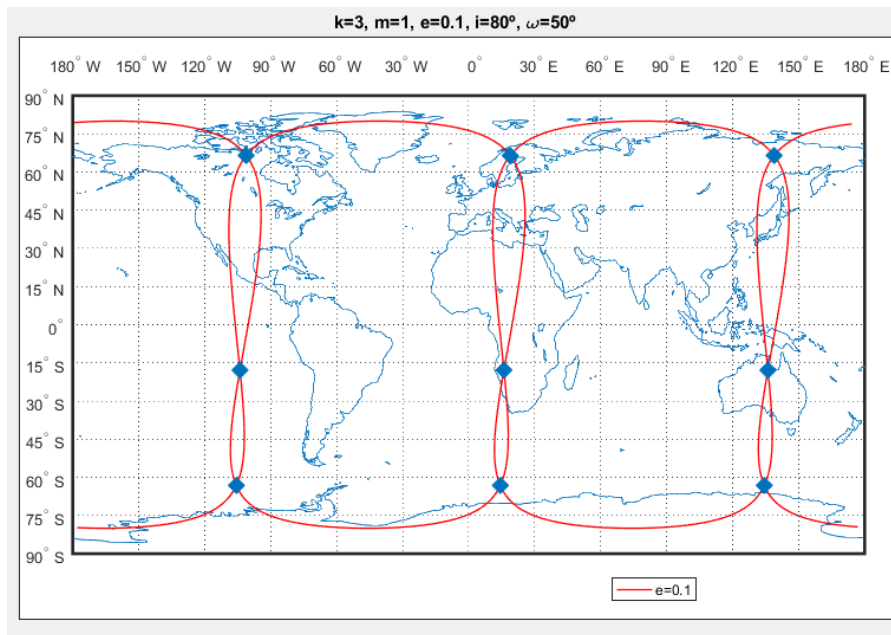


Imagen 4.1 Ejemplo de órbita con traza repetida cada 3 revoluciones ($k=3$) y cada día ($m=1$), de excentricidad $e=0.1$, inclinación 80° y argumento de perigeo $\omega = 50^\circ$.

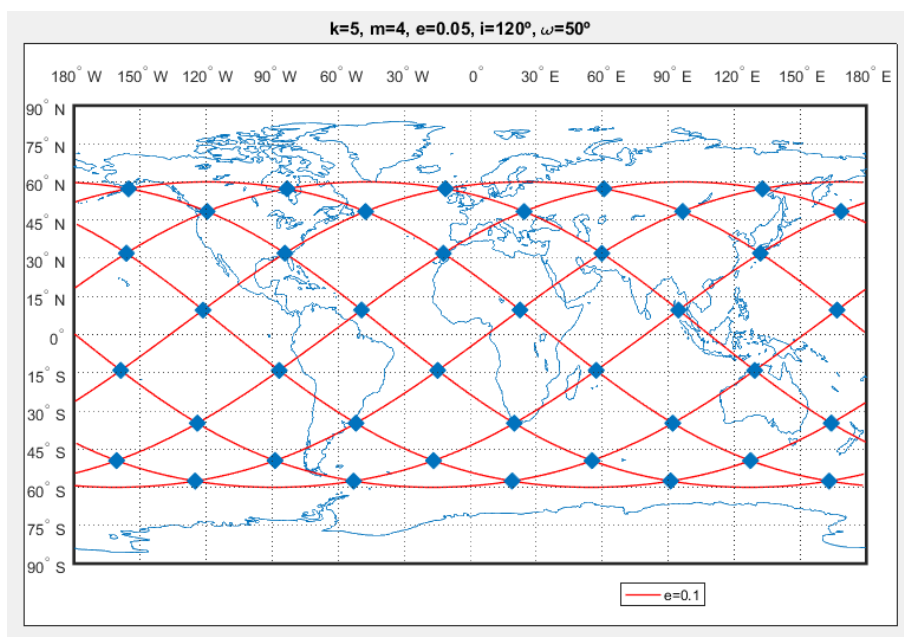


Imagen 4.2 Ejemplo de órbita con traza repetida cada 5 revoluciones ($k=5$) y cada 4 días ($m=4$), de excentricidad $e=0.05$, inclinación 120° y argumento de perigeo $\omega = 50^\circ$.

Ambas imágenes representan un caso resuelto del conocido como "caso impar", con una inclinación de órbita directa, y otro caso resuelto del tipo "impar", en este caso con una órbita retrógrada.

Una vez obtenidas las soluciones de la ecuación aproximada, pueden usarse para calcular los iterantes iniciales necesarios para la resolución del sistema de ecuaciones completo, para así obtener la solución exacta. Para ello, se hace uso del comando `fsolve` de *MATLAB* y de las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.10) para calcular estos iterantes iniciales con los que empezará a resolver el sistema para las variables E_1 , E_2 y u_2 .

Se incluye a continuación una tabla a modo de comparación con las soluciones que se obtienen resolviendo la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo:

Tabla 4.1 Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones no lineales completo para una órbita cuyas características son $k=3, m=2, \omega = 25^\circ, i=85^\circ$ y $e=0.15$.

$k=3, m=2, e=0.15, \omega = 25^\circ, i=85^\circ, \Omega = 0$	u_2^* [rad]	r [revs]	ϕ [°]	λ [°]
Ecuación maestra aproximada	1.37370	1	77.6628	116.3952
	0.8325	1	47.4597	114.3015
	1.7679	2	77.6628	-3.6048
	-1.33783	0	-75.7624	36.1206
	-1.80376	2	-75.7624	156.1206
	2.30909	2	47.4597	-5.6985
	-1.07742	0	-61.3287	37.2475
-2.06417	2	-61.3287	157.2475	
Sistema de ecuaciones completo	1.37340	1	77.6476	116.3857
	0.83385	1	47.5367	114.3133
	1.76819	2	77.6476	-3.6143
	4.94467	2	-75.7991	36.1274
	-1.80307	2	-75.7991	156.1274
	2.30774	2	47.5367	-5.6867
	5.20789	2	-61.2088	37.2583
-2.06630	2	-61.2088	157.2583	

En la tabla puede comprobarse como ambas soluciones son muy similares. En concreto, para el argumento de latitud u_2 , la mayor diferencia se da en la milésima de radián, para la latitud ϕ , el mayor error es una diferencia de décimas de grado y para la longitud λ un error de centésimas de grado. Un comentario que ha de hacerse es que, por simplicidad a la hora de resolver el sistema de ecuaciones y calcular el resto de parámetros, las soluciones contenidas en el intervalo $[-\pi, 0)$ que resolvían la ecuación maestra aproximada para $r = 0$ se han pasado al intervalo $[\pi, 2\pi)$, de forma que ahora serán soluciones para $r = k - 1 = 2$ (esto puede hacerse porque un argumento de latitud negativo implica que el satélite se encuentra aún en el periodo anterior). Puede comprobarse en las columnas correspondientes a la latitud y la longitud que este cambio no les afecta, y se siguen obteniendo resultados muy similares.

La conclusión que puede obtenerse de esta tabla es que la aproximación hecha de la ley horaria no es burda, y funciona con precisión de décimas de grado para excentricidades del orden de 0.15.

Se incluye a continuación un gráfico con la traza de la órbita resuelta en la tabla, para completar así el ejemplo comparativo:

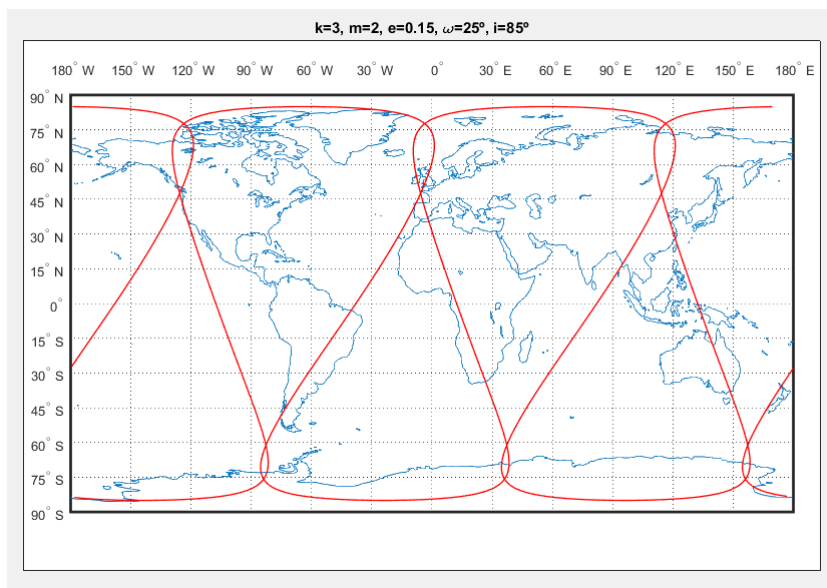


Imagen 4.3 Traza de la órbita resuelta en la tabla 4.1.

4.3 Obtención de función de simetría de las soluciones u_2

En el caso circular, siempre que u_2^* fuese solución de la ecuación maestra, $-u_2^*$ lo era para otro valor de r . Por ello, cabe preguntarse si existe alguna función del tipo $u_{2,2}^* = -u_{2,1}^* + f(e, \omega, i, \dots)$ que permita una relación similar entre las soluciones del caso excéntrico.

Primero se comprueba que no se mantiene la simetría de las soluciones con respecto a $u_2^* = 0$ como ocurría en el caso circular. Para ello, suponiendo que para unos ciertos elementos orbitales e , ω , i , k y m , $u_2 = u_2^*$ es solución de la ecuación maestra aproximada para $r = r^*$, se comprueba la existencia de un valor entero, positivo y menor que $k - 1$ de r que hace que $u_2 = -u_2^*$ también sea solución:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} + 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin(u_2^* - \frac{\pi}{2}) - u_2^* - \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2^* - \pi) - \pi r^*\right)\right) = \tan(u_2^*) \cos(i) \quad (4.34)$$

Para que sea más fácil comprobar el signo de los distintos elementos de los argumentos, se reescribe la ecuación (4.34):

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cos(u_2^*) - u_2^* + \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2^*) - \pi r^*\right)\right) = \tan(u_2^*) \cos(i) \quad (4.35)$$

Al sustituir u_2^* por $-u_2^*$, el segundo miembro de la ecuación (4.35) cambiará de signo, con lo que, llamando $f(u_2)$ al argumento de la primera tangente, deberá comprobarse que $\tan(f(u_2^*)) = -\tan(f(-u_2^*))$. Para que esta igualdad sea cierta, debe cumplirse que $f(u_2^*) = p\pi - f(-u_2^*)$ (con p un número entero y positivo), es decir, que debe comprobarse que a partir de la igualdad (4.36) puede obtenerse un valor de $r = r'$ que sea entero, positivo y menor que $k - 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cos(u_2^*) - u_2^* + \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2^*) - \pi r^*\right) = \\ & = p\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cos(u_2^*) + u_2^* - \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2^*) - \pi r'\right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Puede comprobarse que en (4.36) los términos asociados a e^2 y los propios términos u_2^* se cancelan entre sí, pero no ocurre lo mismo con los asociados a e . Esto implica que, a la hora de despejar r' , estos términos influirán, siendo normalmente números no enteros debido a los valores de excentricidad con los que se está trabajando y a la propia naturaleza de las funciones trigonométricas.

Para poder eliminar este término asociado a e , se buscan valores posibles de r' que vayan asociados a una solución de la forma $-u_2^* + 4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega)$, para lo cual se hacen las siguientes aproximaciones:

$$\cos(-u_2^* + 4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega)) \approx \cos(-u_2^*) \quad (4.37)$$

$$\sin(-2u_2^* + 4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega)) \approx \sin(-2u_2^*) \quad (4.38)$$

Estas aproximaciones están justificadas, ya que se está trabajando con excentricidades pequeñas, y los términos trigonométricos como mucho valdrán 1.

Sustituyendo ahora $-u_2^* + 4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega)$ en (4.35), en lugar de $-u_2^*$ y realizando las aproximaciones descritas anteriormente, se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \pi r^*\right) = p\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \pi r'\right) \quad (4.39)$$

Despejando de esta igualdad, se llega a la siguiente relación entre r' y r^* :

$$r' = 1 - r^* + \frac{k}{m}(p - 1) \quad (4.40)$$

En (4.40), tomando correctamente un valor de p en función de los valores de k y m , puede obtenerse un valor de r' que cumpla con todas las condiciones de ser entero, positivo y menor que $k - 1$.

Con esto, puede concluirse que una primera aproximación de la fórmula que relaciona una de las soluciones de la ecuación maestra aproximada con la simétrica respecto a $u_2 = 0$ de otra de ellas es la siguiente:

$$u_{2,2}^* \approx -u_{2,1}^* + 4e \cos(u_{2,1}^*) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \quad (4.41)$$

Para comprobar la exactitud de esta aproximación, se comparan distintos casos de órbitas con distintos elementos orbitales:

Tabla 4.2 Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación (4.41) y la ecuación maestra aproximada para una órbita cuyas características son $k=3$, $m=1$, $\omega = 20^\circ$, $i=80^\circ$ y $e=0.05$.

$k=3$, $m=1$, $\omega = 20^\circ$, $i=80^\circ$ y $e=0.05$

$u_{2,1}^*$ [rad]	$u_{2,2}^*$ [rad]	r^* [revs]	r' [revs] (sol. numérica)	$u_{2,2}^*$ aprox. [rad]	p	r' (por (4.40))
-1.9765	1.9629	0	1	1.9495	1	1
-1.1651	1.1787	2	2	1.1921	2	2
-3.0707	-0.0709	0	2	3.0024	x	x

En este primer ejemplo puede comprobarse cómo la aproximación es exacta hasta la centésima de radián para las dos primeras parejas de soluciones. Sin embargo, existe una tercera pareja de soluciones que se diferencian aproximadamente en π , para la cual la relación (4.41) no se cumple.

Tabla 4.3 Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación (4.41) y la ecuación maestra aproximada para una órbita cuyas características son $k=5$, $m=1$, $\omega = 20^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$.

$k=5$, $m=1$, $\omega = 20^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$

$u_{2,1}^*$ [rad]	$u_{2,2}^*$ [rad]	r^* [revs]	r' [revs] (sol. numérica)	$u_{2,2}^*$ aprox. [rad]	p	r' (por (4.40))
-1.6358	1.6357	0	1	1.6314	1	1
-1.5058	1.5059	2	4	1.5102	2	4
1.8984	-1.9062	2	4	-1.9205	2	4
-1.2354	1.2431	3	3	1.2579	2	3
-0.0603	-3.0813	3	4	0.12855	x	x

De nuevo se repite el patrón del ejemplo anterior: la relación (4.41) aporta valores exactos hasta la centésima de radián en todas las parejas de soluciones excepto en una, en la que, de nuevo, la diferencia es un factor de π .

Tabla 4.4 Comparativa entre las soluciones obtenidas por la ecuación (4.41) y la ecuación maestra aproximada para una órbita cuyas características son $k=7$, $m=6$, $\omega = 20^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$.

$k=7$, $m=6$, $\omega = 20^\circ$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$

$u_{2,1}^*$ [rad]	$u_{2,2}^*$ [rad]	r^* [revs]	r' [revs] (sol. numérica)	$u_{2,2}^*$ aprox. [rad]	p	r' (por (4.40))
-1.5244	1.5247	0	1	1.5275	1	1
-0.3279	0.2544	0	1	0.3926	1	1
-2.8137	2.8872	2	6	2.7490	7	6
-1.6172	1.6169	2	6	1.6141	7	6
0.8866	-0.9438	2	6	-0.8433	7	6
1.4323	-1.4289	2	6	-1.4229	7	6
-2.1978	2.2550	3	5	2.1577	7	5
-1.7127	1.7093	3	5	1.7030	7	5

En este último ejemplo puede comprobarse cómo la exactitud de las aproximaciones realizadas disminuye si las soluciones u_2^* están cerca de 0 ó $\frac{\pi}{2}$, ya que para valores pequeños de u_2^* no puede despreciarse el término asociado a $4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega)$ respecto a u_2^* , y para valores de u_2^* el término $\cos(u_2^*) \cos(4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega))$ es comparable a $\sin(u_2^*) \sin(4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega))$ (estos términos surgen de desarrollar $\cos(u_2^* + 4e \cos(u_2^*) \cos(\frac{\pi}{2} - \omega))$). Sin embargo, para esta combinación de k y m no existe una pareja para la cual no exista un valor de p entero y positivo tal que pueda obtenerse un valor de r' igual al obtenido mediante la resolución numérica.

4.4 Análisis de sensibilidad

El objetivo de este apartado es el estudio de la variación de los puntos de corte conforme se cambian algunos de los elementos orbitales, como la excentricidad e , el argumento de perigeo ω o la inclinación i .

Primero se obtienen estas variaciones analíticamente en forma de derivadas, haciendo uso de la derivación implícita de la ecuación maestra aproximada y las ecuaciones (4.1) y (4.2).

Después, con el fin de comprobar estos resultados analíticos, se resuelve numéricamente el mismo problema de forma recursiva, variando en cada iteración el elemento orbital respecto del cual se desea estudiar la evolución de los puntos de corte.

4.4.1 Variación con la excentricidad

Como se ha comentado, se hace uso de la derivación implícita de la ecuación maestra aproximada para obtener la variación del argumento de latitud solución con respecto a la excentricidad.

Teniendo la ecuación maestra aproximada de la forma:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} + 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2 - \pi) - \pi r\right)\right) = \tan(u_2) \cos(i) \quad (4.42)$$

Por simplicidad, se realiza la siguiente identificación:

$$f(e) = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} + 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2 - \pi) - \pi r\right) \quad (4.43)$$

Derivando (4.42) teniendo en cuenta (4.43) se llega a:

$$\frac{\partial f}{\partial e} (1 + (\tan(f))^2) = \frac{\partial u_2}{\partial e} \cos(i) (1 + (\tan(u_2))^2) \quad (4.44)$$

Para que la expresión (4.44) quede completamente definida, es necesario derivar el argumento de la tangente, es decir, la función f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial e} = & -\frac{m}{k} \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) + 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cos\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial u_2}{\partial e} - \frac{\partial u_2}{\partial e} \right. \\ & \left. - \frac{3e}{2} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2 - \pi) - \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \cos(2u_2 - \pi) \frac{\partial u_2}{\partial e} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Despejando $\frac{\partial u}{\partial e}$, agrupando términos y aplicando algunas relaciones trigonométricas se llega a:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial u}{\partial e} B, \quad \text{Donde:} \\ A &= \frac{m}{k} \left(2 \sin(\omega) \cos(u_2) + \frac{3e}{2} \cos(2\omega) \sin(2u_2) \right) \left(1 + \tan^2(f(e)) \right) \\ B &= \cos(i) (1 + \tan^2(u_2)) + \frac{m}{k} \left(2e \sin(\omega) \sin(u_2) - 1 - \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) \cos(2u_2) \right) \left(1 + \tan^2(f(e)) \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Con esta ecuación, si se evalúan A y B para la solución obtenida en el caso de estudio, puede obtenerse la derivada de esta solución si se variase la excentricidad un poco.

Una vez conocida la variación del argumento de latitud, pueden obtenerse las variaciones de la longitud y de la latitud del punto de cruce. Para ello, se realiza un procedimiento similar pero con las ecuaciones que definen latitud y longitud a partir del argumento de latitud: (4.1)-(4.3).

Para analizar la variación λ , es necesario estudiar cómo varían tanto λ_u como el momento del cruce Δt , porque el resto de parámetros que influyen en el cálculo de λ no cambian al modificar la excentricidad: $\lambda = \Omega + \lambda_u - GST_0 - \omega_{\oplus} \Delta t$. Para ello se aplica la derivación implícita a las ecuaciones (4.2) y (4.33):

$$\frac{\partial \phi}{\partial e} = \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial e} = \frac{\cos(u_2) \sin(i)}{\cos(\phi)} \frac{\partial u_2}{\partial e} = \frac{\cos(u_2) \sin(i)}{\sqrt{1 - (\sin(u_2) \sin(i))^2}} \frac{\partial u_2}{\partial e} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial e} &= \frac{\partial \lambda_u}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial e} - \omega_{\oplus} \frac{\partial \Delta t}{\partial e} = \frac{1 + \tan^2(u_2)}{1 + \tan^2(\lambda_u)} \frac{\partial u_2}{\partial e} - \omega_{\oplus} \frac{\partial \Delta t}{\partial e} = \\ &= \frac{1 + \tan^2(u_2)}{1 + (\tan(u_2) \cos(i))^2} \frac{\partial u_2}{\partial e} - \frac{\omega_{\oplus}}{n_{sat}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial e} - 2 \sin(u_2 - \omega) - 2e \cos(u_2 - \omega) \frac{\partial u_2}{\partial e} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3e}{2} \sin(2(u_2 - \omega)) + \frac{3e^2}{2} \cos(2(u_2 - \omega)) \right) \end{aligned} \tag{4.48}$$

Con estas ecuaciones puede calcularse cuál será la variación de la posición del punto de corte al modificar ligeramente la excentricidad, siempre que se conozca el argumento de latitud de la solución que se desea analizar. Si de estas expresiones simplemente analizamos el signo, se puede obtener cuál será la dirección de la variación de la posición de estos puntos para variaciones de excentricidad que no sean solo infinitesimales: si $\frac{\partial \phi}{\partial e} > 0$ para un punto concreto, implica que al aumentar la excentricidad, ese punto se desplazará hacia el Norte, mientras que se moverá hacia el Sur en caso contrario. Para la longitud, una derivada positiva $\frac{\partial \lambda}{\partial e} > 0$ implica que el punto se desplazará hacia el Este, mientras que irá hacia el Oeste en caso contrario.

Se incluye a continuación una pequeña tabla con algunos valores concretos para un problema sencillo resuelto:

Tabla 4.5 Variación de la posición de algunos puntos de corte de la órbita con traza repetida cuyos elementos orbitales son $k=3$, $m=1$, $i=80^\circ$ y $\omega = 50^\circ$.

Valores para $e=0.05$	Signos de las distintas derivadas	Valores para $e=0.1$
$u_2 = 1.1857$ rads ($r = 2$)	$\frac{\partial u_2}{\partial e} > 0$	$u_2 = 1.1977$ rads
$\phi = 65.8785^\circ$	$\frac{\partial \phi}{\partial e} > 0$	$\phi = 66.5003^\circ$
$\lambda = 137.7780^\circ$	$\frac{\partial \lambda}{\partial e} > 0$	$\lambda = 138.8420^\circ$
$u_2 = -0.1595$ rads ($r = 2$)	$\frac{\partial u_2}{\partial e} < 0$	$u_2 = -0.3171$ rads
$\phi = -9.0004^\circ$	$\frac{\partial \phi}{\partial e} < 0$	$\phi = -17.8852^\circ$
$\lambda = 136.5052^\circ$	$\frac{\partial \lambda}{\partial e} < 0$	$\lambda = 136.0132^\circ$
$u_2 = -1.1548$ rads ($r = 2$)	$\frac{\partial u_2}{\partial e} > 0$	$u_2 = -1.1340$ rads
$\phi = -64.2676^\circ$	$\frac{\partial \phi}{\partial e} > 0$	$\phi = -63.1671^\circ$
$\lambda = 135.5185^\circ$	$\frac{\partial \lambda}{\partial e} < 0$	$\lambda = 134.3343^\circ$

Puede comprobarse que, para cualquiera de las variables u_2 , ϕ o λ , cuando la derivada es mayor que cero y se aumenta la excentricidad, sus valores aumentan, mientras que se reducen en caso de que la derivada sea negativa. Se incluyen también en la siguiente página varios gráficos en los que puede verse la evolución de la posición de los puntos de cruce sobre la superficie terrestre.

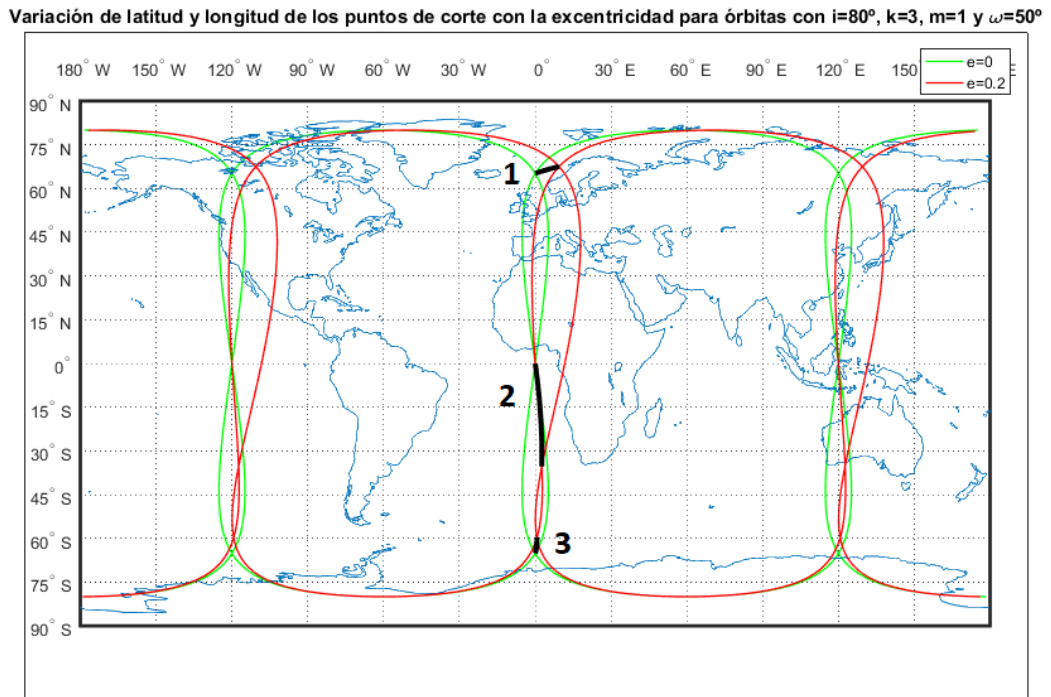


Imagen 4.4 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=1$, $i=80^\circ$ y $\omega = 50^\circ$ (incluidas las dos órbitas ilustradas en la tabla).

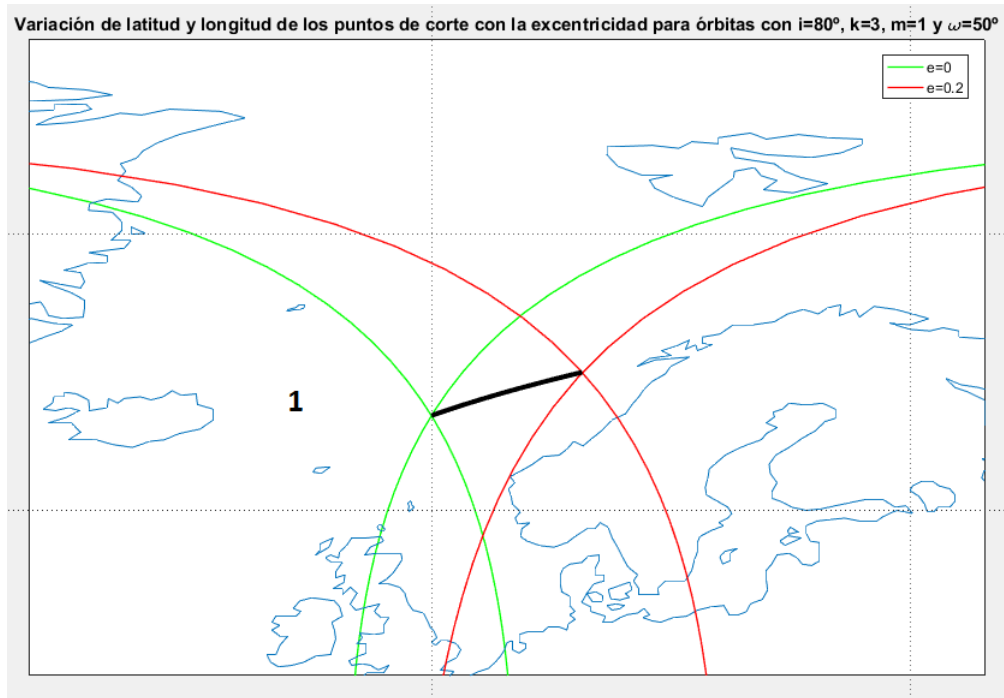


Imagen 4.5 Zoom 1 de la gráfica 4.4.

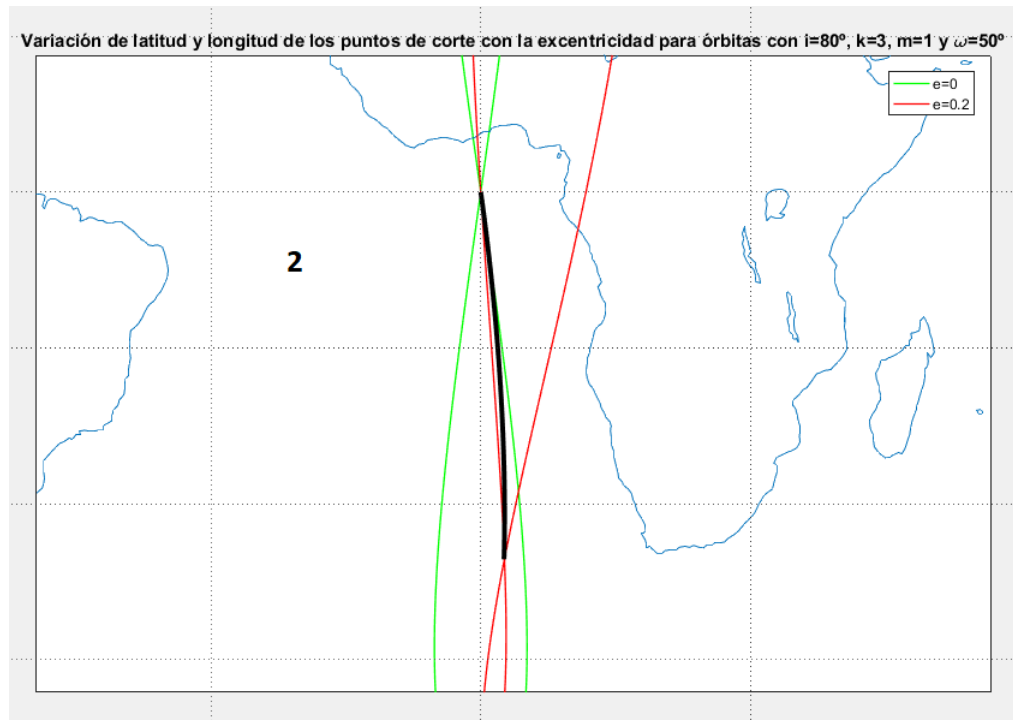


Imagen 4.6 Zoom 2 de la gráfica 4.4.

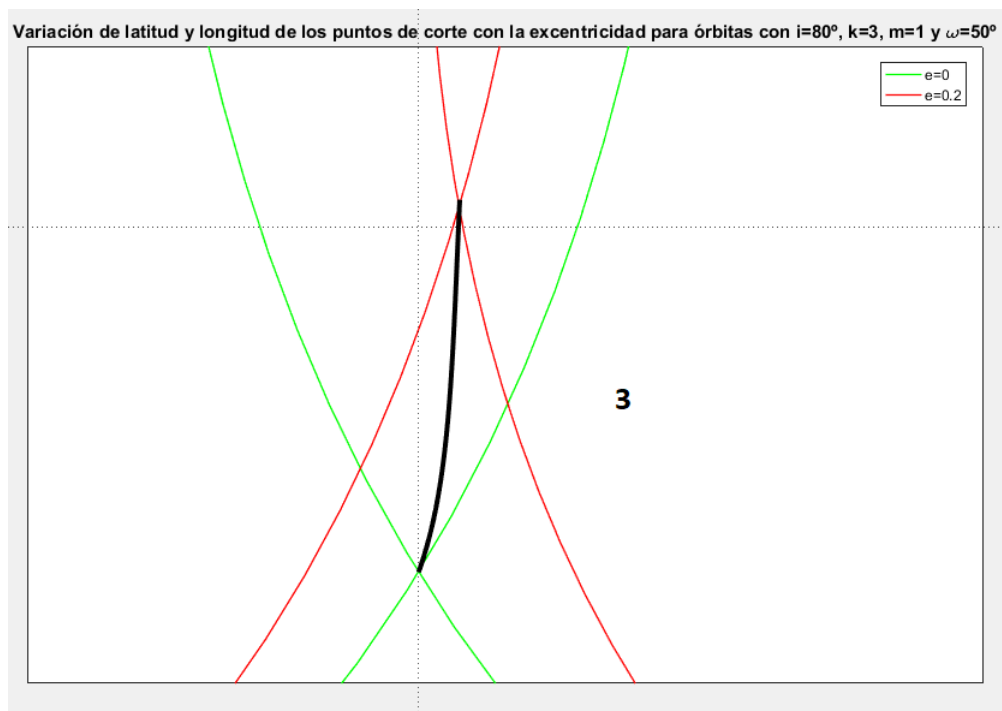


Imagen 4.7 Zoom 3 de la gráfica 4.4.

En las gráficas expuestas anteriormente, los números sirven para identificar cada uno de los zooms realizados, las líneas verdes representan la órbita con los elementos orbitales descritos en el pie de figura 4.4 y con excentricidad 0, mientras que la línea roja es esa misma órbita con excentricidad 0.2. Las distintas líneas negras representan las posiciones que toman los puntos de corte al aumentar la excentricidad desde 0 hasta 0.2.

Se incluyen a continuación otros tres ejemplos con distintos elementos orbitales, para que pueda verse la variación de la posición de los puntos de corte con la excentricidad para varios casos.

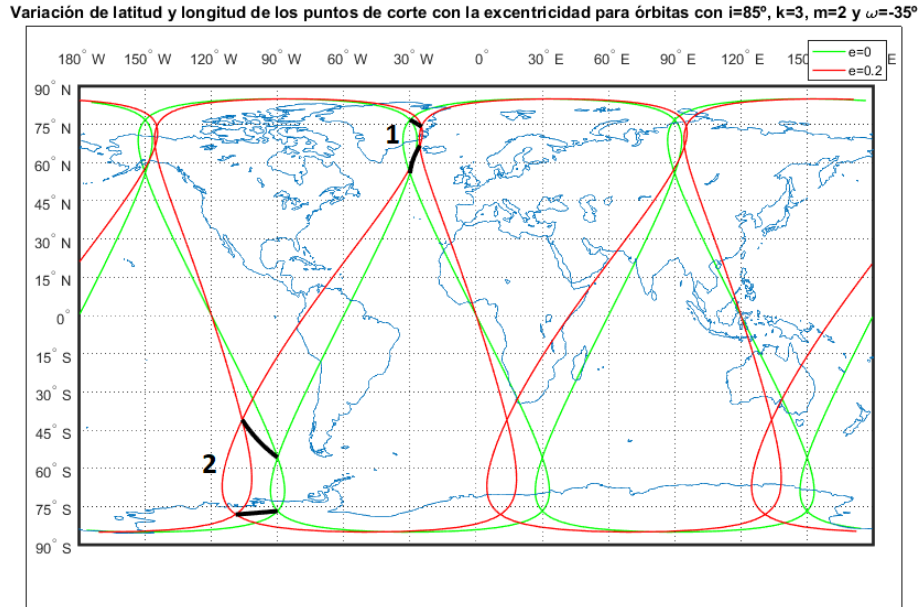


Imagen 4.8 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=85^\circ$ y $\omega = -35^\circ$.

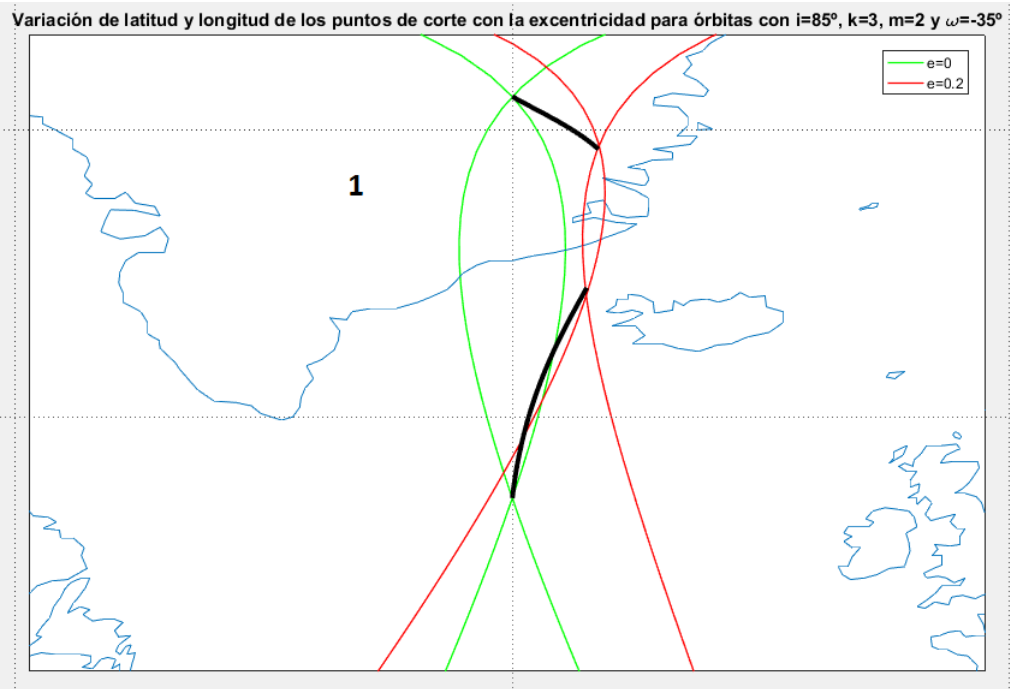


Imagen 4.9 Zoom 1 de la gráfica 4.8.

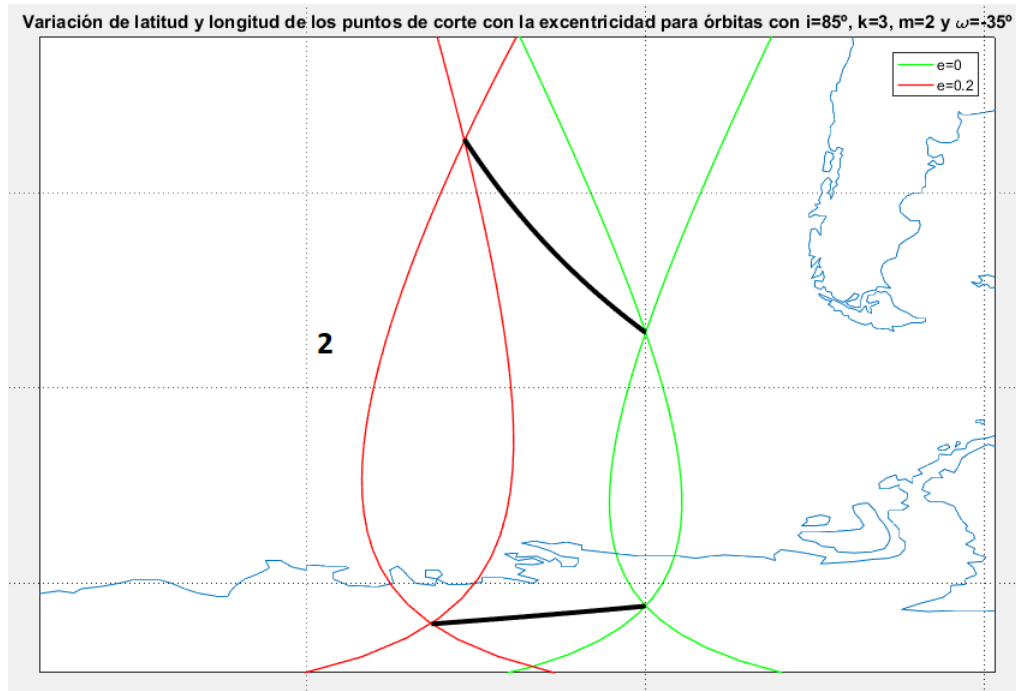


Imagen 4.10 Zoom 2 de la gráfica 4.8.

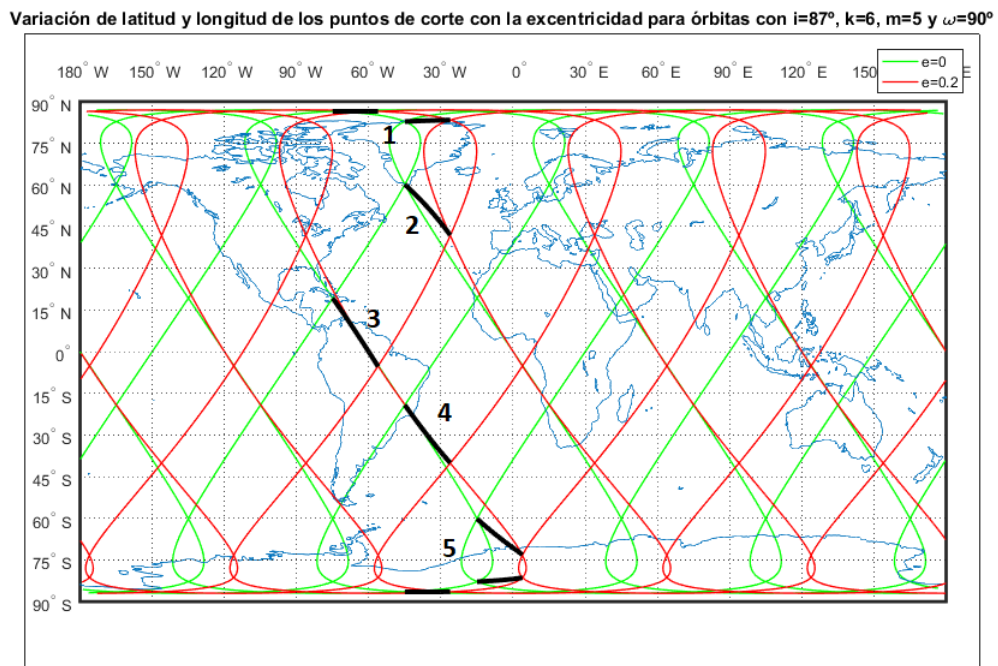


Imagen 4.11 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=6$, $m=5$, $i=87^\circ$ y $\omega = 90^\circ$.

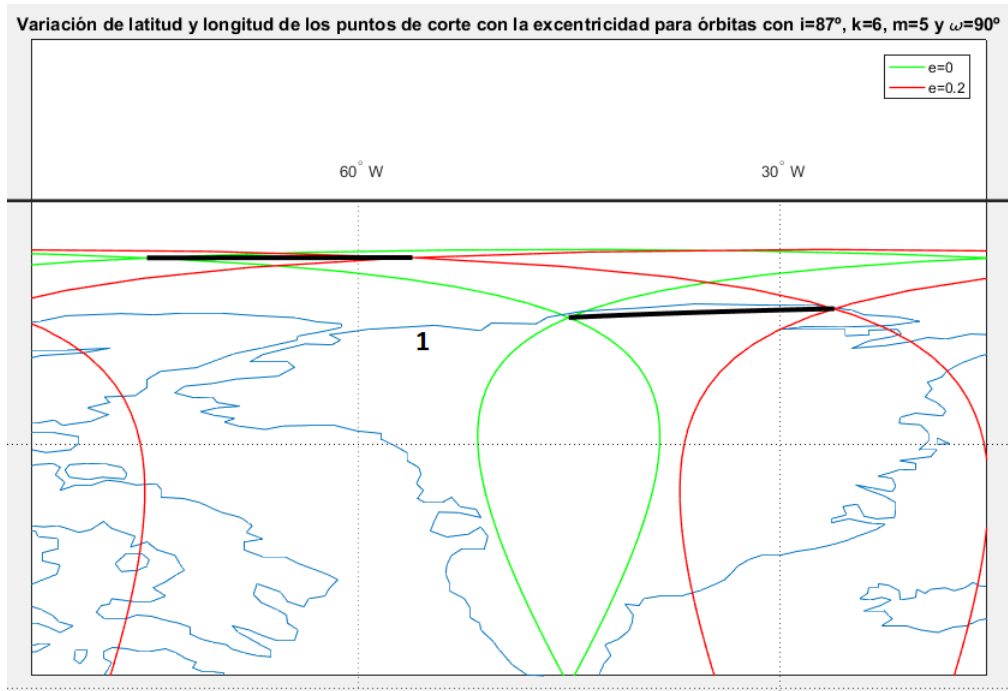


Imagen 4.12 Zoom 1 de la gráfica 4.11.

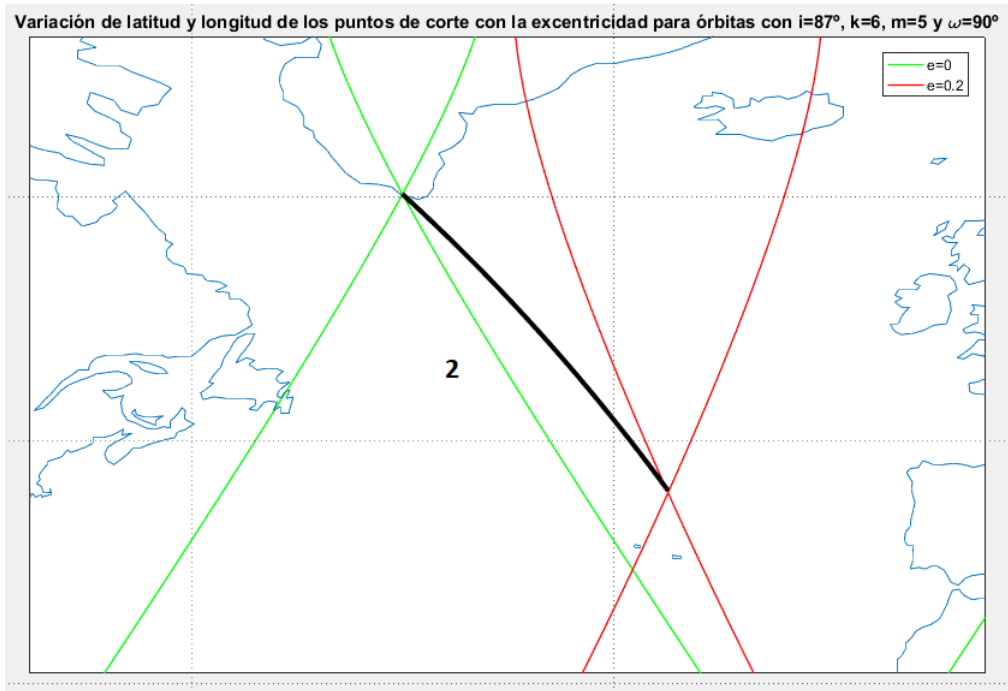


Imagen 4.13 Zoom 2 de la gráfica 4.11.

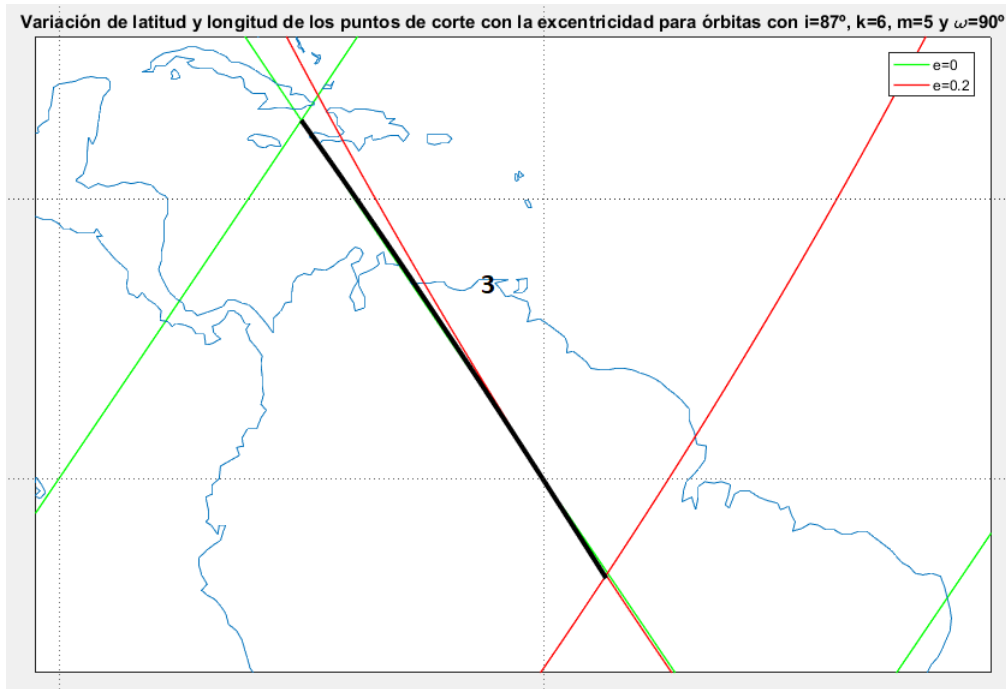


Imagen 4.14 Zoom 3 de la gráfica 4.11.

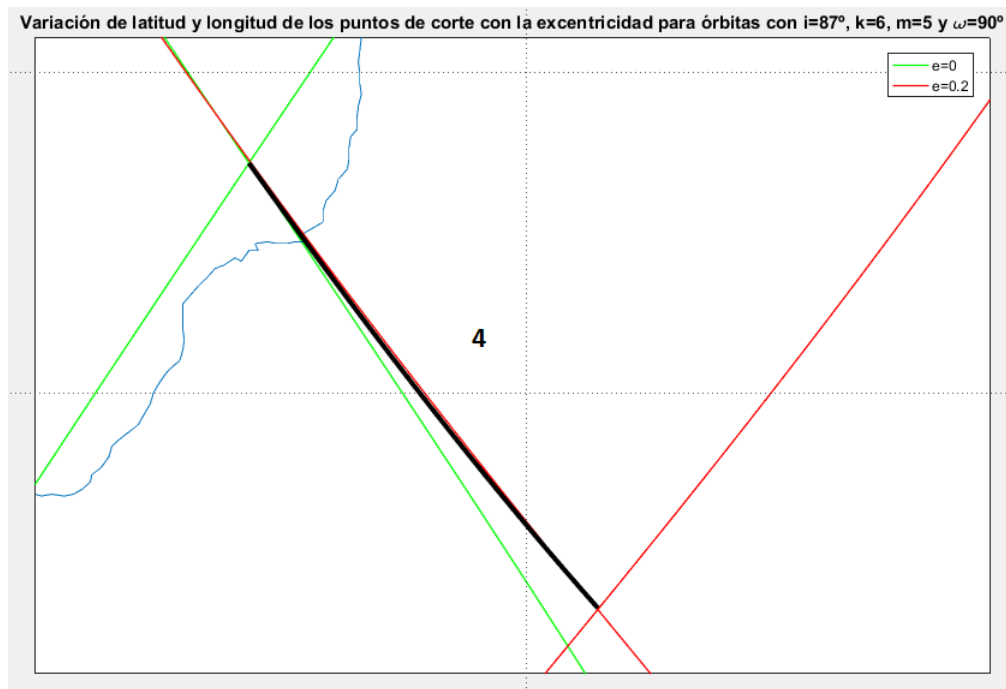


Imagen 4.15 Zoom 4 de la gráfica 4.11.

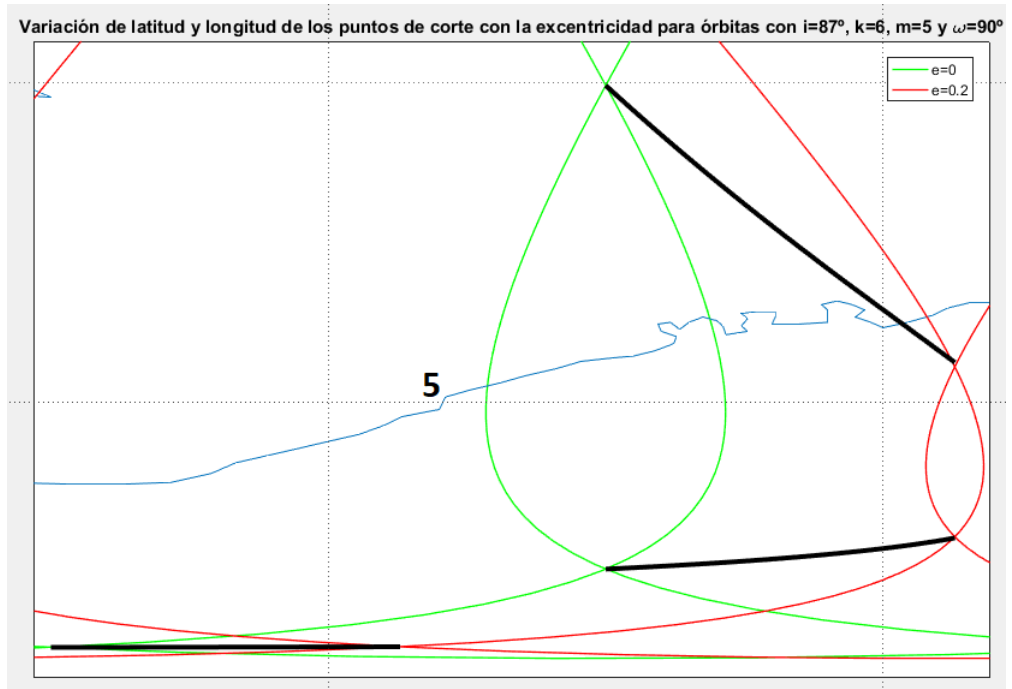


Imagen 4.16 Zoom 5 de la gráfica 4.11.

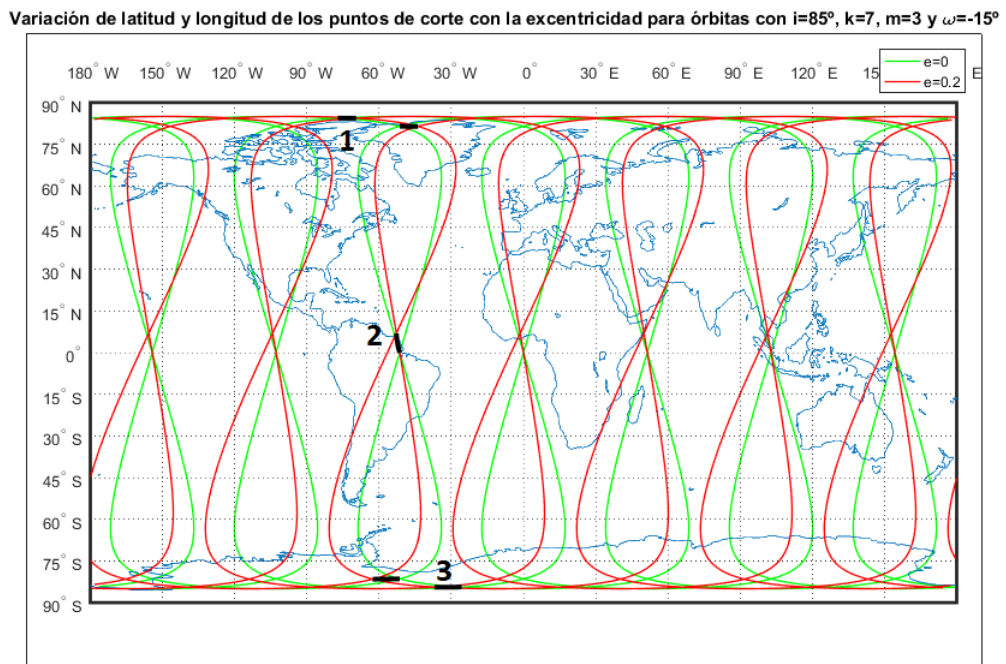


Imagen 4.17 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=7$, $m=3$, $i=85^\circ$ y $\omega = -15^\circ$.

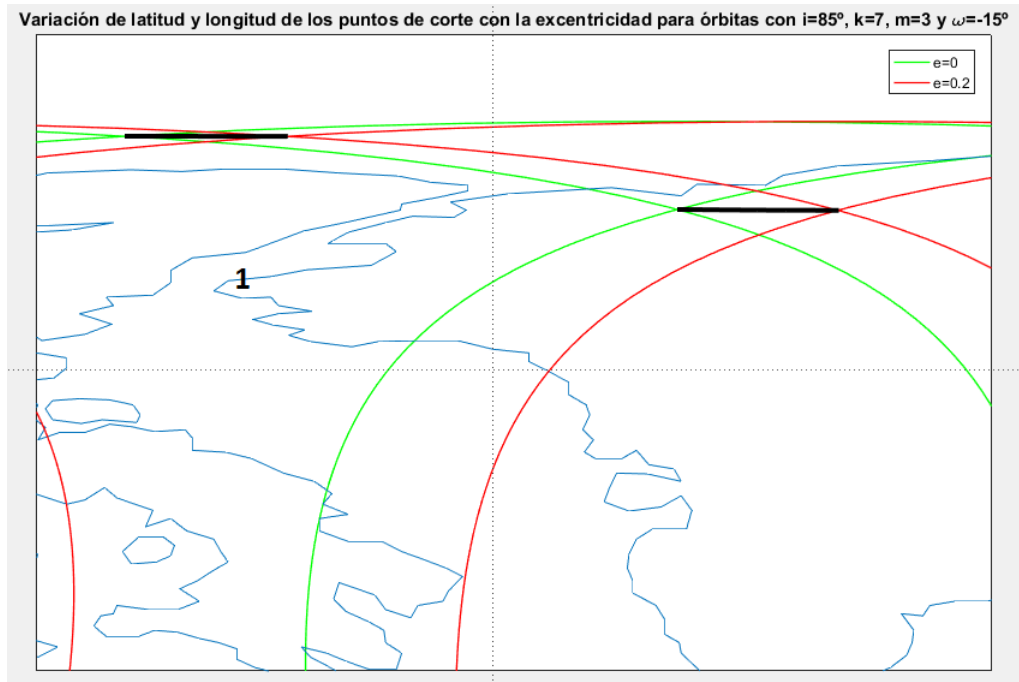


Imagen 4.18 Zoom 1 de la gráfica 4.17.

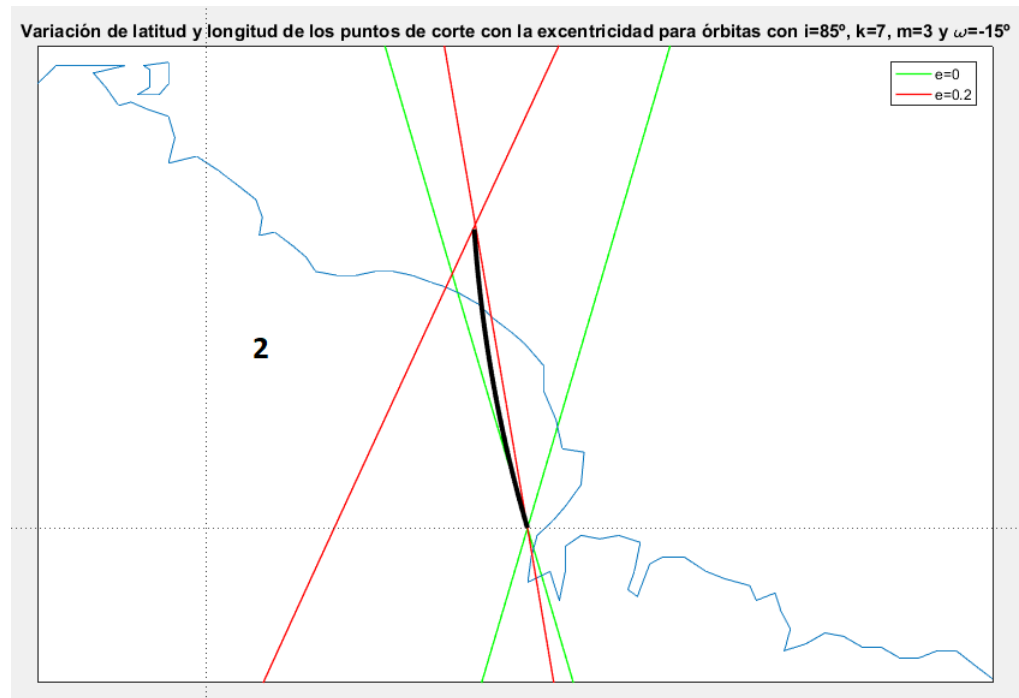


Imagen 4.19 Zoom 2 de la gráfica 4.17.

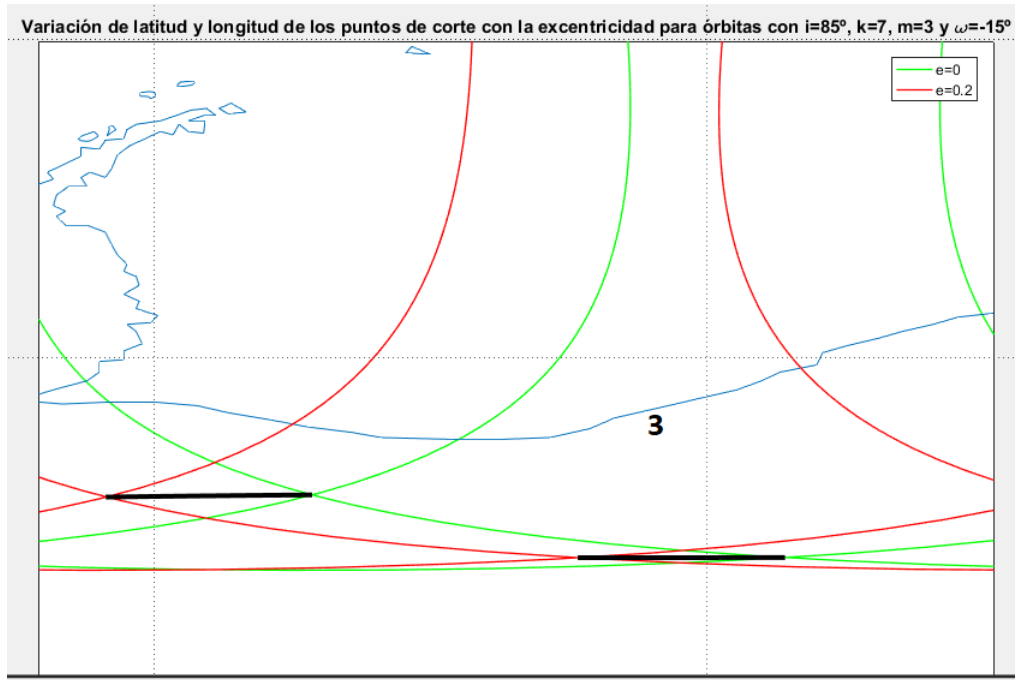


Imagen 4.20 Zoom 3 de la gráfica 4.17.

Observando todas las gráficas, pueden sacarse dos conclusiones respecto a la variación de la latitud y la longitud de los puntos de cruce al aumentar la excentricidad:

- Cuanto mayor es la latitud inicial del punto de cruce, menor será su variación de latitud con respecto a la excentricidad.
- En función del signo del argumento del perigeo, los puntos de un hemisferio se acercarán, mientras que los del otro hemisferio se alejarán. Esto puede comprobarse si se comparan las gráficas 4.4 y 4.8.

4.4.2 Variación con el argumento del perigeo ω :

Para ver cómo afecta la posición del perigeo dentro de la propia órbita se realiza un proceso completamente análogo al realizado con la excentricidad, en el que se utiliza la derivación implícita para calcular las derivadas $\frac{\partial u_2}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \phi}{\partial \omega}$ y $\frac{\partial \lambda}{\partial \omega}$.

Debido a que el proceso es muy similar al previamente desarrollado, en este caso los desarrollos serán menos concretos. Para obtener $\frac{\partial u_2}{\partial \omega}$, se aplica la derivación implícita a la ecuación maestra aproximada (4.42) y se despeja de la misma, obteniéndose:

$$C = \frac{\partial u_2}{\partial \omega} D, \quad \text{Donde:}$$

$$C = -\frac{m}{k} \left(-2e \cos(\omega) \cos(u_2) + \frac{3e^2}{2} \sin(2\omega) \sin(2u_2) \right) \left(1 + \tan^2(f(\omega)) \right)$$

$$D = \cos(i) \left(1 + \tan^2(f(\omega)) \right) - \frac{m}{k} \left(1 + \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) \cos(2u_2) - 2e \sin(\omega) \sin(u_2) \right) \left(1 + \tan^2(f(\omega)) \right) \quad (4.49)$$

En estas expresiones, $f(\omega)$ hace referencia a la misma función que en el apartado anterior, es decir, a (4.43), tomando en este caso como variable el argumento del perigeo ω en lugar de la excentricidad e . Una vez obtenida $\frac{\partial u_2}{\partial \omega}$, pueden calcularse las otras dos derivadas que se necesitan, haciendo uso de las mismas relaciones que en el apartado anterior: (4.1)-(4.3) y (4.33).

Volviendo a realizar derivaciones implícitas y despejando las derivadas en las que estamos interesados, se llega a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \omega} = \frac{\cos(u_2) \sin(i)}{\cos(\phi)} \frac{\partial u_2}{\partial \omega} = \frac{\cos(u_2) \sin(i)}{\sqrt{1 - (\sin(u_2) \sin(i))^2}} \frac{\partial u_2}{\partial \omega} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = \frac{\partial \lambda_u}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \omega} - \omega_{\oplus} \frac{\partial \Delta t}{\partial \omega} = \frac{1 + \tan^2(u_2)}{1 + \tan^2(\lambda_u)} \frac{\partial u_2}{\partial \omega} - \omega_{\oplus} \frac{\partial \Delta t}{\partial \omega} =$$

$$= \frac{1 + \tan^2(u_2)}{1 + (\tan(u_2) \cos(i))^2} \frac{\partial u_2}{\partial \omega} - \frac{\omega_{\oplus}}{n_{sat}} \left(-1 + 2e \cos(u_2 - \omega) \left(1 - \frac{\partial u_2}{\partial \omega} \right) \right. \\ \left. + \frac{3e^2}{2} \cos(2(u_2 - \omega)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \omega} - 1 \right) \right) \quad (4.51)$$

Al igual que en el caso de la excentricidad, estas expresiones permiten predecir el comportamiento de los puntos de corte, en cuanto a su localización se refiere, conforme se varía el argumento del perigeo ω , siempre que el argumento de latitud u_2 de ese punto sea conocido de antemano.

Se incluyen en la siguiente página varias gráficas en las que puede verse la evolución de la posición de los puntos de corte al variar el argumento de perigeo de -180° a 180° .

Variación de latitud y longitud de los puntos de cruce con el argumento de perigeo para órbitas con $i=80^\circ$, $k=3$, $m=1$ y $e=0.05$

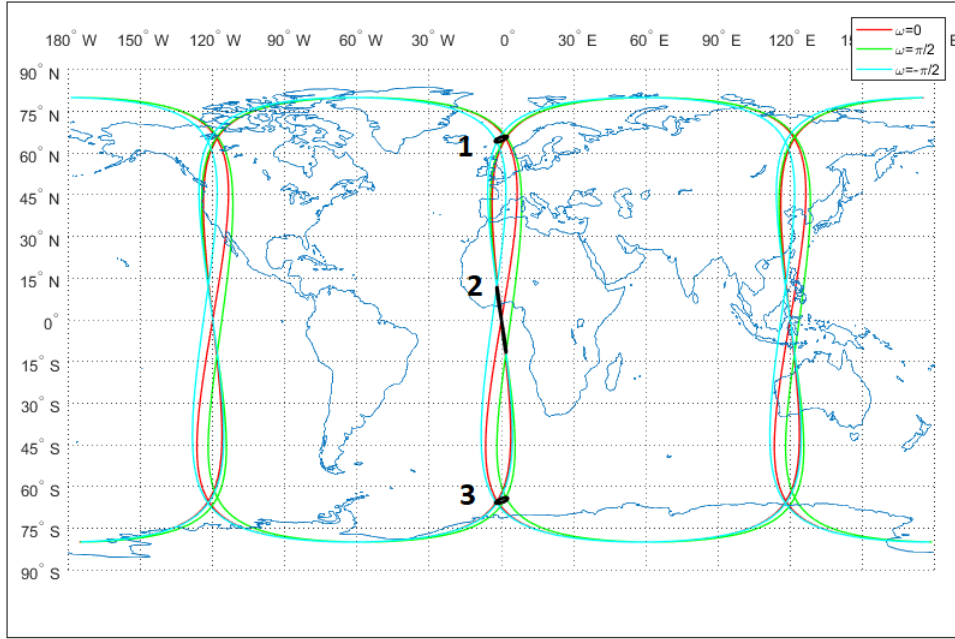


Imagen 4.21 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=1$, $i=80^\circ$ y $e=0.05$.

Variación de latitud y longitud de los puntos de cruce con el argumento de perigeo para órbitas con $i=80^\circ$, $k=3$, $m=1$ y $e=0.05$

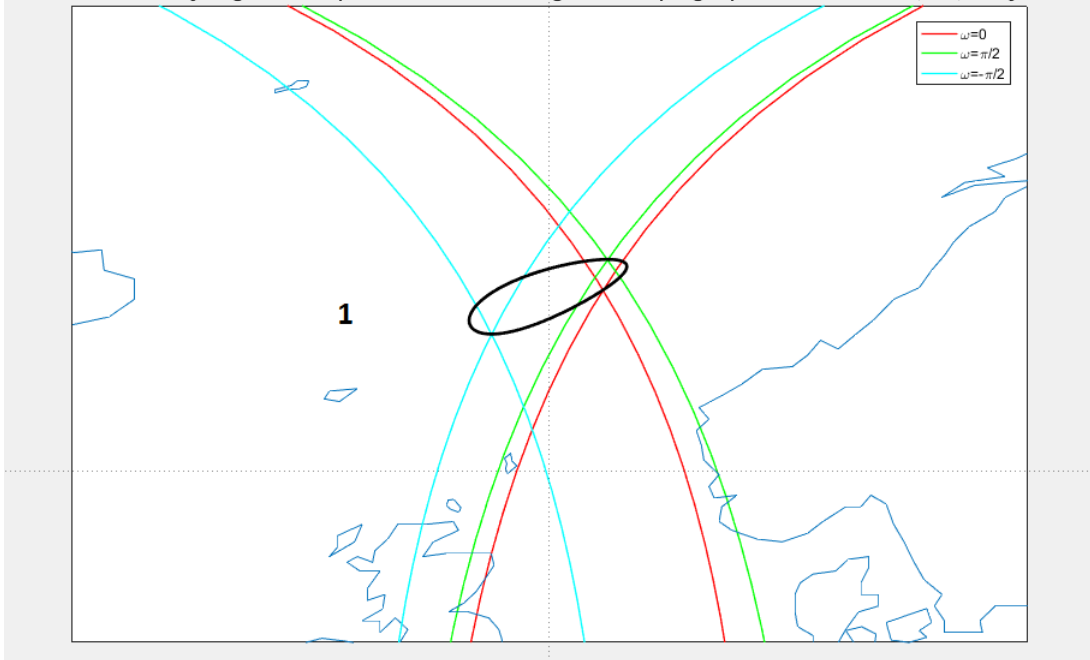


Imagen 4.22 Zoom 1 de la gráfica 4.21.

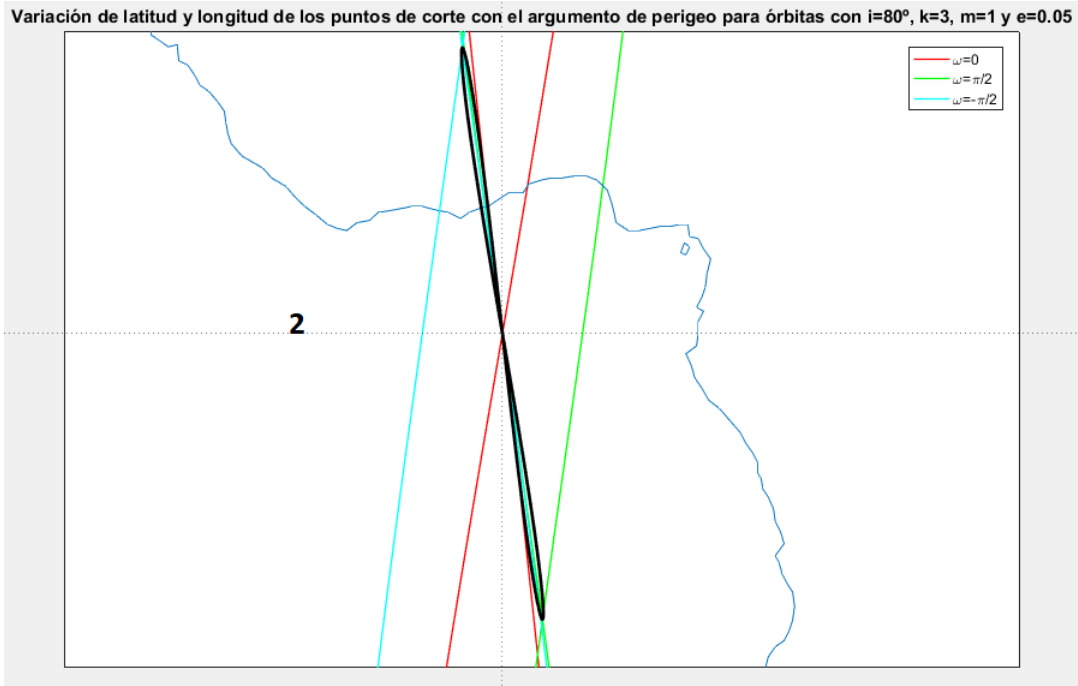


Imagen 4.23 Zoom 2 de la gráfica 4.21.

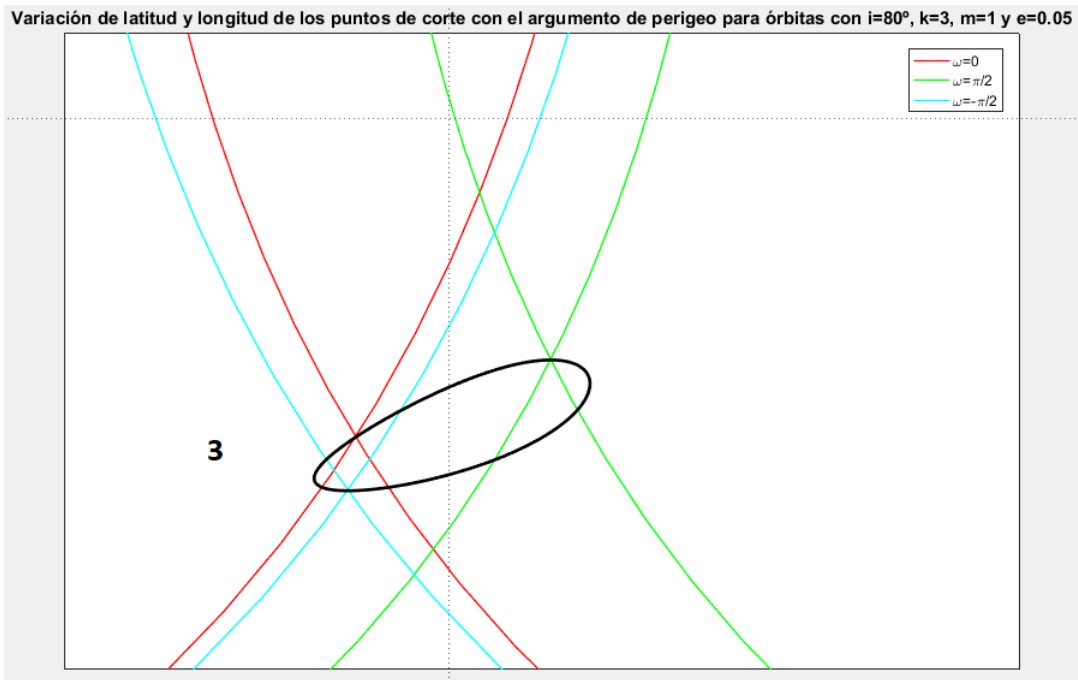


Imagen 4.24 Zoom 3 de la gráfica 4.21.

En estas gráficas se incluyen tres trazas de órbitas con los mismos elementos orbitales (los descritos al pie de 4.21) a excepción del argumento del perigeo, que es el parámetro que se varía para obtener las distintas posiciones de los puntos de corte. En las gráficas, las curvas cían corresponden a un argumento del perigeo $\omega = -\frac{\pi}{2}$, las curvas verdes a $\omega = \frac{\pi}{2}$ y las curvas rojas a $\omega = 0$. Por último, las curvas negras representan las distintas posiciones que los diferentes puntos de corte toman para todos los argumentos del perigeo analizados, mientras que los números son de nuevo para identificar los distintos zooms realizados.

Para que el zoom 4.23 incluyese toda la variación de posición del punto, no puede aumentarse mucho la imagen, de forma que esta no se aprecia bien. Por ello, se incluye a continuación esa misma variación de posición en latitud y longitud no representada sobre un mapa de la Tierra:

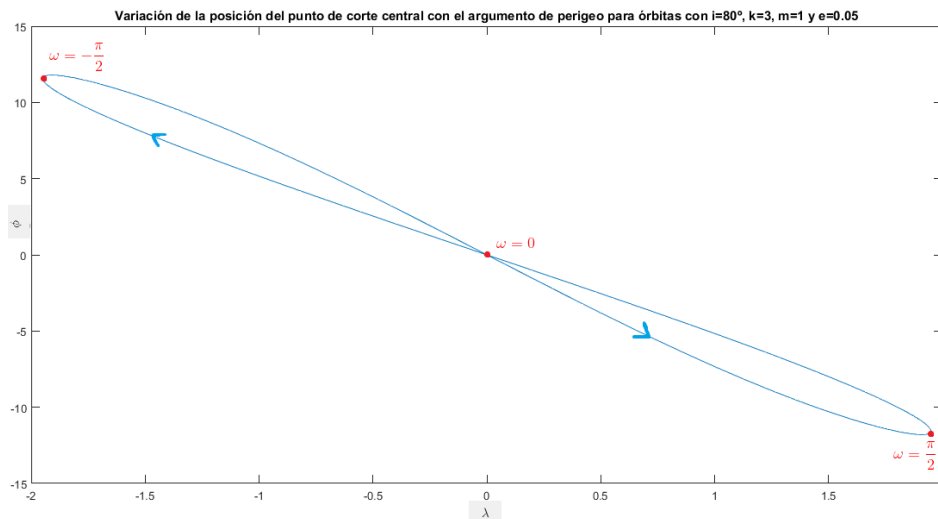


Imagen 4.25 Zoom 2 de la gráfica 4.21.

Al igual que para el caso de variación con la excentricidad, se incluyen a continuación tres ejemplos más, para poder apreciar distintas variaciones con los elementos orbitales:

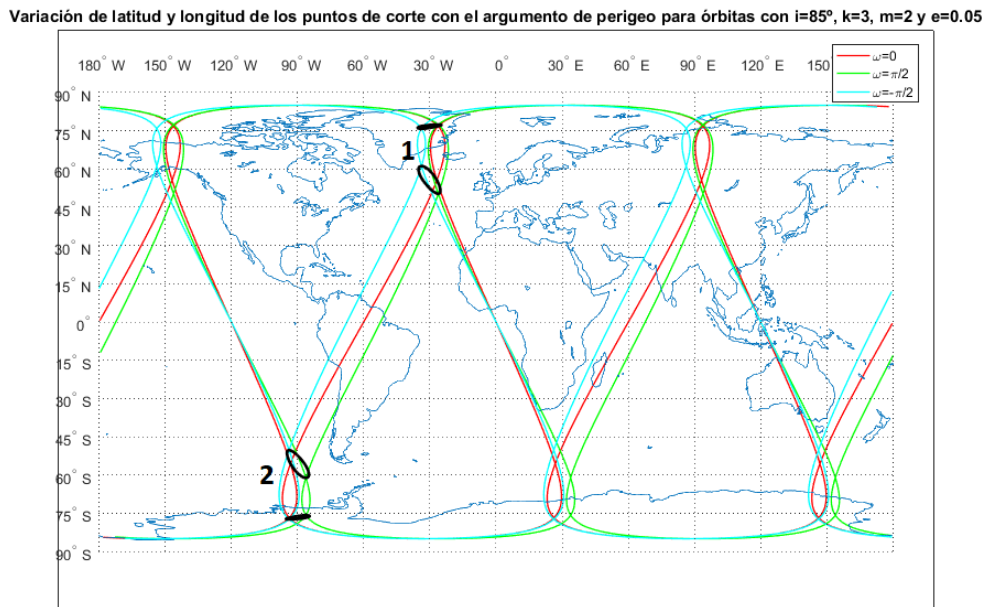


Imagen 4.26 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$.

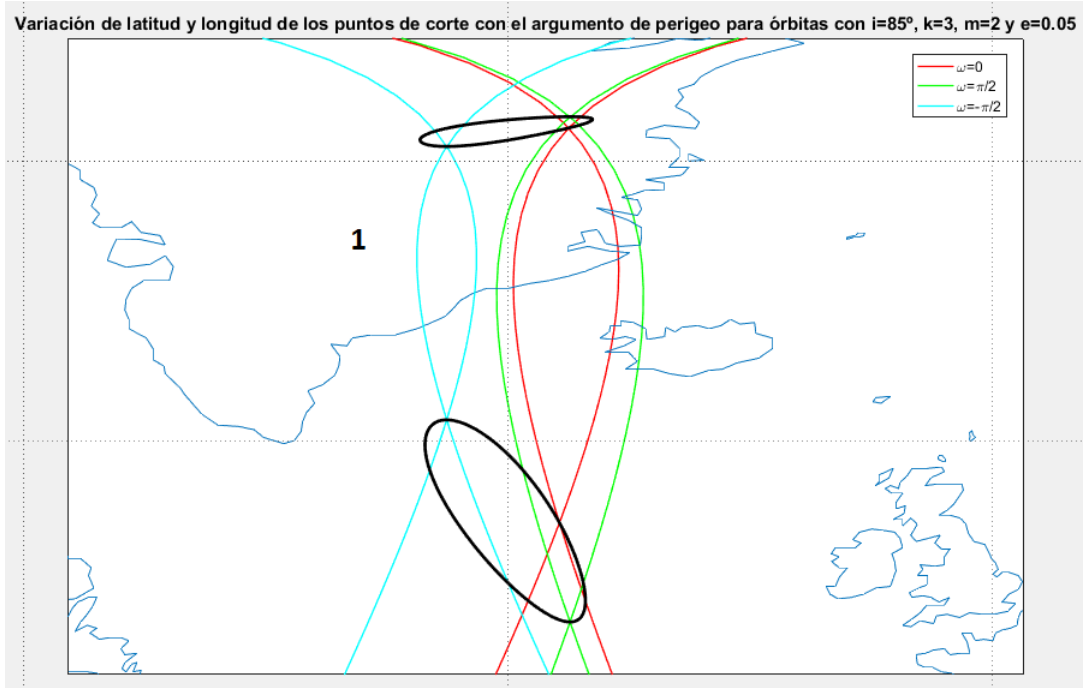


Imagen 4.27 Zoom 1 de la gráfica 4.26.

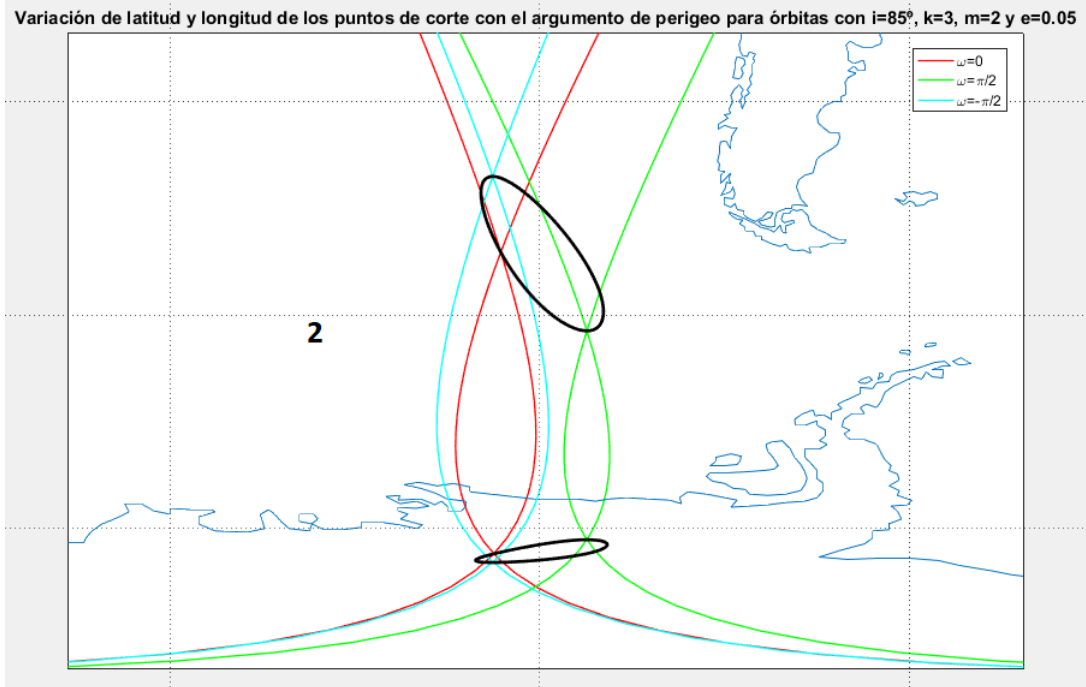


Imagen 4.28 Zoom 2 de la gráfica 4.26.

Variación de latitud y longitud de los puntos de corte con el argumento de perigeo para órbitas con $i=87^\circ$, $k=6$, $m=5$ y $e=0.05$

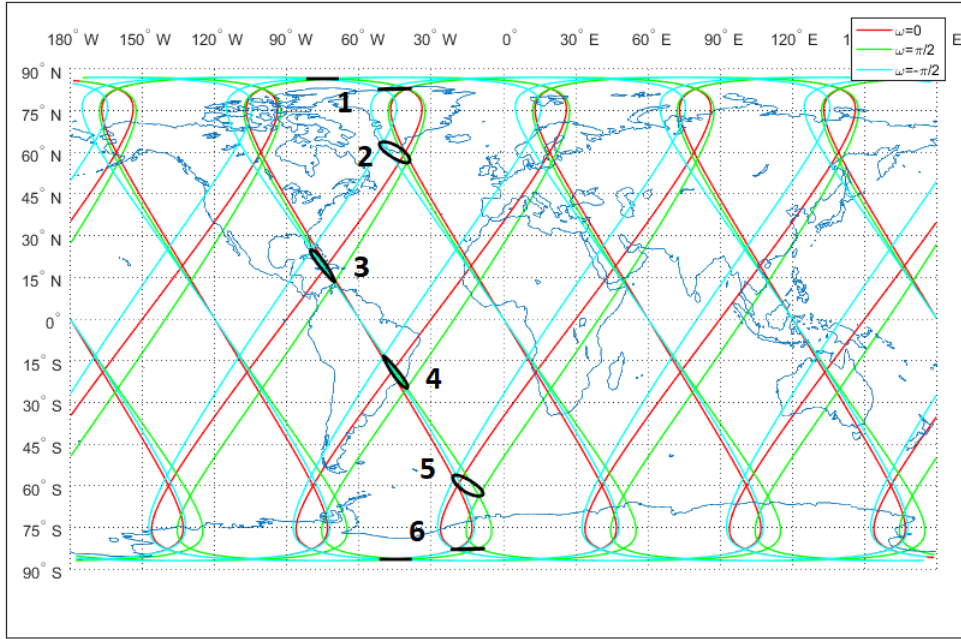


Imagen 4.29 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$.

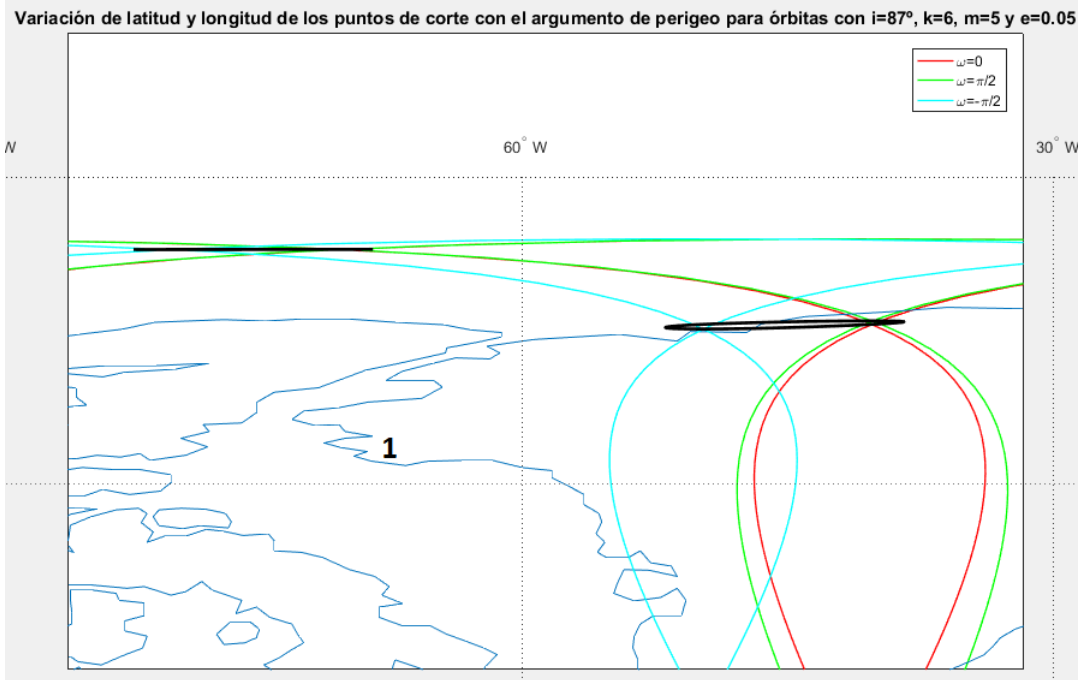


Imagen 4.30 Zoom 1 de la gráfica 4.29.

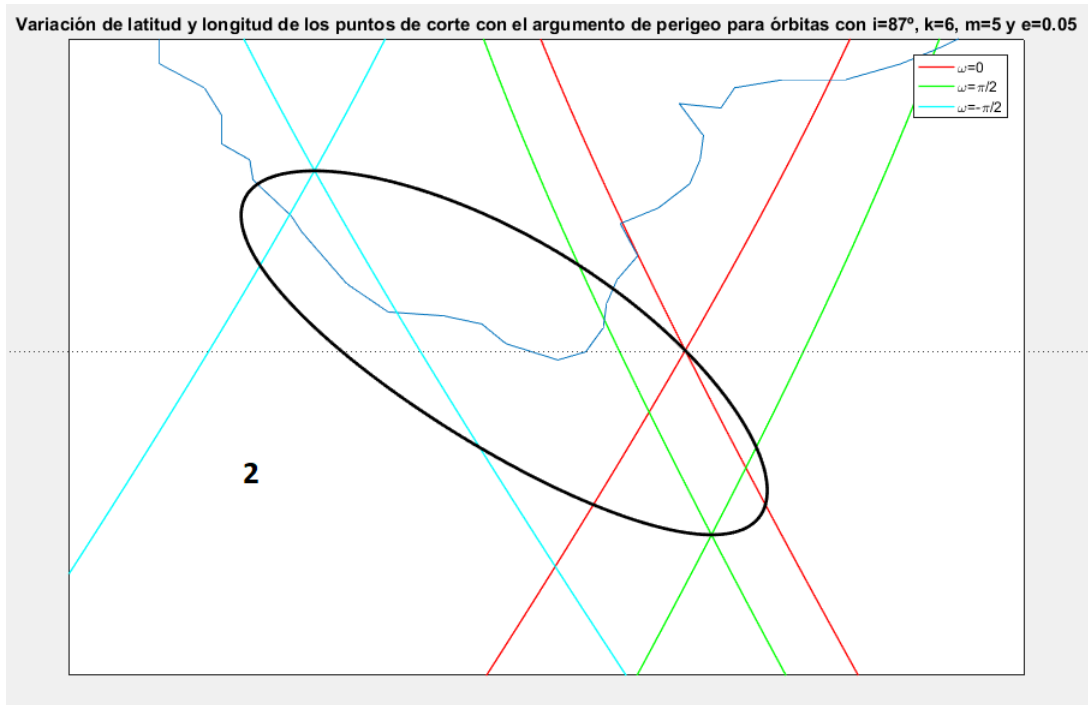


Imagen 4.31 Zoom 2 de la gráfica 4.29.

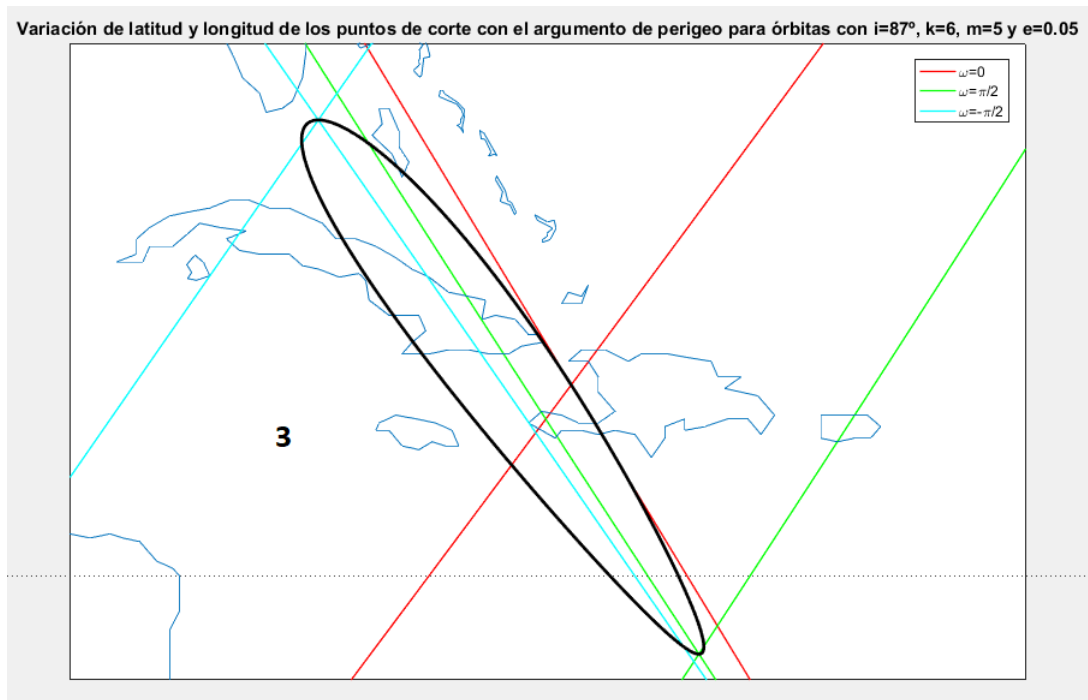


Imagen 4.32 Zoom 3 de la gráfica 4.29.

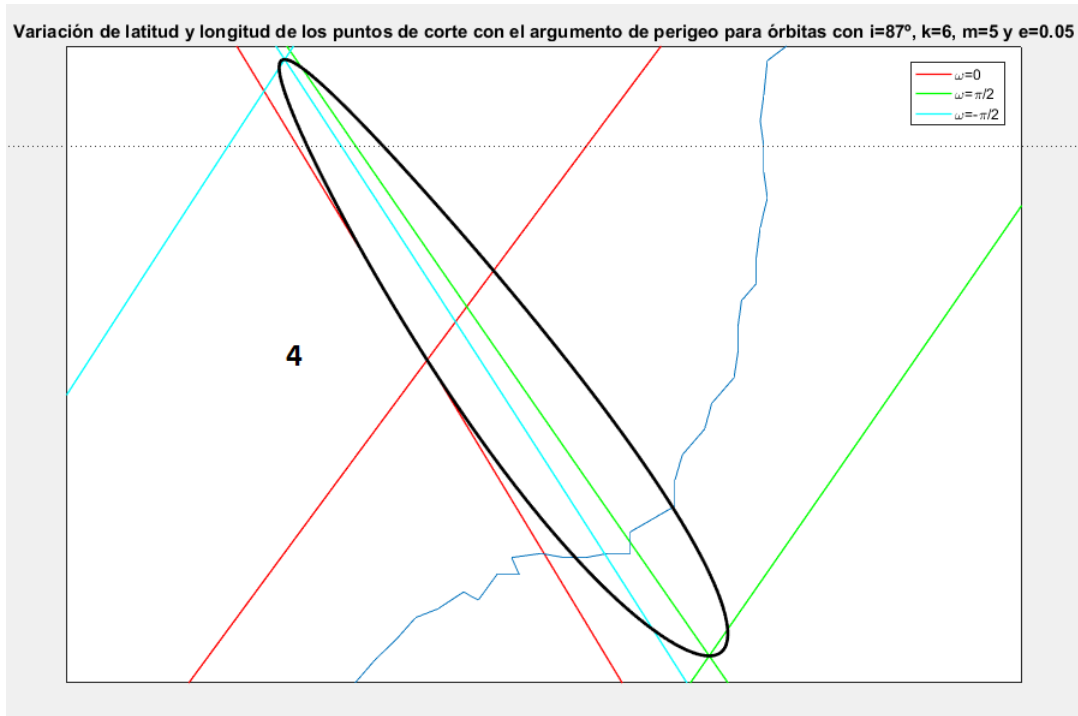


Imagen 4.33 Zoom 4 de la gráfica 4.29.

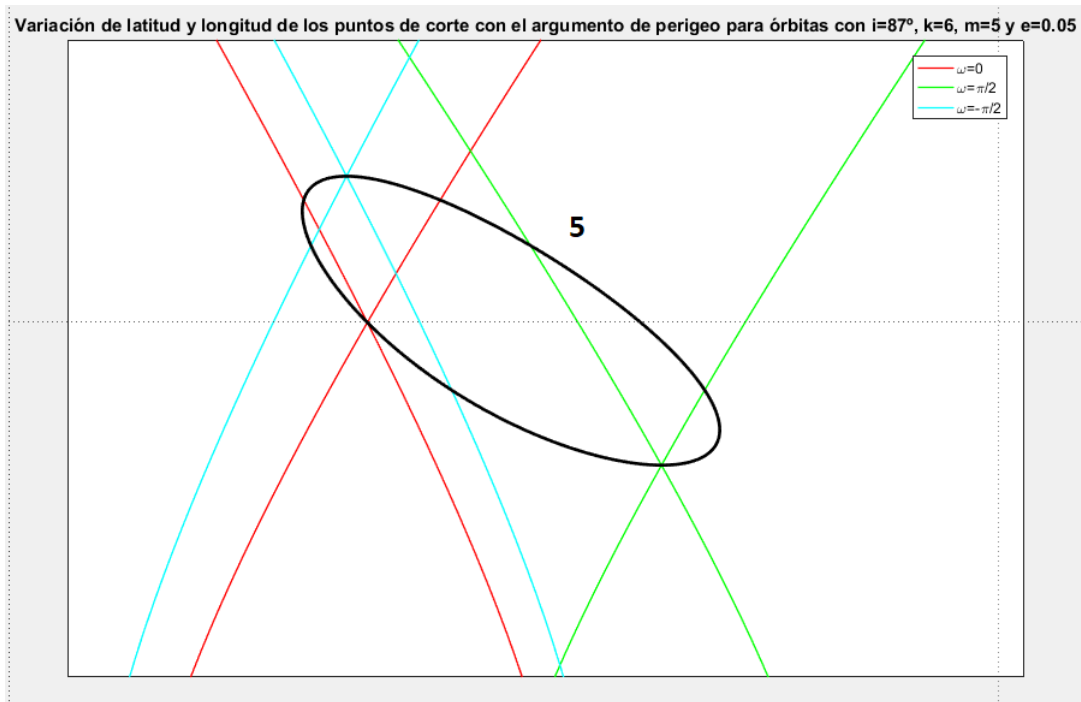


Imagen 4.34 Zoom 5 de la gráfica 4.29.

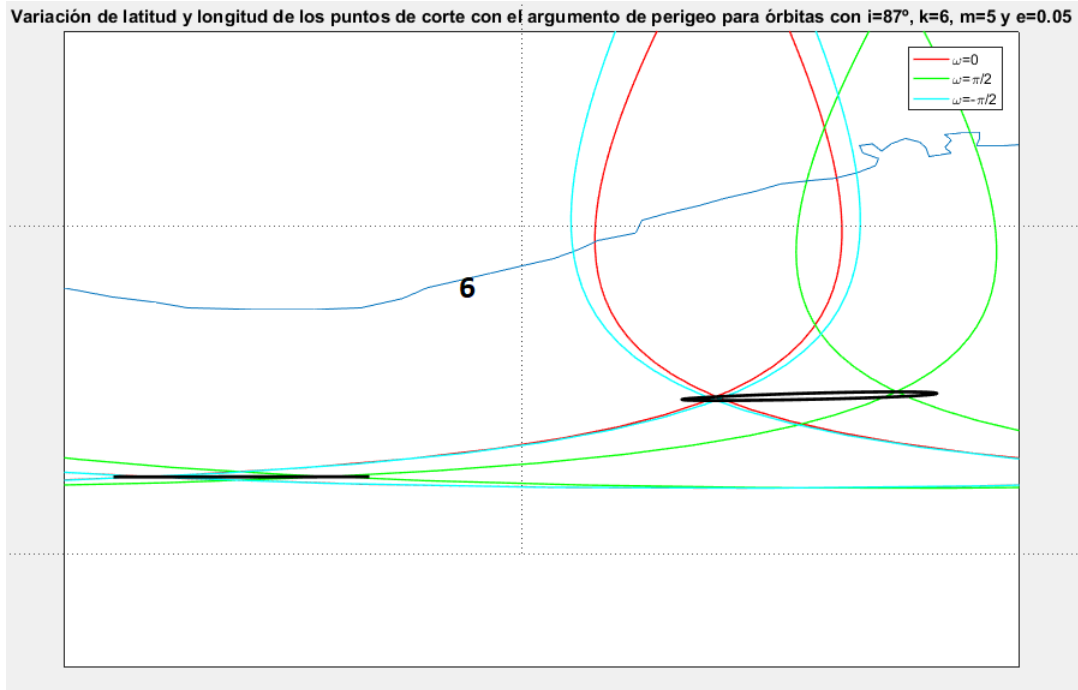


Imagen 4.35 Zoom 6 de la gráfica 4.29.

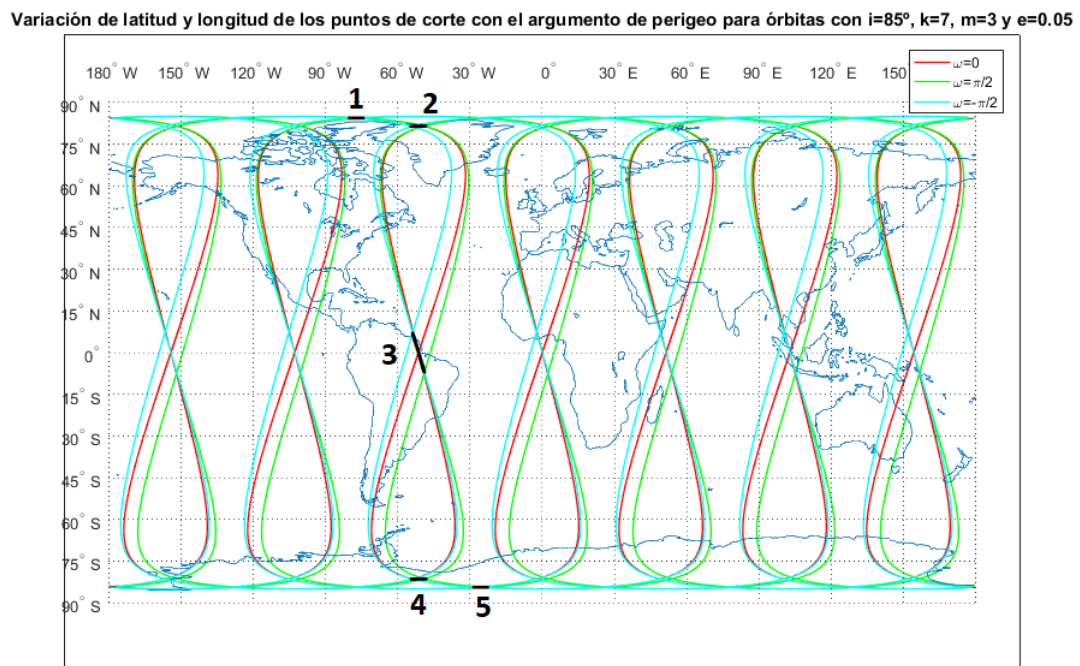


Imagen 4.36 Evolución de la posición de los puntos de cruce para órbitas con $k=7$, $m=3$, $i=85^\circ$ y $e=0.05$.

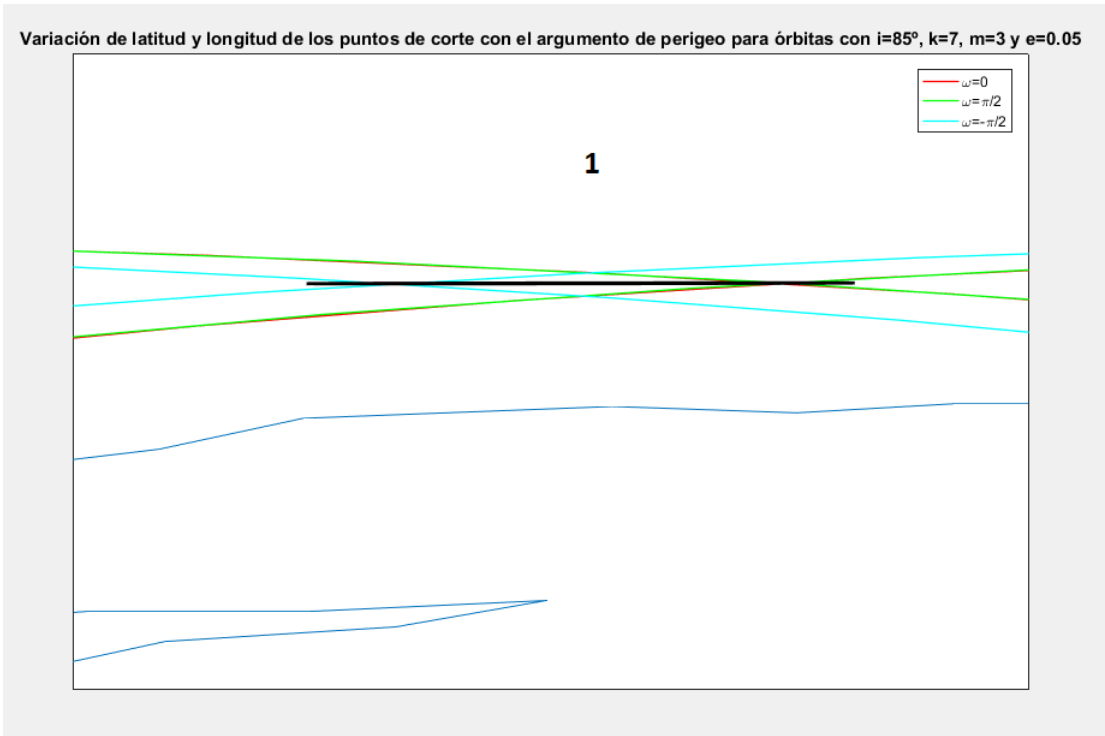


Imagen 4.37 Zoom 1 de la gráfica 4.36.

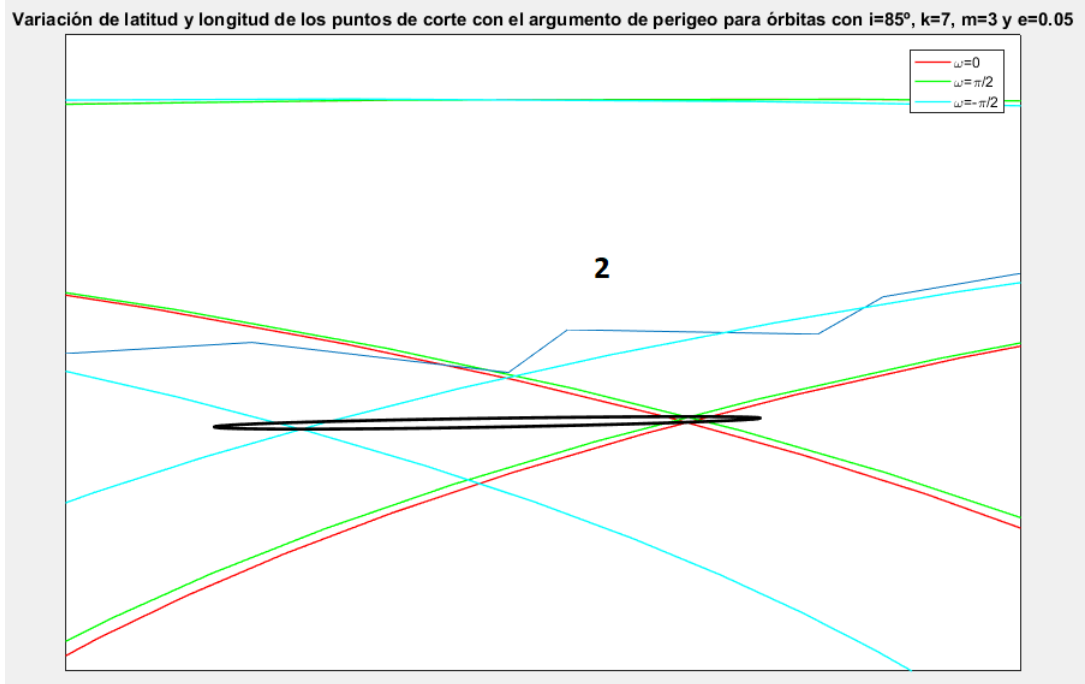


Imagen 4.38 Zoom 2 de la gráfica 4.36.



Imagen 4.39 Zoom 3 de la gráfica 4.36.

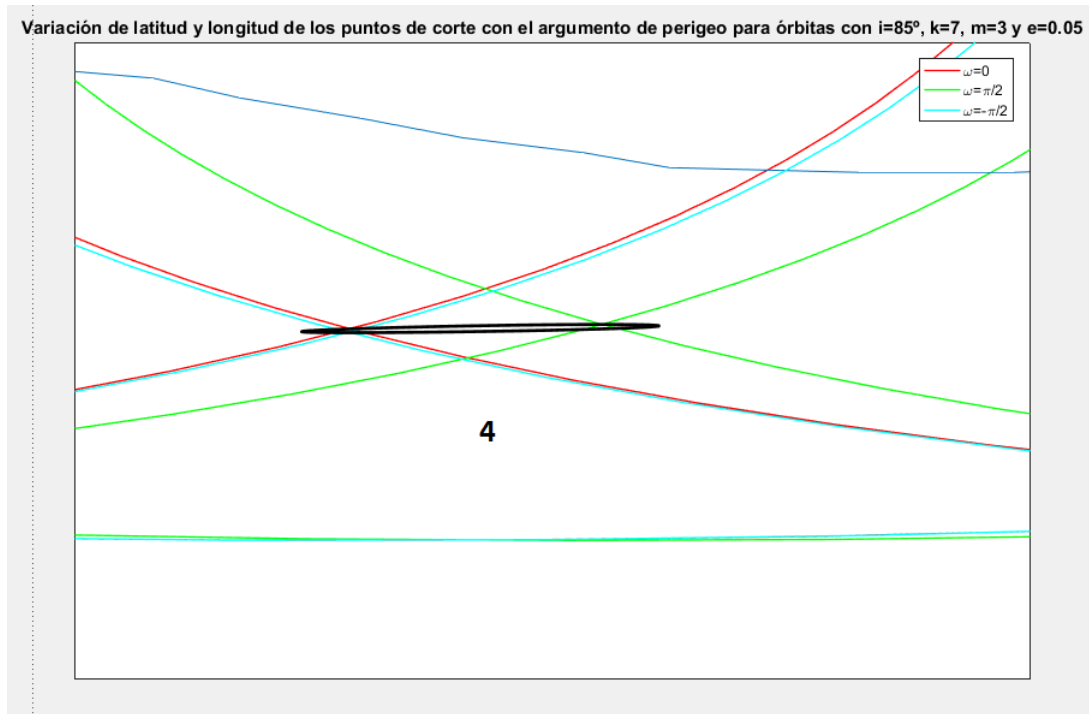


Imagen 4.40 Zoom 4 de la gráfica 4.36.

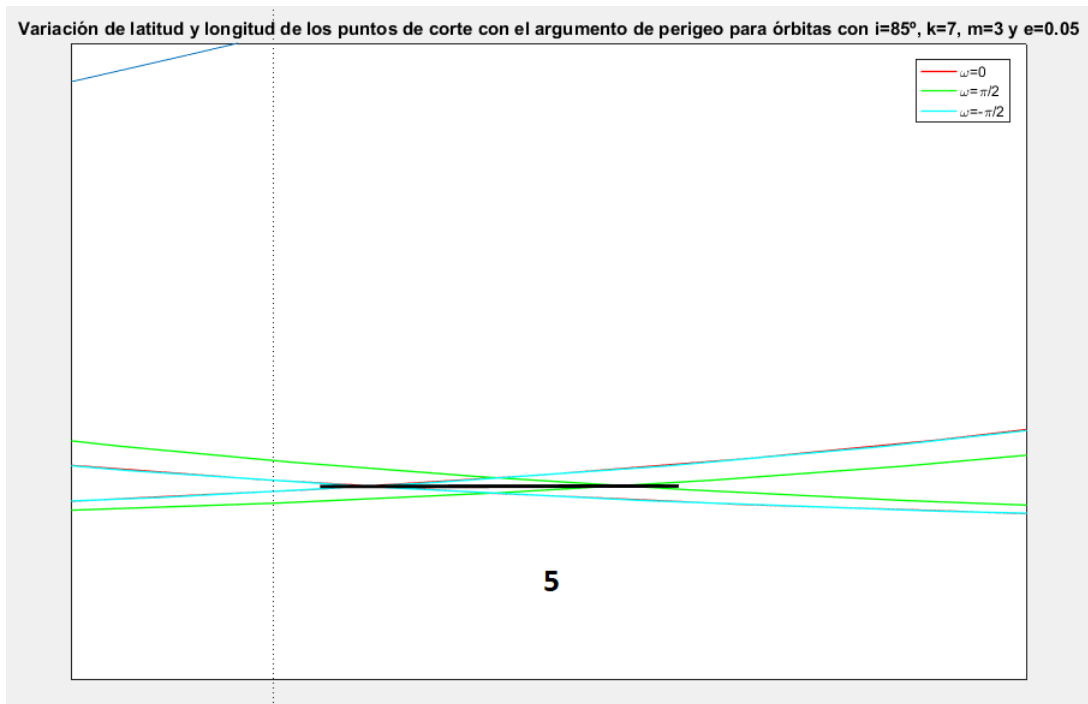


Imagen 4.41 Zoom 5 de la gráfica 4.36.

Por último, se incluyen a continuación una serie de conclusiones que pueden extraerse de las gráficas presentadas anteriormente:

- Debido a que los extremos del intervalo $\omega = -\pi$ y $\omega = \pi$ son en realidad el mismo punto, la variación del argumento del perigeo entre estos dos valores da lugar a curvas de variación de posición cerradas, como puede observarse en todas las gráficas.
- Al igual que ocurría con la variación respecto a la excentricidad, cuanto mayor es la latitud inicial del punto de corte a estudiar, menor será la variación de la misma. Esto, llevado al extremo, puede dar lugar a curvas que parezcan completamente planas, en lugar de las curvas cerradas que se ven en puntos más cercanos al Ecuador. Un ejemplo de este supuesto puede apreciarse en la imagen 4.41.

4.4.3 Variación con la excentricidad y el argumento del perigeo conjuntamente

Para terminar de ilustrar la variación de la posición de los puntos de corte con la excentricidad y el argumento del perigeo de la órbita, se incluyen a continuación varios casos en los que se analiza la variación de uno de los puntos de corte al modificar conjuntamente ambos elementos orbitales:

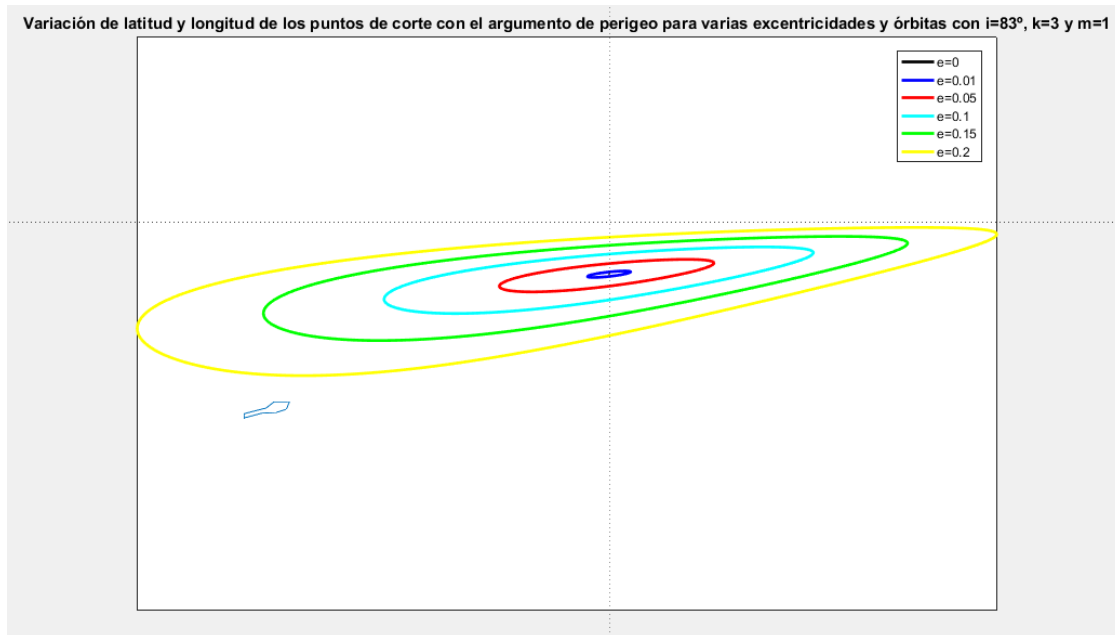


Imagen 4.42 Variación de la posición del punto de corte situado en el hemisferio Norte con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=83^\circ$ $k=3$ y $m=1$.

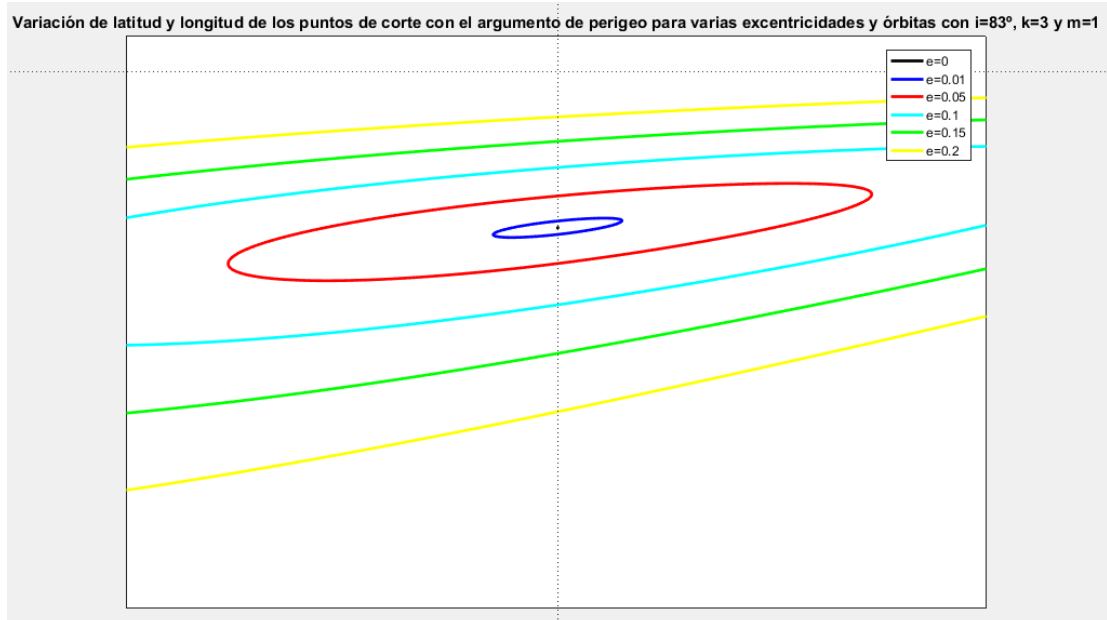


Imagen 4.43 Zoom de la gráfica 4.42.

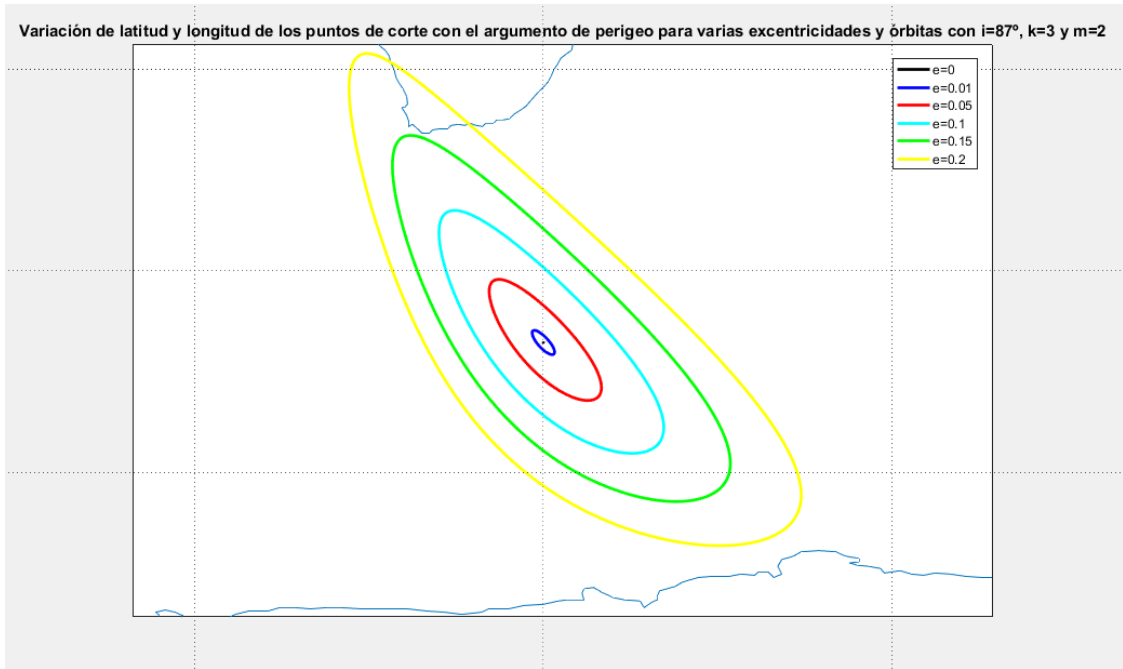


Imagen 4.44 Variación de la posición de uno de los puntos de corte situados en el hemisferio Sur con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=87^\circ$ $k=3$ y $m=2$.

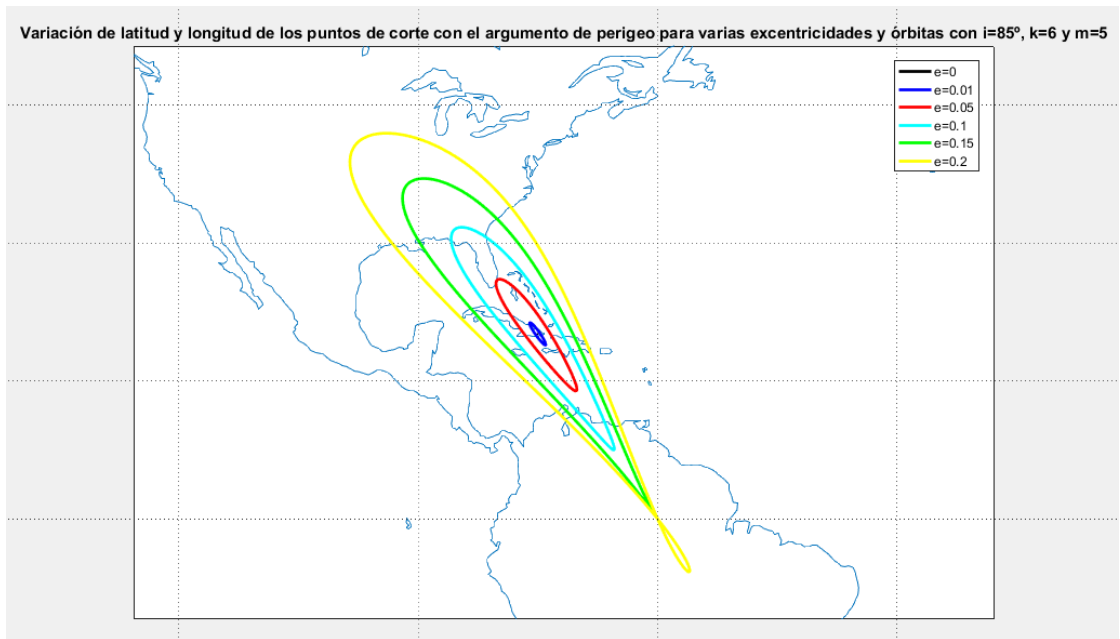


Imagen 4.45 Variación de la posición de uno de los puntos de corte situados en el hemisferio Norte con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=85^\circ$ $k=3$ y $m=1$.

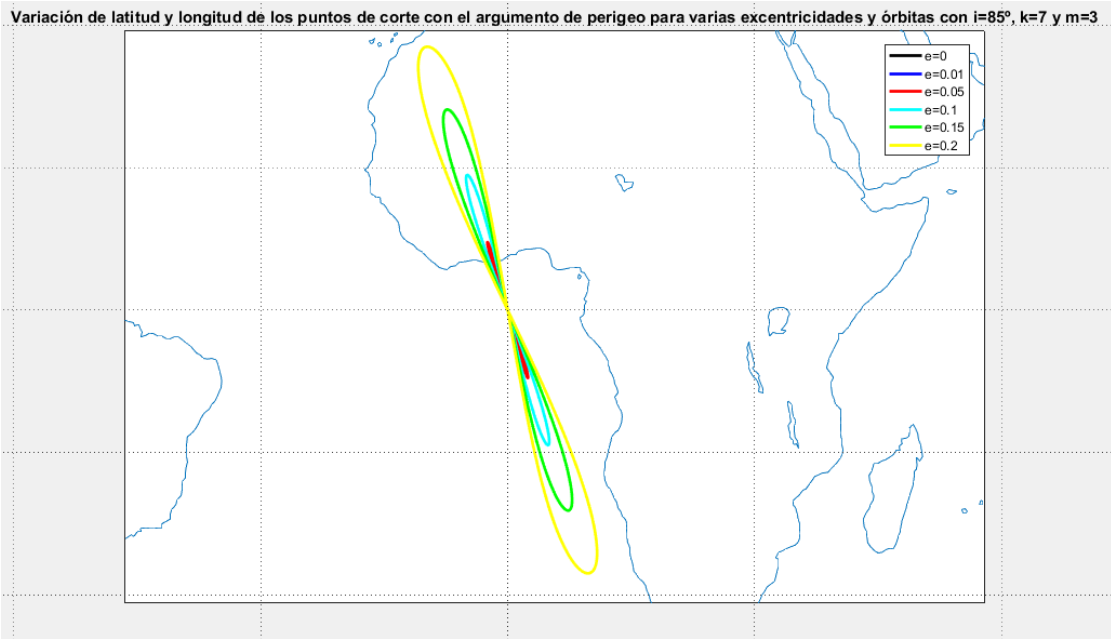


Imagen 4.46 Variación de la posición del punto de corte situado sobre el Ecuador con la excentricidad y el argumento del perigeo para órbitas con $i=85^\circ$ $k=7$ y $m=3$.

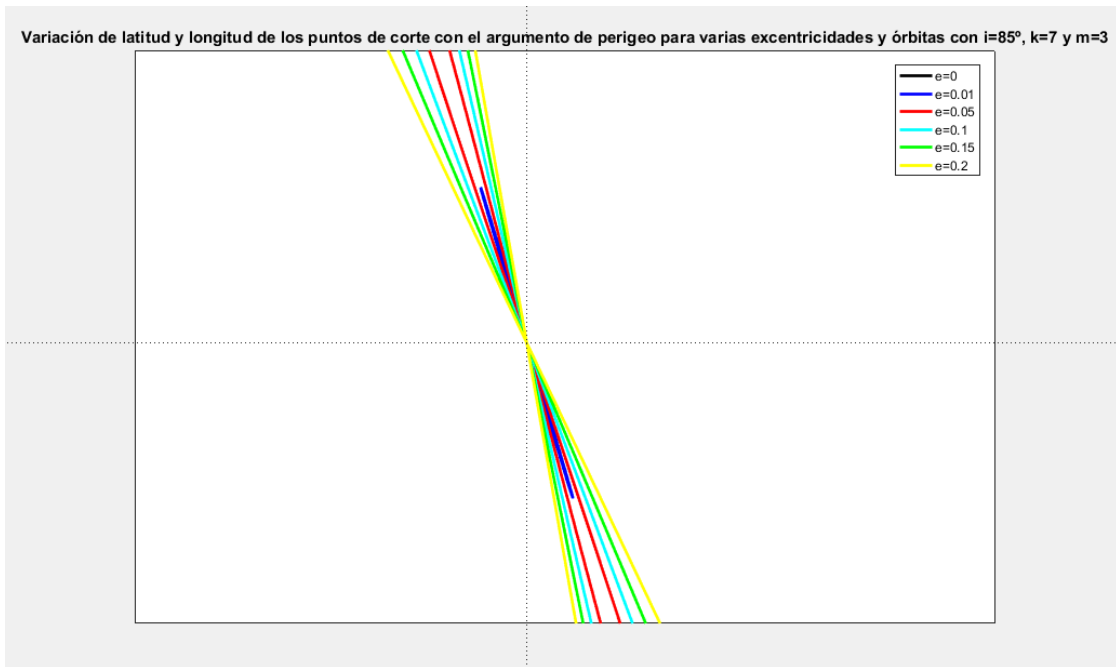


Imagen 4.47 Zoom de la gráfica 4.46.

Observando las gráficas obtenidas mediante la variación conjunta de ambos elementos orbitales se llega a las siguientes conclusiones:

- Las curvas de variación con el argumento del perigeo ω son todas cerradas y no se cortan entre sí al variar la excentricidad, excepto en el caso de que la latitud del punto llegue a ser 0. En este caso, la curva de variación con el argumento del perigeo se corta consigo misma y con el resto de curvas en $\phi = 0^\circ$.
- La variación de posición de los puntos con el argumento del perigeo ω aumenta al aumentar la excentricidad de la órbita.
- La propiedad observada para la variación por separado en la que, cuanto mayor fuese la latitud inicial del punto de corte, menor sería la variación de esta se conserva al variar ambos elementos orbitales a la vez.

4.4.4 Inclinaciones críticas

Para continuar con el análisis de sensibilidad de los puntos de corte con respecto a las variaciones de los elementos orbitales, es necesario estudiar qué influencia tiene la inclinación en los mismos. Para ello se va a recordar la definición realizada en el capítulo 3 de un concepto clave para el estudio: **las inclinaciones críticas**. Se denominan críticas a aquellas inclinaciones que generan trazas que son tangentes en ciertos puntos. Esto implica que para inclinaciones ligeramente mayores o menores, se crearán o desaparecerán ciertos puntos de corte, y por tanto, son esenciales para la determinación del número de puntos de corte. Se incluyen a continuación un par de trazas ejemplo en las que se produce la tangencia, de forma que las inclinaciones indicadas serán críticas para esa combinación de elementos orbitales:

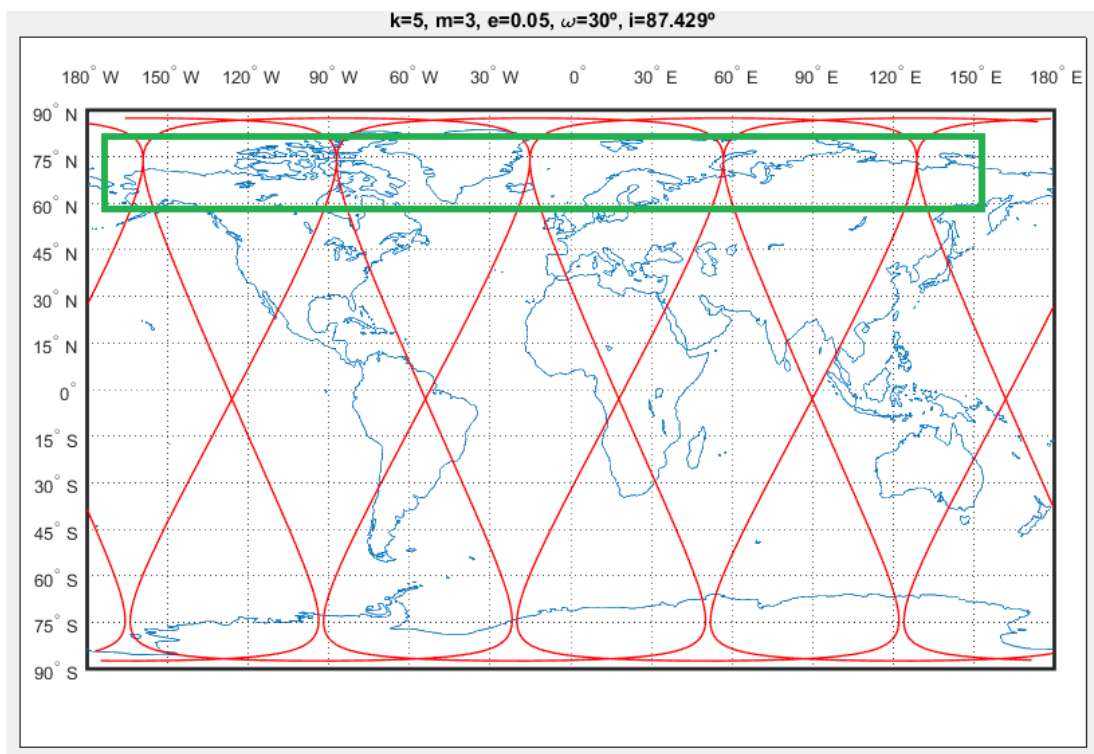


Imagen 4.48 Ejemplo de órbita con traza repetida cada 5 revoluciones ($k=5$) y cada tres días ($m=3$), de excentricidad $e=0.05$, argumento del perigeo $\omega = 30^\circ$ e inclinación crítica..

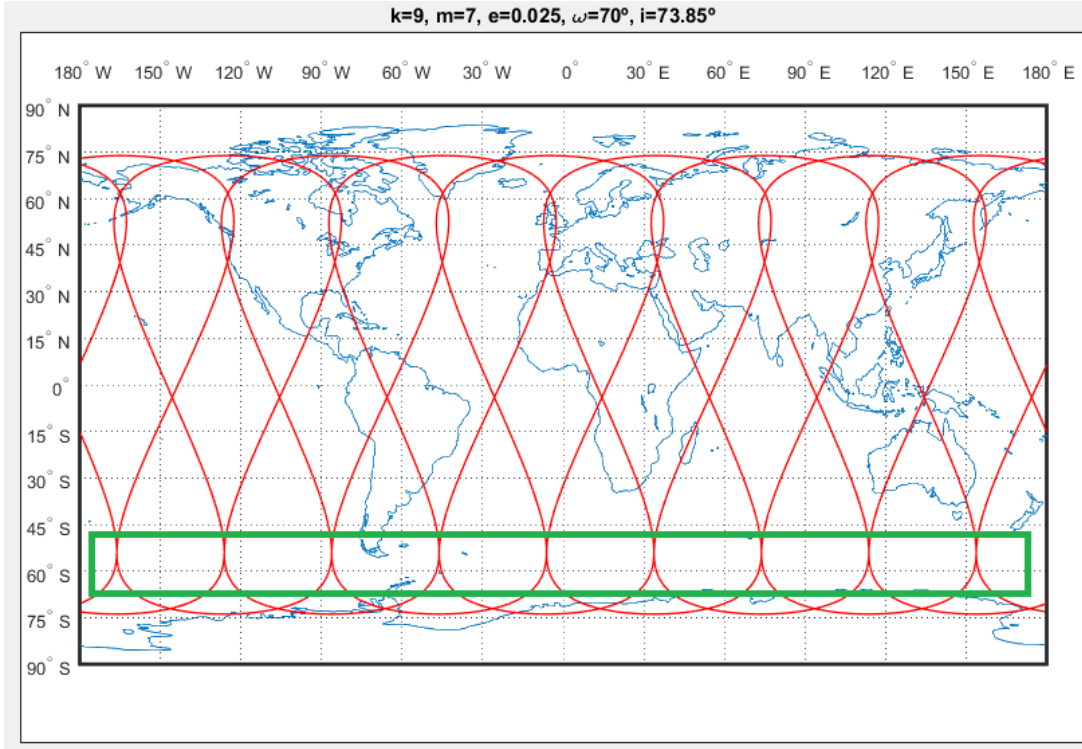


Imagen 4.49 Ejemplo de órbita con traza repetida cada 9 revoluciones ($k=9$) y cada 7 días ($m=7$), de excentricidad $e=0.025$, argumento del perigeo $\omega = 70^\circ$ e inclinación crítica..

Los puntos de tangencia vienen marcados mediante un recuadro verde en cada una de las trazas. Cabe destacar que el número de inclinaciones críticas para unos elementos orbitales dados no siempre es uno, es decir, que puede existir más de una. En la primera parte de este capítulo se van a obtener las ecuaciones que permiten el cálculo de estas inclinaciones mediante la ecuación maestra aproximada.

La condición de tangencia entre las trazas puede traducirse en una condición de tangencia de la siguiente función representada frente a la variable u_2 con el eje horizontal:

$$F = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} + 2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(\pi - 2\omega) \sin(2u_2 - \pi)\right)\right) - \tan(u_2) \cos(i) \tag{4.52}$$

Llamando de nuevo f al argumento de la primera tangente, la condición de tangencia entre las trazas se puede expresar como sigue:

$$\begin{cases} \tan(f) - \tan(u_2) \cos(i) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} (1 + \tan^2(f)) - \cos(i) (1 + \tan^2(u_2)) = 0 \end{cases} \tag{4.53}$$

El sistema de ecuaciones (4.53) debe resolverse en las variables u_2 e i , de forma que sus soluciones serán los argumentos de latitud para los cuales se dan la tangencia en la vuelta r y la inclinación crítica i^* para la cual se da la tangencia. Para dejar completamente determinado el sistema de ecuaciones (4.53) es necesario calcular $\frac{\partial f}{\partial u_2}$, lo cual ya se ha hecho anteriormente, y cuyo resultado es:

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -\frac{m}{k} \left(2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cos\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) - 1 - \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \cos(2u_2 - \pi) \right) \tag{4.54}$$

Para poder trabajar de una forma más sencilla, se despeja $\cos(i)$ de la segunda ecuación del sistema, para sustituirla en la primera, de forma que el sistema quedaría:

$$\begin{cases} \tan(f) - \sin(u_2) \cos(u_2) \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{1}{\cos^2(f)} = 0 \\ \cos(i) = \frac{\partial f \cos^2(u_2)}{\partial u_2 \cos^2(f)} \end{cases} \quad (4.55)$$

A la hora de despejar se ha tenido en cuenta que $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$. Para resolver el sistema, bastaría con obtener las soluciones u_2 de la primera ecuación, y sustituirlas en la segunda para obtener las inclinaciones críticas.

Es necesario realizar una serie de aclaraciones:

-Debido a las posibles discontinuidades que podrían aparecer dentro del dominio para la ecuación en u_2 , es necesario operar con la misma para eliminar el denominador. Al hacer esto, es posible que se estén introduciendo nuevas soluciones, con lo que cuando se obtengan las soluciones u_2 para la ecuación (4.56), será necesario comprobar que no coinciden con ninguna de las soluciones de $\cos(f) = 0$. Eliminado el denominador, la ecuación a partir de la cual se obtienen los argumentos de latitud para los cuales se producen las tangencias es la siguiente:

$$\cos(f) \sin(f) - \sin(u_2) \cos(u_2) \frac{\partial f}{\partial u_2} \quad (4.56)$$

-Cuando se obtengan las soluciones de la ecuación (4.56) habrá que calcular el coseno de la inclinación crítica asociada, y tras esto la propia inclinación. La cuestión a aclarar es que, a través de la segunda ecuación del sistema (4.55), es posible obtener valores mayores que 1, de forma que será necesario descartarlos, al no tener asociada una inclinación real que pueda tener como coseno ese valor.

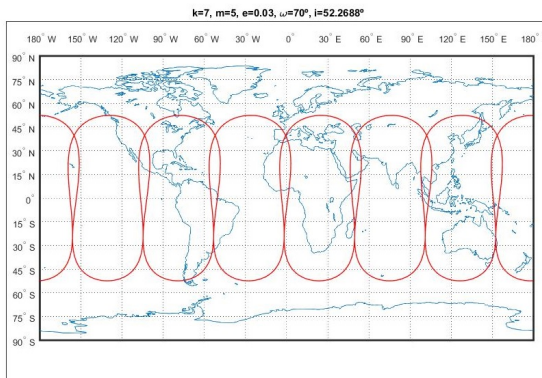
Para resolver la ecuación (4.56) se vuelve a hacer uso de la aproximación polinómica que ofrece el paquete **chebfun** y del comando **roots** para obtener todas las soluciones para cada una de las r . Tras esto se calculan todos los valores de $\cos(i)$ y se descartan aquellos cuyo valor absoluto sea mayor que 1, para finalmente obtener todas las inclinaciones críticas posibles. Debido a que para una misma inclinación crítica se producen varias tangencias (lo cual puede verse en ambos ejemplos mostrados anteriormente), varias soluciones de (4.56) llevarán asociada la misma inclinación crítica, con lo que, para que el programa sea eficiente, será necesario evitar que se repitan.

Para ilustrar el método se incluyen a continuación dos ejemplos, uno de cada tipo de caso y sus correspondientes trazas:

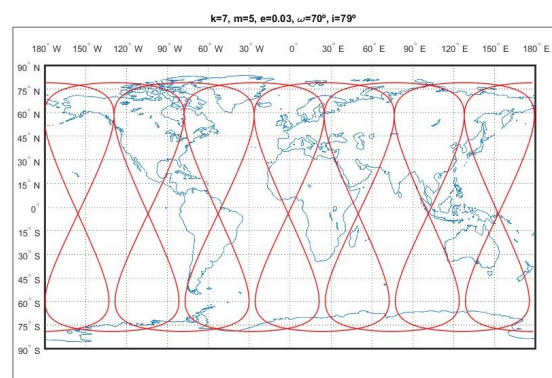
Caso impar: $k=7, m=5, \omega = 70^\circ, e=0.03$

Tabla 4.6 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=5, e=0.03, \omega = 70^\circ$.

$i_1^* = 52.3688^\circ$	$i_2^* = 79.0059^\circ$	$i_3^* = 80.3424^\circ$	$i_4^* = 88.9167^\circ$	$i_5^* = 89.0336^\circ$
-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

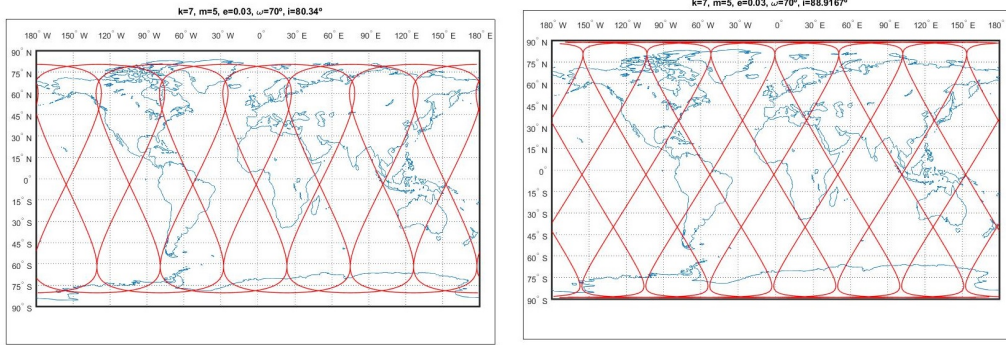


(a) Primera inclinación crítica.



(b) Segunda inclinación crítica.

Imagen 4.50 Primer par de inclinaciones críticas.



(a) Tercera inclinación crítica.

(b) Cuarta inclinación crítica.

Imagen 4.51 Segundo par de inclinaciones críticas.

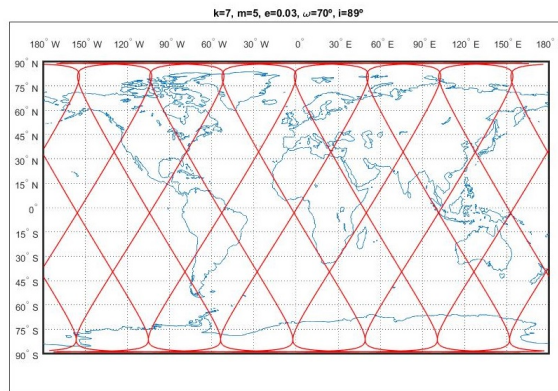


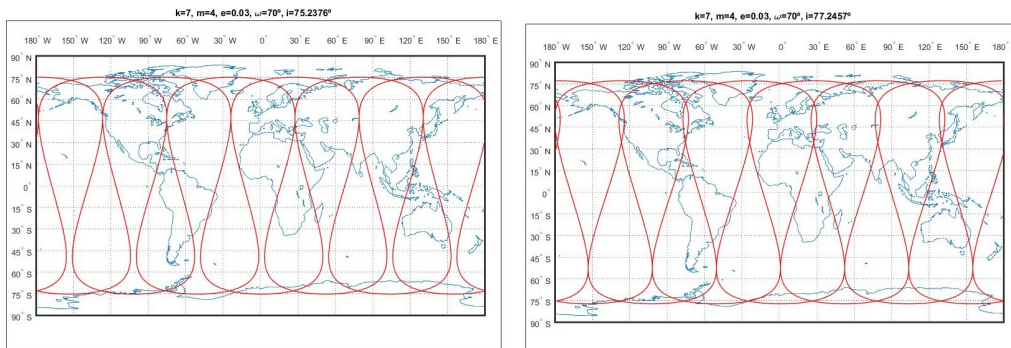
Imagen 4.52 Quinta inclinación crítica.

Si se observan todas las trazas, puede verse cómo van creándose puntos de corte al pasar de una inclinación crítica a la siguiente, además de las propias tangencias asociadas a la inclinación crítica correspondiente.

Caso par: $k=7, m=4, \omega = 70^\circ, e=0.03$

Tabla 4.7 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=4, e=0.03, \omega = 70^\circ$.

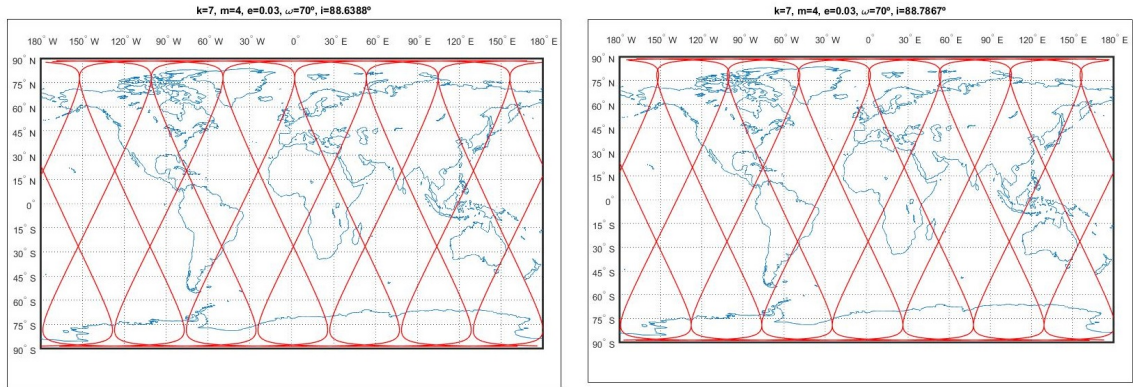
$i_1^* = 75.2376^\circ$	$i_2^* = 77.2457^\circ$	$i_3^* = 88.6388^\circ$	$i_4^* = 88.7867^\circ$
-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------



(a) Primera inclinación crítica.

(b) Segunda inclinación crítica.

Imagen 4.53 Primer par de inclinaciones críticas.



(a) Tercera inclinación crítica.

(b) Cuarta inclinación crítica.

Imagen 4.54 Segundo par de inclinaciones críticas.

Caso par: $k=8, m=3, \omega = -20^\circ, e=0.05$

Tabla 4.8 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8, m=3, e=0.05, \omega = -20^\circ$.

$i_1^* = 83.0339^\circ$	$i_2^* = 83.5845^\circ$	$i_3^* = 90^\circ$
-------------------------	-------------------------	--------------------

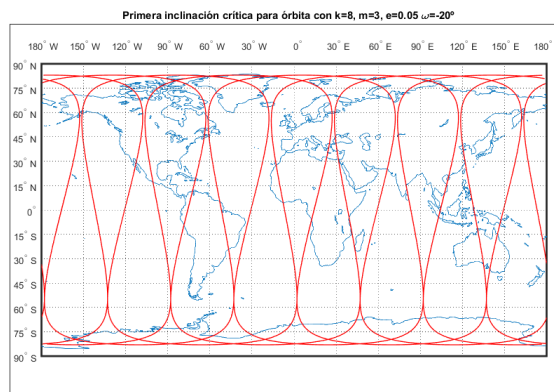
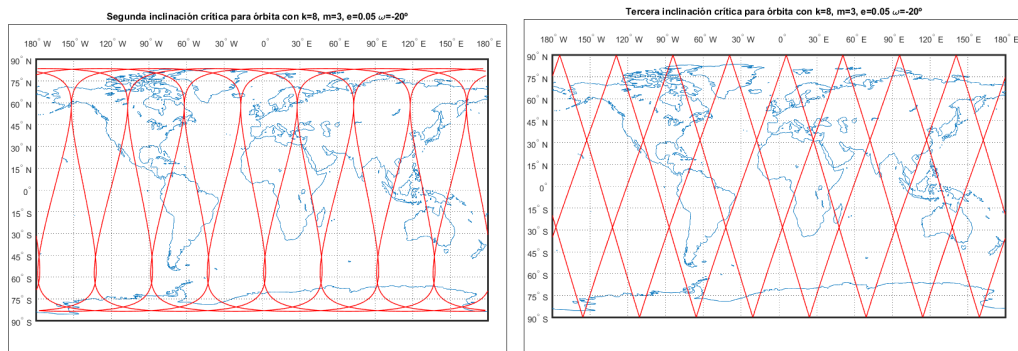


Imagen 4.55 Primera inclinación crítica.



(a) Segunda inclinación crítica.

(b) Tercera inclinación crítica.

Imagen 4.56 Último par de inclinaciones críticas.

Para comparar estos resultados con los que se obtienen en el caso circular, se incluyen a continuación las inclinaciones críticas para los mismos valores de k y m , pero sin excentricidad:

Caso impar: $k=7, m=5$

Tabla 4.9 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=5$ y $e=0$.

$i_1^* = 44.4153^\circ$	$i_2^* = 79.7077^\circ$	$i_3^* = 88.9774^\circ$
-------------------------	-------------------------	-------------------------

Caso par: $k=7, m=4$

Tabla 4.10 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=4$ y $e=0$.

$i_1^* = 76.3061^\circ$	$i_2^* = 88.7157^\circ$
-------------------------	-------------------------

Caso par: $k=8, m=3$

Tabla 4.11 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8, m=3$ y $e=0$.

$i_1^* = 83.3402^\circ$	$i_2^* = 90^\circ$
-------------------------	--------------------

La primera característica que salta a la vista es que el número de inclinaciones críticas es menor. De hecho, se cumple para órbitas del caso impar ($m - k = 2l$) o para órbitas del caso par con m impar que, si j es el número de inclinaciones críticas de la órbita circular, para valores de excentricidad pequeños se obtendrán $2j - 1$ inclinaciones críticas. Por otra parte, si el problema es del tipo par (k o m par) y j el número de inclinaciones críticas para la órbita circular, al incluir la excentricidad se obtendrán $2j$ inclinaciones críticas para la órbita excéntrica. Tanto el aumento como la discrepancia entre las inclinaciones que se duplican en ambos casos se debe a la ruptura de la simetría N-S de la traza al incluir la excentricidad y un argumento de perigeo distinto de 0° y 180° (es decir, que para aquellas órbitas con excentricidad pero con $\omega = 0^\circ$ o $\omega = 180^\circ$, el número de inclinaciones críticas seguirá siendo j). Pero, ¿por qué el número de inclinaciones que se duplican es distinto? La respuesta está en la disposición de los puntos de corte: para las órbitas de los casos par, cada punto de corte del hemisferio norte lleva asociado un punto de corte en el hemisferio sur, de forma que si es posible conseguir una tangencia en el hemisferio norte, también lo será en el sur. En cambio, para las órbitas del caso impar, existen puntos cerca del ecuador, los cuales no tienen ningún punto asociado en el otro hemisferio. Debido a esto, aunque se rompa la simetría, ese punto tiene asociada una única inclinación crítica, la cual no se duplica.

Esto puede comprobarse en las siguientes gráficas, en las que puede verse la evolución de las inclinaciones críticas con respecto a la excentricidad de la órbita.

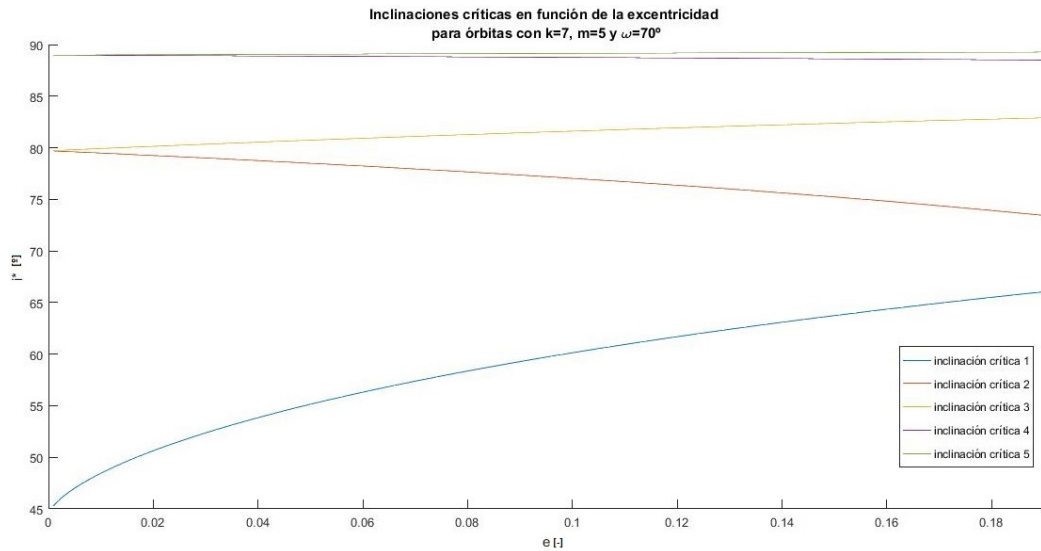


Imagen 4.57 Variación con la excentricidad de las inclinaciones críticas para órbitas del caso impar.

En esta gráfica puede verse cómo las dos inclinaciones mayores se separan en 4 distintas al incluir la excentricidad, y se diferencian cada vez más cuanto mayor es la excentricidad. Para valores mayores de excentricidad pueden incluso generarse nuevas inclinaciones críticas, aunque no pertenece al rango de estudio de este documento.

Si ahora se representan las inclinaciones críticas en función de la excentricidad para una serie de órbitas del caso par con m impar, se obtiene la siguiente gráfica:

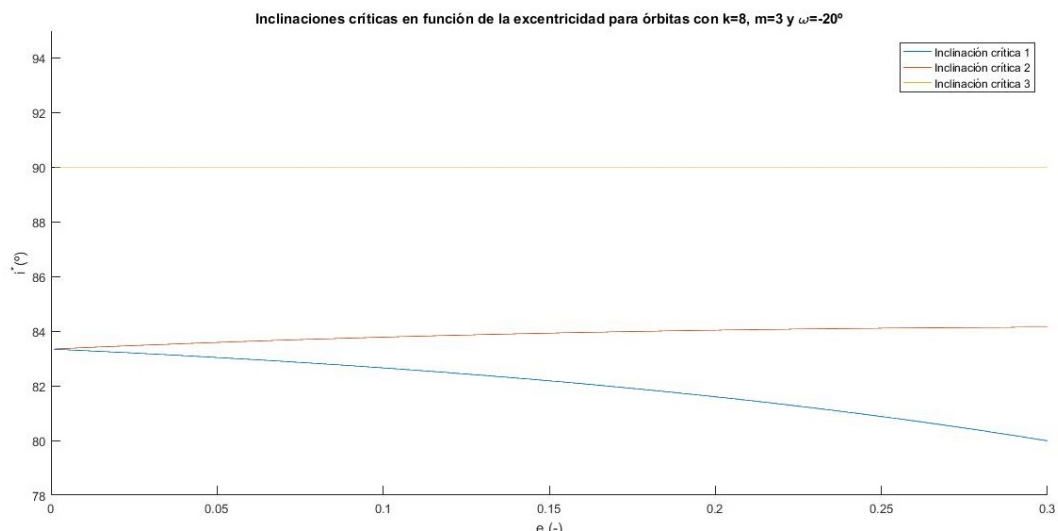


Imagen 4.58 Variación con la excentricidad de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m impar.

En este caso, se observa como, al igual que para las órbitas del caso impar, se duplican todas las inclinaciones críticas excepto una. Para el caso de las órbitas del caso par con m impar esta órbita que no se duplica es la asociada a las órbitas polares, que también estaba presente en el caso circular, y como puede verse en la gráfica 4.58 se conserva al añadir la excentricidad.

Se estudia ahora el caso de órbitas del caso par con m par:

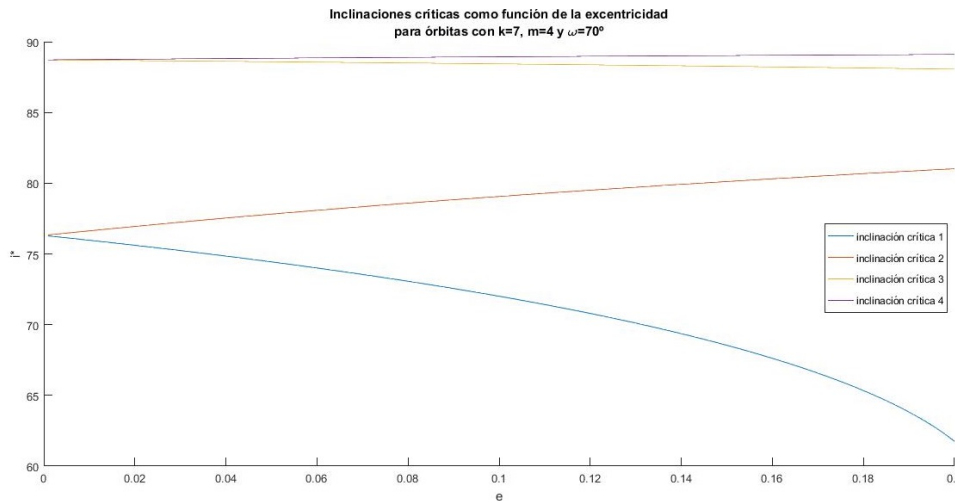


Imagen 4.59 Variación con la excentricidad de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m par.

Como se comentó anteriormente, para las órbitas correspondientes al caso par con m par, todas las inclinaciones críticas se duplican debido a la ruptura de la simetría, tal y como puede observarse en la gráfica. Una vez estudiada la dependencia de las inclinaciones críticas con la excentricidad de la órbita, es necesario plantearse la siguiente cuestión: ¿Únicamente los argumentos del perigeo $\omega = 0^\circ$ y $\omega = 180^\circ$ son los que evitan que se dupliquen las inclinaciones críticas? ¿O algún otro factor además de la simetría N-S influye en la cantidad de las mismas? Para responder a esta pregunta se realiza un estudio similar al de la excentricidad, manteniendo constantes todos los elementos orbitales a excepción del argumento del perigeo para calcular las inclinaciones críticas.

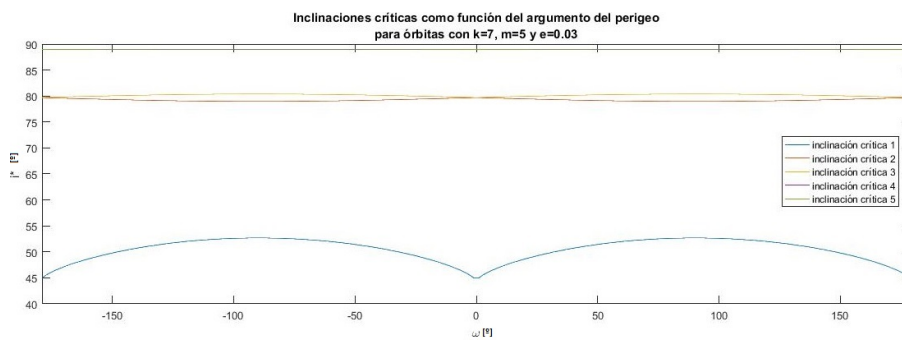


Imagen 4.60 Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso impar.

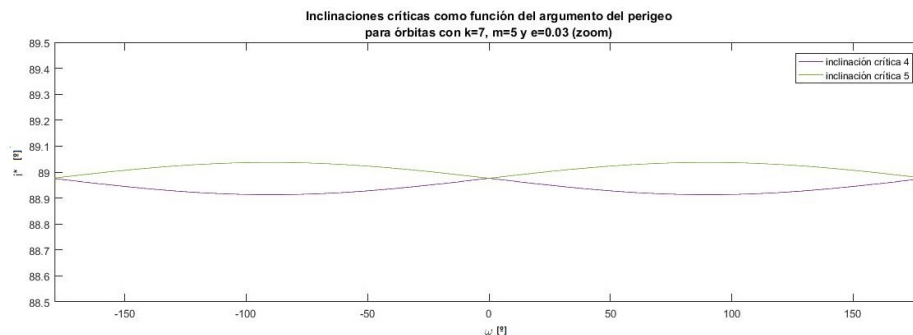


Imagen 4.61 Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso impar (zoom).

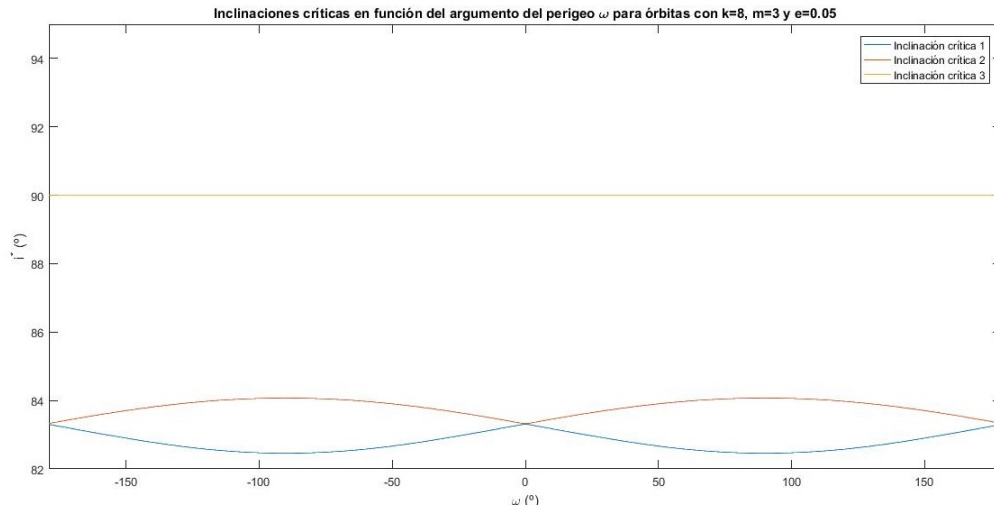


Imagen 4.62 Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m impar.

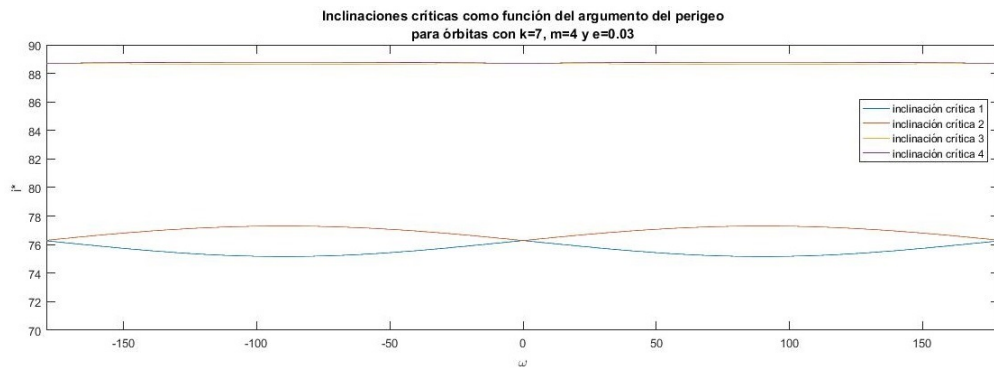


Imagen 4.63 Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m par.

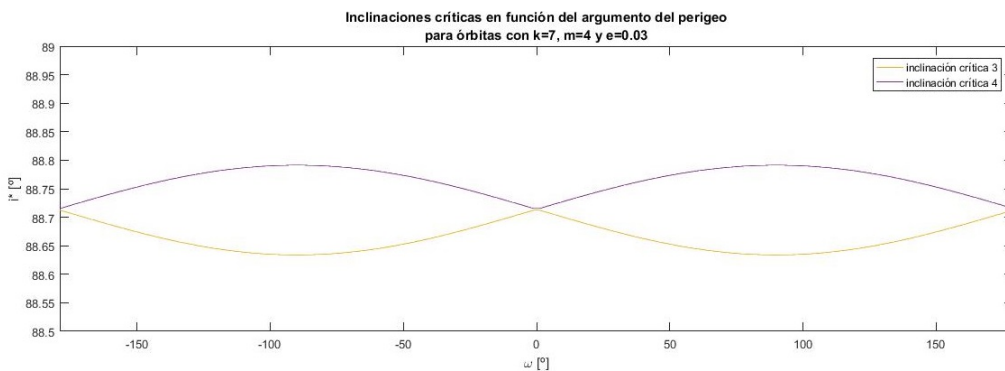


Imagen 4.64 Variación con el argumento del perigeo de las inclinaciones críticas para órbitas del caso par con m par (zoom).

Observando todas las gráficas puede comprobarse que no existe ningún otro factor que evite el aumento del número de inclinaciones críticas además de la simetría N-S de la traza que provocan los argumentos del perigeo $\omega = 0^\circ$ y $\omega = 180^\circ$. Además, la mayor diferencia entre las parejas de inclinaciones críticas se da para $\omega = 90^\circ$ y $\omega = -90^\circ$. Pero lo interesante de estas gráficas es que puede comprobarse que las inclinaciones críticas son simétricas respecto a $\omega = 0^\circ$, es decir, que una órbita tendrá las mismas inclinaciones críticas sea cual sea el signo del argumento del perigeo. Esto puede demostrarse matemáticamente tal y como sigue:

Sea u_2^* la solución de la ecuación (4.56) para $r = r^*$ y una órbita con $\omega = \omega^*$, se debe buscar una solución de esta misma ecuación para $\omega = -\omega^*$ de forma que $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ no cambie de valor, para que la inclinación crítica asociada siga siendo la misma. Se reescribe la expresión (4.54) haciendo uso de las relaciones trigonométricas de los ángulos suma:

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -\frac{m}{k} \left(2e \sin(\omega) \sin(u_2) - 1 - \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) \cos(2u_2) \right) \quad (4.57)$$

Observando la expresión (4.57) puede verse que la única solución posible al problema de sustituir ω^* por $-\omega^*$ sin que esto altere el valor o el signo de $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ es sustituir u_2^* por $-u_2^*$. Esto quiere decir que, para probar que las inclinaciones críticas no dependen del signo de ω , será necesario demostrar que existe una $r = r'$ entera y menor que $k - 1$ tal que $u_2 = -u_2^*$ sea solución de (4.56).

Si se observa la ecuación (4.56) puede verse que el signo del segundo término pasa a ser negativo al cambiar u_2^* por $-u_2^*$. Esto quiere decir que, para que $-u_2^*$ siga siendo solución, debe buscarse un r' tal que se cumpla:

$$-\cos(f(u_2^*, \omega^*)) \sin(f(u_2^*, \omega^*)) = \cos(f(-u_2^*, -\omega^*)) \sin(f(-u_2^*, -\omega^*)) \quad (4.58)$$

Las posibles soluciones a esa ecuación son las siguientes:

$$f(-u_2^*, -\omega^*) = \pi - f(u_2^*, \omega^*) + 2j\pi \quad (4.59)$$

$$f(-u_2^*, -\omega^*) = -f(u_2^*, \omega^*) + 2j\pi \quad (4.60)$$

$$f(-u_2^*, -\omega^*) = \frac{\pi}{2} + f(u_2^*, \omega^*) + 2j\pi \quad (4.61)$$

siendo j un número entero

Debido a que al restar $f(u_2^*, \omega^*) - f(-u_2^*, -\omega^*)$ no pueden eliminarse los términos multiplicados por e , pueden descartarse las soluciones del tipo (4.61). Si se realiza la suma de $f(u_2^*, \omega^*) + f(-u_2^*, -\omega^*)$, las soluciones del tipo (4.59) y (4.60) quedan cómo:

$$\pi - \pi \frac{m}{k} + \pi \frac{m}{k} r' + \pi \frac{m}{k} r^* = \pi(2j + 1) \quad (4.62)$$

$$\pi - \pi \frac{m}{k} + \pi \frac{m}{k} r' + \pi \frac{m}{k} r^* = 2j\pi \quad (4.63)$$

Despejando r' de (4.62) y (4.63), se obtienen las siguientes expresiones que relacionan el número de vueltas r^* para el cual se produce una tangencia en u_2^* en la órbita con $\omega = \omega^*$ con el número de vueltas r' para el cual se produce la tangencia en $-u_2^*$ en la órbita con $\omega = -\omega^*$:

$$r' = 2 \frac{k}{m} j + 1 - r^* \quad (4.64)$$

$$r' = \frac{k}{m} (2j - 1) + 1 - r^* \quad (4.65)$$

En función de si m es un número par o impar, podrá utilizarse una expresión u otra para encontrar un número $j \geq 0$ entero tal que $0 < r' < k - 1$. Por ejemplo, para los casos que se han estado analizando, en caso de que $r^* = 2$, las soluciones serían:

$$\text{Caso impar: } k=7, m=5 \implies j=3 \quad r' = 6 \leq k - 1 = 6$$

$$\text{Caso par } k=7, m=4 \implies j=2 \quad r' = 6 \leq k - 1 = 6$$

Una vez demostrado esto es necesario aclarar que no todo es exactamente igual: el orden en el que aparecen los nuevos puntos de corte sí depende del signo del argumento del perigeo. Esto quiere decir que si para $\omega = \omega^*$ la inclinación crítica número X, produce una tangencia en el hemisferio Norte (Sur), para esa misma órbita y esa misma inclinación crítica se producirá una tangencia en el hemisferio Sur (Norte). Esto puede comprobarse en esta traza de ejemplo, en la que se representa la misma órbita con parámetros $i = i_2^*$, $k = 7$, $m = 5$ y $e = 0.03$, pero con $\omega = -70^\circ$:

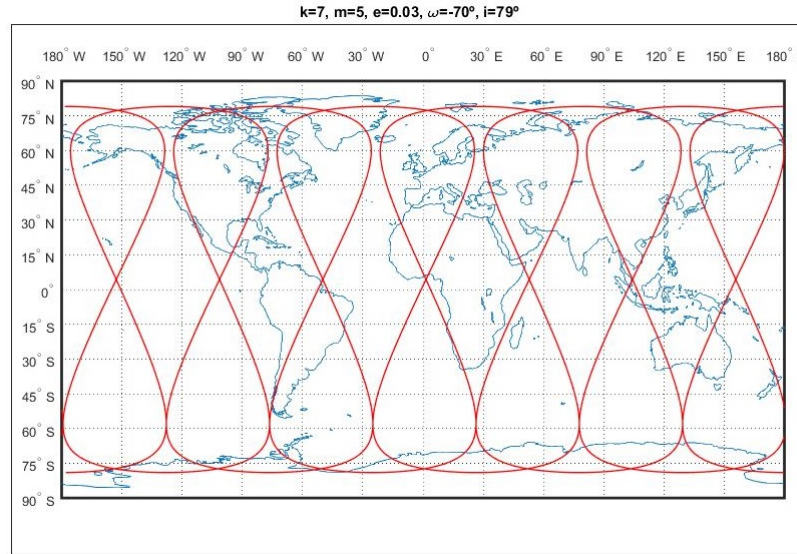


Imagen 4.65 Ejemplo de tangencia en el hemisferio opuesto para órbita con $k=7$, $m=5$, $e=0.03$, segunda inclinación crítica y argumento del perigeo $\omega = -70^\circ$.

Si se compara esta traza con la que se observa en la imagen 4.50b, puede comprobarse cómo efectivamente, la tangencia se da en el hemisferio opuesto al cambiar de signo el argumento del perigeo.

Una cuestión que es razonable plantearse después de todos los estudios realizados de las inclinaciones críticas es la siguiente: ¿todas las inclinaciones críticas son menores de 90° ? En [1] se demuestra que para las órbitas circulares no se generan nuevos puntos de cruce para inclinaciones mayores de 90° , por lo que tampoco existirán nuevas inclinaciones críticas. En el caso que se está estudiando, habría que comprobar si para alguna combinación de elementos orbitales, el parámetro $\cos(i)$ calculado a partir de la segunda ecuación del sistema (4.55) pasa a ser negativo. Para que fuese posible, dada una combinación de excentricidad e , argumento de latitud u_2 y argumento del perigeo ω que resuelvan (4.56), al sustituir sus valores en la segunda ecuación de (4.55), el valor de $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ deberá ser menor que cero.

Puede comprobarse que para valores de excentricidad pequeños nunca va a poder cumplirse la condición $\frac{\partial f}{\partial u_2} < 0$, ya que los valores máximos de las funciones trigonométricas son 1. Pero, ¿existe la posibilidad de que para ciertos valores de u_2 y ω pueda tomarse una excentricidad $e \in (0,1)$ tal que esa condición sí se cumpla?

Para encontrar los intervalos de u_2 y ω en los cuales esto es posible se analiza la siguiente inecuación:

$$2e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cos\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) - 1 - \frac{3e^2}{2} \cos(\pi - 2\omega) \cos(2u_2 - \pi) > 0 \quad (4.66)$$

Para que exista una inclinación crítica mayor que $\frac{\pi}{2}$, debe existir una excentricidad contenida en $(0,1)$ tal que cumpla (4.66) y además, cuya combinación con los valores de u_2 y ω a partir de los cuales se ha obtenido esta excentricidad permita resolver la ecuación (4.56).

Para obtener una primera estimación de los valores de e que posibilitarían la existencia de inclinaciones críticas mayores que $\frac{\pi}{2}$, se toma el caso más desfavorable de la inecuación (4.66), que será una combinación de u_2 y ω tal que la desigualdad quede:

$$2e + \frac{3e^2}{2} - 1 > 0 \quad (4.67)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática que surge de igualar a 0 el primer miembro, el intervalo para el cual no se generarán inclinaciones críticas mayores que $\frac{\pi}{2}$ es:

$$0 \leq e < 0.38 \quad (4.68)$$

Según la ecuación que se está utilizando, para excentricidades mayores de 0.38 sería posible encontrar inclinaciones críticas mayores que $\frac{\pi}{2}$, pero debe recordarse que esta ecuación surge a partir de una aproximación, en la que se utiliza el hecho de que la excentricidad es pequeña. Excentricidades mayores de 0.38 ya no

cumplirían esta condición de ser pequeñas, de forma que a partir de este análisis, puede asegurarse que no existirán inclinaciones críticas mayores que $\frac{\pi}{2}$ en las órbitas para las cuales el sistema de ecuaciones (4.55) es válido.

Continuando con el análisis de las inclinaciones críticas, vamos a realizar una comparación más con el caso circular. Se ha comprobado que para las órbitas del caso impar, existe una inclinación crítica de "más". Esta inclinación crítica, que además es la menor de todas, tenía una expresión analítica en el caso circular: $i^* = \arccos(\frac{m}{k})$ (cuya obtención puede verse en [1]), y provocaba tangencias en el Ecuador debido a los puntos de corte que estos tipos de órbitas tenían sobre el mismo. En el caso excéntrico cabe preguntarse, ¿es posible obtener una expresión analítica para alguna inclinación crítica?, y en caso de serlo, ¿se ve afectada esta por la presencia de la excentricidad? Para poder comparar con el caso circular, se buscan tangencias en el Ecuador, es decir, se buscan soluciones del sistema de ecuaciones (4.53) de la forma $u_2^* = p\pi$ siendo p un número entero contenido en $\in [-1, 1]$. Este requisito delimita los valores de ω a 0° ó 180° , debido a que en presencia de un argumento del perigeo distinto a estos valores, los puntos de cruce se ven desplazados hacia uno de los hemisferios. Además, para valores distintos de ω , las expresiones que se van a presentar a continuación se complican, haciendo más difícil la obtención de una expresión analítica para i^* .

Primero debe comprobarse que existe un valor de r entero y menor que $k - 1$ de modo que sea posible una solución del tipo $u_2^* = p\pi$. Para ello, se sustituyen los valores $u_2^* = p\pi$ y $\omega = 0^\circ$ (ó $\omega = 180^\circ$) en la ecuación (4.56). Teniendo en cuenta la ecuación original de la que proviene (4.56), debe anularse el término $\sin(f(u_2))$ para que $u_2^* = p\pi$ sea una solución real. Para ello, debe cumplirse la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k} \left(\frac{\pi}{2} - p\pi - \pi r \right) = q\pi \quad (4.69)$$

Donde q representa un número entero cualquiera. Esta expresión se obtiene de sustituir en la función $f(u_2)$ los valores $u_2^* = p\pi$ y $\omega = 0^\circ$ (ó $\omega = 180^\circ$). Despejando de (4.69) el término $r + p$, se obtiene la expresión (4.70), la cual debe cumplir las condiciones (4.71)-(4.73):

$$r + p = \frac{m - k(1 - 2q)}{2m} \quad (4.70)$$

$$r + p \in \mathbb{Z} \quad (4.71)$$

$$r > 0 \quad (4.72)$$

$$r < k - 1 \quad (4.73)$$

Debido a que p es también un entero, y a que los valores de p y q pueden elegirse dentro de sus propios rangos, asegurando que el término $\frac{m - k(1 - 2q)}{2m}$ es un entero, pueden cumplirse las condiciones (4.71)-(4.73). Sea x un número entero, operando con la expresión indicada previamente en este párrafo se llega a:

$$k(1 - 2q) = m(1 - 2x) \quad (4.74)$$

Para que (4.74) sea cierta, la paridad de k y m debe ser la misma, ya que los términos $(1 - 2q)$ y $(1 - 2x)$ serán siempre impares. Debido a que k y m tienen que ser coprimos entre sí, la única posibilidad para que exista una solución del tipo $u_2^* = p\pi$ es que la órbita sea del tipo impar, es decir, con k y m impares y coprimos entre sí, al igual que en el caso circular.

Si ahora se particulariza la segunda ecuación del sistema (4.53) con los valores de $u_2^* = p\pi$, $\omega = 0^\circ$ (ó $\omega = 180^\circ$) y el valor de r tal que anula el término $\tan(f)$ (obtenido dándole valores a p y q en (4.70)), se llega a la siguiente expresión para la inclinación crítica:

$$i^* = \arccos\left(\frac{m}{k} \left(1 + \frac{3e^2}{2}\right)\right) \quad (4.75)$$

Observando la expresión (4.75) puede comprobarse que para el caso de $e=0$ se llega al mismo resultado que el caso circular. Con esto se responden las dos preguntas formuladas anteriormente: sí, es posible obtener una expresión analítica para una de las inclinaciones críticas (aunque para casos concretos) y sí, la excentricidad modifica los valores de estas inclinaciones críticas (aunque esto ya se había demostrado numéricamente para todas ellas, concretamente mediante las gráficas 4.57 y 4.59).

4.5 Determinación del número de inclinaciones críticas de forma analítica

Para poder determinar analíticamente el número de inclinaciones críticas, primero se determinan el número de puntos de cruce que se obtienen para $i = 0^\circ$, después se realizará la misma operación para $i = 180^\circ$. Tras esto, se determina cuántos puntos de cruce se introducen por cada inclinación crítica, y en combinación con lo descrito anteriormente, puede obtenerse de manera analítica el número de inclinaciones críticas que tiene la órbita:

4.5.1 Número de soluciones para $i = 0^\circ$

La ecuación maestra aproximada particularizada para $i = 0^\circ$ es la siguiente:

$$F(u_2) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right)\right) - \tan(u_2) \quad (4.76)$$

En una ecuación del tipo $\tan(x) - \tan(y) = 0$, las soluciones son $x = y + p\pi$ siendo p un número entero. Teniendo esto en cuenta, para encontrar las soluciones de (4.76) se buscan las soluciones de la siguiente ecuación:

$$u_2 + \frac{2p-1}{2}\pi = \frac{m}{k}\left(-\frac{\pi}{2} + 2e \sin(\omega) \cos(u_2) + u_2 + \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) + \pi r\right) \quad (4.77)$$

O lo que es lo mismo:

$$u_2 \frac{k-m}{k} = \frac{(1-2p)\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right) \quad (4.78)$$

Primero se comprueba el número de soluciones para $e=0$. Para ello, se deben encontrar las soluciones de la ecuación:

$$u_2 = \frac{\pi}{2(k-m)}\left(m(2r-1) - k(2p-1)\right) \quad (4.79)$$

El número de soluciones de la ecuación (4.79) será igual a la cantidad de números enteros que pueda tomar $\frac{m(2r-1)-k(2p-1)}{k-m}$ en el intervalo $(-2,2)$, o lo que es lo mismo, la cantidad de números enteros que puede tomar $m(2r-1) - k(2p-1)$ en el intervalo $(-2(k-m), 2(k-m))$ de forma que $\frac{m(2r-1)-k(2p-1)}{2(k-m)} \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Este número de soluciones no se corresponde estrictamente con el número de puntos de cruce por órbita, ya que la primera órbita corta a varias, dando lugar a puntos de cruce que pueden obtenerse mediante un retraso nodal de otro que también se ha obtenido como solución. Esto podía no ocurrir en el problema circular debido a la creación de la variable z , la cual evitaba las repeticiones. Dicho esto, del caso circular sabemos que (4.79) lleva asociadas $m - k - 1$ soluciones con distinta latitud (para que no sean reproducibles mediante un retraso nodal) sean cuales sean los valores de k y m , gracias al estudio realizado en [1]. Teniendo esto en cuenta, lo que se va a tratar en este documento es de demostrar que la introducción de la excentricidad no genera nuevas soluciones, sino que solo desplaza las existentes (al menos para valores de excentricidad pequeños). Para ello, se debe comprobar que la ecuación (4.77) sigue siendo continua y derivable al introducir los términos asociados a la excentricidad y que no se introducen nuevas soluciones al incluirse los mismos. Existen tres formas de que se introduzcan nuevas soluciones:

- **A partir de un punto crítico**, es decir, que se de una combinación de valores de e y u_2 tal que se anule (4.78) y su derivada con respecto a u_2 .
- Que se genere una nueva solución **desde las asíntotas** de las funciones tangente que componen la ecuación (4.76).
- Que se genere una nueva solución **a partir de los extremos del intervalo de análisis** $[-\pi, \pi]$.

Existencia de puntos críticos

Para comprobar la existencia de este tipo de puntos, se calcula la derivada de la función (4.78) respecto a u_2 , y se comprueba si existe alguna combinación de elementos orbitales para la cual se anula. Esta derivada queda de la forma:

$$k - m = -m \left(2e \sin(\omega) \sin(u_2) - \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) \cos(2u_2) \right) \tag{4.80}$$

$$k - m = -m \left(-2e - \frac{3e^2}{2} \right) \tag{4.81}$$

Observando la ecuación puede verse que, para valores de k y m pequeños, no existirá una excentricidad tal que permita que se cumpla la igualdad, pero tomando las funciones trigonométricas de forma que se llegue a la situación más desfavorable ((4.81) con $\omega = -90^\circ$ y $u_2 = 90^\circ$) y analizando la expresión de (4.80), puede verse que cuanto mayores sean k y m , y más cercanos estén, podrían dar lugar a que existiese una excentricidad pequeña que resolviese esta ecuación.

Para ilustrar la posible existencia de excentricidades pequeñas asociadas a k y m grandes que producen nuevos puntos de corte, se analiza ese caso más desfavorable con $m = k - 1$, $\omega = -90^\circ$ y $u_2 = 90^\circ$:

$$e = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{6}{m}}}{3} \tag{4.82}$$

Tomando $+\sqrt{4 + \frac{6}{m}}$, puede obtenerse un límite superior a partir del cual es posible que se tengan nuevos puntos de corte aumentando únicamente la excentricidad, en función de la variable m . Por ejemplo, para $m = 1$ se obtiene $e = 0.387$, mientras que para $m = 20$ se obtiene $e = 0.02455$. Puede comprobarse en la siguiente gráfica cómo, efectivamente, para inclinaciones muy cercanas a cero, existe un punto de corte para órbitas con $k = 21$, $m = 20$, $e = 0.05$ y $\omega = 90^\circ$, cuando, según el análisis del caso circular, deberían existir $21 - 20 - 1 = 0$:

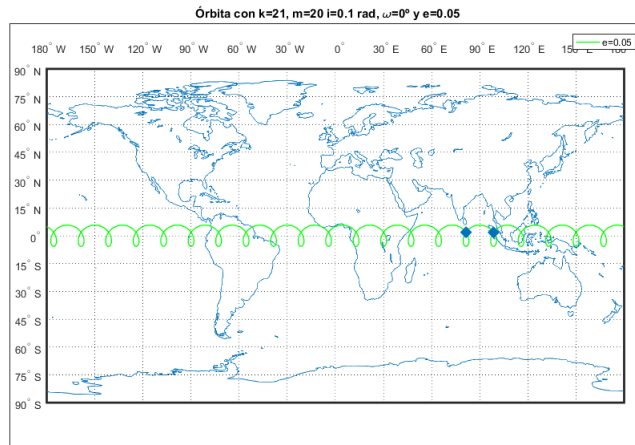


Imagen 4.66 Generación de nuevos puntos de corte para inclinaciones cercanas a cero con excentricidades pequeñas y k y m grandes.

Por debajo de la excentricidad que se obtiene de (4.82) para cada m (o k y m si se resuelve (4.81) completa) puede asegurarse que no se introducen nuevos puntos de corte a partir de tangencias en las trazas al introducir la excentricidad.

Introducción de soluciones a través de las asíntotas

Para que puedan introducirse nuevas soluciones a través de las asíntotas debe cumplirse que (4.76) sea igual a 0 para valores de u_2 de la forma $\frac{(2p-1)\pi}{2}$. Para valores genéricos de r , ω y e , esta función toma el valor "±∞", al tratarse de unos valores asociados a las asíntotas de la segunda tangente. Para que esta función pudiese valer 0, debe cumplirse que la primera tangente también tienda a ∞, pero con signo opuesto, de forma que deben encontrarse valores de p y r dentro de los rangos aceptables que cumplan:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(2p-1)\pi}{2} - \pi r \right) = (2g-1) \frac{\pi}{2} \tag{4.83}$$

Debe tenerse en cuenta que, para que realmente se llegue a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ debe cumplirse que $\frac{2p-1}{2}$ y $\frac{2g-1}{2}$ puedan expresarse de la forma $\frac{1}{2} + 2q$ o $2w - \frac{1}{2}$, pero ambos de la misma forma, todo ello siendo tanto p como q , w y g números enteros y con p contenido en $\in [0,1]$. Resolviendo (4.83) se llega a:

$$r = 1 - p + \frac{k(g-1)}{m} \quad (4.84)$$

Para que el valor de r sea entero, los dos valores que puede tomar g son $g = m + 1$ o $g = -m + 1$, y tomando p de forma que pueda llegarse a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ en función del valor de m se llegan a las siguientes expresiones de r :

$$r = k \quad (4.85)$$

$$r = 1 - k \quad (4.86)$$

$$r = k + 1 \quad (4.87)$$

$$r = -k \quad (4.88)$$

El único caso que permitiría obtener un valor de r dentro del rango válido sería $k = 1$ y $m = 1$ a partir de la ecuación (4.86). Tomando $p = 0$ se cumple que ambos números $\frac{2p-1}{2}$ y $\frac{2g-1}{2}$ pueden expresarse de la misma forma, de modo que se procede a estudiar este caso. Si se analiza la indeterminación del tipo $\infty - \infty$ para este caso mediante L'Hopital, se llega a:

$$\frac{(\frac{\partial f}{\partial u_2} - 1)(\sin(u_2) \sin(f(u_2)) + \cos(u_2) \cos(f(u_2)))}{-\sin(f(u_2)) \cos(u_2) \frac{\partial f}{\partial u_2} - \cos(f(u_2)) \sin(u_2)} \quad (4.89)$$

Sustituyendo los valores para los cuales se está realizando el estudio, es decir, aquellos que consiguen anular los denominadores de ambas funciones trigonométricas, se llega a:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial u_2} - 1}{0} \quad (4.90)$$

Para que (4.90) siga siendo una indeterminación debe cumplirse que $\frac{\partial f}{\partial u_2} = 1$. Teniendo en cuenta que se están analizando casos del tipo $u_2 = \frac{(2p-1)\pi}{2}$, la expresión de la derivada (4.91) y que para que r se encuentre en un rango válido, tanto k como m deben valer 1, se llega a la ecuación (4.92):

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -\frac{m}{k} \left(2e \sin(\omega) \sin(u_2) - 1 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \cos(2u_2) \right) \quad (4.91)$$

$$2e \sin(\omega) + \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) = 0 \quad (4.92)$$

La ecuación (4.92) lleva asociada a la solución $e = 0$ y puede llevar asociada otra solución válida de e en función del valor de ω . La primera solución $e = 0$ se debe a que para una órbita geosíncrona ($k = 1$ y $m = 1$) y circular, la primera inclinación crítica es $i = 0^\circ$ (puede verse en [1]), de forma que ya se han introducido nuevos puntos de corte para esta inclinación. Esto mismo ocurre para aquellos valores de ω que proporcionan un valor de excentricidad menor que 1, es decir, que para la combinación de elementos orbitales e y ω tales que se resuelve (4.92), se da una tangencia en la traza para $i = 0^\circ$, es decir, que $i = 0^\circ$ es una inclinación crítica.

Además de este caso de tangencia, para otras combinaciones de e y ω pueden darse las siguientes situaciones:

- Que a partir del método explicado en la sección correspondiente, se obtenga una inclinación crítica $i^* > 0^\circ$, de forma que para $i = 0^\circ$, se tengan 0 puntos de cruce. Un ejemplo de esta combinación puede verse en una órbita con $k = m = 1$, $e = 0.05$ y $\omega = 20$.
- El caso contrario, que a partir del método previamente descrito, no se obtenga ninguna inclinación crítica viable (todos los valores de $\cos i$ que se obtienen están fuera del rango $[0,1]$). Esto quiere decir que la traza puede tener un punto de corte desde $i = 0^\circ$, sin que este punto de corte sea una tangencia. Un ejemplo de esto se tiene para $k = m = 1$, $e = 0.2$ y $\omega = -3$ rads.

Por tratarse de un caso muy concreto, el estudio más detallado de las órbitas geosíncronas se propone como trabajo futuro.

Con esto, puede asegurarse que la ecuación (4.76) no toma el valor 0 para valores de u_2 de la forma $\frac{(2p-1)\pi}{2}$ para valores de k y m distintos a 1, y para las órbitas geosíncronas debe tenerse en cuenta que su primera inclinación crítica puede ser 0.

Introducción de soluciones a través de los extremos $-\pi, \pi$

Ahora debe comprobarse si (4.76) se iguala a 0 para valores de $u_2 = \pm\pi$. Para ello se buscan valores enteros de g y r dentro de sus respectivos rangos de forma que se cumpla:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k} \left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \pm \pi - \pi r \right) = g\pi \tag{4.93}$$

Para que (4.93) lleve asociado un valor de r entero, debe cumplirse que $e = 0$ o $\omega = 0/\omega = \pm 180^\circ$, es decir, elementos orbitales que conserven la simetría N-S.

Despejando r , y tomando $g = \frac{m+1}{2}$ (para lo cual m debe ser impar), se llega a:

$$r = \pm 1 + \frac{k+1}{2} \tag{4.94}$$

Para que (4.94) lleve asociado un valor de r entero, deberá cumplirse que k sea impar, de forma que tanto m como k lo sean. Esto nos lleva a que los únicos casos para los cuales se tiene una solución en los extremos del intervalo es para los casos impares con simetría N-S, soluciones que se encontrarán además sobre el Ecuador. Este tipo de órbitas llevarán asociadas otra solución con $u_2 = 0$ y un r distinto, de forma que no será necesario contabilizarlas, ya que llevarán asociada la misma latitud ($\phi = 0^\circ$), y podrán obtenerse mediante un retraso nodal.

Teniendo todos los casos en cuenta, se ha llegado a que la introducción de la excentricidad (por debajo de los valores obtenidos en la sección de puntos críticos) no aumenta el número de soluciones de la ecuación (4.76), de forma que se siguen teniendo $k-m-1$ puntos de corte para el caso impar e ídem para el caso par.

4.5.2 Particularización para $i=180^\circ$

En este caso, la ecuación que se analiza es:

$$F(u_2) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k} \left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r \right)\right) + \tan(u_2) \tag{4.95}$$

En una ecuación del tipo $\tan(x) + \tan(y) = 0$ la relación que cumplen las variables x e y es $x = p\pi - y$, de forma que siguiendo los pasos descritos anteriormente, se llega a una ecuación del tipo:

$$u_2 \frac{k+m}{k} = \frac{(2p-1)\pi}{2} + \frac{m}{k} \left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r \right) \tag{4.96}$$

Al igual que para el caso $i = 0^\circ$, primero se comprueba que el número de soluciones de (4.96) coincide con las del caso circular cuando se hace $e = 0$:

$$u_2 = \frac{\pi}{2(k+m)} \left(k(2p-1) - m(2r-1) \right) \tag{4.97}$$

Se sabe por el estudio realizado en [1], que el número de soluciones distintas que la ecuación (4.97) lleva asociadas son $k+m-1$, por lo que de nuevo deben comprobarse los 3 casos expuestos anteriormente, para comprobar que la introducción de excentricidad no genera nuevas soluciones en (4.95):

Existencia de puntos críticos

De forma análoga al caso $i = 0^\circ$, se estudia cuando se anula la derivada de (4.96) respecto a u_2 , cuya expresión se corresponde con (4.98), pero se simplifican de nuevo las funciones trigonométricas para llegar a (4.99):

$$k+m = m \left(2e \sin(\omega) \sin(u_2) - \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) \cos(2u_2) \right) \tag{4.98}$$

$$\frac{3e^2}{2} - 2e + \frac{k}{m} + 1 = 0 \tag{4.99}$$

Para pasar de (4.98) a (4.99) se tiene en cuenta el caso más desfavorable al ser $e < 1$, es decir, que el término asociado a e sea positivo y el asociado a e^2 negativo (ya que ambos no pueden ser positivos).

A partir de (4.99) se llega a la expresión (4.100), la cual lleva asociados valores de excentricidad imaginarios, por ser siempre $\frac{k}{m} + 1 > 1$, y por tanto, valores no válidos:

$$e = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 6\left(\frac{k}{m} + 1\right)}}{3} \quad (4.100)$$

Con esto se demuestra que no podrán darse puntos críticos tras la introducción de la excentricidad.

Introducción de soluciones a través de las asíntotas

Siguiendo un procedimiento completamente análogo al comentado en el caso de $i = 0^\circ$, pero teniendo en cuenta que ahora los términos $\frac{2p-1}{2}$ y $\frac{2g-1}{2}$ deben poder expresarse como $\frac{1}{2} + 2q$ y $2w - \frac{1}{2}$ o viceversa, pero no de la misma forma, para que realmente pueda darse la indeterminación del tipo $\infty - \infty$ y que los valores que puede tomar g son, de nuevo $g = m + 1$ o $g = -m + 1$, se llegan a las mismas expresiones de r :

$$r = -k \quad (4.101)$$

$$r = k + 1 \quad (4.102)$$

$$r = k \quad (4.103)$$

$$r = 1 - k \quad (4.104)$$

Puede comprobarse que en ningún caso, las ecuaciones (4.101)-(4.104) aportan valores de r dentro del intervalo válido, ya que el único valor posible sigue siendo $r = 1 - k$ con $k = m = 1$, pero en este caso, para que los términos $\frac{2p-1}{2}$ y $\frac{2g-1}{2}$ puedan expresarse de forma distinta, al tomar $g = -m + 1$ se deberá tomar $p = 1$, con lo que la expresión de r a la que se llegaría sería $r = -k$, en lugar de $r = 1 - k$. Con esto, puede asegurarse que no se generan nuevas soluciones a través de las asíntotas al introducir la excentricidad en la ecuación (4.95).

Introducción de soluciones a través de los extremos $-\pi, \pi$

De nuevo, el argumento de la primera tangente es completamente análogo, con lo que se llegan a los mismos resultados que para el caso $i = 0^\circ$: los únicos casos en los que se tiene una solución en los extremos del intervalo son los casos impares que conservan su simetría N-S, soluciones que no están siendo tenidas en cuenta en el cómputo.

De nuevo, puede asegurarse que no se introducen nuevas soluciones al tenerse una órbita ligeramente excéntrica, con lo que el número de soluciones para $i = 180^\circ$ se mantiene en $k + m - 1$.

4.5.3 Determinación del número de soluciones introducidas por cada inclinación crítica

Una vez demostrado que el número de puntos de corte al introducir la excentricidad no varía, será necesario obtener el número de soluciones que introduce cada inclinación crítica.

Para hacer esto se realiza un desarrollo en serie de Taylor alrededor de la solución u_2^* asociada a esta inclinación crítica i^* de la ecuación maestra aproximada:

$$F(u_2, i) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right)\right) - \tan(u_2) \cos(i) \quad (4.105)$$

Se calculan los tres primeros coeficientes para el desarrollo de la función F con respecto a la variable u_2 , teniendo en cuenta que se realiza la siguiente denominación:

$$f(u_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2) - \pi r\right) \quad (4.106)$$

$$F_0 = \tan(f) - \tan(u_2) \cos(i) \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial f}{\partial u_2} (1 + \tan^2(f)) - (1 + \tan^2(u_2)) \cos(i) \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} (1 + \tan^2(f)) + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial u_2} \right)^2 \tan(f) (1 + \tan^2(f)) - 2 \tan(u_2) (1 + \tan^2(u_2)) \cos(i) \quad (4.109)$$

Estas expresiones pueden simplificarse teniendo en cuenta que para que i^* y u_2^* estén relacionadas, deben cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{k}\left(\frac{\pi}{2} - 2e \sin(\omega) \cos(u_2^*) - u_2 - \frac{3e^2}{4} \cos(2\omega) \sin(2u_2^*) - \pi r^*\right)\right) - \tan(u_2^*) \cos(i^*) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial f}{\partial u_2} \Big|_{u_2^*} (1 + \tan^2(f(u_2^*))) - (1 + \tan^2(u_2^*)) \cos(i^*) = 0 \end{cases} \quad (4.110)$$

Con esto, se reescriben las expresiones de las derivadas anteriores:

$$F_0 = \tan(u_2^*) (\cos(i^*) - \cos(i)) \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} \Big|_{u_2^*} = (1 + \tan^2(u_2^*)) (\cos(i^*) - \cos(i)) \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} \Big|_{u_2^*} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} (1 + \tan^2(u_2^*) \cos^2(i^*)) + \frac{\partial f}{\partial u_2} 2 \tan(u_2^*) \cos^2(i^*) (1 + \tan^2(u_2^*)) \\ &\quad - 2 \tan(u_2) (1 + \tan^2(u_2)) \cos(i) \end{aligned} \quad (4.113)$$

Una vez calculadas estas derivadas y particularizadas para el punto central del desarrollo de Taylor $u_2 = u_2^*$, puede describirse la función F en la cercanía de este punto como $F \approx A + B(u_2 - u_2^*) + C(u_2 - u_2^*)^2$, donde:

$$A = \tan(u_2^*) (\cos(i^*) - \cos(i)) \quad (4.114)$$

$$B = (1 + \tan^2(u_2^*)) (\cos(i^*) - \cos(i)) \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} C &= -\frac{m}{k} \left(2e \sin(\omega) \cos(u_2^*) + 3e^2 \cos(2\omega) \sin(2u_2^*) \right) (1 + \tan^2(u_2^*) \cos^2(i^*)) \\ &\quad - \left(\frac{m}{k} \left(2e \sin(\omega) \sin(u_2^*) - 1 - \frac{3e^2}{2} \cos(2\omega) \cos(2u_2^*) \right) \cos^2(i^*) + \cos(i) \right) 2 \tan(u_2^*) (1 + \tan^2(u_2^*)) \end{aligned} \quad (4.116)$$

Para ver cuántas soluciones se introducen al superarse una de las inclinaciones críticas, se estudian las soluciones de la ecuación $A + B(u_2 - u_2^*) + C(u_2 - u_2^*)^2 = 0$ para $i > i^*$ y $i < i^*$. Observando el caso circular, lo que se espera es que para las órbitas con $i > i^*$ las soluciones de esta ecuación sean dos reales, mientras que para $i < i^*$ no exista ninguna solución real. Resolviendo la ecuación cuadrática, se tiene:

$$u_2 - u_2^* = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad (4.117)$$

Teniendo en cuenta que se va a resolver la ecuación (4.117) para valores de inclinación de la forma $i = i^* \pm di$ siendo di un valor infinitesimal, el término asociado a B^2 puede despreciarse, al ir acompañando a un término de orden menor di^2 .

Para comprobar la exactitud de los cálculos, primero se verifica que la ecuación (4.117) tiene 2 soluciones reales para $i > i^*$ y ninguna para $i < i^*$ con $e = 0$. Para ello, se particulariza $4AC$ para $e = 0$:

$$4AC = 8 \tan^2(u_2^*) (\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)) (1 + \tan^2(u_2^*)) (\cos(i) - \cos(i^*)) \quad (4.118)$$

El término $\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)$ es siempre positivo en las inmediaciones de $i = i^*$, como puede comprobarse en las siguientes gráficas:

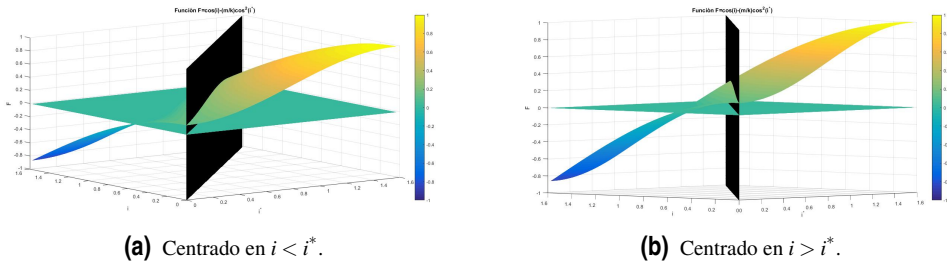


Imagen 4.67 Función $\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)$ con $\frac{m}{k}$ genérico.

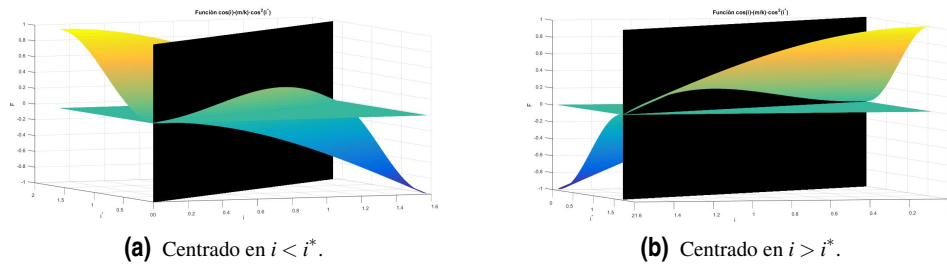


Imagen 4.68 Función $\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)$ con $\frac{m}{k} \approx 1$.

Puede comprobarse que, incluso en el caso más desfavorable con $\frac{m}{k} \approx 1$, la función $\cos(i) - \frac{m}{k} \cos^2(i^*)$ es positiva en las inmediaciones de $i = i^*$ (a excepción de para $i = \frac{\pi}{2}$, donde vale 0).

Dicho esto, el término $\cos(i) - \cos(i^*)$ deberá ser negativo si $i > i^*$ y positivo si $i < i^*$, lo cual se cumple, ya que la función \cos es decreciente con el ángulo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Con esto, queda demostrado que las expresiones (4.114)-(4.116) son válidas cuando se particularizan para el caso circular. Ahora sería necesario comprobar que el término $-4AC$ cumple la condición de ser positivo para $i > i^*$ y negativo en caso contrario, al introducir un valor de excentricidad cualquiera. Escribiendo de forma contraída el término $-4AC$:

$$-4 \tan(u_2^*) (\cos(i^*) - \cos(i)) C \tag{4.119}$$

El término $\cos(i^*) - \cos(i)$ ya se ha comprobado que es menor que 0 para $i < i^*$ y mayor que 0 en caso contrario. Para que existieran soluciones reales, deberá cumplirse que C sea menor que cero para $i > i^*$ siempre que $\tan(u_2^*) > 0$, y mayor que cero en caso contrario.

Debido a la complejidad del término C , se analiza un caso concreto, que se ha considerado el más desfavorable: el caso en el que $u_2^* = -\frac{3\pi}{4}$ y $\omega = \frac{\pi}{2}$. En este caso, la expresión del término C queda:

$$C = \frac{m}{k} \sqrt{2} (1 + 5 \cos(i^*)) e + 4 \left(\frac{m}{k} \cos^2 i^* - \cos(i) \right) \tag{4.120}$$

Si se calcula la excentricidad que hace que la expresión (4.120) se anule con $i = i^*$ se llega a la siguiente distribución, la cual ha sido truncada en $e = 1$:

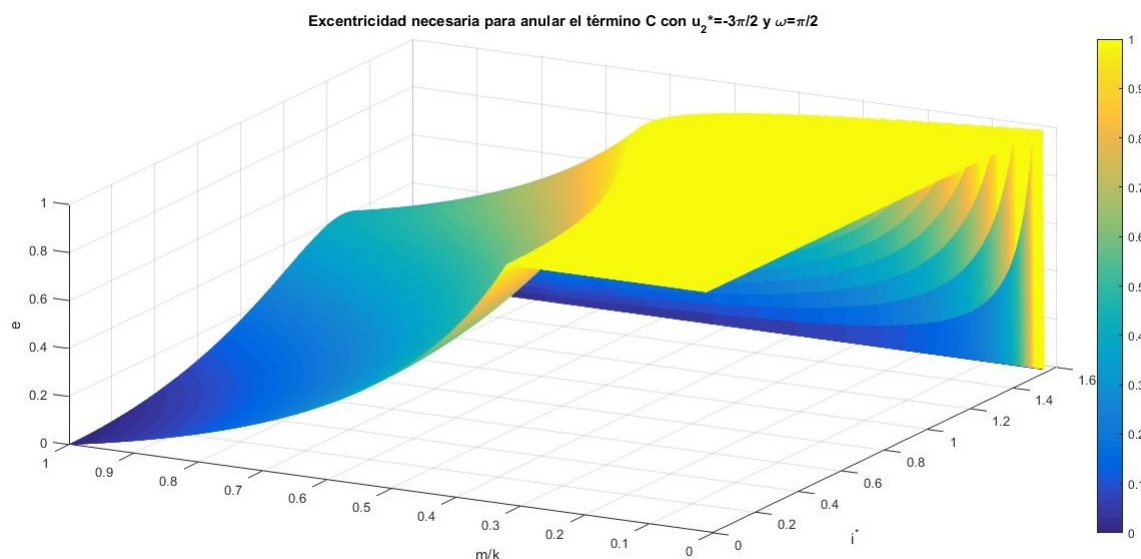


Imagen 4.69 Valor de excentricidad que hace que se anule el término C con $u_2^* = -\frac{3\pi}{4}$ y $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Observando 4.69 puede llegarse a una serie de conclusiones:

- Para valores de $\frac{m}{k}$ pequeños, la excentricidad necesaria para anular C es mayor que 1, con lo que se puede asegurar que al introducir la excentricidad, cada inclinación crítica llevará asociadas dos soluciones.
- Conforme el valor de $\frac{m}{k}$ aumenta, la excentricidad necesaria para que pueda anularse C disminuye, pero solo para valores de $\frac{m}{k}$ muy cercanos a 1 se llegan a valores de excentricidad que podrían considerarse dentro del rango de "excentricidad pequeña", región para la cual es válida la ecuación a partir de la cual se ha extraído la expresión de C.
- Cuanto menor sea la inclinación crítica, menor será la excentricidad necesaria. Como puede verse a lo largo de todo el apartado dedicado a las inclinaciones críticas, estas se encuentran en el intervalo $[45^\circ, 90^\circ]$ para los valores de m y k estudiados, de forma que observando la gráfica incluso para valores de $\frac{m}{k}$ cercanos a 1, puede asegurarse que las excentricidades necesarias para anular el término C son lo suficientemente grandes como para no considerarlas aceptables en nuestro modelo.

Para valores de m y k tales que $\frac{m}{k} \approx 1$ y tales que se obtenga una inclinación crítica cercana a 0, la excentricidad necesaria para anular el término C estaría dentro del rango considerado como "de excentricidad pequeña", de forma que, al igual que con el número de puntos de cruce para $i = 0^\circ$, existirían valores de m y k grandes para los cuales el modelo tendría problemas.

Visto que para uno de los casos más desfavorables la excentricidad necesaria para que los resultados del caso circular puedan no cumplirse es muy elevada, se asume, que al utilizar valores de excentricidad pequeños, cada inclinación crítica introducirá dos soluciones, de forma completamente análoga al caso circular.

4.5.4 Cálculo del número de inclinaciones críticas

Una vez realizado todo lo anteriormente expuesto, pueden obtenerse el número de inclinaciones críticas para cada órbita: teniendo en cuenta que para $i = 0^\circ$ se tienen $k - m - 1$ soluciones, que para $i = 180^\circ$ se tienen $k + m - 1$, y que por cada inclinación crítica se introducen 2 nuevas soluciones, es fácil obtener la conclusión de que el número de inclinaciones críticas es m . La veracidad de este resultado puede verse a través de los siguientes ejemplos, calculados numéricamente (y ya expuestos anteriormente):

Caso excéntrico:

Caso impar: $k=7, m=5, \omega = 70^\circ, e=0.03$

Tabla 4.12 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=5, e=0.03, \omega = 70^\circ$.

$i_1^* = 52.3688^\circ$	$i_2^* = 79.0059^\circ$	$i_3^* = 80.3424^\circ$	$i_4^* = 88.9167^\circ$	$i_5^* = 89.0336^\circ$
-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

Caso par: $k=7, m=4, \omega = 70^\circ, e=0.03$

Tabla 4.13 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=4, e=0.03, \omega = 70^\circ$.

$i_1^* = 75.2376^\circ$	$i_2^* = 77.2457^\circ$	$i_3^* = 88.6388^\circ$	$i_4^* = 88.7867^\circ$
-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

Caso par: $k=8, m=3, \omega = -20^\circ, e=0.05$

Tabla 4.14 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8, m=3, e=0.05, \omega = -20^\circ$.

$i_1^* = 83.0339^\circ$	$i_2^* = 83.5845^\circ$	$i_3^* = 90^\circ$
-------------------------	-------------------------	--------------------

Caso circular:

Caso impar: $k=7, m=5$

Tabla 4.15 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=5$ y $e=0$.

$i_1^* = 44.4153^\circ$	$i_2^* = 79.7077^\circ$	$i_3^* = 88.9774^\circ$
-------------------------	-------------------------	-------------------------

Caso par: $k=7, m=4$

Tabla 4.16 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=7, m=4$ y $e=0$.

$i_1^* = 76.3061^\circ$	$i_2^* = 88.7157^\circ$
-------------------------	-------------------------

Caso par: $k=8, m=3$

Tabla 4.17 Inclinaciones críticas para órbita con para $k=8, m=3$ y $e=0$.

$i_1^* = 83.3402^\circ$	$i_2^* = 90^\circ$
-------------------------	--------------------

Visto que los resultados analíticos se corresponden con los obtenidos numéricamente en apartados anteriores, puede asumirse que todo el desarrollo es válido para órbitas de excentricidad pequeña (sujeto a las condiciones de m y k grandes).

4.6 Precisión y limitaciones del modelo

Un apunte importante que debe hacerse es la delimitación que supone las llamadas "órbitas de excentricidad pequeña". A lo largo de todo el documento, el mayor valor de excentricidad utilizado está en torno a $e=0.3$, y únicamente para obtener las gráficas de la evolución de las inclinaciones críticas de las órbitas. Además, anteriormente, se había comprobado la exactitud de la solución de la ecuación maestra en comparación con la obtenida del sistema de ecuaciones completo, viendo que para valores menores de $e=0.15$, los resultados obtenidos eran muy precisos. Dicho esto, cabe preguntarse, ¿hasta dónde es válida la aproximación realizada para excentricidad pequeña? Es decir, ¿cuándo las soluciones obtenidas por la ecuación maestra aproximada comienzan a distanciarse de las que se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones completo? Para responder

a estas cuestiones se incluyen unas tablas comparativas para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$. La elección de los valores de estos parámetros simplemente se basa en tomar una órbita que presente pocos puntos de corte, para que sea más sencillo comparar los valores que se obtienen como solución.

Tabla 4.18 Tabla comparativa para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$ con $e=0.25$.

$k=3, m=2, e=0.25, \omega = 35^\circ, i=83^\circ, \Omega = 0$	u_2^* [rad]	r [revs]	ϕ [°]	λ [°]
Ecuación maestra aproximada	0.7073	1	40.1584	123.7603
	1.2845	1	72.2042	126.9271
	1.8571	2	72.2042	6.9271
	2.4343	2	40.1584	3.7603
Sistema de ecuaciones completo	0.7127	1	40.4660	123.7512
	1.2818	1	72.0609	126.9450
	1.8598	2	72.0609	6.9450
	2.4289	2	40.4660	3.7512

En esta primera tabla puede verse cómo, a pesar de que la excentricidad se ha tomado como $e=0.25$, los resultados de ambos métodos solo comienzan a diferenciarse en el segundo diferencial, es decir, se tienen errores en la centésima de grado o de radián, lo que implica resultados aún precisos.

Tabla 4.19 Tabla comparativa para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$ con $e=0.35$.

$k=3, m=2, e=0.35, \omega = 35^\circ, i=83^\circ, \Omega = 0$	u_2^* [rad]	r [revs]	ϕ [°]	λ [°]
Ecuación maestra aproximada	0.5105	1	29.0114	125.7585
	1.3107	1	73.5698	131.6377
	1.8309	2	73.5698	11.6377
	2.6311	2	29.0114	5.7585
Sistema de ecuaciones completo	0.5116	1	29.0736	125.6259
	1.3058	1	73.3152	131.6951
	1.8358	2	73.3152	11.6951
	2.6300	2	29.0736	5.6259

Al aumentar la excentricidad a $e=0.35$, puede verse cómo los resultados pasan a discrepar en la décima de grado en latitud y longitud, lo que los hace menos precisos en comparación con el caso anterior, como era de esperar.

Tabla 4.20 Tabla comparativa para órbitas con $k=3$, $m=2$, $i=83^\circ$ y $\omega = 35^\circ$ con $e=0.45$.

$k=3, m=2, e=0.45, \omega = 35^\circ, i=83^\circ, \Omega = 0$	u_2^* [rad]	r [revs]	ϕ [°]	λ [°]
Ecuación maestra aproximada	0.3269	1	18.5830	126.7022
	1.3303	1	74.5776	135.8505
	1.8112	2	74.5776	15.8505
	2.8147	2	18.5830	6.7022
Sistema de ecuaciones completo	0.3062	1	17.4101	126.1864
	1.3227	1	74.1891	135.9799
	1.8189	2	74.1891	15.9799
	2.8354	2	17.4101	6.1864

En este caso, si se sigue aumentando la excentricidad, siguen creciendo las discrepancias entre ambas soluciones: los valores de los argumentos de latitud u_2 siguen discrepando en los segundos decimales, pero en este caso las diferencias son mayores. Esto hace que, en el caso de la latitud y la longitud, se estén cometiendo errores cercanos al grado, errores que pueden no ser aceptables en ciertas aplicaciones de observación geológica o geográfica, por ejemplo.

Para poder determinar un "límite" de excentricidad en la que sea posible utilizar la ecuación aproximada, es necesario fijar un número de decimales que deban ser completamente exactos, ya que habrá misiones que necesiten una exactitud incluso mayor a la obtenida para $e=0.25$ en la centésima de grado. Para estas misiones, el límite de la aproximación sería una excentricidad alrededor de $e=0.15$. Por otro lado, si la misión solo necesita precisión en la décima de grado, o incluso puede permitirse un error del orden de 1° , los límites de esta aproximación crecen a $e=0.35$ y $e=0.45$, aproximada y respectivamente. Esta comparativa solo está teniendo en cuenta aquellos puntos que realmente se obtienen a partir de la ecuación aproximada, es decir, que si el aumento de la excentricidad generase nuevos puntos de corte (situación que es posible, como se expondrá más adelante en esta misma sección), la ecuación maestra aproximada no sería capaz de obtenerlos, llegando a una diferencia en el número de puntos de corte obtenidos, lo cual no es aceptable sea cual sea la aplicación. En caso de encontrarse por debajo de una excentricidad que genere nuevos puntos de corte, la elección de este "límite" de excentricidad sí puede venir fijado por la exactitud de las soluciones obtenidas y representadas en estas tablas, pero si no, debe fijarse el límite en esta excentricidad que genera nuevos puntos de corte.

Para terminar de ilustrar esta cuestión, se incluyen a continuación una serie de gráficas, en las que se comparan las soluciones obtenidas por la ecuación aproximada, y las correspondientes a la resolución del sistema de ecuaciones completo (4.21). En ellas, se comparan las curvas de variación con la excentricidad y el argumento del perigeo 4.42-4.47 con las que se obtendrían resolviendo el sistema de ecuaciones real:

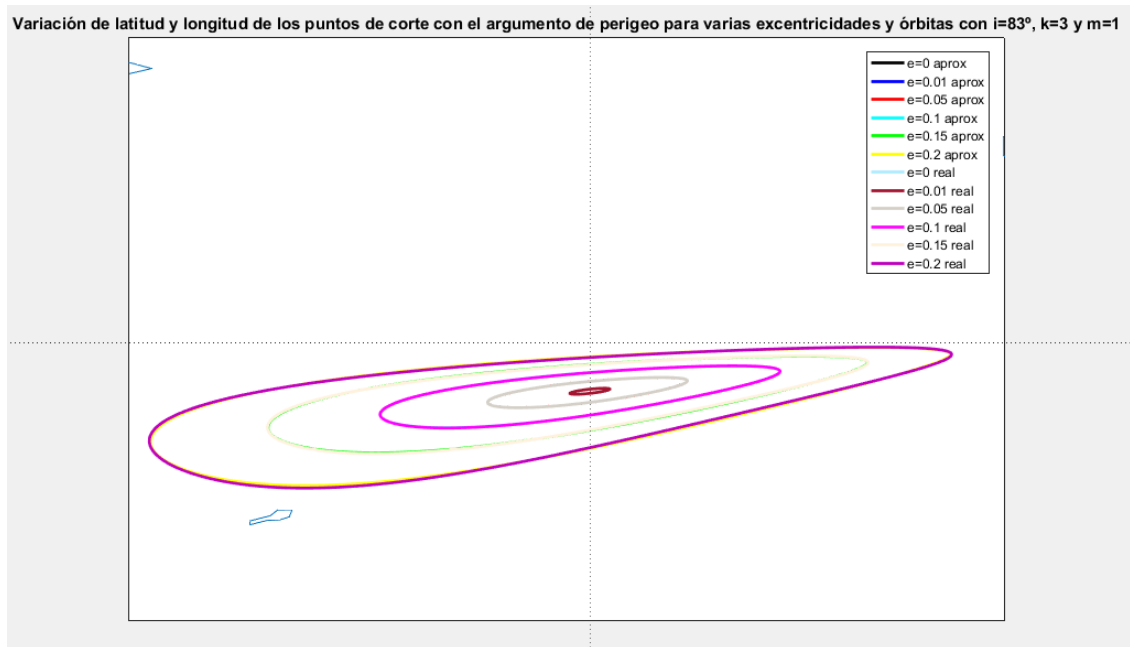


Imagen 4.70 Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud del punto de corte situado en el hemisferio Norte con $k=3$, $m=1$ e $i=83^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo. .

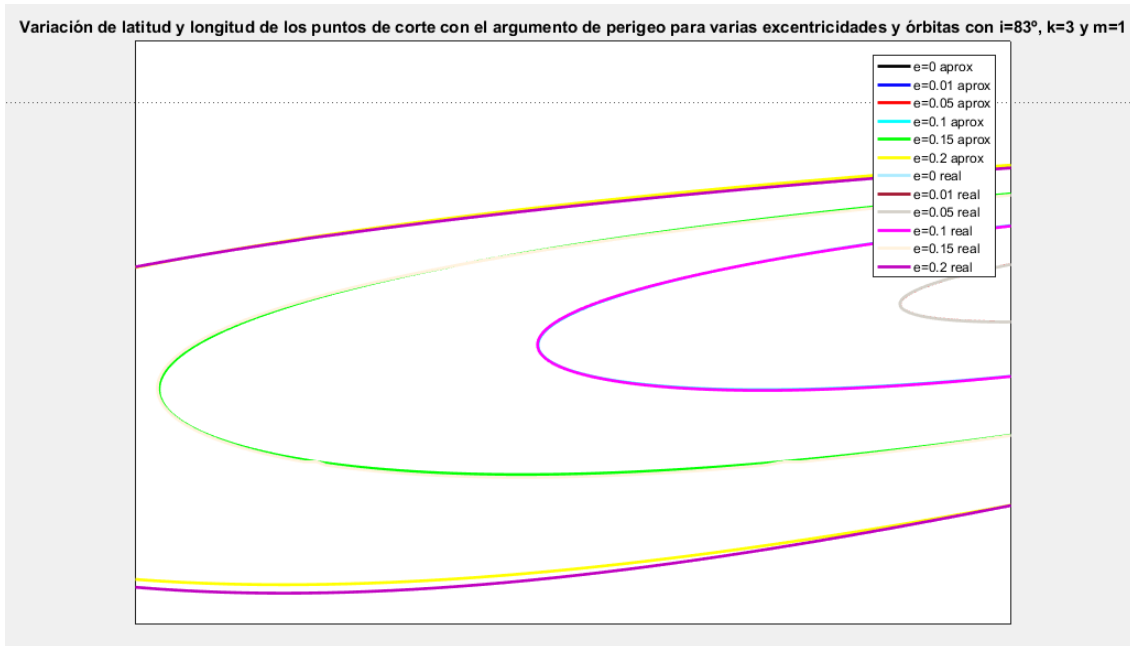


Imagen 4.71 Zoom de la gráfica 4.70.

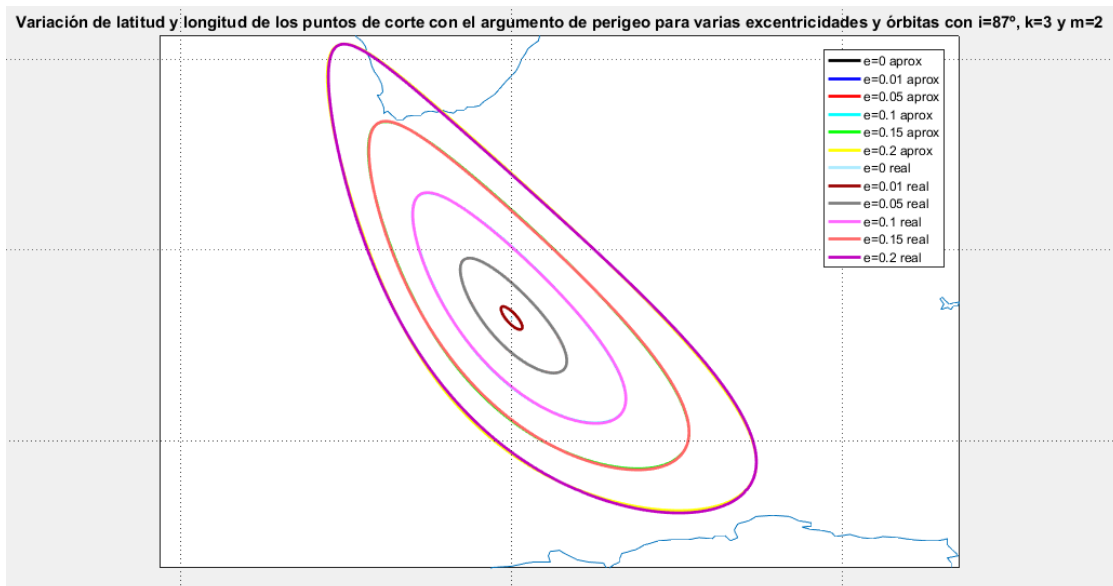


Imagen 4.72 Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud de uno de los puntos de corte situado en el hemisferio Sur con $k=3$, $m=2$ e $i=87^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo. .

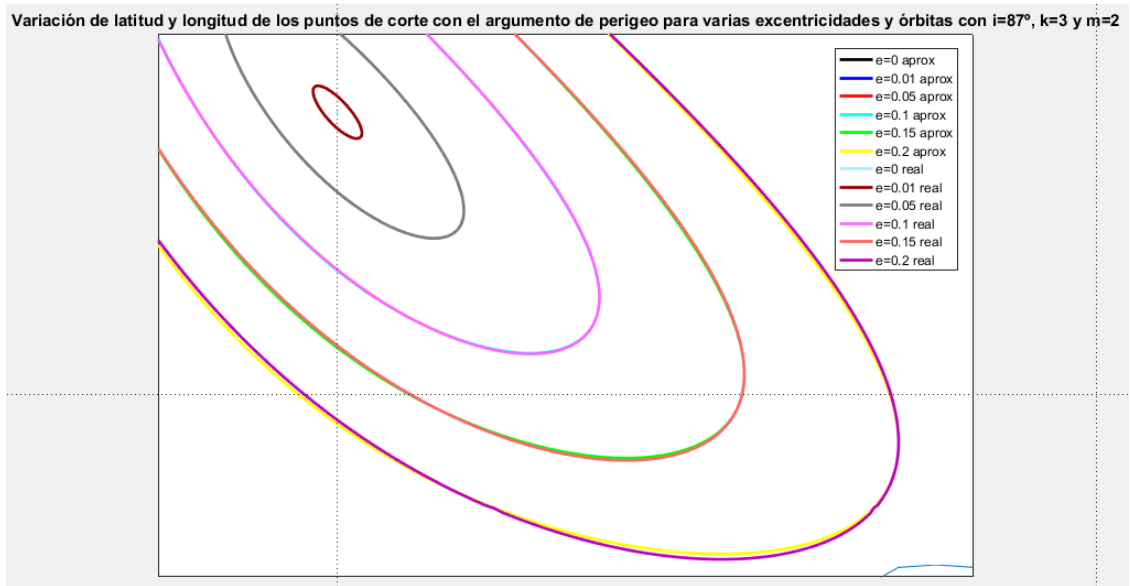


Imagen 4.73 Zoom de la gráfica 4.72.

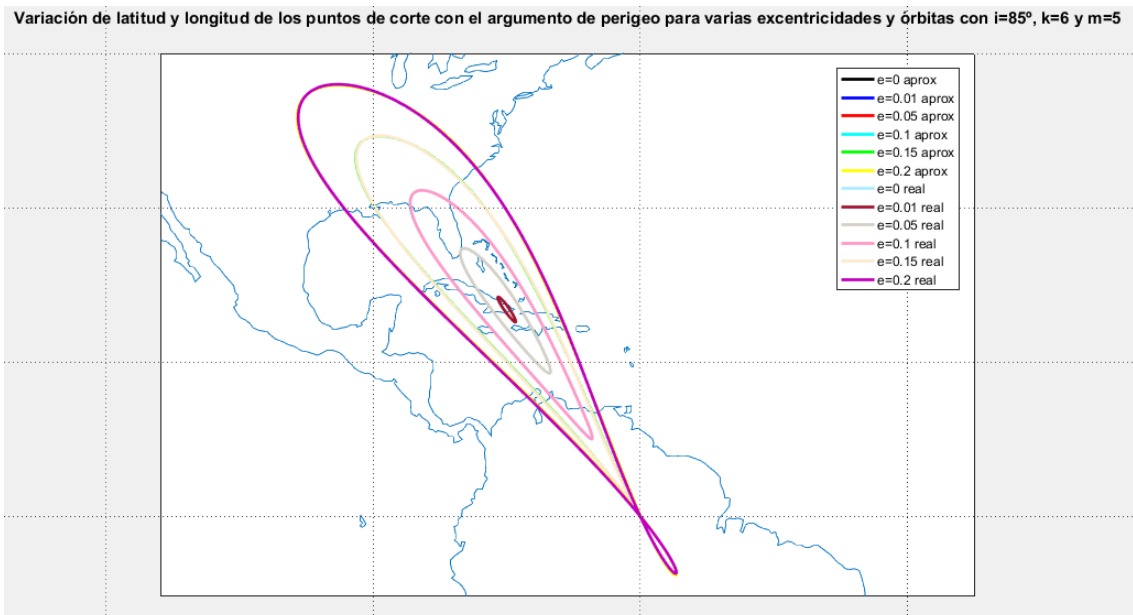


Imagen 4.74 Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud de uno de los puntos de corte situado en el hemisferio Norte con $k=6$, $m=5$ e $i=83^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo. .

Variación de latitud y longitud de los puntos de corte con el argumento de perigeo para varias excentricidades y órbitas con $i=85^\circ$, $k=6$ y $m=5$

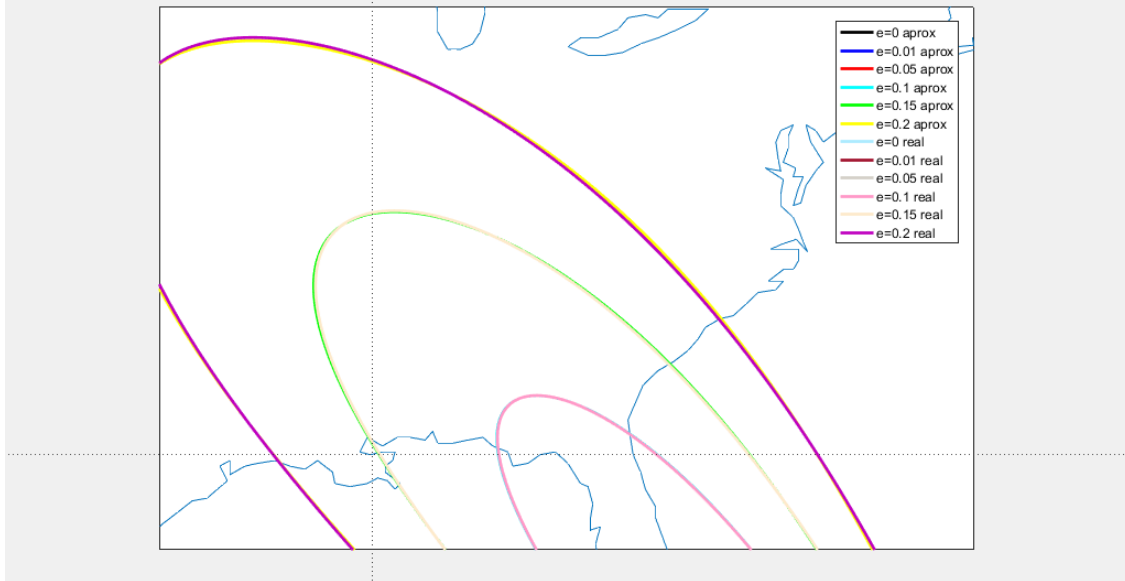


Imagen 4.75 Zoom de la gráfica 4.74.

Variación de latitud y longitud de los puntos de corte con el argumento de perigeo para varias excentricidades y órbitas con $i=85^\circ$, $k=7$ y $m=3$

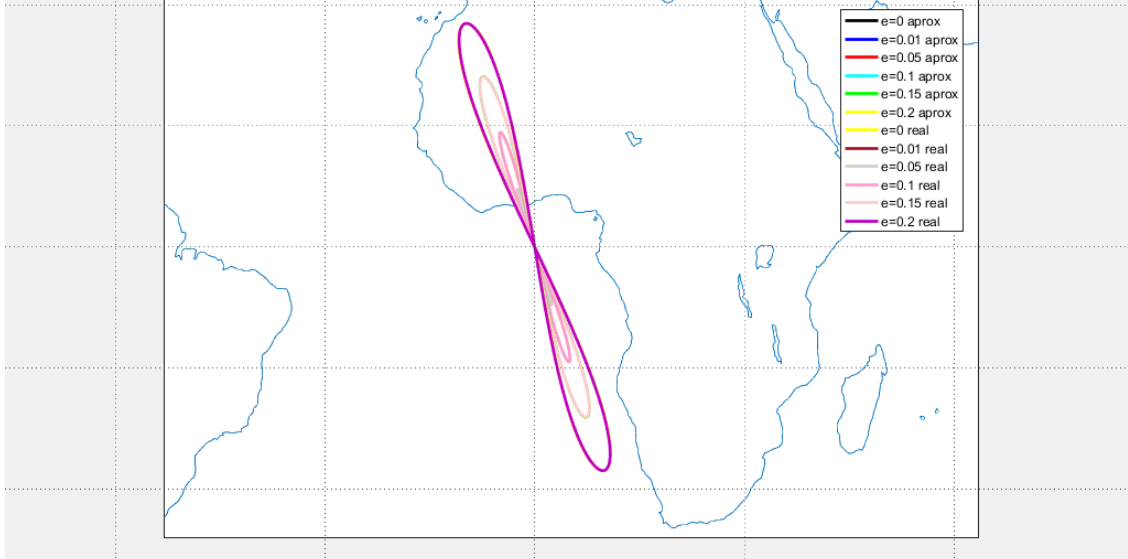


Imagen 4.76 Comparación entre las variaciones de la latitud y longitud del punto de corte situado sobre el Ecuador con $k=7$, $m=3$ e $i=85^\circ$ obtenidas por la ecuación aproximada y el sistema de ecuaciones completo. .

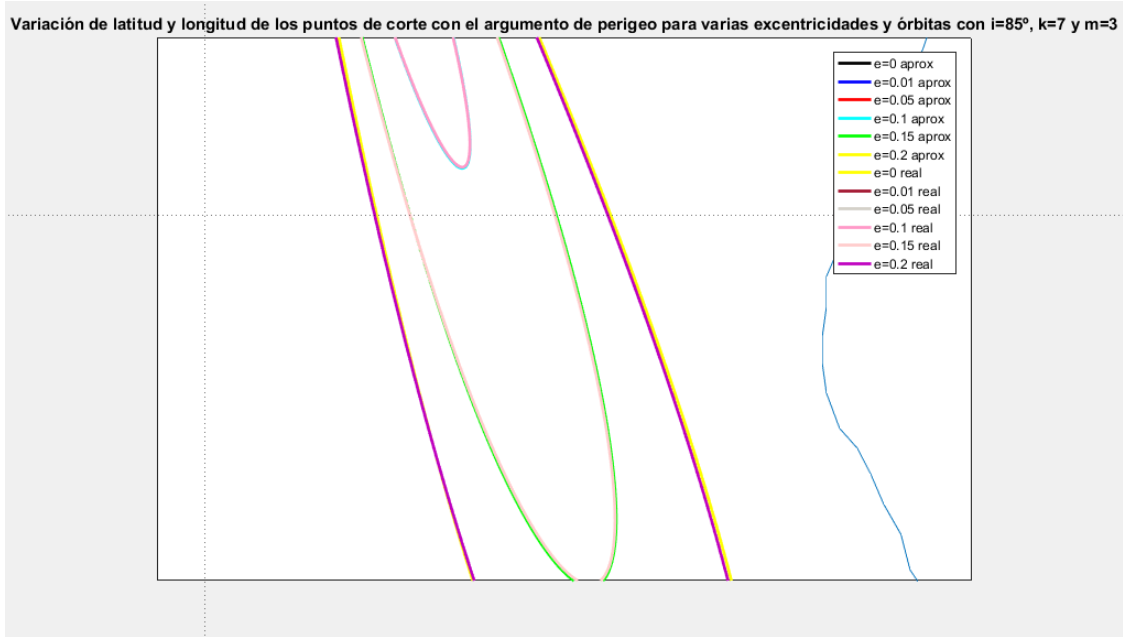


Imagen 4.77 Zoom de la gráfica 4.76.

Observando todas las gráficas y sus correspondientes zooms, se comprueba que sólo a partir de $e = 0.15$ pueden observarse discrepancias entre ambas curvas, y sólo en la gráfica aumentada. Esto respalda lo expuesto anteriormente mediante las tablas comparativas: las soluciones obtenidas con la ecuación maestra aproximada tienen precisión de décimas de grado hasta excentricidades del orden de $e = 0.25$.

Además de la propia discrepancia entre ambos métodos de resolución, debe considerarse que al aumentar mucho la excentricidad, es posible que se generen puntos de corte nuevos que la ecuación aproximada no pueda obtener como solución, debido a las propias limitaciones de la aproximación de excentricidad pequeña. Este tipo de situación se ilustra en las siguientes gráficas, en las que además de la discrepancia entre las soluciones obtenidas y la traza real de la órbita, pueden observarse puntos de corte que no vienen marcados por un rombo azul, es decir, que no han sido obtenidos mediante la ecuación maestra aproximada:

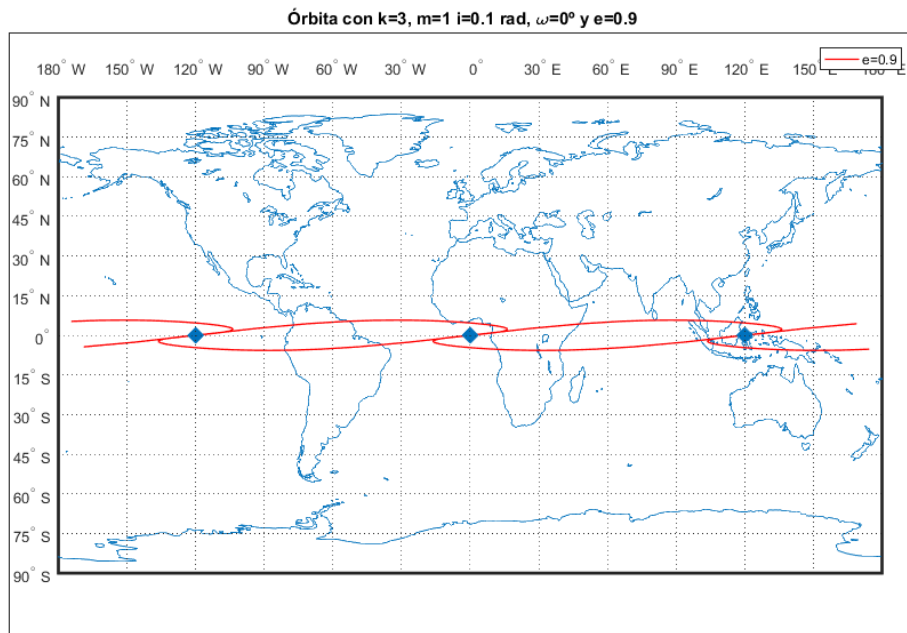


Imagen 4.78 Creación de nuevos puntos de corte para excentricidades altas en una órbita con $e=0.9$, $k=3$, $m=1$, $i=0.1$ rad y $\omega = 0^\circ$.

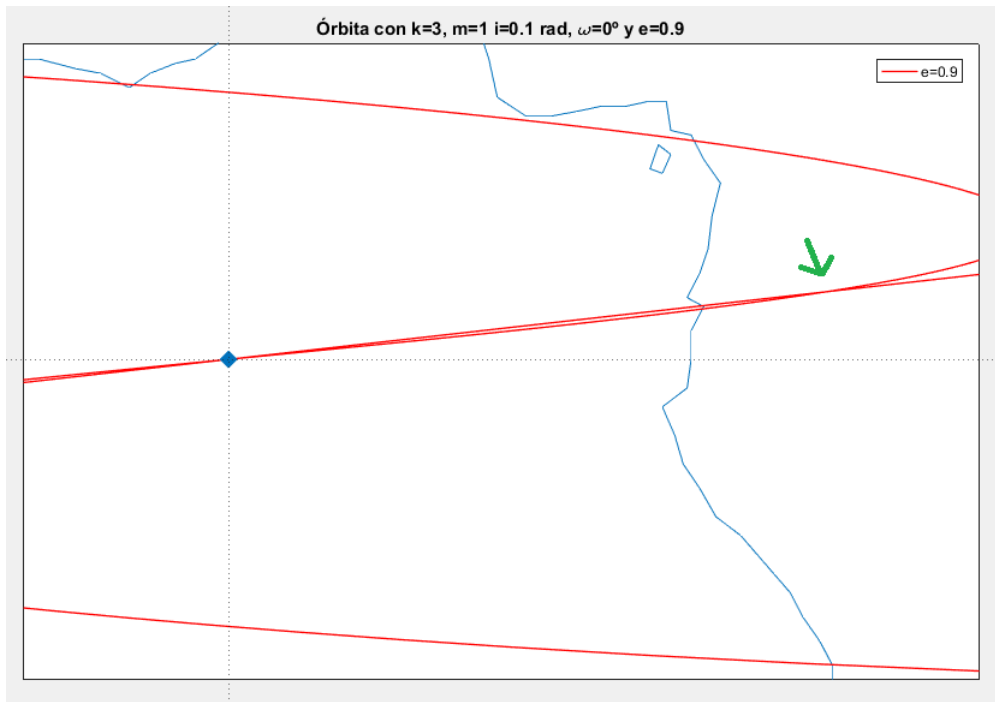


Imagen 4.79 Zoom de la gráfica 4.78.

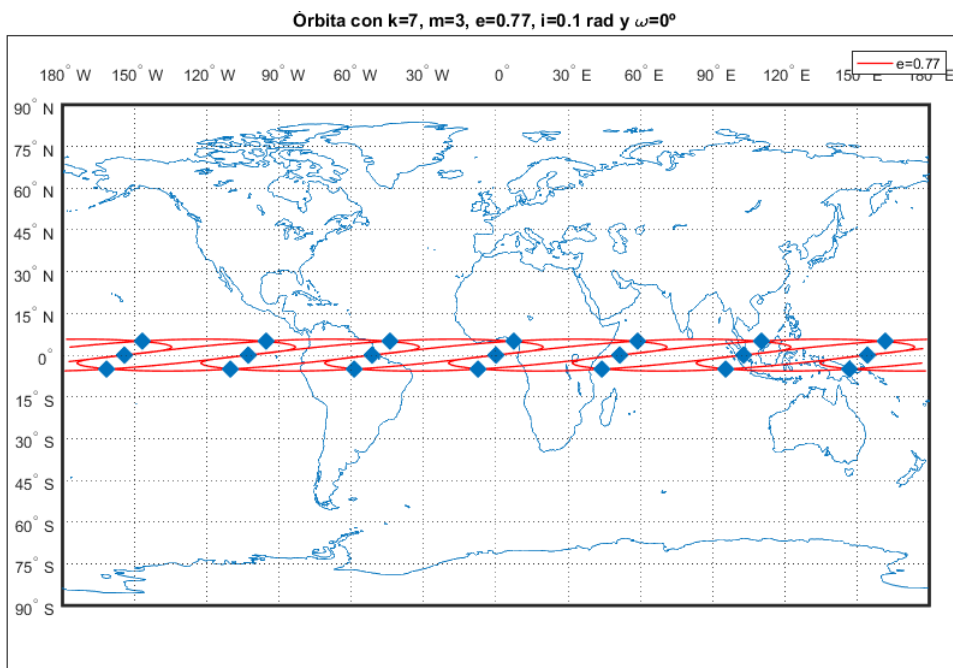


Imagen 4.80 Creación de nuevos puntos de corte para excentricidades altas en una órbita con $e=0.77$, $k=7$, $m=3$, $i=0.1$ rad y $\omega = 0^\circ$.

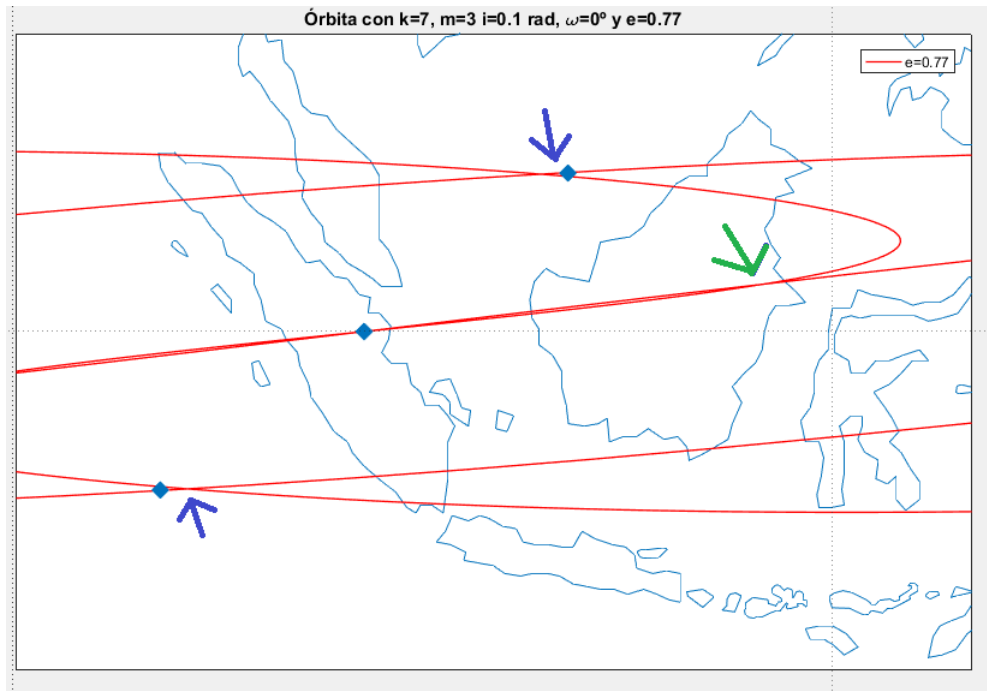


Imagen 4.81 Zoom de la gráfica 4.80.

Con estas gráficas puede verse las limitaciones propias de la aproximación de excentricidad pequeña, la cual no considera esta creación de nuevos puntos únicamente por el aumento de excentricidad (concepto similar al de "excentricidad crítica").

5 Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones

De forma general, puede afirmarse que, al agregar el factor de la excentricidad a la órbita no se producen cambios extremos en cuanto a la cantidad y disposición de los puntos de corte, siempre que esta sea "pequeña". Dicho esto, la introducción de la excentricidad complica la resolución del problema al no poder definir la variable z , de forma que el desarrollo analítico de las ecuaciones es más complejo, como ha podido comprobarse por ejemplo, al estudiar la variación de la posición de los puntos de cruce con la excentricidad o el argumento del perigeo.

En cuanto a esta variación con los elementos orbitales, cabe destacar que, en general, la variación de la latitud y la longitud viene influenciada por el argumento del perigeo de la órbita y, además, también por la posición inicial del punto de corte (se constató que cuanto mayor fuese la latitud inicial, menor sería la variación de la misma).

Por otra parte, respecto a las inclinaciones críticas, se ha visto cómo el número de estas aumenta siempre que se rompa la simetría N-S de la traza (es decir, $\omega \neq 0^\circ$ o $\omega \neq 180^\circ$), debido a que para las órbitas circulares, cuando se producía una tangencia en uno de los hemisferios, debido a la simetría de la traza, también se producía en el otro. Esto se ha demostrado con varios ejemplos, así como en un estudio de los valores de las inclinaciones críticas conforme se varía el argumento del perigeo y la excentricidad de las órbitas.

Por último, cabe destacar las limitaciones del propio modelo, derivadas del uso de una ecuación aproximada mediante un desarrollo de Taylor alrededor de $e = 0$ de la ley horaria de la órbita. Como ha podido comprobarse en la sección correspondiente, existen combinaciones de elementos orbitales para las cuales, la solución obtenida discrepa notablemente de la que se debería obtener (la cual puede verse al representar la traza) o incluso, fallar a la hora de obtener el conjunto completo de soluciones si la excentricidad de la órbita es lo suficientemente grande. Dicho esto, también es necesario indicar que, tal y como también se ha expuesto, esta aproximación ofrece muy buenos resultados para órbitas de pequeña excentricidad, quedando reflejada esta precisión en las tablas y gráficas de la sección 4.5. Además, y para el desarrollo analítico de las propias ecuaciones, el modelo se ve limitado a valores de m y k no excesivamente grandes, ya que estos modifican el número de puntos de corte para $i = 0$ y pueden propiciar que la excentricidad necesaria para que el término C del desarrollo de Taylor de la ecuación maestra aproximada alrededor del punto de tangencia u_2^* tome un valor que no garantice la existencia de soluciones reales para $i > i^*$, como ha podido verse a lo largo del documento.

5.2 Trabajo futuro

A pesar de que este documento ilustra en gran medida la dependencia de los puntos de corte de la traza de las órbitas de pequeña excentricidad con respecto a los elementos orbitales de la misma, es posible seguir profundizando en este tema, para lo que se proponen posibles líneas de investigación futura:

- Como ya se ha comentado, este estudio se centra en las órbitas de pequeña excentricidad, con lo que una de las líneas más interesantes podría ser la generalización de este estudio a cualquier tipo de órbita, incluidas las de alta excentricidad. Dentro de este estudio cabría destacar el análisis de lo que en este documento se ha denominado "excentricidades críticas", es decir, valores de excentricidad que hacen

que aparezcan nuevos puntos de corte sin variar el resto de elementos orbitales, ya que estas no pueden estudiarse con la ecuación maestra aproximada.

- Por otra parte, durante los desarrollos realizados en el documento, no se ha tenido en cuenta ninguna de las perturbaciones a las que se ven sometidas las órbitas, las cuales hacen que el satélite se aleje de su órbita "ideal" o inicial. Por esto, otra línea de investigación podría ser la inclusión de estas perturbaciones en los desarrollos, de forma que cuantas más perturbaciones se incluyan, más preciso será el cálculo de los puntos de corte.

Algunos ejemplos relevantes de estas perturbaciones a incluir podrían ser la resistencia atmosférica para órbitas bajas, o incluso, para órbitas más alejadas de la Tierra, la influencia de un tercer cuerpo en la órbita, como la Luna o el Sol.

- El estudio en profundidad del número de inclinaciones críticas de forma analítica, teniendo en cuenta otros casos de u_2^* y resolviendo la posible discrepancia obtenida para k y m grandes.
- El estudio de las órbitas geosíncronas para inclinaciones cercanas a $i = 0^\circ$, para determinar la dependencia del número de puntos de corte y de las inclinaciones críticas con la excentricidad e y el argumento del perigeo ω .
- Por último, una línea de investigación muy interesante podría ser la resolución del problema inverso, es decir, la determinación de los elementos orbitales necesarios para que la traza tenga un número concreto de puntos de corte y unas ubicaciones específicas sobre la superficie terrestre.

6 Referencias

[1] Eva Tesón Muñoz. "Estudio detallado de los puntos de cruce de las trazas de satélites geocéntricos". Trabajo de fin de grado. Departamento de Ingeniería aeroespacial, Universidad de Sevilla, 2015.

[2] John P. Boyd. "Computing the zeros of a Fourier series or a Chebyshev series or general orthogonal polynomial series with parity symmetries". ScienceDirect. Computers and Mathematics with Applications 54, 2007. Department of Atmospheric, Oceanic and Space Science. University of Michigan.

[3] Rafael Vázquez Valenzuela. Problemas y cuestiones de la asignatura Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales, problemas de los temas 3 y 4, problema 13. Departamento de Ingeniería aeroespacial, Universidad de Sevilla, 2016. <http://www.aero.us.es/move/index.html>

[4] Chebfun website. MathWorks, OCCAM, EPSRC, etc. Package downloaded on 06/04/2018 from <http://www.chebfun.org/download/>

[5] M.C. Kim. "Theory of satellite ground-track crossovers", Journal of Geodesy, Volume 71, 1997.

[6] Davis A. Vallado. Fundamentals of astrodynamics and applications. Springer Science & Business Media, 2007.