

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio experimental de generación de vórtices de punta de ala con distintas geometrías alares

Autor: Marina Jiménez Navarta

Tutor: Javier Dávila Martín

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Estudio experimental de generación de vórtices de punta de ala con distintas geometrías alares**

Autor:

Marina Jiménez Navarta

Tutor:

Javier Dávila Martín

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado: Estudio experimental de generación de vórtices de punta de ala con distintas geometrías  
alares

Autor: Marina Jiménez Navarta

Tutor: Javier Dávila Martín

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal



*A mi familia*  
*A mis maestros*





# Agradecimientos

---

*Cuando las cosas llegan a su fin, es necesario echar la vista atrás. Aunque no ha sido un camino fácil, ahora que está a punto de terminar, solo vienen a mi mente buenos momentos y grandes personas que han contribuido a que, a día de hoy, esté escribiendo estas palabras.*

*En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mis padres por su apoyo incondicional y por no dejar de creer en mis alas, aún cuando parecía que no iba a despegar.*

*A mi hermana, por apoyarme siempre y darme una visión diferente de las cosas y del mundo.*

*A mis supremas, por aguantarme en mis peores momentos y acompañarme en los mejores, que no han sido pocos.*

*Al Colegio Mayor Santa María del Buen Aire, de donde me llevo grandes amigos y experiencias.*

*A mi amigo y compañero Javier, por, aún no entendiéndome siempre, escucharme y darme buenos consejos.*

*A todas aquellas personas que a lo largo de estos años se han cruzado en mi camino, porque todas me enseñaron algo y me permitieron convertirme en la persona que soy hoy.*

*Por último, me gustaría agradecer a mi tutor Javier el haberme brindado la oportunidad de realizar este trabajo y poder aprender más sobre el mundo de los fluidos.*



# Resumen

---

En el mundo físico, son muchos los motivos por los que se desarrollan vórtices o torbellinos en el movimiento de fluidos. Estos flujos rotatorios han despertado, a lo largo de la historia, gran interés en el ámbito de la mecánica de fluidos debido a su naturaleza a menudo impredecible. Un ejemplo de este fenómeno son los vórtices que se forman en las puntas de las alas de los aviones como consecuencia de la diferencia de presiones existente entre extradós e intradós, y que da lugar a grandes masas de aire en movimiento rotatorio. Dicho fenómeno es el causante de una gran parte de la resistencia aerodinámica ofrecida por la aeronave y es por ello por lo que la industria aeronáutica trabaja en su atenuación. Sin embargo, en este caso, dicho fenómeno ha inspirado una línea de investigación que tiene como fin utilizar la fuerza de estos vórtices para el mezclado de fluidos. En este trabajo fin de grado, siguiendo líneas de investigación anteriores, se pretende avanzar en el proceso de búsqueda de una geometría que genere vórtices intensos para lograr un mezclado sin grandes pérdidas de carga y sin necesidad de un aporte externo de energía.



# Abstract

---

In the physical world, there are many reasons why vortices develop in the movement of fluids. These rotatory flows have awakened great interest in the field of fluids mechanics throughout history, due to their often unpredictable nature. An example of this phenomenon is the vortices that form at the tip of the wings as a consequence of the difference in pressures existing between extrados and intrados, and that results in large masses of air in rotatory movement. This phenomenon is the cause of a large part of the aerodynamic resistance offered by the aircraft and that is why the aviation industry works in its attenuation. However, in this case, this phenomenon has inspired a line of research that aims to use the force of these vortices for mixing fluids. At this end of degree project, following previous lines of research, we intend to advance in the process of searching for a geometry that generates intense vortices to achieve a good mix without large losses of load and without the need of an external supply of energy.



# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Notación</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Motivación y objetivos</i>	1
1.2 <i>Punto de partida</i>	5
1.3 <i>Estructura del documento</i>	6
<b>2 VÓRTICES DE PUNTA DE ALA</b>	<b>7</b>
2.1 <i>Aerodinámica potencial</i>	7
2.1.1 <i>Vórtice potencial</i>	10
2.1.2 <i>Fórmula de Kutta. Circulación alrededor de un perfil.</i>	11
2.2 <i>Modelos de estudio</i>	12
2.2.1 <i>Comparación de los modelos Burnham-Hallock y Lamb Oseen</i>	16
2.3 <i>Planteamiento del problema</i>	18
<b>3 MÉTODO EXPERIMENTAL</b>	<b>19</b>
3.1 <i>Montaje experimental</i>	19
3.1.1 <i>Partículas ABS y vertido</i>	19
3.1.2 <i>Canal hidrodinámico</i>	20
3.1.3 <i>Grabación e iluminación</i>	21
3.2 <i>Geometrías ensayadas</i>	23
3.2.1 <i>Placa con flecha positiva</i>	23
3.2.2 <i>Placa con flecha negativa</i>	25
3.2.3 <i>Placa con flecha negativa y curvatura</i>	26
3.2.4 <i>Placa rectangular con poca envergadura</i>	27
<b>4 OBTENCIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>29</b>
4.1 <i>Procedimiento seguido para la obtención de los parámetros</i>	31
4.1.1 <i>Calibrado</i>	31
4.1.2 <i>Importación de video</i>	31
4.1.3 <i>Sustracción de fondo y umbralización</i>	32
4.1.4 <i>Posicionamiento de la partícula</i>	32
4.1.5 <i>Representación de la trayectoria</i>	33
4.1.6 <i>Obtención de los parámetros característicos del vórtice</i>	34
<b>5 RESULTADOS</b>	<b>37</b>
5.1 <i>Placa con flecha positiva</i>	37
5.2 <i>Placa con flecha invertida</i>	38
5.2.1 <i>30 cm/s</i>	38
5.2.2 <i>50 cm/s</i>	40
5.2.3 <i>Error cometido</i>	42

5.2.4	Dependencia entre parámetros	42
5.3	<i>Placa con flecha invertida y curvatura.</i>	43
5.3.1	30 cm/s	43
5.3.2	50 cm/s	44
5.3.3	Error cometido	45
5.3.4	Dependencia entre parámetros	45
5.4	<i>Dependencia de los parámetros con la curvatura</i>	47
5.4.1	30 cm/s	47
5.4.2	50 cm/s	47
5.5	<i>Placa con poca envergadura</i>	48
5.6	<i>Comparación de resultados con trabajos anteriores</i>	49
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS</b>	<b>53</b>
<b>7</b>	<b>Referencias</b>	<b>55</b>
	<b>ANEXO: CÓDIGOS DE MATLAB</b>	<b>57</b>



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 3-1. Parámetros de la cámara.	21
Tabla 3-2. Números de Reynolds para los distintos experimentos de la placa con flecha positiva.	24
Tabla 3-3. Números de Reynolds para los distintos experimentos de la placa con flecha negativa	26
Tabla 5-1. Circulación del vórtice expresada en mm <sup>2</sup> /s según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.	41
Tabla 5-2. Radio del núcleo del vórtice expresado en mm según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.	41
Tabla 5-3. Circulación del vórtice expresada en mm <sup>2</sup> /s según el modelo de Lamb Oseen para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.	41
Tabla 5-4. Radio del núcleo del vórtice expresado en mm según el modelo de Lamb-Oseen para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.	41
Tabla 5-5. Error máximo cometido al tomar el valor medio del intervalo dado por la herramienta “Curve Fitting” con un intervalo de confianza del 95%	42
Tabla 5-6. Circulación del vórtice expresada en mm/s según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa curvada con flecha negativa junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.	44
Tabla 5-7. Radio del núcleo del vórtice expresada en mm según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa curvada con flecha negativa junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.	44
Tabla 5-8. Error máximo cometido al tomar el valor medio del intervalo dado por la herramienta “Curve Fitting” con un intervalo de confianza del 95%	45
Tabla 5-9. Comparación de los parámetros para placa sin curvar y curvada a una velocidad de 30 cm/s	47
Tabla 5-10. Comparación de los parámetros para placa sin curvar y curvada a una velocidad de 50 cm/s	48
Tabla 5-11. Valores de la circulación para una placa placa cuadrada de 150mm de lado [11]	49
Tabla 5-12. Comparación de valores de circulación para la placa cuadrada [11] y la placa rectangular con flecha negativa	49
Tabla 5-13. Comparación de valores de circulación para placa cuadrada con curvatura [11] y para placa rectangular con flecha negativa y curvatura.	50
Tabla 5-14. Valores de circulación para una placa cuadrada con curvatura y bordes cilíndricos ensayada en [11]	51



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1-1. Fotografía de vórtices formados alrededor de la isla de Guadalupe tomada por NASA	1
Figura 1-2. Esquema de funcionamiento de un mezclador de flujo [3]	2
Figura 1-3. (a) Mezclador de paletas Micron®, a la izquierda. (b) Mezclador helicoidal, a la derecha.	2
Figura 1-4. (a) Mezclador de tambor Mixema®, a la izquierda. (b) Mezclador de turbina INDCO®, a la derecha.	3
Figura 1-5. Vórtices formados en las superficies sustentadoras de un F/A-18E Super Hornet. [James R. Evans, Marina de los EEUU] (Océano Pacífico, 2011) [5]	4
Figura 1-6. Winglets de un Boeing 737 MAX. [Belyakov, Oleg V.] (2016) [9]	4
Figura 1-7. Tanque de cultivo de algas. [10]	5
Figura 2-1. Representación del módulo del vector velocidad en función de la distancia adimensional al centro del torbellino (supuesto situado en el origen de ordenadas) [13]	11
Figura 2-2. Esquema de la circulación a lo largo de un ala. [Olivier Cleynen] [15]	11
Figura 2-3. Representación del torbellino de arranque y la circulación de igual módulo y sentido opuesto generada alrededor del perfil. [16]	12
Figura 2-4. Vista trasera de un avión en vuelo. Fenómeno “downwash” inducido por los torbellinos de punta de ala.	13
Figura 2-5. Representación gráfica de la resistencia inducida. [18]	13
Figura 2-6. Regiones que forman un vórtice. [12]	14
Figura 2-7. Modelos de vorticidad. [19]	14
Figura 2-8. Velocidad tangencial de un vórtice según el modelo de Lamb-Oseen y el modelo de Burnham-Hallock.	16
Figura 2-9. Circulación a lo largo de una circunferencia cerrada de distancia $r$ al centro del vórtice según el modelo de Lamb-Oseen y Burnham-Hallock.	17
Figura 2-10. A la izquierda, representación de la velocidad tangencial frente al radio para una circulación dada según el modelo de Burnham-Hallock. A la derecha, ídem según el modelo de Lamb Oseen.	17
Figura 3-1. Montaje del experimento completo	19
Figura 3-2. Partículas de ABS	20
Figura 3-3. (a) A la izquierda, depósito utilizado para el vertido de partículas ABS. (b) A la derecha, tubo para la inyección de partículas ABS en el canal.	20
Figura 3-4. Canal hidráulico	21
Figura 3-5. Interfaz del software RedLake Midas utilizado para la realización de las grabaciones	22
Figura 3-6. (a) A la izquierda, cámara utilizada para la realización del experimento. (b) A la derecha, iluminación del experimento	22
Figura 3-7. Coeficientes de sustentación de los perfiles a lo largo de la envergadura. Imagen obtenida con la implementación de un código de Matlab del método Vortex Lattice.	23
Figura 3-8. Forma en planta de la placa plana con flecha positiva	24

Figura 3-9. Placa plana con flecha positiva fijada en el canal	25
Figura 3-10. (a) Forma en planta de la placa plana con flecha negativa. (b) Placa plana con flecha negativa fijada en el canal.	25
Figura 3-11. (a) Esquema de la forma en planta del perfil y la línea de doblado. (b) Fotografía del perfil ya curvado	26
Figura 3-12. Perfil con flecha negativa y curvatura fijado en el canal	27
Figura 3-13. (a) A la izquierda, perfil rectangular de poca envergadura antes de ser instalado en el canal. A la derecha, (b) perfil rectangular con poca envergadura tras ser instalado en el canal.	28
Figura 4-1. Representación de una trayectoria helicoidal similar a la seguida por las partículas de la corriente	29
Figura 4-2. Desarrollo en el plano de la trayectoria de la partícula	30
Figura 4-3. Vista 2D del movimiento helicoidal de una partícula ABS	30
Figura 4-4. Imagen de la regla utilizada para calibrar la imagen	31
Figura 4-5. Fotograma perteneciente al vídeo objeto de análisis	31
Figura 4-6. Imagen tras la sustracción de fondo y umbralización	32
Figura 4-7. Coordenadas de la partícula proporcionadas por el programa ImageJ	32
Figura 4-8. Trayectoria de la partícula representada con el programa Matlab	33
Figura 4-9. Representación de la velocidad tangencial frente al radio dentro del vórtice	34
Figura 4-10. Interfaz de la herramienta Curve Fitting	34
Figura 4-11. Resultados proporcionados por la herramienta Curve Fitting	35
Figura 4-12. Ajuste residual <sup>2</sup>	35
Figura 4-13. Ajuste del modelo Burnham-Hallock a los datos obtenidos en el laboratorio	36
Figura 5-1. Tinta y depósito utilizados para la visualización de la corriente	37
Figura 5-2. Visualización con tinta azul de la corriente alrededor del perfil. A la izquierda, se observa cómo la corriente permanece adherida cerca de la raíz y a la derecha se observa el desprendimiento de la corriente en la punta de la geometría alar.	38
Figura 5-3. Velocidad tangencial del vórtice a 30 cm/s y 7.5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha.	39
Figura 5-4. Velocidad tangencial del vórtice a 30 cm/s y 10 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha.	39
Figura 5-5. Velocidad tangencial del vórtice a 50 cm/s y 7.5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha.	40
Figura 5-6. Velocidad tangencial del vórtice a 50 cm/s y 10 grados según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha.	40
Figura 5-7. Dependencia de la circulación con el ángulo de ataque para una velocidad dada..	42
Figura 5-8. Dependencia del radio del núcleo con la velocidad para un ángulo de ataque dado	43
Figura 5-9. (a) A la izquierda, velocidad tangencial del vórtice a 30cm/s y 7.5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock. (b) A la derecha, velocidad tangencial del vórtice a 30 cm/s y 10 grados.	43
Figura 5-10. (a) A la izquierda, velocidad tangencial del vórtice a 50cm/s y 7.5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock. (b) A la derecha, velocidad tangencial del vórtice a 50cm/s y 10 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock.	44
Figura 5-11. Dependencia de la circulación con el ángulo de ataque en la placa con curvatura para una velocidad dada.	45

- Figura 5-12. Dependencia del radio del núcleo del vórtice con el ángulo de ataque para una velocidad dada. 46
- Figura 5-13. Comparación de curvas características para placa plana y placa con curvatura a 30 cm/s. 47
- Figura 5-14. Comparación de curvas características para placa plana y placa con curvatura a 50 cm/s y ángulo de ataque de 7.5 grados, a la izquierda y 10 grados, a la derecha. 47
- Figura 5-15. Evolución del coeficiente de presión en el intradós y extradós en función de la distancia al borde de ataque adimensionalizada  $x/c$ . [13] 49



# Notación

---

$\partial x/\partial y$	Derivada parcial de x con respecto a y
$Dx/Dt$	Derivada sustancial de x
$\nabla$	Gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergencia
$\nabla \times$	Operador rotacional
$\rho$	Densidad
$\mu$	Viscosidad
$\vec{v}$	Vector velocidad
$P$	Presión
$f_m$	Fuerzas másicas
$Q$	Potencia calorífica
$c_v$	Capacidad calorífica de un gas a volumen constante
$k$	Conductividad térmica
$\underline{\underline{\tau'}}$	Esfuerzos viscosos
$e$	Energía
$\infty$	Infinito. Como subíndice indica que la magnitud corresponde al flujo incidente
$n_s$	Vector normal a una superficie
$\Sigma_s$	Superficie
$Re$	Número de Reynolds
$St$	Número de Strouhal
$Fr$	Número de Froude
$g$	Gravedad
$M$	Número de Mach
$a$	Velocidad del sonido
$\Phi$	Fución potencial
$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$	Vectores unitarios correspondientes a coordenadas cilíndricas
$\Gamma$	Circulación
$\oint$	Integral de línea
$\vec{\omega}$	Vector vorticidad
$v_\theta$	Velocidad tangencial
$R_c$	Radio del núcleo del vórtice
$\ll$	Mucho menor
$\gg$	Mucho mayor
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
$\sim$	Del orden de





# 1 INTRODUCCIÓN

---

Los vórtices o torbellinos son flujos en movimiento rotatorio alrededor de un punto o un eje. Este fenómeno se da a diferentes escalas en el mundo físico, desde vórtices microscópicos hasta enormes tornados o galaxias espirales. Las razones físicas por las que se crean estos vórtices son también muy diversas. En la Figura 1-1 se observa un ejemplo de la existencia de dicho fenómeno a gran escala en la naturaleza [1]. Se trata de lo que se conoce como vórtices de Von-Kármán, una calle de vórtices provocados por la separación no estacionaria de un fluido al atravesar cuerpos sumergidos en él. Este es sólo uno de los muchos ejemplos en los que se observa la presencia vórtices en el movimiento de fluidos.



Figura 1-1. Fotografía de vórtices formados alrededor de la isla de Guadalupe tomada por NASA

En este primer capítulo, se recogen los principales motivos que han llevado a la realización de este Trabajo Fin de Grado, dando una visión general del contexto que rodea a los mezcladores y vórtices de punta de ala, fija un punto de partida y presenta la estructura del documento.

## 1.1 Motivación y objetivos

La mezcla de sustancias, tanto líquidas como sólidas, es una operación fundamental en la mayoría de los procesos que se llevan a cabo en la actualidad. Debido a la diferente naturaleza de cada uno de ellos y los distintos objetivos que se persiguen, así como el grado de mezclado, son muy diversos los dispositivos mezcladores que se utilizan actualmente, llegando a ser algunos de ellos muy específicos. Además, también son muy diferentes los principios en los que basan su funcionamiento cada uno de ellos. Son muy diversas las clasificaciones que se pueden hacer de los dispositivos mezcladores atendiendo a diferentes criterios. A continuación, se presenta una clasificación según el principio de funcionamiento de cada uno de ellos: [2]

- Mezcladores de flujos o corrientes: Los flujos se introducen por medio de una bomba y la mezcla se produce por la interferencia de los flujos corrientes al atravesar una serie de elementos de mezcla. La forma y disposición de estos elementos de mezcla varía en los diferentes mezcladores, pero el principio es similar. Se utiliza en sistemas continuos o circulantes para la mezcla de fluidos miscibles. En la Figura 1-2, se representa un esquema del funcionamiento de este tipo de dispositivo.

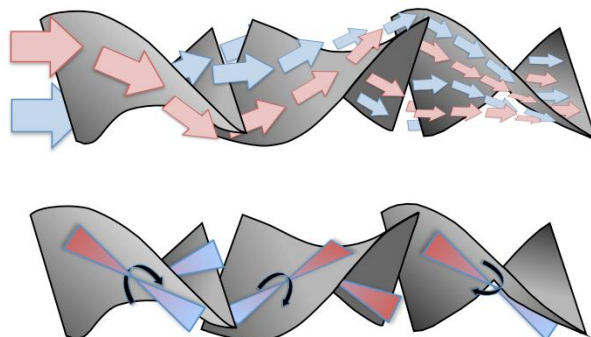


Figura 1-2. Esquema de funcionamiento de un mezclador de flujo [3]

- Mezcladores de paletas o brazos: Consisten en una o varias paletas unidas a un eje que gira axialmente dentro de un recipiente, Figura 1-3 (a). Los materiales son empujados alrededor del recipiente siguiendo una trayectoria circular. La forma de las paletas puede ser muy diversa según los tipos de productos a mezclar y el fabricante.
- Mezcladores de hélices o helicoidales: Este tipo de mezcladores combinan dos tipos de movimiento: el rotatorio y el axial. Su eje, al girar, empuja constantemente los productos hacia delante a la vez que se produce la mezcla. Este tipo de dispositivo de mezcla es eficaz con líquidos cuya viscosidad no es muy elevada y con sólidos de viscosidad ligera. Con sólidos cuya densidad es muy diferente a la de los líquidos es difícil evitar su sedimentación. En la Figura 1-3 (b) se observa un mezclador helicoidal.



Figura 1-3. (a) Mezclador de paletas Micron®, a la izquierda. (b) Mezclador helicoidal, a la derecha

- Mezcladores de turbinas o de impulsos centrífugos: Contienen una o varias bombas centrífugas trabajando en un recipiente. El material entra en el impulsor de manera axial por su abertura central y los álabes aceleran el material y lo descargan por el impulsor o rodete a una velocidad elevada. Son útiles para mezclar líquidos viscosos o lodos espesos. En la Figura 1-4 (b) se observa un mezclador de turbina INDCOR®.
- Mezclador de tambor o de volteo: Es un tipo de mezclador sencillo y útil que consiste en un recipiente cilíndrico montado sobre un eje horizontal y que gira con él. El contenido se mezcla a medida que el tambor o cilindro gira. Se usa para integrar polvos, hormigón o concreto. En la Figura 1-4 (a) se observa un mezclador de tambor Mixema®.



Figura 1-4. (a) Mezclador de tambor Mixema®, a la izquierda. (b) Mezclador de turbina INDCO®, a la derecha.

Uno de los aspectos a tener en cuenta en la elección de un mezclador es la pérdida de carga que introduce al fluido. Según Bernoulli, la energía total de un fluido incompresible, no viscoso y laminar que se mueve a lo largo de un conducto cerrado permanece constante. Sin embargo, en los fluidos que no cumplen dichas condiciones, se producen pérdidas de energía, denominadas pérdidas de carga, y representadas en (1-1) como  $h$ . Dichas pérdidas de carga pueden estar provocadas por la fricción del fluido con el conducto, denominadas pérdidas de carga continua  $h_r$ , o por la existencia de elementos que se oponen o dificultan el paso del fluido, denominadas pérdidas de carga localizadas  $h_L$ . Estos elementos pueden ser válvulas, curvas acentuadas en el conducto, ensanchamientos bruscos, dispositivos mezcladores o cualquier obstáculo que suponga una pérdida de energía.

$$y_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum (h_r + h_L) \quad (1-1)$$

siendo  $y$  el valor de la altura del fluido desde el sistema de referencia en cada momento,  $P$  la presión del fluido,  $\rho$  la densidad y  $g$  la gravedad. Las pérdidas de carga localizadas se definen con la letra  $h_L$  y su expresión es la siguiente

$$h_L = K \frac{v^2}{2g} \quad (1-2)$$

Las pérdidas de carga son proporcionales a la velocidad como se observa en (1-2), y dependen de un factor adimensional  $K$ , que conviene que sea el mínimo posible.

Los perfiles aerodinámicos son dispositivos diseñados para proporcionar valores elevados de sustentación y valores pequeños de resistencia aerodinámica, de modo que su eficiencia aerodinámica sea alta, lo que supondría una pérdida de carga no muy elevada. Este hecho ha motivado el estudio del uso de vórtices de punta de ala como mecanismo de mezcla. Las causas que generan el movimiento rotatorio de fluidos pueden ser muy diversas. En el caso de los vórtices de punta de ala, se generan por la existencia de una diferencia de presiones entre extradós e intradós, que lleva al fluido a rebordear el borde marginal hacia la zona de menor presión. Esta diferencia de presiones es también la causa de la existencia de sustentación. Por lo tanto, la formación de vórtices de punta de ala es una consecuencia inmediata de la generación de sustentación. Este fenómeno, aunque se da en mayor medida en las alas debido al gran gradiente de presiones, también ocurre en otras superficies sustentadoras de las aeronaves. Debido a su naturaleza, pueden aparecer en cualquier superficie donde exista una diferencia de presión considerable, como se observa en Figura 1-5.



Figura 1-5. Vórtices formados en las superficies sustentadoras de un F/A-18E Super Hornet. [James R. Evans, Marina de los EEUU] (Océano Pacífico, 2011) [5]

Los vórtices de punta de ala suponen un gran problema ya que representan una parte importante de la resistencia total ofrecida por la aeronave, provocando una disminución de la eficiencia y un aumento del gasto de combustible necesario para el vuelo. En aeronaves de gran tamaño, la velocidad del núcleo del torbellino puede llegar a ser de hasta 100m/s con un diámetro de 30 metros [6]. Esto hace que este fenómeno no solo sea un problema para la aeronave que lo genera sino para aquellas que vuelan cerca. Estos problemas se hicieron claramente evidentes en los años 70 cuando el Boeing 747 y otras aeronaves de gran tamaño empezaron a operar y los pilotos de aeronaves más pequeñas informaron de la existencia de fuertes turbulencias al despegar tras estas aeronaves [7]. Para evitar dichas turbulencias, las aeronaves deben guardar una distancia de seguridad entre sí en las maniobras de despegue y aterrizaje. Por estas razones, las empresas fabricantes de aeronaves centran sus esfuerzos en la atenuación de estos torbellinos. Boeing, en su última familia de aviones, Boeing 737 MAX, ha desarrollado un innovador diseño de winglet que permite una reducción adicional del 1% en el consumo de combustible frente a los winglets tradicionales. Esto da una idea de la importancia que tiene una pequeña reducción del gasto de combustible en los costes totales de las aerolíneas [8]. En la Figura 1-6 se observa un avión de Boeing con este tipo de winglets.



Figura 1-6. Winglets de un Boeing 737 MAX. [Belyakov, Oleg V.] (2016) [9]

En nuestro caso, sin embargo, la gran intensidad de los torbellinos supone una ventaja para el uso de estos como mecanismo mezclador de fluidos. El medio en el que se espera usar estas geometrías alares y los vórtices generados como forma de mezclado es en una línea fluida donde la propia inercia del fluido sea suficiente para conseguir el objetivo. Atendiendo a la clasificación presentada en este documento, podría agruparse dentro del

tipo de mezcladores de flujos o corrientes. Como ventaja, se puede descartar el hecho de que se trata de dispositivos sencillos cuya única instalación necesaria sería la fijación de las geometrías alares en el lugar y posición convenientes. Además, no es necesario el uso de un recipiente determinado, ni la instalación de un eje rotatorio ni ningún otro dispositivo adicional. Uno de los posibles usos que se le puede dar a estos dispositivos es en el mezclado de diferentes componentes dentro de un conducto, como podría ser la mezcla de reactivos en un conducto de un reactor. Sin embargo, aún no se ha estudiado el grado de homogeneidad de la mezcla que se podría conseguir con este tipo de dispositivos.

El principal uso que se le espera dar a estos dispositivos, y en el que no es necesaria la obtención de una mezcla completamente homogénea, es en el campo del cultivo de microalgas. En la actualidad, existen diferentes formas de cultivar algas; una de ellas, como se observa en Figura 1-7, se lleva a cabo en tanques abiertos expuestos a la luz solar. En este tipo de cultivos, es necesario que todas las algas tengan acceso a la luz solar, ya que es imprescindible para la realización del proceso de fotosíntesis. A veces, las algas que se acumulan en la superficie de los tanques privan al resto de microalgas del acceso a la luz solar. En pequeños tanques, este fenómeno puede evitarse con el uso de ruedas de paletas, con las que se consigue generar una agitación suficiente. Sin embargo, en tanques de mayor tamaño, no es suficiente con la agitación producida por las ruedas de paletas y es necesaria la introducción de dispositivos mezcladores adicionales si se quiere mantener la productividad del cultivo. Con la turbulencia generada por los vórtices de punta de ala, se pretende conseguir esta agitación adicional, que permita que todas las microalgas reciban radiación solar, aunque sea de forma alterna, y así aumentar la mezcla de  $\text{CO}_2$  y nutrientes, con la consiguiente mejora de la productividad. Además, como se ha comentado anteriormente, estos dispositivos podrían instalarse en los tanques ya existentes sin más que ajustar sus dimensiones a los requisitos de cada cultivo.

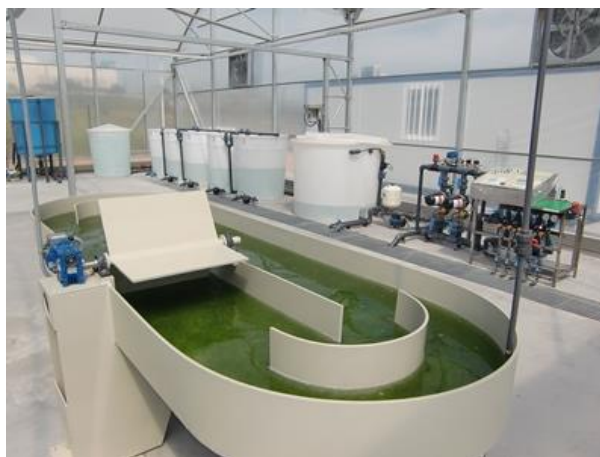


Figura 1-7. Tanque de cultivo de algas. [10]

Por las razones expuestas anteriormente, el objetivo de este trabajo fin de grado es avanzar en el proceso de búsqueda de una geometría que, introduciendo una pérdida de carga razonable y sin necesidad de potencia externa, sea capaz de generar unos vórtices con la suficiente intensidad para mezclar los fluidos deseados. Para ello, se realizarán experimentos en el laboratorio del departamento de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla y posteriormente se analizarán los resultados con el fin de caracterizar los parámetros que definen los vórtices formados.

## 1.2 Punto de partida

En estudios anteriores, [11], se han obtenido resultados y conclusiones que servirán como punto de partida para este trabajo. De estos estudios se obtiene, entre otras, la conclusión de que los aumentos en la velocidad y ángulo de ataque están directamente relacionados con el aumento de la intensidad de los vórtices. También, que la curvatura del perfil aumenta la velocidad angular del fluido en el vórtice y que el espesor de los bordes marginales está estrechamente ligado con la distancia a la que se alcanzan las velocidades máximas. Por otro lado, se propone estudiar geometrías con ángulo de flecha ya que uno de los efectos de la flecha es que desplaza el coeficiente de sustentación máximo hacia la punta de ala, lo que generaría vórtices más intensos. Partiendo

de estas y otras premisas, se procede al estudio de diferentes geometrías con el fin de maximizar la intensidad de los vórtices y avanzar en el proceso de encontrar una geometría que se ajuste a las necesidades

### **1.3 Estructura del documento**

El presente trabajo está dividido en 7 capítulos, con el fin de exponer de forma clara el contenido de este Trabajo Fin de Grado. El primero de ellos, que concluye con este apartado, ha servido para exponer los principales motivos que han llevado a la realización de este Trabajo Fin de Grado, hacer una breve introducción sobre los mezcladores y la importancia de los vórtices de punta de ala en el mundo aeronáutico, así como definir el punto de partida. En el siguiente capítulo, se hace una introducción a la Aerodinámica potencial, una descripción más en profundidad de los vórtices y sus modelos de estudio y se plantea el problema de este trabajo. En el tercer capítulo, se describe el montaje experimental y los dispositivos que se han utilizado para el correcto desarrollo de los experimentos. Además, se presentan las geometrías ensayadas en el laboratorio. El cuarto capítulo presenta el proceso de obtención de datos a partir de las grabaciones obtenidas en el laboratorio. En el quinto capítulo, se reflejan los datos obtenidos en los diferentes experimentos y se hace una interpretación de estos. Por último, el séptimo se dedica a recoger las conclusiones de este trabajo y proponer líneas futuras.



# 2 VÓRTICES DE PUNTA DE ALA

---

Los vórtices de punta de ala son flujos rotatorios creados en cualquier superficies donde se genere sustentación como consecuencia de una diferencia de presiones [12]. La intensidad de dichos vórtices dependerá de la sustentación generada y la envergadura del avión que los genera. Puesto que son consecuencia inevitable de la generación de sustentación, su intensidad variará en las distintas fases de vuelo. Generalmente, dichos vórtices serán más intensos en las maniobras de despegue y aterrizaje de los aviones, suponiendo una amenaza para aquellos aviones de menos tamaño. La física de estos flujos en aplicaciones aeronáuticas es extremadamente compleja por la gran turbulencia, efectos tridimensionales y la existencia de zonas con fuertes gradientes de velocidad. En este capítulo, se recogen las teorías y modelos en los que se ha basado este trabajo para el estudio de este fenómeno.

## 2.1 Aerodinámica potencial

La Aerodinámica potencial es una parte de la Aerodinámica que estudia el movimiento de fluidos alrededor de objetos fuselados bajo condiciones en las que los esfuerzos viscosos están confinados en regiones estrechas del dominio fluido. La viscosidad es una propiedad de los fluidos que cuantifica la resistencia de estos a fluir. En fluidos como el aire y el agua bajo condiciones específicas, la viscosidad es muy pequeña, pudiendo llegar a considerarse despreciable. Por ello, las fuerzas y momentos generados sobre superficies sustentadoras pueden calcularse haciendo uso de esta teoría, a excepción de una estrecha región denominada capa límite, y dominada por los esfuerzos viscosos. [13].

El movimiento de fluidos puede ser caracterizado de forma genérica por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones son resultado de la aplicación de los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica, y fueron obtenidas por Clade-Louis Navier en 1822, a partir de un trabajo experimental. Posteriormente, y de manera independiente, fueron deducidas por George Stokes en 1845. Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales cuya resolución permite obtener el campo de velocidad, densidad y presión en cualquier punto del fluido. Sin embargo, la obtención de una solución exacta de estas ecuaciones ha sido y sigue siendo un reto para matemáticos e ingenieros. La introducción del concepto de capa límite por Ludwig Prandtl en 1904 supuso un gran avance ya que permitiría dividir el dominio fluido en dos regiones, simplificando notablemente dichas ecuaciones. [14]. La existencia de esta estrecha capa es la base de las hipótesis simplificativas que permiten obtener una solución aproximada del problema aplicando la teoría potencial.

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-1)$$

- Ecuación de conservación de la masa

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \nabla \underline{\underline{\tau}} + \rho f_m \quad (2-2)$$

- Ecuación de la energía

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{v} \cdot \nabla T = -P \nabla \cdot \vec{v} + \underline{\underline{\tau}}' : \nabla \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2-3)$$

donde  $t$  denota el tiempo,  $f_m$  es el vector de fuerzas másicas,  $c_v$  es la capacidad calorífica del gas a volumen constante y  $k$  es la conductividad térmica. Por otro lado,  $\underline{\underline{\tau}}' : \nabla \vec{v}$  es el término de disipación de energía cinética interna y  $Q_r$  y  $Q_q$  son las potencias caloríficas que recibe el fluido por radiación y por reacción química, expresadas en términos por unidad de volumen. Dicho sistema, debe ser complementado con la ecuación de los gases perfectos,  $\frac{P}{\rho} = R_g T$ , que reduce el número de variables independientes [13]. Dicho sistema, para un cuerpo inmerso en una corriente de velocidad  $U_\infty$ , está sujeto a las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty \quad P &\rightarrow P_\infty \\ \vec{v} &\rightarrow U_\infty \\ T &\rightarrow T_\infty \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow x_s \quad \vec{v} &= 0 \\ T &= T_s \\ kn_s \cdot \nabla T &= k_s n_s \nabla T \end{aligned} \quad (2-5)$$

donde  $x_s$  define la superficie del cuerpo inmerso en el fluido y  $n_s$  al vector normal a dicha superficie.

Las ecuaciones ( 2-1), ( 2-2), ( 2-3) constituyen el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, formado por 5 ecuaciones de cantidad de movimiento, 3 de conservación de la masa y una de conservación de la energía. Como ya se ha comentado, estas ecuaciones no son fáciles de resolver. Por ello, se recurre a ciertas simplificaciones aceptadas en el campo de la Aerodinámica expuestas a continuación:

- Bajo ángulo de ataque,  $\alpha \ll 1$
- Cuerpo esbelto. Esto implica que el espesor del perfil es despreciable frente a otras longitudes características del problema, como la cuerda o la envergadura.
- Viscosidad despreciable. Esto implica  $Re = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu} \gg 1$ , donde  $\rho_\infty$  es la densidad del fluido, que se supondrá constante (flujo incompresible),  $U_\infty$  es la velocidad del fluido,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido y  $L$  la longitud característica del problema. En este caso, la longitud característica será la cuerda del perfil.
- Flujo cuasiestacionario. Esto implica que el número de Strouhal es mucho menor que la unidad,  $St = \frac{fL}{U_\infty} \ll 1$ , donde  $f$  es la frecuencia de desprendimiento de los vórtices.
- Potencia calorífica aportada al fluido por radiación, conducción y reacción química pueden ser despreciadas en la ecuación de la energía.
- $RePr \gg 1$  ya que  $Pr \sim O(1)$  para el aire y del orden de 10 para el agua.
- Fuerzas gravitatorias despreciables. Número de Froude,  $Fr = \frac{U_\infty^2}{gL} \gg 1$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Esto implica que, en primera aproximación, las fuerzas másicas pueden ser despreciadas frente al término de aceleración convectiva.

Hay que tener en cuenta que el hecho de que  $Re \gg 1$  y  $RePr \gg 1$  sólo implica que los términos viscosos y de conducción pueden ser despreciados a distancias del orden de  $L$  del objeto. Esto no implica, sin embargo, que en las regiones cercanas al objeto, donde los gradientes de presión y temperatura son elevados,



puedan aplicarse dichas simplificaciones. No obstante, estas regiones conocidas como capas límites serán estrechas y estarán adheridas al objeto. La existencia de esta fina capa viscosa, como ya se ha indicado anteriormente, permite estudiar el movimiento de fluidos obviando los esfuerzos viscosos en todo el dominio exterior a ella. Por lo tanto, las ecuaciones que permiten determinar los campos de presión, velocidad y temperatura en la región exterior a la capa límite son las siguientes:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-6)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla v_i = -\nabla P_i \quad (2-7)$$

El subíndice  $i$  hace referencia a cada una de las componentes de la velocidad ( $i = x, y, z$ ). Por lo tanto, (2-7) corresponde a 3 ecuaciones.

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (2-8)$$

donde  $\gamma$  representa el coeficiente de dilatación adiabática, definido como la razón entre la capacidad calorífica a presión constante y la capacidad calorífica a volumen constante.

Las condiciones de contorno de este problema simplificado se reducen a:

$$x \rightarrow \infty \quad \begin{array}{l} P \rightarrow P_\infty \\ v \rightarrow U_\infty \\ T \rightarrow T_\infty \end{array} \quad (2-9)$$

$$x \rightarrow x_s \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_s = 0 \quad (2-10)$$

Aunque dichas ecuaciones corresponden a la región exterior a la capa límite, una vez conocidas las velocidades tangenciales en la región exterior a la capa límite es posible estudiar el dominio contenido en ella.

Con las ecuaciones (2-6)-(2-8) ya se tiene un problema simplificado. Sin embargo, aún se trata de un problema no lineal. Para poder resolver el sistema de ecuaciones, es necesario linealizar las ecuaciones. Esta operación es posible gracias a que los campos de velocidades, presión y densidad pueden formularse como la magnitud en el infinito más una perturbación provocada por la existencia de un cuerpo

$$\vec{v}(x, y, z) = U_\infty \vec{e}_x + \vec{v}'(x, y, z) \quad (2-11)$$

$$P(x, y, z) = P_\infty + P'(x, y, z) \quad (2-12)$$

$$\rho(x, y, z) = \rho_\infty + \rho'(x, y, z) \quad (2-13)$$

De esta forma, el problema queda reducido a esta ecuación

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \quad (2-14)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{v}' \rightarrow 0 \quad (2-15)$$

$$(x, y) \in FP \quad v'_z(x, y, 0^\pm) = U_\infty \frac{\partial z_{e,i}}{\partial x} \quad (2-16)$$

$$(x, y) \in Estela \quad \begin{aligned} v'_x(x, y, 0^+) &= v'_x(x, y, 0^-) \\ v'_z(x, y, 0^+) &= v'_z(x, y, 0^-) \end{aligned} \quad (2-17)$$

La condición (2-15) significa que, lejos del cuerpo, la corriente permanece inalterada. La condición (2-16) se conoce como condición de impenetrabilidad y establece cómo debe variar la velocidad para adaptarse al cuerpo inmerso en el fluido, cuya superficie queda definida por  $z_{e,i}$ . En la estela, las velocidades deben ser continuas como indica (2-17).

En cualquier punto,  $\nabla \times \vec{v}' = 0$ . Esto significa que  $\vec{v}'$  deriva de un potencial y puede expresarse de la siguiente forma

$$\vec{v}' = \nabla\Phi \quad (2-18)$$

De este modo, la ecuación (2-14) puede expresarse como

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2-19)$$

A números de Mach bajos,  $M = \frac{\bar{v}}{a} \ll 1$ , el problema queda reducido a una ecuación de tipo Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2-20)$$

con las condiciones de contorno (2-15), (2-16), (2-17), escritas en términos de potencial. Resolviendo la ecuación (2-20) junto con sus condiciones de contorno, puede hallarse la solución al problema de un ala inmersa en una corriente fluida de velocidad  $U_\infty$  a ángulo de ataque  $\alpha$ . Aunque la resolución de este problema no es objeto de este trabajo, a continuación, se exponen una serie de conceptos y teorías que serán útiles para entender cómo se ha llevado a cabo el estudio de los vórtices de punta de ala.

### 2.1.1 Vórtice potencial

La ecuación deducida anteriormente, (2-20), tiene diferentes soluciones y, puesto que se trata de una ecuación lineal, se cumple que la suma de soluciones elementales es también solución del problema. En general, y bajo la hipótesis que ya se han comentado, la combinación de soluciones elementales permite describir problemas reales. Una de las soluciones a estas ecuaciones linealizadas es una función  $\Phi$  correspondiente a un torbellino potencial. Dicha solución es aquella que no depende de la distancia al origen,  $r$ . Por lo tanto, la función potencial debe ser  $\Phi = \Phi(\theta)$ .

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\Pi} \vec{e}_\theta \quad (2-21)$$

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\Pi r} \vec{e}_\theta \quad (2-22)$$

La circulación,  $\Gamma$ , se define como

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (2-23)$$

El valor de la circulación en el caso del torbellino potencial es distinto de 0 por contener a un punto singular. Sin embargo, y como consecuencia del teorema de Stokes, la integral de línea a lo largo de un camino que no encierre al punto en el que se encuentra el torbellino es cero. [13]

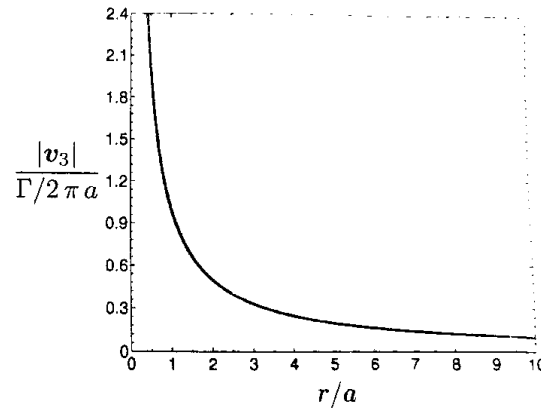


Figura 2-1. Representación del módulo del vector velocidad en función de la distancia adimensional al centro del torbellino (supuesto situado en el origen de ordenadas) [13]

Como se observa en la ecuación (2-22), el campo de velocidades tiende a infinito en el centro del torbellino. Esto se debe a que se trata de una solución correspondiente a un flujo potencial y, por lo tanto, representa un caso meramente teórico. Aunque este modelo servirá en una región alejada del centro del torbellino, existen modelos experimentales que se ajustan más a la realidad y que se expondrán más adelante. Estos modelos permiten caracterizar la zona del fluido en la que los esfuerzos viscosos no pueden ser despreciados. Con la combinación de ambos, se llevarán a cabo los estudios en este trabajo.

### 2.1.2 Fórmula de Kutta. Circulación alrededor de un perfil.

Los vórtices de punta de ala, como se ha indicado anteriormente, son consecuencia de la sustentación generada y de la finitud del ala. Según la teoría potencial, la fuerza que ejerce un fluido de velocidad  $U_\infty$  sobre un perfil viene dada por la fórmula

$$l = \rho_\infty U_\infty \Gamma \quad (2-24)$$

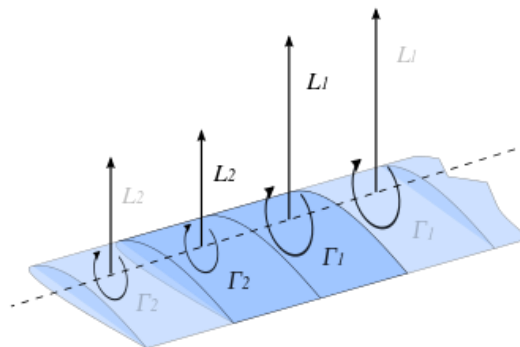


Figura 2-2. Esquema de la circulación a lo largo de un ala. [Olivier Cleynen] [15]

siendo  $\Gamma$  la circulación alrededor del perfil. Esta fórmula se denomina fórmula de Kutta y representa uno de los resultados fundamentales de la Aerodinámica [13]. Como se observa en la fórmula de Kutta, la sustentación está directamente relacionada con la circulación alrededor del ala.

Según el teorema de Berjkness-Kelvin,(2-25), en ausencia de fuerzas viscosas, la circulación alrededor de un perfil y, en consecuencia, la sustentación son nulas si así lo era la circulación inicialmente. Esta aparente paradoja se debe a que la teoría potencial no considera las fuerzas derivadas de la viscosidad. Sin embargo, estas fuerzas no sólo no son despreciables dentro de la capa límite (Prandtl 1904) sino que jugarán un papel importante en la generación de circulación alrededor del perfil.

$$\frac{D}{Dt} [\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}] = \frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (2-25)$$

Cuando se acelera un perfil desde el reposo, la corriente trata de rebordear el borde de salida, pero las fuerzas viscosas dentro de la capa límite provocan la desaceleración de las partículas contenidas en ella y el posterior desprendimiento de la corriente formando un torbellino. Este torbellino se denomina torbellino de arranque y permitirá explicar la existencia de circulación alrededor del perfil sin violar el teorema de Berjkness-Kelvin, puesto que tendrá un valor igual y de sentido opuesto al del torbellino de arranque. Esto significa que alrededor de un camino cerrado que contenga a ambos torbellinos, la circulación total será nula como se observa en Figura 2-3.

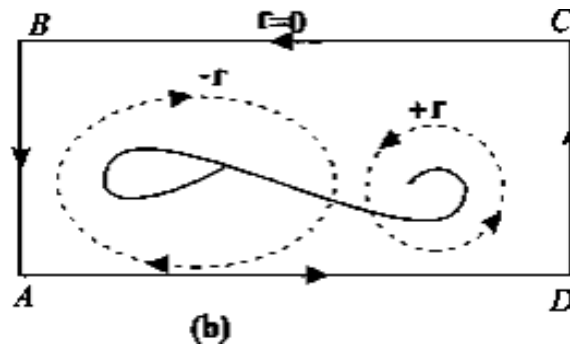


Figura 2-3. Representación del torbellino de arranque y la circulación de igual módulo y sentido opuesto generada alrededor del perfil [16]

El valor de la circulación que fija el torbellino de arranque será el valor de la circulación solución del problema expuesto en las ecuaciones (2-14)-(2-17). Esto se conoce como la condición de Kutta-Joukowski y afirma que la circulación a lo largo de los perfiles del ala tendrá un valor tal que la corriente no rebordee el borde de salida. Esta circulación alrededor del perfil será la circulación relacionada directamente con la sustentación según la fórmula (2-24). Esta explicación deja constancia de que la viscosidad es necesaria para la existencia de sustentación. No puede, por lo tanto, obviarse la existencia de dicha zona viscosa.

## 2.2 Modelos de estudio

La vorticidad es una magnitud física empleada para cuantificar la rotación de un fluido. Matemáticamente, se trata de un campo vectorial definido por el rotacional de las velocidades. Se define formalmente como el rotacional del campo de velocidades y se puede interpretar como una medida del giro local de un elemento de volumen.

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (2-26)$$

Los vórtices de punta de ala, como ya se ha definido en la introducción de este documento, son flujos de aire rotatorios que se forman en los bordes marginales del ala de los aviones como consecuencia del gradiente de presiones existente entre extradós e intradós. El campo de velocidades creado alrededor de un ala finita que genera sustentación puede ser modelado como una superposición de torbellinos de intensidad  $\Gamma_i$  distribuidos a lo largo de la envergadura, como se observa en la figura Figura 2-2, y de torbellinos de punta de ala, como se

observa en la Figura 2-4. Estos últimos modifican la aerodinámica del ala induciendo una velocidad vertical descendente denominada “downwash”. [17]

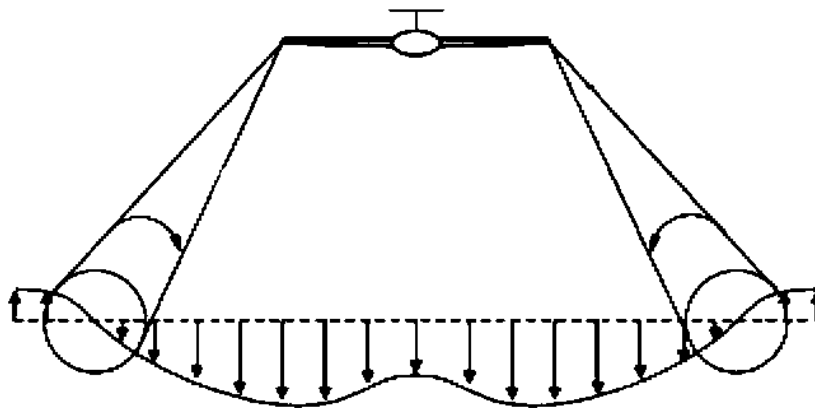


Figura 2-4. Vista trasera de un avión en vuelo. Fenómeno “downwash” inducido por los torbellinos de punta de ala.

Esta velocidad inducida descendente defleca la corriente un cierto ángulo,  $\alpha_i$  en la Figura 2-5, lo que provoca que la corriente incida en el perfil con un ángulo de ataque menor,  $\alpha_0$ , generando una resistencia añadida ya nombrada anteriormente: la resistencia inducida.

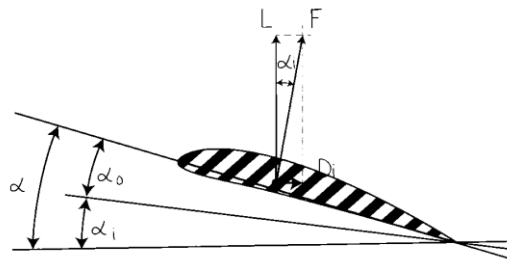


Figura 2-5. Representación gráfica de la resistencia inducida. [18]

Como se observa en la Figura 2-5, el ángulo inducido por la corriente descendente genera una componente de la fuerza,  $D_i$ , en sentido opuesto al movimiento. Los vórtices de punta de ala no solo provocan la aparición de una componente adicional de resistencia, sino que también disminuyen la sustentación del ala al igualar las presiones entre intradós y extradós. Se observa, por lo tanto, que la generación de sustentación y la intensidad de los torbellinos de punta de ala están directamente relacionados entre sí. A continuación, se detallan características y distintos modelos de estudio de vórtices.

Un vórtice desarrolla su movimiento alrededor de un núcleo. El tamaño de dicho núcleo puede variar dependiendo de diferentes factores y está rodeado de una región exterior en la que la velocidad disminuye al aumentar la distancia al centro del vórtice. Como se observa en la Figura 2-6, el vórtice se divide en tres regiones. La región más cercana al centro del vórtice se denomina núcleo del vórtice y se trata de una región dominada fuertemente por las fuerzas de viscosidad y delimitada por el radio del núcleo,  $R_c$ . Rodeando al núcleo, se encuentra una zona delimitada por el radio viscoso,  $R_v$ , en la que se produce un cambio gradual entre la dominancia de las fuerzas viscosas y las fuerzas convectivas. Por último, se encuentra una región exterior donde las velocidades inducidas pueden representarse siguiendo el modelo de flujo potencial descrito anteriormente [12].

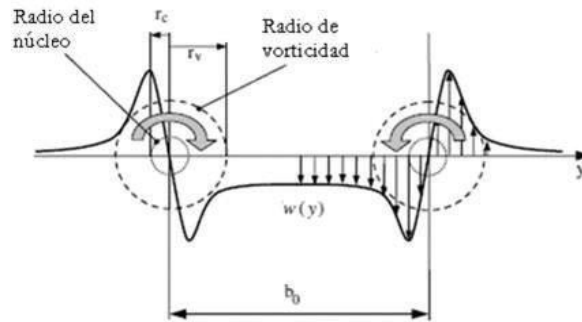


Figura 2-6. Regiones que forman un vórtice. [12]

Los principales parámetros que definen un vórtice son los siguientes:

- Velocidad tangencial ( $v_\theta$ ) : Velocidad lineal de rotación de las partículas.
- Vorticidad ( $\vec{\omega}$ ): Definida al comienzo de este capítulo, cuantifica la rotación del fluido.
- Circulación ( $\Gamma$ ) : Integral de línea del campo de velocidades tangencial a lo largo de un camino que encierra al vórtice. En un vórtice real, la circulación es función de la distancia al centro del vórtice. Sin embargo, existe un valor característico de la circulación ya que, alejado de la región viscosa, la velocidad tangencial decrece siguiendo una tendencia  $1/r$ , como se ha visto en el caso del vórtice potencial; y la circulación de una distribución de velocidades del tipo  $1/r$  permanece constante al aumentar  $r$ . Por lo tanto, existe un valor característico de la circulación que se considera el que encierra la integral de línea en la frontera de la región viscosa y no viscosa.
- Radio del núcleo ( $R_c$ ): Definido anteriormente, delimita la región donde las fuerzas de viscosidad son dominantes. A dicha distancia se alcanzan las velocidades tangenciales máximas.
- Número de Reynolds del vórtice ( $Re_\Gamma$ ):  $Re_\Gamma = \Gamma/\nu$

A continuación, en la Figura 2-7, se representa la velocidad tangencial frente al radio siguiendo diferentes modelos.

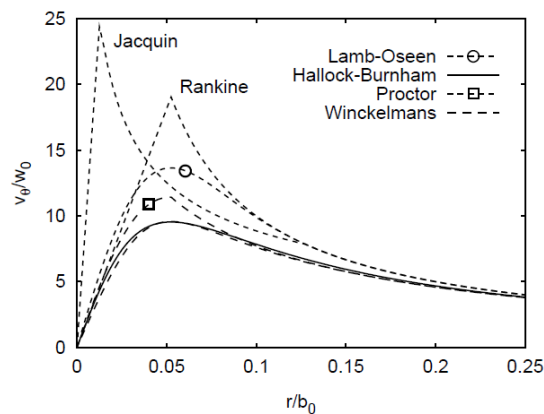


Figura 2-7. Modelos de vorticidad. [19]

Los modelos vienen descritos mediante las siguientes ecuaciones:

- Modelo de Rankine

$$v_{\theta} = \begin{cases} \frac{r}{R_c} & r < R_c \\ \frac{R_c}{r} & r > R_c \end{cases} \quad (2-27)$$

- Modelo de Lamb-Oseen

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - e^{-1.2526 \left( \frac{r}{R_c} \right)^2} \right] \quad (2-28)$$

- Modelo de Burnham-Hallock

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{r^2}{r^2 + R_c^2} \quad (2-29)$$

- Modelo Proctor

$$v_{\theta} = \begin{cases} 1.4 \frac{R_c}{r} \left( 1 - e^{-\beta \left( \frac{1}{B} \right)^{0.75}} \right) \left( 1 - e^{-1.2526 \left( \frac{r}{R_c} \right)^2} \right) & r < R_c \\ \frac{R_c}{r} \left( 1 - e^{-\beta \left( \frac{1}{B} \right)^{0.75}} \right) & r > R_c \end{cases} \quad (2-30)$$

donde  $B$  corresponde con la envergadura del ala y  $\beta$  es un parámetro que suele tomar el valor de 10.

El modelo de Rankine es el modelo más sencillo, aunque no se ajusta muy bien a la realidad. Dicho modelo consiste en un flujo central que rota como un sólido rígido conteniendo una vorticidad constante y un flujo potencial exterior sin vorticidad. El campo de velocidades crece linealmente hasta un valor máximo y, a continuación, decrece según  $1/r$ . El vórtice de Lamb-Oseen, por su parte, es una solución analítica de las ecuaciones de Navier-Sokes. En este modelo, la región central viscosa enlaza con la región no viscosa de Rankine y la velocidad decae a una razón de  $1/r$  a partir de  $2R_c$ . El modelo de Burnham-Hallock es el modelo más usado en las aplicaciones de vórtices de punta de ala. El modelo Proctor se basa en un análisis detallado de observaciones de la velocidad tangencial. Este modelo ha sido utilizado para la inicialización de grandes simulaciones de descomposición de vórtices de la estela en ambientes turbulentos y estratificados. [19]. Los modelos aquí descritos no son los únicos modelos utilizados para el estudio de vórtices de punta de ala; sin embargo, son los más usados. En este trabajo se usará el modelo de Burnham-Hallock y el modelo de Lamb-Oseen.

### 2.2.1 Comparación de los modelos Burnham-Hallock y Lamb Oseen

A continuación, se representan algunos de los parámetros característicos del vórtice según el modelo de Burnham-Hallock y Lamb-Oseen para una circulación y un radio del núcleo correspondientes a uno de los ensayos llevados a cabo en este trabajo ( $\Gamma = 19480 \text{ mm}^2/\text{s}$  y  $R_c = 4,9 \text{ mm}$ ).

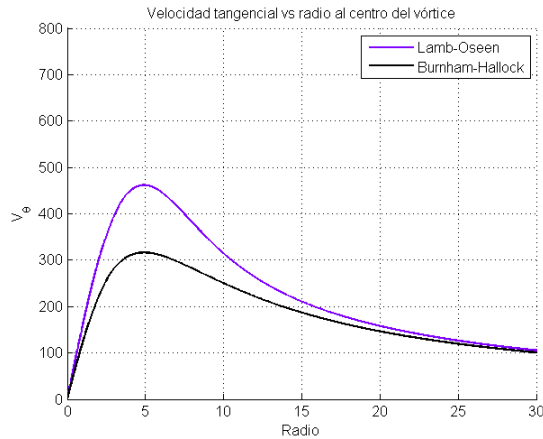


Figura 2-8. Velocidad tangencial de un vórtice según el modelo de Lamb-Oseen y el modelo de Burnham-Hallock.

Se observa en la Figura 2-8 que existe una diferencia de más de 100 mm/s entre los valores máximos de velocidades alcanzadas por el fluido en el vórtice para una circulación y radio del núcleo constantes.

La circulación como función de la distancia al centro del vórtice puede definirse en función de la velocidad tangencial. Así, partiendo de la definición de circulación se tiene

$$\Gamma(r) = \oint_C \vec{v}(r) \cdot d\vec{l} = 2\pi r v_\theta(r) \quad (2-31)$$

que permite representar el valor de la circulación en función de la distancia al centro del torbellino. Como se observa en la Figura 2-9, la circulación aumenta dentro de la zona viscosa con la distancia, como lo hace la velocidad, hasta alcanzar un valor constante, que es el que se considera como valor característico de la circulación. Esto se debe a que, como ya se ha comentado anteriormente, la circulación que encierra una distribución de velocidades correspondiente a un vórtice potencial excluyendo el punto de velocidad singular es nula. Es decir, el valor total de la circulación de un vórtice está contenido en una región y fuera de ella, la circulación se mantiene constante.



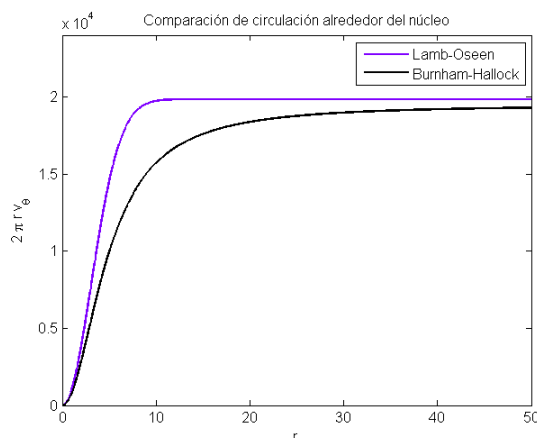


Figura 2-9. Circulación a lo largo de una circunferencia cerrada de distancia  $r$  al centro del vórtice según el modelo de Lamb-Oseen y Burnham-Hallock.

Se observa en la Figura 2-9 que la circulación, en el caso del modelo de Lamb-Oseen, alcanza su valor característico a una distancia de  $2Rc$ , que en este caso corresponde a 9,8 mm.

También es importante destacar la importancia de la distancia a la que se dan las velocidades máximas, es decir, el valor del radio del núcleo. Esta importancia se debe a que modificará considerablemente las velocidades máximas para una circulación dada o, en otro caso, el valor de la circulación del vórtice para una velocidad máxima dada. En este caso, se mantiene el valor de la circulación  $\Gamma = 19480$  y se varía el valor del radio. En la Figura 2-10, se ha representado el valor de la velocidad tangencial frente a la distancia al centro del vórtice para una circulación fija variando el valor del radio del núcleo. Se observa claramente cómo una pequeña diferencia en el valor del radio del núcleo puede influir significativamente en el valor de las velocidades máximas que se alcanzan en el vórtice.

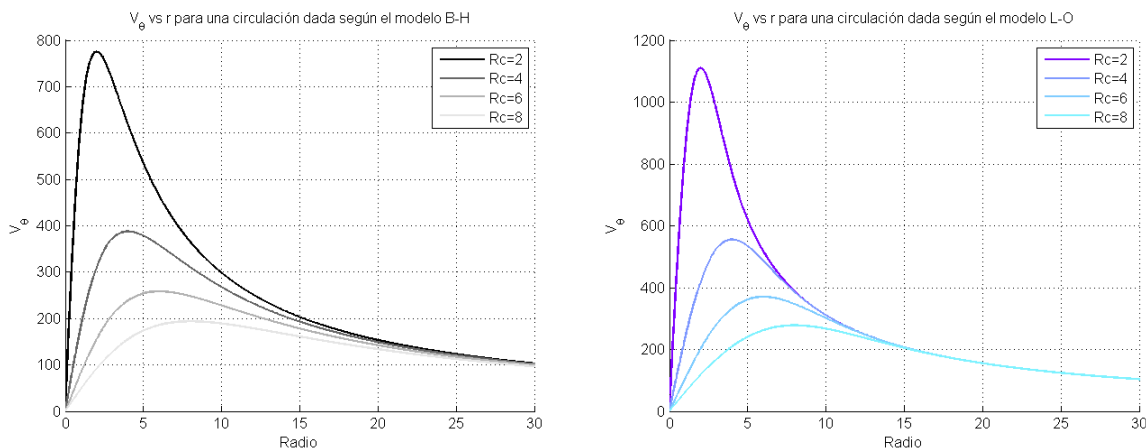


Figura 2-10. A la izquierda, representación de la velocidad tangencial frente al radio para una circulación dada según el modelo de Burnham-Hallock. A la derecha, ídem según el modelo de Lamb Oseen.

Queda demostrada la diferencia de valores en los parámetros con el uso de un modelo de vorticidad u otro. Por ello, se compararán ambos con el fin de ver cuál se ajusta mejor a los resultados experimentales. También se deduce la importancia de realizar unas mediciones exactas de la trayectoria de las partículas ya que una variación pequeña en los parámetros puede suponer un cambio en el valor de la circulación del vórtice.

## 2.3 Planteamiento del problema

El objetivo de este trabajo fin de grado es estudiar los vórtices que se generan en las puntas de ala de las distintas geometrías propuestas por el departamento. Para obtener el valor de los parámetros característicos del vórtice, se realizan diferentes experimentos en el laboratorio. A través de estos experimentos, se espera observar cómo se ajustan los resultados experimentales a los modelos y qué geometrías tienen un mejor comportamiento para el fin buscado. El medio elegido para la realización del experimento es un canal hidrodinámico, el cual se describirá con detalle en apartados posteriores. En este canal se realizarán experimentos a distintas velocidades y ángulos de ataque con el fin de estudiar la dependencia de la intensidad de los vórtices con los distintos parámetros del problema. De trabajos anteriores [11], se deduce que la intensidad de los vórtices crece con el ángulo de ataque y con la velocidad. Por ello, con el fin de maximizar dicha intensidad, se han ensayado las geometrías a 7.5 grados y 10 grados de ángulo de ataque. Estos valores se eligieron ya que los ángulos de ataque debían ser altos, pero no tanto como para provocar un desprendimiento de la capa límite. Por otro lado, las velocidades a las que se espera que operen los generadores de vórtices serán entre 30 y 50 cm/s. Puesto que como ya se ha comentado, el objetivo es realizar un análisis cualitativo de cómo se comportan las geometrías, se ha decidido ensayar el perfil a la menor de las velocidades, 30cm/s, y a la mayor de estas, 50 cm/s.

# 3 MÉTODO EXPERIMENTAL

---

El objetivo de este trabajo, como ya se ha descrito anteriormente, es llevar a cabo una serie de experimentos que permitan, con la ayuda de los modelos de vorticidad, obtener los parámetros característicos de los vórtices generados en cada una de las geometrías ensayadas. En este capítulo se explica cómo se ha realizado el montaje experimental de dichos experimentos y qué material ha sido necesario para llevarlos a cabo.

## 3.1 Montaje experimental

El montaje experimental consta de un canal hidrodinámico, una cámara para realizar las grabaciones y su software correspondiente, un regulador de flujo, la geometría alar a ensayar y un sistema de vertido de partículas (depósito y tubo). En la Figura 3-1 se observa el montaje completo del experimento, a falta de colocar el sistema de vertido de partículas que se explicará más adelante.

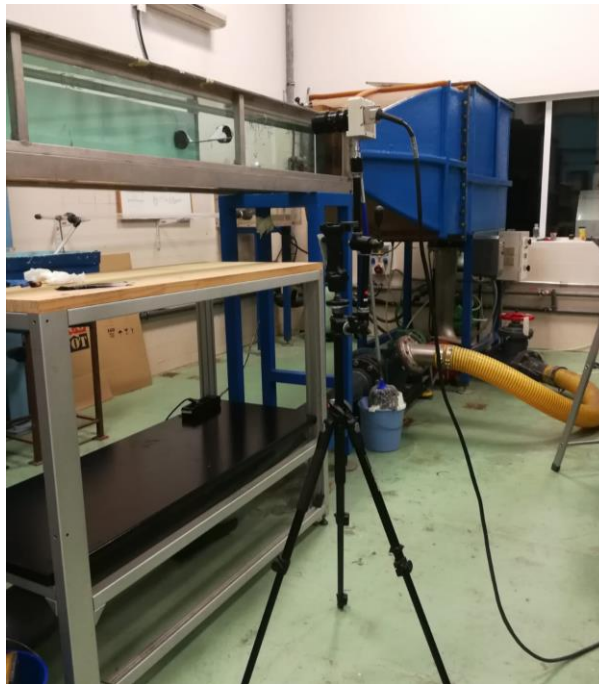


Figura 3-1. Montaje del experimento completo

A continuación, se describen los materiales usados y el funcionamiento de los instrumentos utilizados para la realización del experimento.

### 3.1.1 Partículas ABS y vertido

Puesto que la visualización de los vórtices de punta de ala no es posible con el uso de agua, se utilizan partículas de ABS de color negro, como las que se observan en la figura Figura 3-2. Las siglas ABS hacen referencia a un material denominado acrilonitrilo butadieno estireno, un plástico muy resistente al impacto y cuya utilización está muy extendida en el mundo industrial [20]. Su densidad próxima a la del agua,  $1.07 \text{ g/cm}^3$ , hace que este

material sea idóneo para ser introducido en el agua y seguir la trayectoria del flujo. Su color negro permitirá localizar fácilmente la posición de las partículas en las grabaciones.



Figura 3-2. Partículas de ABS

Para realizar un suministro adecuado de partículas en el canal, se utiliza un depósito con agua en el que se han introducido las partículas de ABS y un tubo de vertido, Figura 3-3. Para tener una distribución homogénea de partículas dentro del depósito, se inyecta aire comprimido con el que se logra una agitación de las partículas. Con ayuda del tubo y por efecto de la gravedad, se ha realizado la inyección de partículas en el canal. Ha sido importante la colocación del tubo en una posición adecuada y alineado con la corriente para producir la mínima perturbación en ella. Además, controlar que el vertido de partículas fuese homogéneo, pero no muy abundante, para poder realizar una grabación adecuada de las partículas.



Figura 3-3. (a) A la izquierda, depósito utilizado para el vertido de partículas ABS. (b) A la derecha, tubo para la inyección de partículas ABS en el canal.

### 3.1.2 Canal hidrodinámico

Los perfiles se ensayan dentro del canal hidrodinámico de la Figura 3-4. La instalación de los perfiles en el canal se realiza con la ayuda de dos imanes fijados en la pared del canal. Para la regulación de la velocidad, se cuenta con una bomba y un regulador de frecuencia que se observan en la parte derecha de la Figura 3-1. Con ayuda de este regulador de frecuencia y de la bomba se ha conseguido, tras numerosos ajustes, lograr las velocidades necesarias en el interior del canal para los experimentos llevados a cabo.



Figura 3-4. Canal hidrodinámico

### 3.1.3 Grabación e iluminación

Uno de los aspectos a mejorar respecto a trabajos anteriores era la velocidad de grabación de la cámara utilizada. En trabajos anteriores, [11], se utilizó una cámara con la que se logró 59 ft/s. Esta velocidad no era suficiente ya que requería el uso de la función “spline” de Matlab para reconstruir las trayectorias de las partículas. Con el uso de la cámara RedMidas MotionPro 10000 se ha conseguido aumentar la velocidad de grabación y obtener trayectorias más precisas. Los parámetros usados para la grabación de las imágenes se recogen en la Tabla 3-1

Fotogramas por segundo	125 ft/s
Velocidad de disparo	1/125 s
Tiempo de exposición	1/7994 1/s

Tabla 3-1. Parámetros de la cámara.

La cámara utilizada cuenta con un software que permite seleccionar y guardar los fragmentos de vídeo en los que se encuentran las partículas objeto de estudio. Uno de los mayores inconvenientes que se han tenido a la hora de realizar las grabaciones es que, debido al gran número de fotogramas por segundo captados por la cámara, el tiempo de grabación era limitado, lo que dificultaba la realización del experimento.

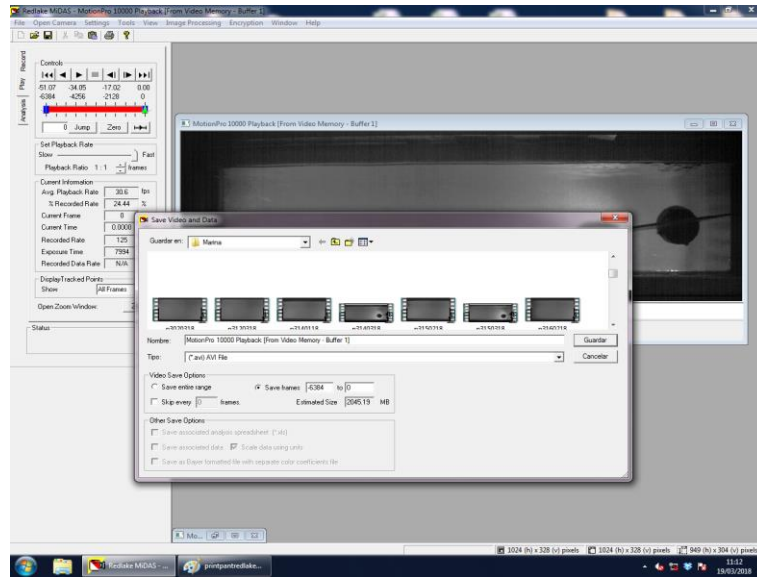


Figura 3-5. Interfaz del software RedLake Midas utilizado para la realización de las grabaciones

Otro aspecto a tener en cuenta en la realización de las grabaciones es la iluminación. Una buena iluminación era imprescindible para realizar un buen procesamiento posterior de las imágenes, ya que era necesario tener un buen contraste entre las partículas y el fondo de la imagen. Para conseguir una buena iluminación, se han colocado folios blancos y dos focos. La iluminación conseguida de esta forma no era completamente uniforme, pero pudo corregirse en el tratamiento posterior de las imágenes.



Figura 3-6. (a) A la izquierda, cámara utilizada para la realización del experimento. (b) A la derecha, iluminación del experimento



## 3.2 Geometrías ensayadas

En este apartado se presentan las distintas geometrías ensayadas en el laboratorio. Las geometrías elegidas son el resultado de numerosos ensayos numéricos y experimentales llevados a cabo desde el Departamento de Mecánica de Fluidos en el proceso de encontrar una geometría que maximice los vórtices de punta de ala. Uno de los requisitos es lograr generar dichos vórtices con geometrías sencillas y fáciles de fabricar. Así, las geometrías expuestas a continuación han sido fabricadas en el taller del laboratorio del departamento y el material elegido para su fabricación ha sido el PVC. Los perfiles se han lijado a mano para obtener bordes de ataque y marginales suaves y redondeados, así como bordes de salida afilados.

### 3.2.1 Placa con flecha positiva

El uso de alas en flecha es muy frecuente en el mundo de la aeronáutica. La razón principal de su uso es permitir que los aviones vuelen a velocidades altas sin que la velocidad de incidencia, normal al borde de ataque, sea supersónica. En este tipo de alas, a medida que se avanza en la dirección de la envergadura, los picos de succión se encuentran más atrasados, provocando un gradiente de presiones en dicha dirección. Esto hace que el flujo no solo fluya del borde de ataque hacia el borde de salida, sino también en la dirección de la envergadura. Este fenómeno se conoce como flujo de envergadura.

La razón que llevó a ensayar un ala con dicha geometría en este trabajo fin de grado es que, en las alas en flecha, el coeficiente de sustentación ideal de los perfiles próximos a las puntas de ala es mayor. Esto produce un gran gradiente de presiones que puede llevar a la generación de torbellinos más intensos.

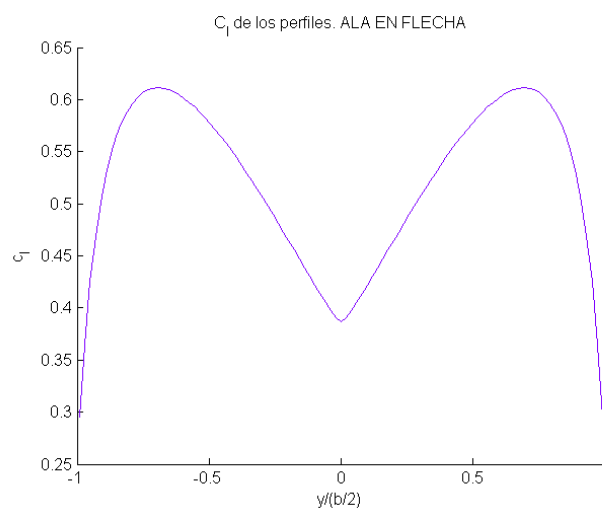


Figura 3-7. Coeficientes de sustentación de los perfiles a lo largo de la envergadura. Imagen obtenida con la implementación de un código de Matlab del método Vortex Lattice.

Sin embargo, la existencia de flecha, a velocidades bajas, induce la aparición de un flujo en la dirección de la envergadura que provoca que los perfiles próximos a las puntas tengan más susceptibilidad a entrar en pérdida. Además, el estrechamiento también disminuye la sustentación total de estos perfiles. Por lo tanto, la configuración en flecha cuenta con ventajas que llevan a pensar que puede ser un buen generador de vórtices de punta de ala, pero también cuenta con desventajas. Por esta razón, para estudiar el comportamiento de este tipo de alas, se ha ensayado una placa plana de espesor 4mm con flecha positiva y estrechamiento 0,4 aproximadamente. En la Figura 3-8 puede observarse dicha geometría.

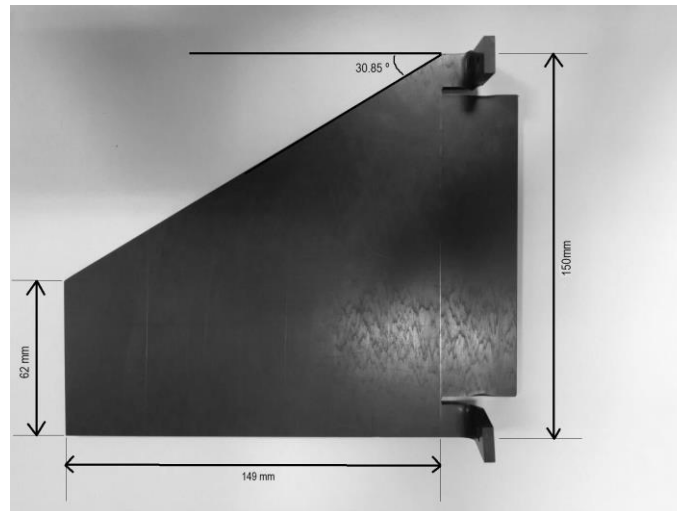


Figura 3-8. Forma en planta de la placa plana con flecha positiva

Los ensayos se realizan a 30 cm/s y 50 cm/s. A continuación, se presentan los números de Reynolds correspondientes a cada una de las velocidades.

$$Re = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} c}{\mu} \quad (3-1)$$

Donde  $\rho_{\infty} = 997 \text{ Kg/m}^3$  es la densidad del agua,  $U_{\infty}$  es la velocidad del flujo incidente,  $\mu = 0,001 \frac{\text{Kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$  es la viscosidad dinámica del agua a 20°C y  $c$  es la longitud característica, que en este caso será la cuerda en la punta del álabe.

Velocidad del flujo incidente	Número de Reynolds
30 cm/s	18544,2
50 cm/s	30907

Tabla 3-2. Números de Reynolds para los distintos experimentos de la placa con flecha positiva.

Se observa, efectivamente, que se cumple la hipótesis de número de Reynolds mucho mayor que la unidad.





Figura 3-9. Placa plana con flecha positiva fijada en el canal

### 3.2.2 Placa con flecha negativa

Las alas con flecha negativa son menos comunes en el mundo de la aeronáutica. Sin embargo, este tipo de alas poseen la ventaja de que, al existir un flujo de aire hacia la raíz del ala, la entrada en pérdida no se producirá en los perfiles cercanos a las puntas. Además, permite, manteniendo una superficie prácticamente igual a la de la placa cuadrada ensayada en estudios anteriores, aumentar la cuerda de los perfiles cercanos a la punta. Si bien es cierto que dicho aumento se produce a costa de disminuir la cuerda en la raíz, esto no supondrá un problema ya que la geometría alar está pensada para operar a bajas velocidades y sin someterse a grandes esfuerzos.

Por ello, y basándose en estudios llevados a cabo en el departamento de Mecánica de Fluidos, la segunda geometría que se ha decidido ensayar es una placa plana con flecha negativa. La placa tiene una envergadura de 152 mm, una cuerda en la punta del ala de 196 mm y un ángulo de flecha negativo de aproximadamente 30 grados. Cabe destacar que esta placa tiene una superficie ligeramente superior a otras ensayadas anteriormente. Sin embargo, el aumento de área ha sido tan solo de un 3,36 %.

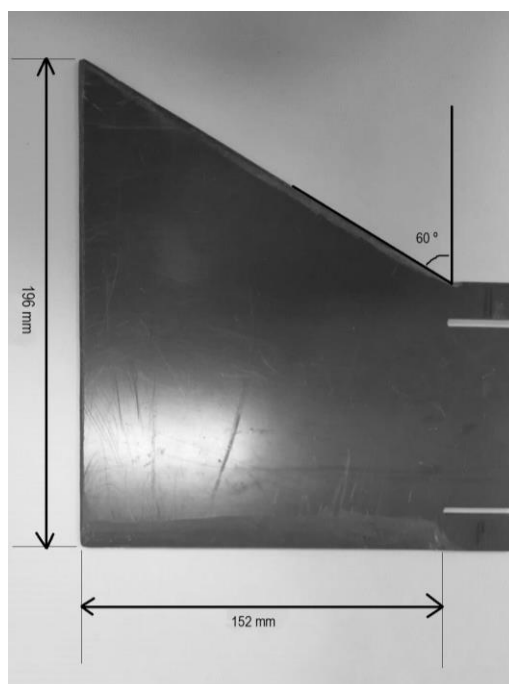


Figura 3-10. (a) Forma en planta de la placa plana con flecha negativa. (b) Placa plana con flecha negativa.

fijada en el canal.

A continuación, se muestran los números de Reynolds para el caso de la placa con flecha invertida

Velocidad del flujo incidente	Número de Reynolds
30 cm/s	59221,8
50 cm/s	98703

Tabla 3-3. Números de Reynolds para los distintos experimentos de la placa con flecha negativa

### 3.2.3 Placa con flecha negativa y curvatura

El objetivo de la curvatura en los perfiles es aumentar el coeficiente de sustentación respecto a una placa sin curvatura para un ángulo de ataque dado, ya que desplaza la curva de sustentación. En este caso, el espesor del perfil se mantiene constante ya que se ha utilizado el perfil con flecha invertida y se ha curvado a una distancia de un 30% de la cuerda desde el borde de ataque. La curvatura es de 9 mm aproximadamente, lo que equivale a un 5% de la cuerda total en el borde marginal. Al tratarse del mismo perfil que el descrito en 3.2.2, se podrá realizar un estudio de cómo la variación de curvatura, manteniendo constantes el resto de los parámetros, afecta a la sustentación y, por lo tanto, a la generación de vórtices de punta de ala.

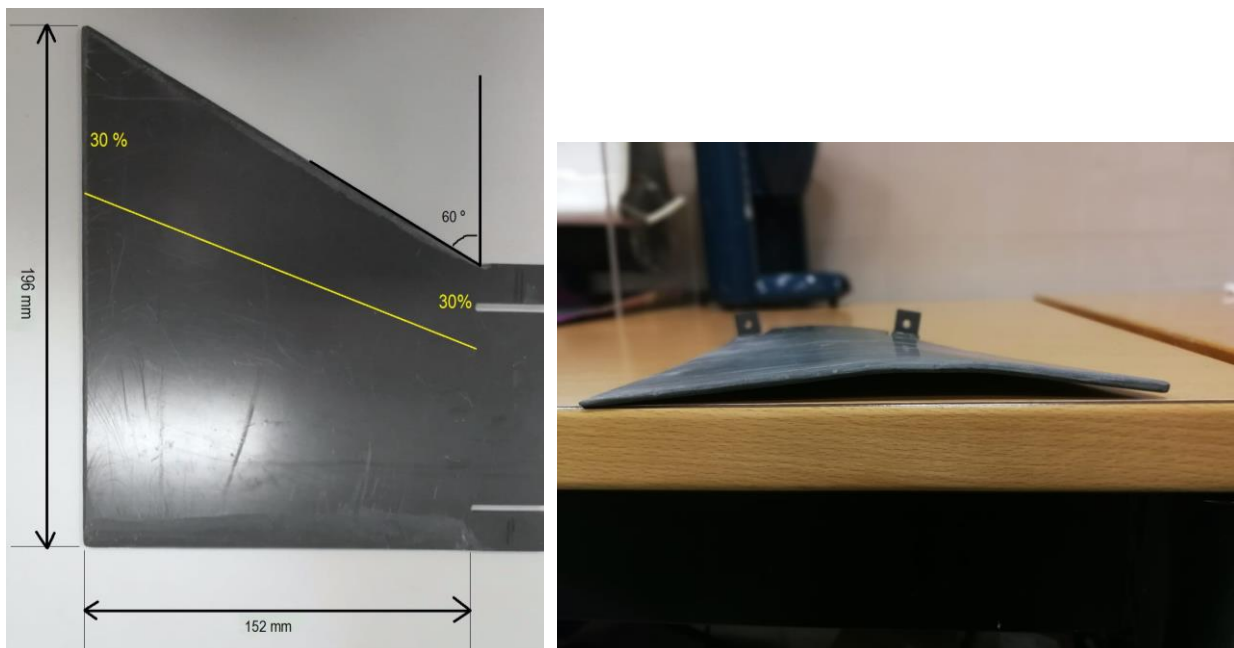


Figura 3-11. (a) Esquema de la forma en planta del perfil y la línea de doblado. (b) Fotografía del perfil ya curvado

El curvado de la placa se ha llevado a a cabo en el laboratorio del Departamento de Mecánica de Fluidos. Cabe destacar que, al fijarlo en el canal, se ha observado una ligera torsión en el álabe, que provoca que el ángulo de ataque en el borde marginal sea ligeramente superior. En la Figura 3-12 se observa el perfil fijado en el canal.

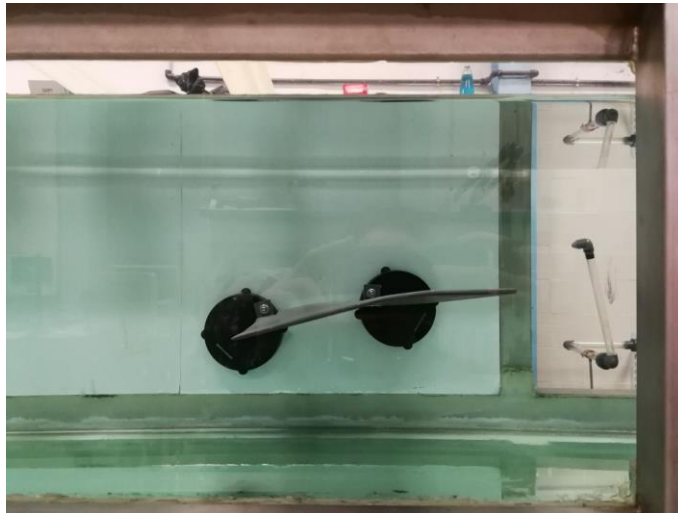


Figura 3-12. Perfil con flecha negativa y curvatura fijado en el canal

### 3.2.4 Placa rectangular con poca envergadura

Siguiendo los estudios llevados a cabo en el departamento de Mecánica de Fluidos con el método Vortex Lattice, se observó que interesaba un perfil con un alargamiento bajo, como el representado en la Figura 3-13 (a). En aeronáutica, el alargamiento de un ala es el cociente entre el cuadrado de su envergadura y la superficie total del ala.

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} \quad (3-2)$$

En el mundo de la aeronáutica no interesan las alas con poco alargamiento ya que estas generan una resistencia inducida elevada. De hecho, la resistencia inducida de un ala es inversamente proporcional al alargamiento de esta.

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\Lambda e} \quad (3-3)$$

siendo  $C_L$  el coeficiente de sustentación del ala,  $\Lambda$  el alargamiento y  $e$  el coeficiente de eficiencia de Oswald.

Sin embargo, en nuestro caso, nos interesa la generación de vórtices y los estudios numéricos sugieren que esta geometría puede ser una óptima candidata para la generación de vórtices intensos. Puesto que la cuerda era muy pequeña, se fijó al canal con ayuda de los imanes y con plastilina, como se observa en Figura 3-13 (b), para minimizar el impacto de la posición de los imanes sobre el flujo. Por otro lado, el número de Reynolds en este caso también cumple con las hipótesis realizadas.

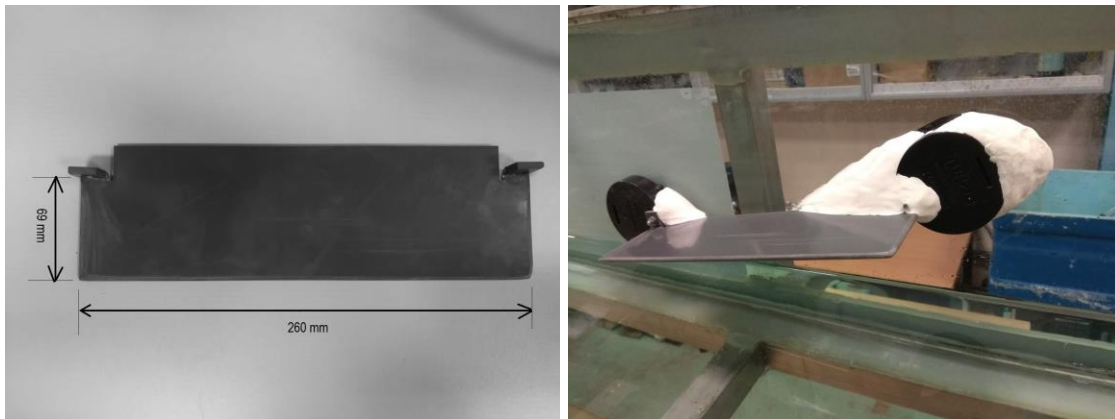


Figura 3-13. (a) A la izquierda, perfil rectangular de poca envergadura antes de ser instalado en el canal. A la derecha, (b) perfil rectangular con poca envergadura tras ser instalado en el canal.

Cabe señalar la gran diferencia entre las distintas geometrías ensayadas. Estas han sido el resultado de los distintos estudios que se han ido llevando a cabo en paralelo a la realización de los experimentos. Algunos de ellos no han proporcionado los resultados que se esperaban, pero ha servido para dar un paso más en el estudio de una posible geometría que reúna los requisitos indicados. En los próximos capítulos se expondrán en mayor profundidad los resultados obtenidos y las conclusiones que se pueden sacar de ellos.

# 4 OBTENCIÓN DE RESULTADOS

Los vórtices de punta de ala, como ya se ha explicado en el apartado 2.2, se caracterizan por el radio del núcleo, donde la viscosidad es dominante, y por la circulación. Estos valores, que son a priori desconocidos, están relacionados entre sí por las ecuaciones de los distintos modelos de vorticidad, como el de Burnham-Hallock y el de Lamb Oseen, que serán los utilizados en los siguientes apartados.

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{r^2}{r^2 + R_c^2} \quad (4-1)$$

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - e^{-1.2526 \left( \frac{r}{R_c} \right)^2} \right] \quad (4-2)$$

A partir de las grabaciones, se obtendrán pares de valores  $r$ ,  $v_{\theta}$  que permitirán posteriormente, mediante ajuste de cuadrados, obtener los valores de  $R_c$  y  $\Gamma$ . A continuación, se hacen algunas aclaraciones geométricas que permiten entender la relación entre los parámetros buscados y los parámetros que pueden observarse en las grabaciones. En la Figura 4-1 se representa una trayectoria helicoidal similar a la que sigue una partícula de ABS contenida en un vórtice de punta de ala.

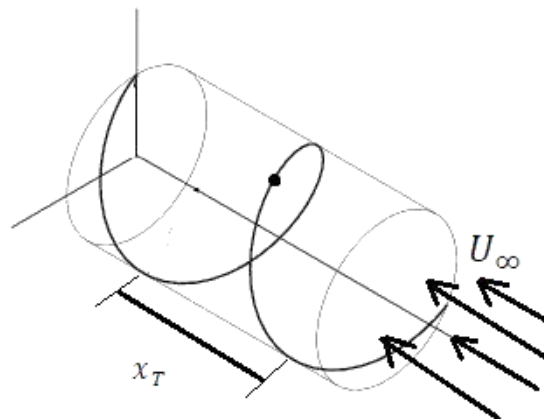


Figura 4-1. Representación de una trayectoria helicoidal similar a la seguida por las partículas de la corriente Si se desarrolla en el plano el movimiento de una partícula alrededor de un cilindro de radio  $r$  y de altura correspondiente a la recorrida en un periodo, representada en la Figura 4-1 como  $x_T$ , se llega a que la partícula en un periodo recorre una distancia equivalente a la hipotenusa de un rectángulo de lados  $x_T$  y  $2\pi r$ . Este rectángulo se representa en la Figura 4-2.

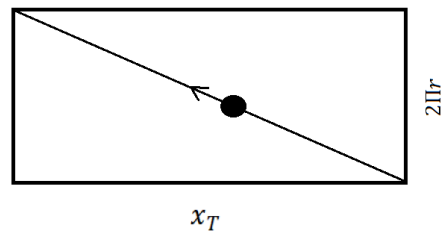


Figura 4-2. Desarrollo en el plano de la trayectoria de la partícula

Al realizar las grabaciones, se visualiza una trayectoria en 2D similar a la de un movimiento armónico simple. Si se representa la posición de la partícula para cada fotograma, se obtiene una trayectoria similar a la de la Figura 4-3. Sabiendo que la cámara graba a 125 ft/s, el periodo del movimiento será

$$T = \frac{ft_T [ft]}{125 [ft/s]} \quad (4-3)$$

Siendo  $ft_T$  el número de fotogramas que tarda la partícula en completar un periodo. Por lo tanto, la velocidad tangencial será

$$v_\theta = \frac{2\pi r [mm]}{T [s]} \quad (4-4)$$

La velocidad axial, por su parte, sería  $v_t = \frac{x_T}{T}$ . Sin embargo, esta velocidad no va a ser relevante en el desarrollo de este trabajo.

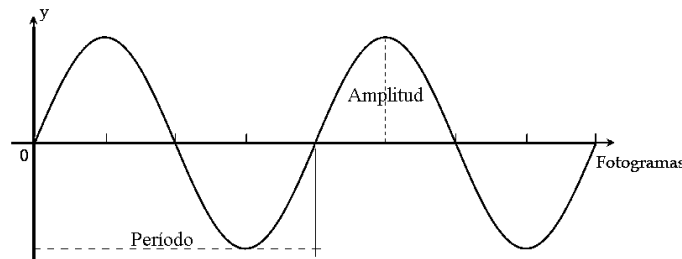


Figura 4-3. Vista 2D del movimiento helicoidal de una partícula ABS

## 4.1 Procedimiento seguido para la obtención de los parámetros

Una vez aclarada la relación entre las grabaciones 2D y el movimiento real, y tras realizar las grabaciones, el objetivo es analizarlas con el fin de obtener datos que permitan la caracterización del vórtice. En primer lugar, se obtendrán diferentes valores de  $r$  y  $v_\theta$  siguiendo los procedimientos ya descritos y, a partir de estos, se obtendrán los parámetros característicos del vórtice. Para ello, se hará uso de los programas ImageJ, Microsoft Excel y Matlab; y se llevarán a cabo las acciones descritas a continuación.

### 4.1.1 Calibrado

El programa ImageJ trabaja con píxeles. Por ello, y con el fin de que el posicionamiento de la partícula sea correcto, es importante realizar grabaciones de un instrumento de medida que sirva como sistema de referencia y permita fijar una correspondencia píxel-milímetro. En este caso, se ha utilizado una regla, representada en la Figura 4-4. La regla se ha colocado dentro del canal y alineada con el borde marginal de la geometría alar ya que es el lugar donde se producirán los vórtices. Con ayuda de esta imagen, el programa de procesamiento de imágenes ImageJ fija una conversión del tipo pixel/mm que permite posicionar cada partícula en el espacio para su posterior análisis.



Figura 4-4. Imagen de la regla utilizada para calibrar la imagen

### 4.1.2 Importación de video

En segundo lugar, es necesario cargar el archivo.avi en el programa ImageJ. Cabe destacar que estos vídeos ya han sido editados anteriormente usando el software de la cámara con el fin de seleccionar el tramo de fotogramas en los que aparece la partícula objeto de análisis.



Figura 4-5. Fotograma perteneciente al vídeo objeto de análisis

### 4.1.3 Sustracción de fondo y umbralización

A continuación, se recorta la zona de la imagen donde se encuentra la partícula cuya trayectoria se desea conocer. Una vez recortada la imagen, se realiza una sustracción de fondo. La sustracción de fondo permite detectar objetos en movimiento a partir de la diferencia de posición entre un fotograma y el de referencia. Esta acción permite llevar a cabo la umbralización posterior. La umbralización consiste en la división de la imagen en dos clases de píxeles, que se denominan generalmente “primer plano” y “fondo” [21]. Tras realizar esta acción, la imagen se convierte en un fondo blanco sobre el que resaltan en negro las partículas de ABS. En la Figura 4-6 se observa el resultado.

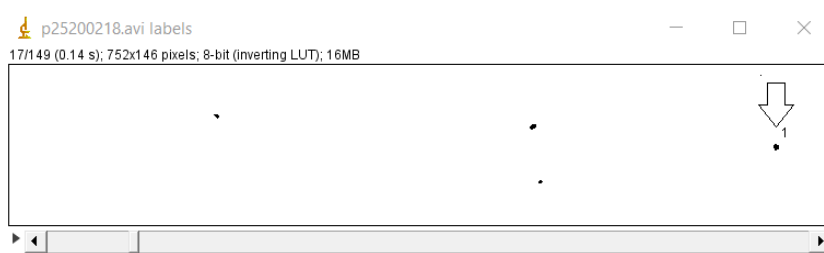


Figura 4-6. Imagen tras la sustracción de fondo y umbralización.

### 4.1.4 Posicionamiento de la partícula

Por último, para obtener las coordenadas de la partícula deseada, se utiliza la herramienta “Mtrack2”. La herramienta “Mtrack2” permite localizar objetos 2D a lo largo del tiempo. La herramienta localiza objetos en cada cuadro y luego determinará qué objetos en los cuadros están más cerca de sí y, por lo tanto, corresponden a la misma partícula [21]. Para que esta acción se lleve a cabo correctamente, es necesario fijar una velocidad máxima, lo que permitirá asegurarse de que el programa no “confunde” dos partículas. Otro parámetro importante es el número de imágenes en las que aparece la partícula. Se fija el número mínimo de fotogramas en los que una partícula debe aparecer para que la herramienta la posicione. Esto permite descartar partículas que aparecen en algunos de los fotogramas del vídeo, pero no desean estudiarse porque no describen trayectorias correspondientes al vórtice. Una vez fijados los parámetros, ImageJ localiza la partícula deseada y genera una tabla como la que se observa en la Figura 4-7.

Frame	X1	Y1	Flag1
127	147.77272	82.77273	*
128	150.9	78.7	*
129	144.9	79.3	*
130	138.21428	80.07143	*
131	132.375	80.625	*
132	126.333336	81.333336	*
133	119.25	81.875	*
134	114.35714	82.5	*
135	107.611115	83.166664	*
136	101.07143	83.64286	*
137	94.78571	83.92857	*
138	88.5	84.666664	*
139	82.64286	85.78571	*
140	76.5	86.0	*
141	70.35714	86.5	*
142	64.21429	86.92857	*
143	58.25	87.5	*
144	51.61111	87.388885	*
145	45.833332	88.166664	*
146	39.5	88.0	*
147	33.5	88.5	*
148	27.0	88.5	*
149	20.5	88.35714	*

Figura 4-7. Coordenadas de la partícula proporcionadas por el programa ImageJ

Dicha tabla ya recoge las coordenadas de la partícula en milímetros, gracias a la conversión píxel-milímetro realizada al comienzo del proceso.



#### 4.1.5 Representación de la trayectoria

Una vez obtenida la tabla de coordenadas de la partícula, se crea un archivo en el programa Microsoft Excel que permitirá manejar fácilmente los resultados. A continuación, desde Matlab, se importan los datos contenidos en el fichero “.ods” y se procede a la representación de la trayectoria de la partícula. Puesto que la grabación se ha realizado obteniendo 125 fotogramas por segundo, se comprueba que no es necesario usar la función “spline” de Matlab, sino que valdrá con los datos proporcionados por ImageJ. Con ayuda de un código de Matlab, además, se localizan los máximos (en verde en la Figura 4-8) y los mínimos (en rosa en la Figura 4-8) de la trayectoria.

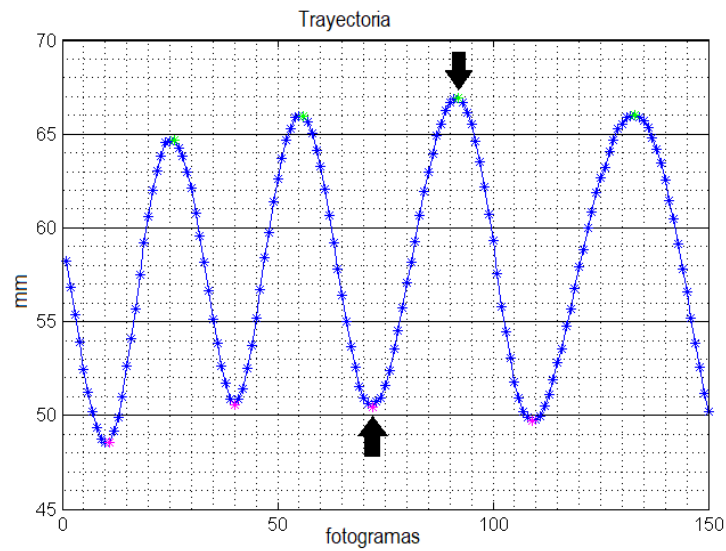


Figura 4-8. Trayectoria de la partícula representada con el programa Matlab

Sabiendo que la cámara graba a 125 ft/s, y una vez localizados los máximos y mínimos, se obtiene el radio del vórtice y el periodo que caracteriza el movimiento de la siguiente forma

$$r_n = \frac{(y_{max_n} - y_{min_n}) + (y_{max_n} - y_{min_{n+1}})}{4} \quad (4-5)$$

$$T_n = \frac{(x_{min_{n+1}} - x_{min_n})}{125} \quad (4-6)$$

Tras realizar estas operaciones, se halla un radio medio y un periodo medio que permitirá hallar la velocidad tangencial

$$v_\theta = \frac{2\pi r_{medio}}{T_{medio}} \quad (4-7)$$

Una vez realizado el procedimiento anterior completo para distintos vídeos, se obtiene una tabla con valores de radios y sus correspondientes velocidades tangenciales. Estos datos, almacenados en un fichero de Microsoft Excel, se exportan a Matlab. Matlab lee los datos del fichero Excel y los introduce en una matriz que hace corresponder a cada valor de radio, un valor de velocidad tangencial. Representando dichos valores, se obtiene la Figura 4-9.

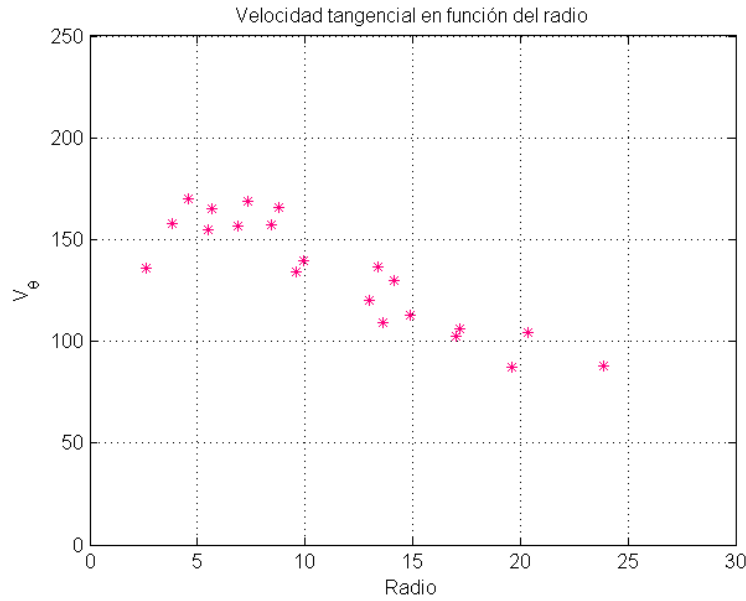


Figura 4-9. Representación de la velocidad tangencial frente al radio dentro del vórtice

#### 4.1.6 Obtención de los parámetros característicos del vórtice

Tras obtener los puntos de los experimentos, se usa una herramienta de Matlab denominada “Curve Fitting”. Esta herramienta permite ajustar curvas y superficies a los datos proporcionados. Para ello, el programa puede utilizar la biblioteca de modelos lineales o no lineales o, como se ha hecho en este caso, usar una ecuación proporcionada por el usuario. De esta forma, usando el modelo de Burnham-Hallock y el de Lamb Oseen, se obtiene una curva que se ajusta a los datos obtenidos en el laboratorio. Estos modelos dependen de unos parámetros cuyo valor es proporcionado por la herramienta “Curve Fitting” [22].

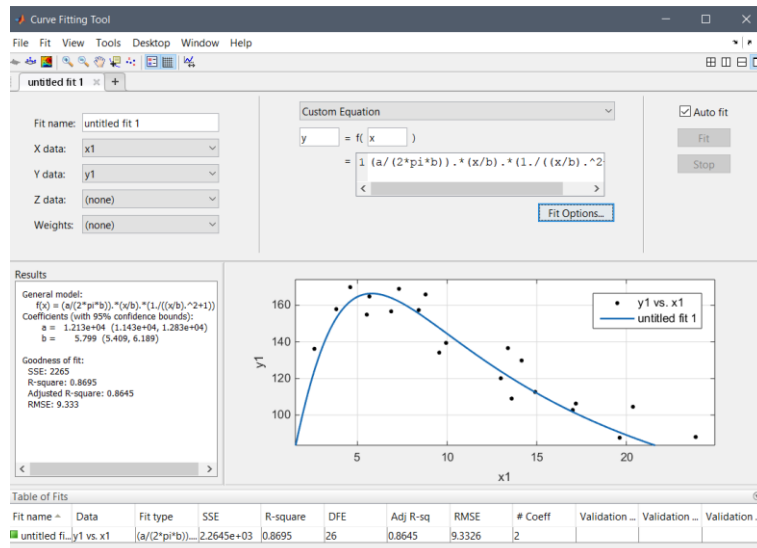


Figura 4-10. Interfaz de la herramienta Curve Fitting

Tras el ajuste realizado, la herramienta devuelve una serie de valores representados en la Figura 4-11.

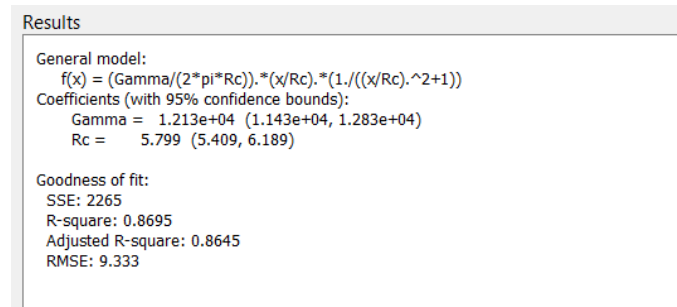


Figura 4-11. Resultados proporcionados por la herramienta Curve Fitting

Se observa que la herramienta proporciona un intervalo de valores dentro de que se encontrará el valor real de los parámetros. Este intervalo se denomina intervalo de confianza y viene dado por un par de valores entre los cuales se estima que se encontrará el valor real con una determinada probabilidad de acierto [23]. Esta probabilidad de acierto se denomina nivel de confianza y en el caso de la herramienta “Curve fitting” de Matlab corresponde a un 95%. Por lo tanto, el valor de la circulación y el radio del núcleo se encontrará dentro de dicho intervalo de confianza con una probabilidad del 95%. El intervalo de confianza dependerá del nivel de confianza y de la dispersión de los datos. Cuanto mejor se ajusten los datos experimentales al modelo, menor será el intervalo de confianza.

Uno de los datos proporcionados por la herramienta es el coeficiente de determinación  $R^2$ . El coeficiente de determinación es un estadístico que cuantifica la calidad del ajuste y se define de forma general como

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (4-8)$$

En nuestro caso,  $y_i$  corresponde a los valores de la velocidad tangencial obtenidos experimentalmente para cada radio,  $\hat{y}_i$  es el valor estimado de la velocidad tangencial para cada radio y el valor medio de la velocidad tangencial se representa con  $\bar{y}$ . El término del numerador recibe el nombre de suma de cuadrados del residuo y cuantifica el error cometido en cada valor experimental respecto al valor estimado por el modelo para ese mismo valor de la variable dependiente. Dicho error se representa en la Figura 4-12, donde las líneas azules cuantifican la discrepancia entre valores experimentales y valores estimados para cada valor del radio, en este caso.

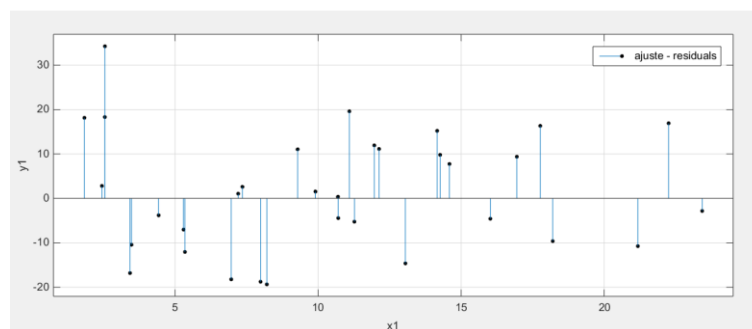


Figura 4-12. Ajuste residual.

El coeficiente de determinación tomará valores entre 0 y 1, representando el valor 1 un ajuste perfecto y el valor 0 un ajuste pésimo. En el caso de los ajustes realizados en este trabajo, este coeficiente tomará valores entre 0,8 y 0,9.

Una vez realizado todo el procedimiento descrito anteriormente, se obtiene un valor de circulación y radio del núcleo del vórtice para cada condición de velocidad y ángulo de ataque ensayada. En la Figura 4-13, se representa la curva obtenida con los valores proporcionados por la herramienta “Curve Fitting” según el modelo Burnham-Hallock.

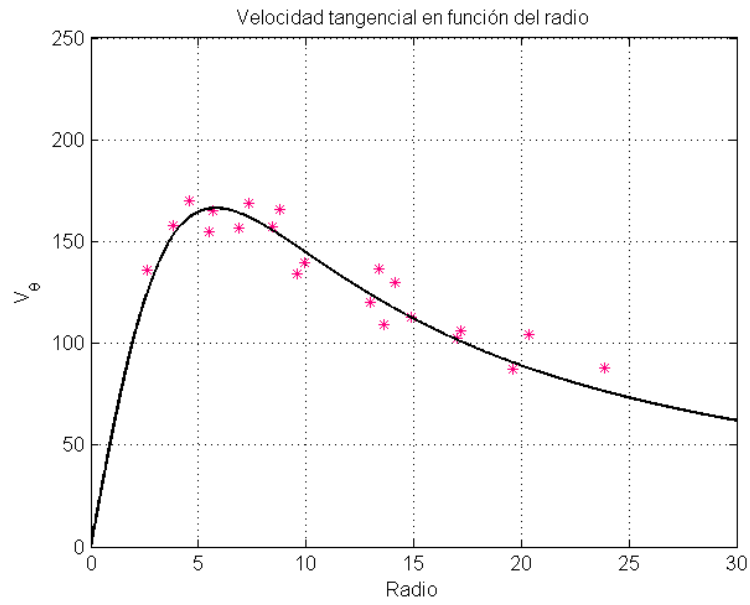


Figura 4-13. Ajuste del modelo Burnham-Hallock a los datos obtenidos en el laboratorio

# 5 RESULTADOS

---

**E**n este capítulo se exponen los principales resultados obtenidos en la realización de este trabajo. Las distintas geometrías se han ensayado a dos velocidades y dos ángulos de ataque: 30 cm/s, 50 cm/s, 7,5 grados y 10 grados. Para obtener dichas velocidades, se ha ajustado la bomba y el variador de frecuencia de manera que se obtuviesen las velocidades deseadas.

## 5.1 Placa con flecha positiva

La primera geometría ensayada ha sido la placa plana con flecha positiva. Desde el comienzo de los experimentos, se observó que las partículas de ABS no describían las trayectorias que se esperaban; muchas de las partículas se detenían en el extradós durante segundos y no parecían describir trayectorias correspondientes a un movimiento dentro de un vórtice de punta de ala. Parecía, en cambio, que la partícula entraba en una burbuja de recirculación. Tras realizar diferentes experimentos a distintos ángulos de ataque y velocidades, se decidió realizar pruebas de visualización con tinta con el fin de determinar con claridad qué estaba ocurriendo, ya que el seguimiento de partículas no permitía dilucidar la causa de este comportamiento. Para llevar a cabo los experimentos se usó tinta azul, un tubo capilar y un depósito que permitía, tras ser llenado con tinta, inyectarla en el tubo haciendo uso de aire comprimido.



Figura 5-1. Tinta y depósito utilizados para la visualización de la corriente

Con el experimento se pudo comprobar que la corriente se desprendía cerca del borde marginal. Los perfiles del ala ensayada, de 4 mm de espesor, se pueden considerar perfiles muy delgados. Los perfiles con esta propiedad se caracterizan porque a ángulos de ataque pequeños se desarrolla una burbuja de recirculación en el extradós, causada por el desprendimiento y una posterior readhesión de la capa límite. Esta burbuja aumenta de tamaño al aumentar el ángulo de ataque, desplazando el punto de readhesión hacia el borde de salida. A partir de cierto ángulo de ataque, el punto de readhesión alcanzará el borde de salida de forma que la corriente no conseguirá

readherirse. En el ala ensayada, este ángulo era menor de 5 grados y, por lo tanto, se consideró que este perfil no era apto para el objetivo buscado en este trabajo [24]. En la Figura 5-2 (a) se observa cómo la corriente continúa adherida en la raíz del álabe ya que la mayor longitud de cuerda permite la readhesión ya mencionada anteriormente. Sin embargo, en la foto derecha de la Figura 5-2 (b) se observa el desprendimiento que se produce en el borde marginal de la geometría ensayada y que hace imposible la generación de vórtices de punta de ala al no existir sustentación en dichos perfiles. Hay que destacar que el uso de geometrías con flecha puede ser interesante, pero sería necesario un valor de cuerda mayor en el borde marginal.

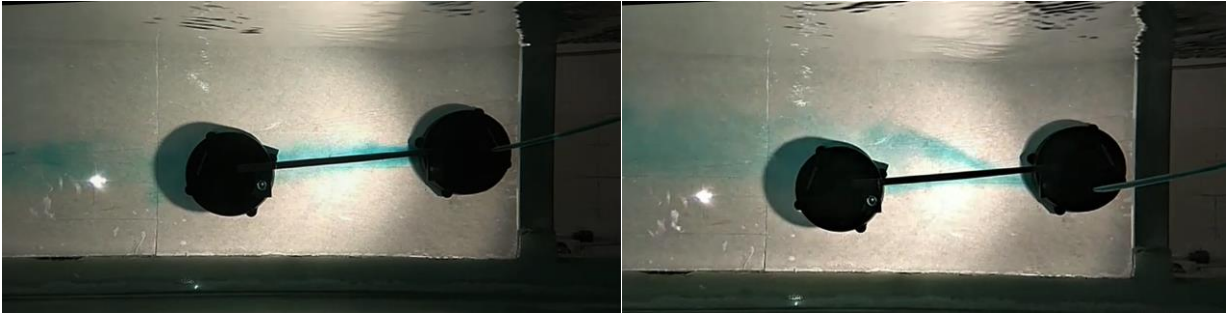


Figura 5-2. (a) Visualización con tinta azul de la corriente alrededor del perfil. (b) A la izquierda, se observa cómo la corriente permanece adherida cerca de la raíz y a la derecha se observa el desprendimiento de la corriente en la punta de la geometría alar.

## 5.2 Placa con flecha invertida

Tras probar el mal funcionamiento del primer perfil propuesto y, siguiendo los resultados de investigaciones en el departamento de Mecánica de Fluidos, se procede a ensayar el perfil con flecha negativa.

Como ya se ha comentado en apartados anteriores, se ha decidido ensayar los perfiles a velocidades de 30 cm/s y 50cm/s y a ángulos de ataque de 7.5 grados y 10 grados. Los modelos que van a usarse para ajustar los datos experimentales a los teóricos son el modelo de Burnham-Hallock, (2-29), y el modelo de Lamb Oseen, (2-28).

### 5.2.1 30 cm/s

Para obtener el valor de la circulación y el radio del núcleo del vórtice se procede como ya se ha indicado en apartados anteriores. A 30cm/s se ha ensayado el perfil a dos ángulos de ataque, obteniendo los resultados que se presentan a continuación. Se ajustan los datos obtenidos mediante los experimentos según el modelo Burnham-Hallock y Lamb Oseen. Se ha decidido usar estos modelos ya que son modelos sencillos, que no dependen de parámetros de la geometría y usados en la literatura para estudiar vórtices de punta de ala [19].

- Ángulo de ataque: 7.5 grados

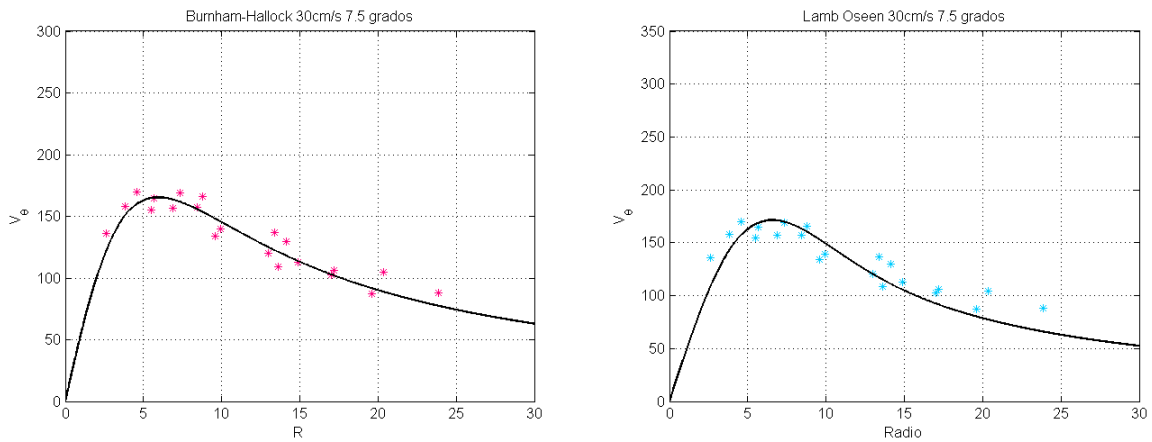


Figura 5-3. (a) Velocidad tangencial del vórtice a 30 cm/s y 7,5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha (b).

- Ángulo de ataque: 10 grados

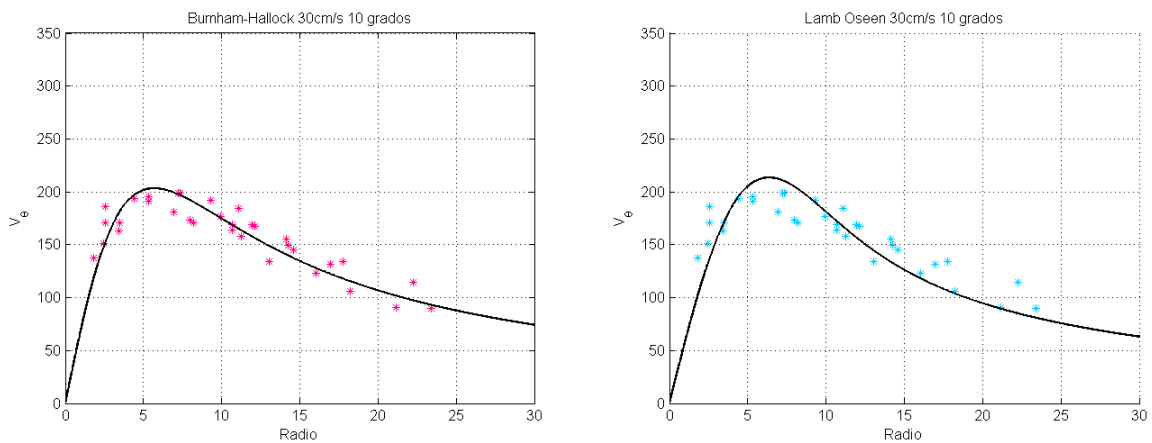


Figura 5-4. (a) Velocidad tangencial del vórtice a 30 cm/s y 10 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha (b).

### 5.2.2 50 cm/s

A la velocidad de 50 cm/s, se procede de manera similar, ensayando el perfil a 7.5 grados y 10 grados de ángulo de ataque.

- **Ángulo de ataque: 7.5 grados**

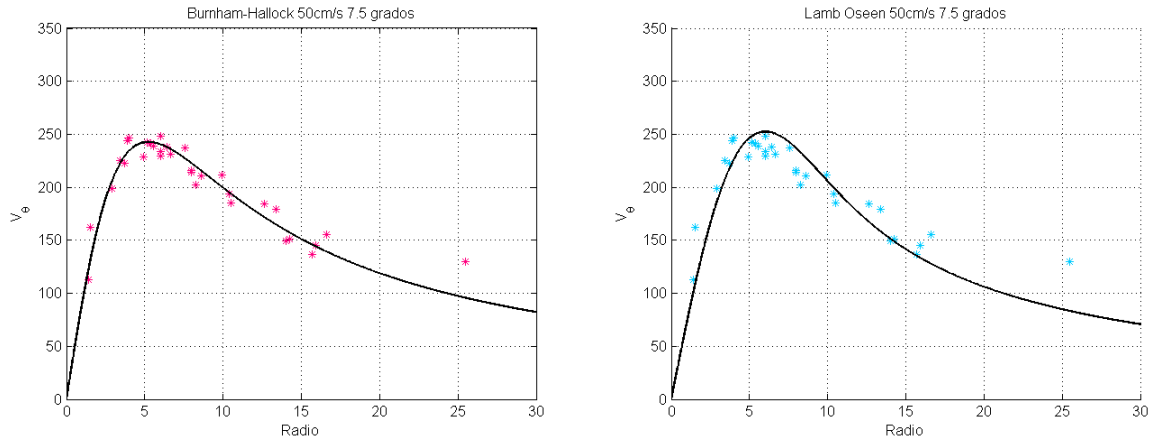


Figura 5-5. (a) Velocidad tangencial del vórtice a 50 cm/s y 7,5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha (b).

- **Ángulo de ataque: 10 grados**

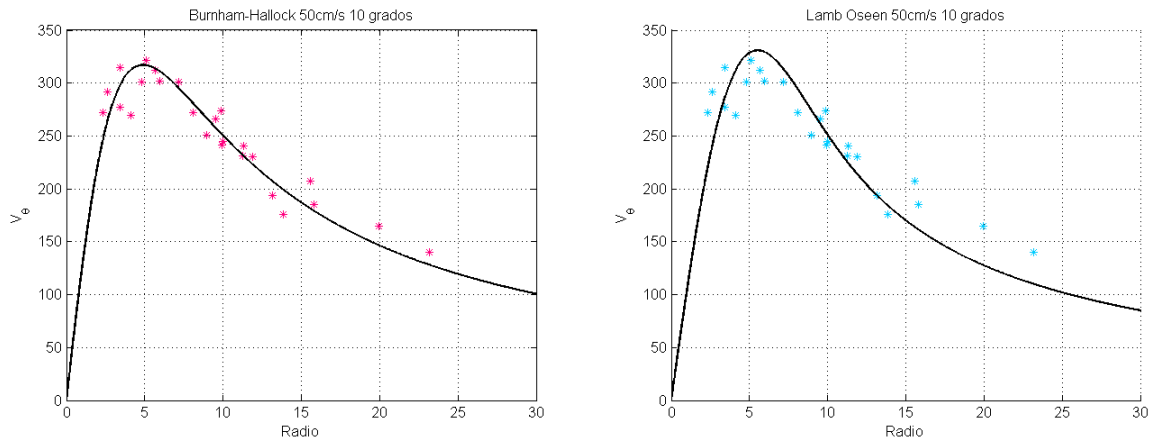


Figura 5-6. (a) Velocidad tangencial del vórtice a 50 cm/s y 10 grados según el modelo de Burnham-Hallock, a la izquierda, y según el modelo de Lamb Oseen, a la derecha (b).

Se recogen, a continuación, los resultados obtenidos a las distintas velocidades y ángulos de ataque para ambos modelos



- **BURNHAM-HALLOCK**

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Circulación ( $\Gamma$ ) [mm <sup>2</sup> /s]	30 cm/s	12130 (11430,12830)	14490 (13670,15310)
	50 cm/s	15960 (15250,16670)	19480 (18390,20570)

Tabla 5-1. Circulación del vórtice expresada en mm<sup>2</sup>/s según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Radio del núcleo del vórtice [mm]	30 cm/s	5,799 (5,409 , 6,189)	5,67 (5,31 , 6,026)
	50 cm/s	5,23 (4,97 , 5,495)	4,9 (4,571 , 5,207)

Tabla 5-2. Radio del núcleo del vórtice expresado en mm según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.

- **LAMB OSEEN**

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Circulación ( $\Gamma$ ) (mm/s)	30 cm/s	9882 (9159 , 10600)	11890 (11070, 12720)
	50 cm/s	13070 (12280, 13860)	16020 (14940, 17100)

Tabla 5-3. Circulación del vórtice expresada en mm<sup>2</sup>/s según el modelo de Lamb Oseen para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Radio del núcleo del vórtice (mm)	30 cm/s	6,574 (6,057 , 7,09)	6,354 (5,88 , 6,821)
	50 cm/s	5,93 (5,55 , 6,301)	5,527 (5,124 , 5,931)

Tabla 5-4. Radio del núcleo del vórtice expresado en mm según el modelo de Lamb-Oseen para el caso de placa placa con flecha invertida junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.

Como ya se preveía en el apartado 2.2.1, para un perfil de velocidades dado (el obtenido con las grabaciones), se obtienen valores muy diferentes de la circulación y el radio del núcleo según los dos modelos. Tomando como base la representación de los resultados y el ajuste según ambos modelos, se considera que el modelo de Burnham-Hallock se adapta mejor a los datos obtenidos en los experimentos y, por lo tanto, se tomarán como buenos los datos obtenidos según dicho modelo y recogidos en las Tabla 5-1 y Tabla 5-2 para análisis posteriores.

### 5.2.3 Error cometido

Teniendo en cuenta que los valores de la circulación y el radio del núcleo se encontrarán dentro de los intervalos presentados en las tablas anteriores, si se toma el valor medio, se estará cometiendo un determinado error. Los errores máximos que pueden ser cometidos se presentan en la Tabla 5-5.

		Error máximo cometido (Nivel de confianza 95%)	
		Circulación ( $\Gamma$ )	Radio del núcleo
30 cm/s	7,5 grados	5,77%	6,72%
	10 grados	5,65%	6,27%
50 cm/s	7,5grados	4,44%	5,06%
	10 grados	5,59%	6,26%

Tabla 5-5. Error máximo cometido al tomar el valor medio del intervalo dado por la herramienta “Curve Fitting” con un intervalo de confianza del 95%

Se observa, por lo tanto, que tomando el valor medio proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”, se comete un error máximo en la estimación de los parámetros de un 6,26%. En el caso de la circulación, parámetro significativamente más relevante, se comete un error máximo de 5,77%. Por otro lado, los valores del coeficiente de determinación se encuentran entre el 0,8 y 0,9, lo que sugiere que el ajuste es bueno.

### 5.2.4 Dependencia entre parámetros

En este apartado se representan tanto la circulación como el radio del núcleo del vórtice frente a la velocidad para ambos ángulos de ataque.

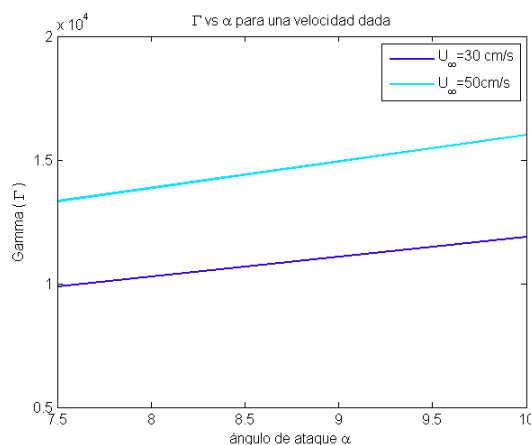


Figura 5-7. Dependencia de la circulación con el ángulo de ataque para una velocidad dada..

Se observa un aumento de la circulación tanto con la velocidad como con el ángulo de ataque. Esta tendencia era de esperar ya que el aumento tanto del ángulo de ataque como de la velocidad provocan un aumento del gradiente de presiones, pico de succión, que se traduce además en una mayor sustentación. Se observa también que el crecimiento para el caso de 10 grados de ángulo de ataque es ligeramente superior.

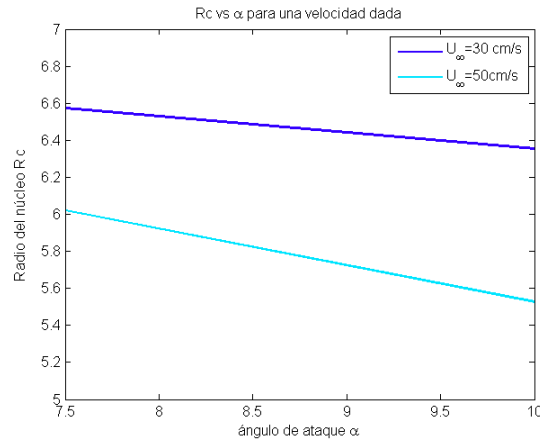


Figura 5-8. Dependencia del radio del núcleo con la velocidad para un ángulo de ataque dado

En la Figura 5-8 se observan dos tendencias. Por un lado, se observa que el radio del núcleo del vórtice disminuye al aumentar la velocidad. Por otro lado, se observa también una disminución del radio al aumentar el ángulo de ataque. La tendencia en ambos casos es similar. Teniendo en cuenta que la herramienta de “Curve Fitting” de Matlab da unos valores de radio con un error en torno al 5%, podría considerarse que la dependencia con la velocidad y el ángulo de ataque es mínima.

### 5.3 Placa con flecha invertida y curvatura.

En el caso de la placa con flecha invertida y curvatura, se procede directamente a ensayar los datos usando el modelo de Burnham-Hallock, ya que se considera que se adapta mejor a los resultados obtenidos en este trabajo. Los resultados se representan en la Figura 5-9 y Figura 5-10.

#### 5.3.1 30 cm/s

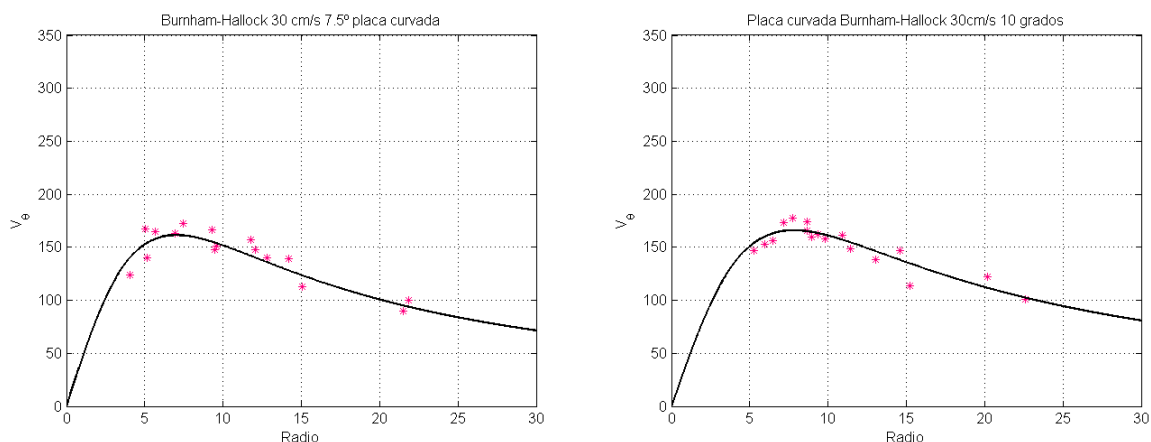


Figura 5-9. (a) A la izquierda, velocidad tangencial del vórtice a 30cm/s y 7.5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock. (b) A la derecha, velocidad tangencial del vórtice a 30 cm/s y 10 grados.

### 5.3.2 50 cm/s

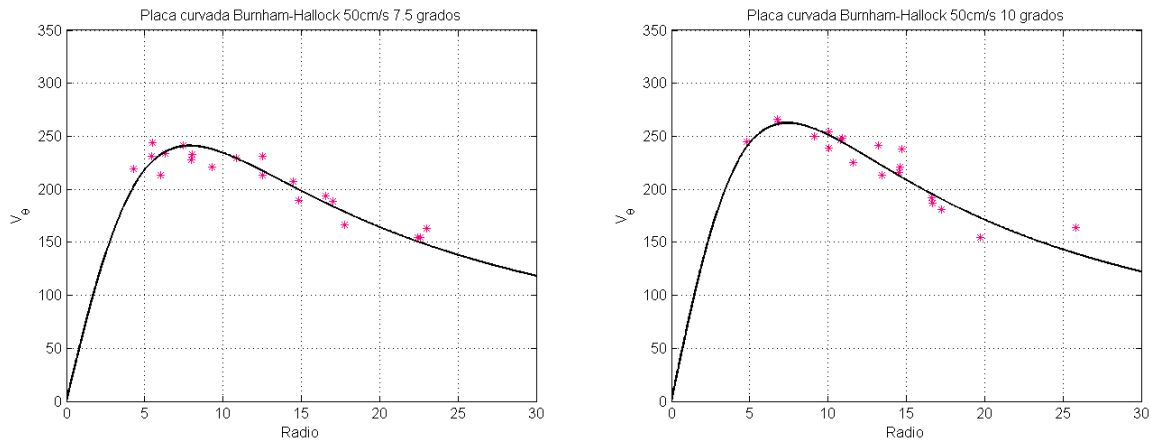


Figura 5-10. (a) A la izquierda, velocidad tangencial del vórtice a 50cm/s y 7.5 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock. (b) A la derecha, velocidad tangencial del vórtice a 50cm/s y 10 grados de ángulo de ataque según el modelo de Burnham-Hallock.

En las tablas siguientes, se exponen los correspondientes valores de la circulación y el radio del núcleo para las distintas velocidades y ángulos de ataque.

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Circulación ( $\Gamma$ ) [mm <sup>2</sup> /s]	30 cm/s	15770 (14230,17320)	16220(14760, 17670)
	50 cm/s	23950(22580,25320)	24470 (22930, 26020)

Tabla 5-6. Circulación del vórtice expresada en mm/s según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa curvada con flecha negativa junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Radio del núcleo del vórtice [mm]	30 cm/s	7,98 (7,413 , 8,818)	7,81(7,037 , 8,599)
	50 cm/s	7,908 (7,381 , 8,436)	7,416 (6,771 , 8,061)

Tabla 5-7. Radio del núcleo del vórtice expresada en mm según el modelo de Burnham-Hallock para el caso de placa curvada con flecha negativa junto a su intervalo de confianza proporcionado por la herramienta “Curve Fitting”.

### 5.3.3 Error cometido

En la Tabla 5-8 se representan los errores máximos cometidos al tomar el valor medio de la circulación y del radio del núcleo proporcionados por Matlab.

		Error máximo cometido (Nivel de confianza 95%)	
		Circulación ( $\Gamma$ )	Radio del núcleo
30 cm/s	7,5 grados	9,8%	10%
	10 grados	8,9%	10%
50 cm/s	7,5grados	5,7%	6,67%
	10 grados	6,3%	8,69%

Tabla 5-8. Error máximo cometido al tomar el valor medio del intervalo dado por la herramienta “Curve Fitting” con un intervalo de confianza del 95%

Se observa que, en este caso, el error máximo que puede cometerse es de hasta un 10%. Esto se debe a que la dispersión de datos de la velocidad tangencial obtenidos experimentalmente en el caso de la placa con curvatura es mucho mayor. El valor del coeficiente de determinación también disminuye situándose entre el 0,7 y 0,8.

### 5.3.4 Dependencia entre parámetros

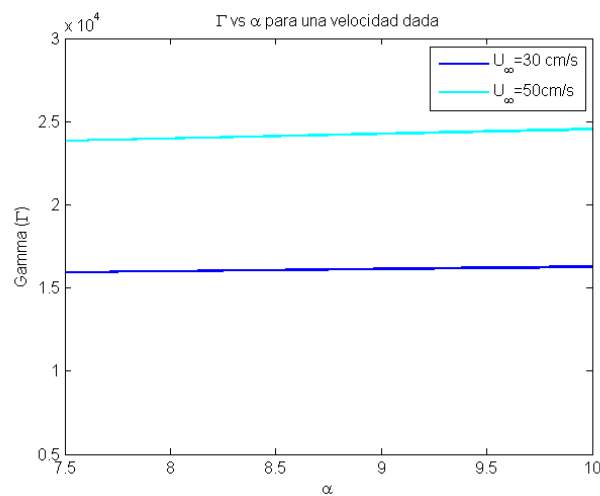


Figura 5-11. Dependencia de la circulación con el ángulo de ataque en la placa con curvatura para una velocidad dada.

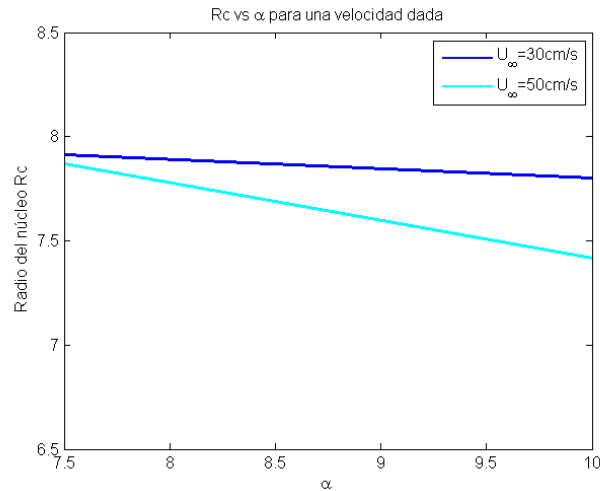


Figura 5-12. Dependencia del radio del núcleo del vórtice con el ángulo de ataque para una velocidad dada.

En el caso de la placa curvada, se observa un comportamiento similar al de la placa sin curvar. La circulación aumenta al aumentar tanto la velocidad como el ángulo de ataque. Sin embargo, se observa que el crecimiento de la circulación con el ángulo de ataque no es tan acusado como para el caso de la placa sin curvar. Este resultado no se ajusta a lo que cabía esperar con la curvatura del perfil. Esto puede estar causado por el hecho de que el álabe presenta una ligera torsión que provoca que, en el borde marginal, el ángulo de ataque sea ligeramente superior. Para ángulos de ataque superiores a 10 grados, la capa límite comienza a desprenderse generando una turbulencia por separación que ha podido afectar a la intensidad de los vórtices generados en este perfil. Se puede concluir, por lo tanto, que las geometrías ensayadas no deben emplearse a ángulos de ataque superiores a 10 grados. Si se busca aumentar el ángulo de ataque de operación, también convendría fabricar álabes de mayor espesor, para así, retrasar el ángulo de ataque de entrada en pérdida.

Por otro lado, el radio del núcleo disminuye al aumentar la velocidad y el ángulo de ataque. En este caso, los valores del radio del núcleo son más parecidos en los 4 casos. De hecho, para el caso de 30cm/s, el valor del radio del núcleo es prácticamente constante. No existen muchos datos en la literatura sobre la dependencia del radio del núcleo viscoso con los diferentes parámetros de la geometría del ala; no obstante, la forma de cuantificar la idoneidad de una geometría se basa en el valor de la circulación.

## 5.4 Dependencia de los parámetros con la curvatura

El hecho de haber usado una misma placa sin curvar y curvada, permite estudiar cómo afecta la curvatura a los parámetros y en qué condiciones es más favorable esta curvatura.

### 5.4.1 30 cm/s

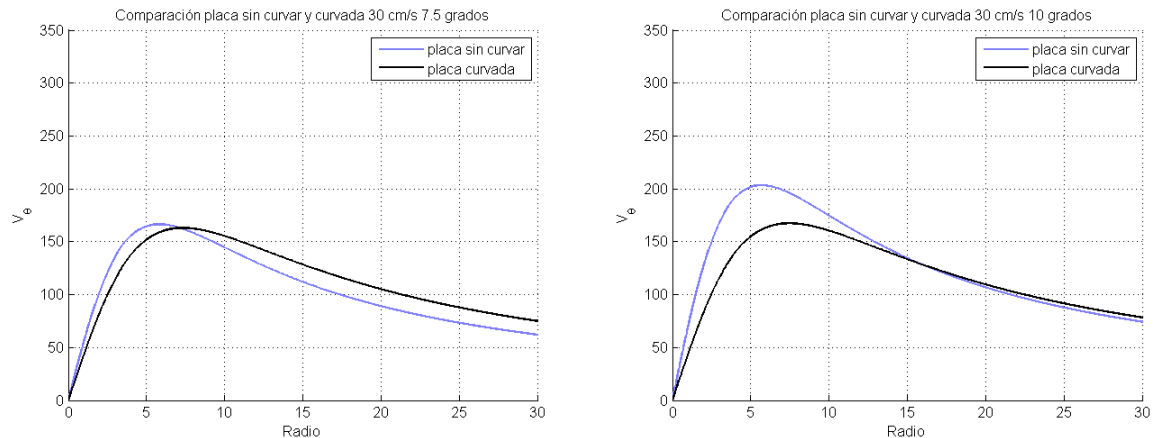


Figura 5-13. Comparación de curvas características para placa plana y placa con curvatura a 30 cm/s.

		Placa sin curvar	Placa curvada	Aumento
Circulación( $\Gamma$ )	7.5 grados	12130 $mm^2/s$	15770 $mm^2/s$	30,01 %
	10 grados	14490 $mm^2/s$	16220 $mm^2/s$	11,9%
Radio del núcleo	7.5 grados	6,574 mm	7,98 mm	21,38%
	10 grados	5,671 mm	7,81 mm	37,71%

Tabla 5-9. Comparación de los parámetros para placa sin curvar y curvada a una velocidad de 30 cm/s

### 5.4.2 50 cm/s

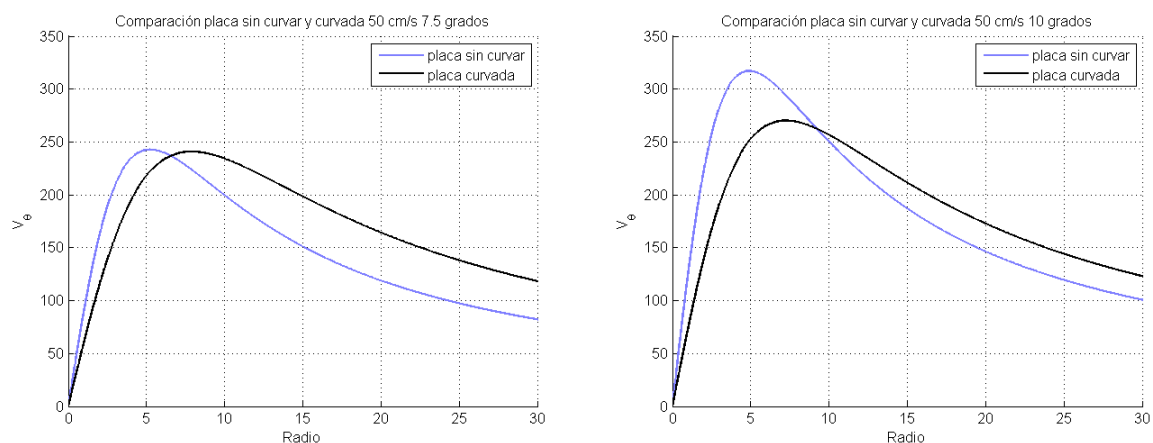


Figura 5-14. Comparación de curvas características para placa plana y placa con curvatura a 50 cm/s y ángulo de ataque de 7.5 grados, a la izquierda y 10 grados, a la derecha.

		Placa sin curvar	Placa curvada	Aumento
Circulación ( $\Gamma$ )	7.5 grados	15960 $mm^2/s$	23950 $mm^2/s$	50,06%
	10 grados	19480 $mm^2/s$	24470 $mm^2/s$	25,61%
Radio del núcleo	7.5 grados	5,233 mm	7,908 mm	51,14%
	10 grados	4,89 mm	7,416 mm	51,53%

Tabla 5-10. Comparación de los parámetros para placa sin curvar y curvada a una velocidad de 50 cm/s

En las gráficas, se observa a priori, que no existe un aumento considerable de la velocidad de las partículas. Sin embargo, la distancia a la que se encuentran las velocidades máximas aumenta. Esto quiere decir que el radio del núcleo del vórtice aumenta al aumentar la curvatura. Si bien es cierto que un aumento en el valor del radio del núcleo del vórtice no es determinante, esto hace que la circulación, definida como  $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$ , resulte mayor, ya que mayor cantidad de flujo es perturbado por el vórtice.

Por otro lado, se observa una mayor mejora en el comportamiento de la placa para el caso de 7.5 grados de ángulo de ataque. Mientras el aumento de la circulación en el caso de 10 grados es de entre el 11 y el 26%, en el caso de la placa a un ángulo de ataque de 7.5 grados es de hasta el 50%. Por lo tanto, tomando como base este resultado, se podría decir que las condiciones para las que se han observado una mayor mejora en los parámetros son una velocidad de 50 cm/s y un ángulo de ataque de 7.5 grados.

## 5.5 Placa con poca envergadura

Por último, debido a que los estudios numéricos realizados con el método Vortex Lattice sugerían la idoneidad de una geometría con poca envergadura y mucha cuerda, se procedió a la fabricación y ensayo del último perfil, descrito en el apartado 3.2.4. En principio, parecía que dicho perfil podía funcionar bien por sus características. Sin embargo, en los ensayos se observó una realidad muy diferente. En primer lugar, se ensayó el perfil a una velocidad de 30 cm/s y 7.5 grados. El resultado fue que el movimiento de las partículas no parecía indicar la existencia de ningún vórtice. Se aumentó la velocidad y el ángulo de ataque para observar si se generaban vórtices, pero el resultado fue que los vórtices seguían sin formarse, o al menos no con la intensidad suficiente como para ser visionados usando las partículas ABS.

La razón causante de la ausencia de vórtices en este álabe puede deberse a que, debido a la gran cuerda del perfil, la corriente rebordea el borde de ataque generando un pico de succión cercano a él, que va suavizándose a medida que avanza la corriente sobre el perfil. La gran longitud de cuerda y la ausencia de curvatura también suponen un frenado de las partículas y una igualación progresiva de presiones, que puede desembocar en un gradiente insuficiente de presiones entre intradós y extradós en los puntos más cercanos al borde de salida. Este fenómeno puede observarse en la Figura 5-15, donde se observa que en la placa plana se produce un fuerte pico de succión cerca del borde de ataque y después las presiones entre extradós e intradós son muy similares. En los puntos cercanos a borde de salida, además, la corriente incide con la velocidad del canal que es dominante frente a la diferencia de presiones entre extradós e intradós. Por lo tanto, habría que estudiar hasta qué punto es conveniente el aumento de la cuerda o acompañarla de curvatura o aumento de espesor. Esto último mantendría un gradiente de presiones mayor entre extradós e intradós, como se observa en la Figura 5-15 para el caso del perfil más grueso.



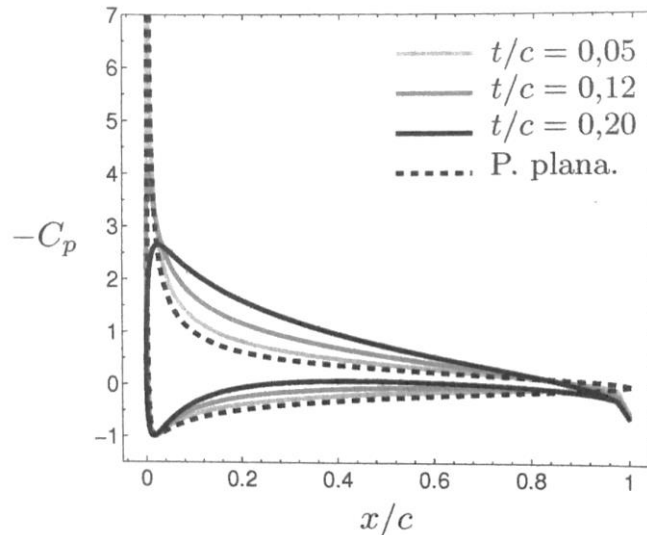


Figura 5-15. Evolución del coeficiente de presión en el intradós y extradós en función de la distancia al borde de ataque adimensionalizada  $x/c$ . [13]

## 5.6 Comparación de resultados con trabajos anteriores

En estudios realizados anteriormente [11], se ensayó una placa plana cuadrada de lado 150 mm y espesor 4 mm. En la Tabla 5-11 quedan reflejados los resultados obtenidos en dichos estudios.

		Ángulo de ataque	
		7.5 grados	10 grados
Circulación ( $\Gamma$ )	30 cm/s	8501,59 $mm^2/s$	9761,8 $mm^2/s$
	50 cm/s	12018,00 $mm^2/s$	16987,55 $mm^2/s$

Tabla 5-11. Valores de la circulación para una placa cuadrada de 150mm de lado [11]

La placa ensayada en este trabajo tiene un área de 23256  $mm^2$ . La placa cuadrada, por su parte, tiene un área de 22500  $mm^2$ . Por lo tanto, la placa ensayada en este trabajo tiene un área un ligeramente superior. Con este pequeño aumento de área y la introducción de flecha, se ha obtenido unos aumentos de circulación reflejados en la siguiente tabla.

			Placa cuadrada	Placa con flecha negativa	Aumento
Circulación ( $\Gamma$ )	30cm/s	7.5 grados	8501,59 $mm^2/s$	12130 $mm^2/s$	42,68 %
		10 grados	9761,8 $mm^2/s$	14490 $mm^2/s$	48,44%
	50cm/s	7.5 grados	12018,00 $mm^2/s$	15960 $mm^2/s$	32,80%
		10 grados	16987,55 $mm^2/s$	19480 $mm^2/s$	14,68%

Tabla 5-12. Comparación de valores de circulación para la placa cuadrada [11] y la placa rectangular con flecha negativa

Se observa un aumento significativo de la circulación con un aumento mínimo de la superficie y con la introducción de flecha negativa al perfil. Esto supone un aumento de la circulación de hasta un 48% con una dificultad en la fabricación similar a la de la placa plana. Por ello, puede decirse que la introducción de un ángulo de flecha negativo puede tener un efecto positivo en la intensidad de los vórtices generados.

Cabe destacar que el efecto positivo de la flecha negativa no se corresponde con los resultados obtenidos en los estudios numéricos [25]. Una de las razones puede ser que este perfil, al introducir flecha negativa (ver Figura 3-10), tiene lo que se podría decir dos bordes marginales que generan torbellinos e interaccionan entre sí. Esto puede provocar que el fluido se mueva de manera no estacionaria, siguiendo patrones que no se ajustan a las hipótesis realizadas en los análisis numéricos. No obstante, es necesario realizar más estudios numéricos y experimentales para llegar a una conclusión.

Por otro lado, se compara a la placa cuadrada con curvatura [11] con la placa con flecha negativa y curvatura.

			Placa cuadrada con curvatura	Placa con flecha negativa y curvatura	Aumento
Circulación ( $\Gamma$ )	30cm/s	7.5 grados	11000 $mm^2/s$	15770 $mm^2/s$	43,36 %
		10 grados	16181,15 $mm^2/s$	16220 $mm^2/s$	0,24%%
	50cm/s	7.5 grados	19001,79 $mm^2/s$	23950 $mm^2/s$	26,04%
		10 grados	26022,85 $mm^2/s$	24470 $mm^2/s$	-5,96%

Tabla 5-13. Comparación de valores de circulación para placa cuadrada con curvatura [11] y para placa rectangular con flecha negativa y curvatura.

En el caso de 7,5 grados de ángulo de ataque, existe una mejora en el funcionamiento del álabe curvado con flecha negativa frente al álabe curvado sin flecha. Sin embargo, se observa un aumento mínimo e incluso una disminución de la circulación en el caso de 10 grados de ángulo de ataque. Esto lleva a pensar que en la placa con curvatura y flecha negativa se produce un desprendimiento parcial de la capa límite debido a la gran curvatura y la leve torsión del álabe.

En el trabajo [11], también se ensayó una placa cuadrada con curvatura y espesor en los bordes, representada en

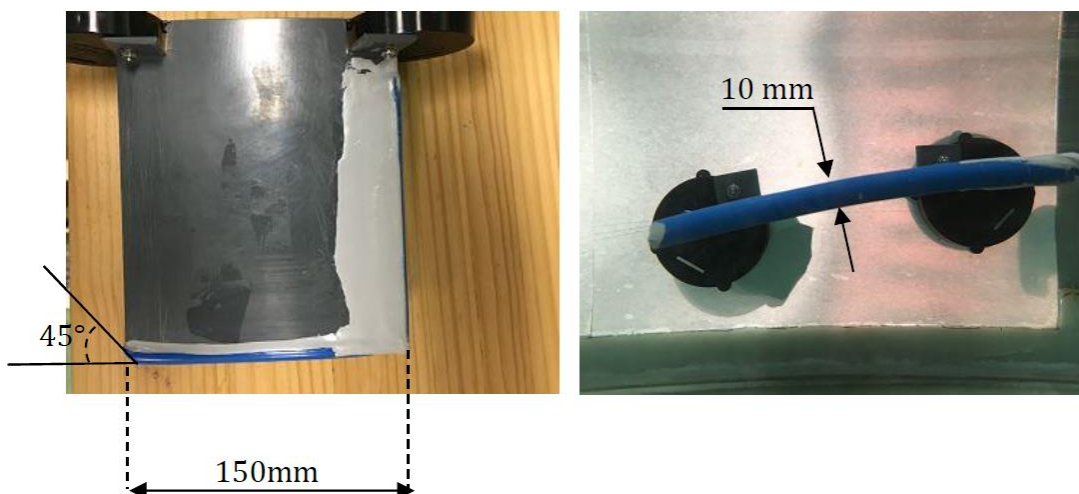


Figura 5-16. Placa con espesor y curvatura en los bordes ensayada en estudios anteriores [11].

Hasta ahora, esta geometría alar ha sido la que mejor resultados ha dado. Los valores obtenidos se recogen en la siguiente tabla

			<b>Placa con curvatura y bordes cilíndricos</b>
<b>Circulación (<math>\Gamma</math>)</b>	<b>30cm/s</b>	<b>7.5 grados</b>	14524,17 $mm^2/s$
		<b>10 grados</b>	18634,47 $mm^2/s$
	<b>50cm/s</b>	<b>7.5 grados</b>	24261,74 $mm^2/s$
		<b>10 grados</b>	30770,02 $mm^2/s$

Tabla 5-14. Valores de circulación para una placa cuadrada con curvatura y bordes cilíndricos ensayada en [11]

Por lo tanto, teniendo en cuenta los resultados mostrados en la Tabla 5-14, el álabe que mejores resultados ha proporcionado hasta el momento en esta búsqueda de una geometría que genere vórtices de punta de alas intensos es la placa cuadrada con curvatura y espesor en los bordes. No obstante, la fabricación de este tipo de geometría también supone una dificultad mayor. En cuanto a la introducción de flecha, sería interesante seguir investigando la influencia de la flecha de forma experimental y tratar de llegar a una reconciliación entre los datos experimentales y numéricos.



# 6 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

---

Una vez finalizado este trabajo fin de grado, se han obtenido varias conclusiones. Estas conclusiones no sólo han sido fruto de la realización de los experimentos en el laboratorio, sino también son el resultado de discusiones llevadas a cabo durante la realización de este trabajo y de las consultas en la literatura sobre los vórtices de punta de ala. A continuación, se presentan las principales conclusiones:

- La utilización de una cámara con mayor velocidad de grabación ha permitido obtener trayectorias más exactas. Sin embargo, esta cámara ha presentado dificultades en cuanto al tiempo de grabación, limitándolo a 50 segundos. Esta limitación ha supuesto tener que parar el experimento una vez transcurrido dicho tiempo y volverlo a retomar en otro vídeo. Por otro lado, el tamaño de los vídeos era tan elevado que no permitía guardar los 50 segundos de vídeo, teniendo que seleccionar en el laboratorio los trozos de vídeo deseados antes de volver a iniciar el experimento. Este es un aspecto a tener en cuenta en ensayos futuros en los que habría que encontrar un equilibrio entre la precisión y el tiempo empleado en la realización de los experimentos.
- Se ha observado un aumento de la circulación al aumentar la velocidad del canal y al aumentar el ángulo de ataque. En el caso de la placa plana con flecha negativa, el aumento en ambos casos es similar.
- En el caso del perfil con flecha negativa y curvado, experimenta un aumento de circulación mayor al aumentar la velocidad que al aumentar el ángulo de ataque, manteniendo el resto de parámetros constantes. Esto se debe, según las evidencias experimentales y numéricas, a que el perfil alar con curvatura comienza a entrar en pérdida para ángulos cercanos a 10 grados.
- El ángulo de ataque máximo para geometrías de espesor delgado, como las ensayadas en este trabajo, es de 10 grados aproximadamente. Si se operan a ángulos de ataque mayores a 10 grados, conviene aumentar el espesor de las geometrías. En el caso de perfiles curvados, este ángulo parece ser incluso menor. Es importante, por lo tanto, controlar el ángulo de ataque máximo al que operan los perfiles.
- La curvatura tiene un efecto claramente positivo en la generación de circulación. En el caso del perfil ensayado, experimenta una mayor mejora en el caso de 7,5 grados de ángulo de ataque y 50 cm/s.
- Se ha observado un aumento de la circulación con la flecha negativa. Hay que destacar que este resultado no se ajusta a los resultados obtenidos mediante los análisis CFD [25], que sí se ajustaban en el caso de la placa plana ensayada en estudios anteriores [11]. En este trabajo, los experimentos realizados con la placa con flecha negativa se han llevado a cabo a lo largo de semanas, inicializando el experimento en distintas ocasiones, y obteniendo siempre valores similares de la velocidad de las partículas trazadoras. Esto lleva a pensar que no puede ser un error experimental puntual. Puede tratarse, por el contrario, de algún efecto que no está teniendo en cuenta en las simulaciones numéricas. No obstante, serían necesario mayor número de ensayos para llegar a una conclusión.
- Como resultado de discusiones llevadas a cabo durante la realización de este proyecto, se ha concluido que el redondeo del borde de ataque y bordes marginales, así como el afilado del borde de salida, es importante para la generación de vórtices ya que facilita el rebordeo de la corriente y consigue una estela delgada.
- También se discutió el hecho de si merecía la pena fabricar un panel con luces LED para iluminar de forma más homogénea el canal. Basándome en los resultados obtenidos en este trabajo y la falta de dificultad que he tenido para analizar las grabaciones con la iluminación existente, no considero que sea necesario invertir en una mejora de la iluminación del experimento.

Para concluir, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en este trabajo y los resultados obtenidos en trabajos anteriores [11], se propone la fabricación de un perfil con flecha negativa, curvatura y espesor en los bordes. Aunque, como ya se ha comentado anteriormente, la mejora de circulación con el ángulo de flecha no se ha

demostrado en estudios numéricos, estas conclusiones se basan en los resultados obtenidos como resultado de los ensayos llevados a cabo en el laboratorio.

Como líneas futuras se proponen varias mejoras en el montaje experimental. En primer lugar, se propone sujetar el álabe con imanes de menor espesor, con el fin de perturbar lo mínimo posible la corriente. Otra solución podría ser la fabricación de pletinas más largas que permitieran alejar el modo de sujeción del perfil. La iluminación, como ya se ha comentado en el apartado anterior, no requiere de mejora. El sistema de vertido y suministro de partículas ha funcionado correctamente en la realización del experimento. Un aspecto que cabría mejorar para el futuro es la medición de la velocidad en el canal hidráulico, ya que los métodos que se han utilizado hasta ahora, aunque han dado buenos resultados, dejan un margen de error que podría reducirse.

En cuando a las geometrías de los álabes, conviene seguir estudiando la influencia de la flecha con el fin de reconciliar los datos experimentales y numéricos.

# 7 REFERENCIAS

---

- [1] NASA, «NASA Visible Earth,» [En línea]. Available: <https://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=987>.
- [2] R. Monsalvo Vázquez, M. d. R. Romero Sánchez, M. G. Miranda Pascual y G. Muñoz Pérez, Balance de materia y energía. Procesos industriales., México: Grupo Editorial Patria, 2014, Primera edición Ebook.
- [3] «[https://es.wikipedia.org/wiki/Mezclador\\_est%C3%A1tico#/media/File:Static\\_mixer\\_flow\\_diagram.png](https://es.wikipedia.org/wiki/Mezclador_est%C3%A1tico#/media/File:Static_mixer_flow_diagram.png),» [En línea].
- [4] «Wikipedia,» [En línea]. Available: <https://es.wikipedia.org/wiki/V%C3%B3rtice>.
- [5] «[http://www.navy.mil/view\\_image.asp?id=102135](http://www.navy.mil/view_image.asp?id=102135),» [En línea].
- [6] C. A. A. o. N. Zealand, «Wake Turbulence,» 2008.
- [7] T. Gerz, F. Holzäpfel y D. Darracq, «WakeNet — the European Thematic Network on Wake Vortex,» April 2001. [En línea]. Available: <http://www.cerfacs.fr/~wakenet/news/Position-paper/position-paper.pdf>.
- [8] «[www.boeing.com](http://www.boeing.com),» [En línea]. Available: <http://www.boeing.com/commercial/737max/737-max-winglets/>.
- [9] O. V. Belyakov, «<http://spotters.net.ua/file/?id=110501&size=large>,» [En línea].
- [10] «Alga Energy,» [En línea]. Available: [www.algaenergy.es](http://www.algaenergy.es).
- [11] F. J. N. Fuentes, *Generación de vórtices de punta de ala en canal hidráulico*, Sevilla, 2017.
- [12] C. Breitsamter, «Wake vortex characteristics of transport aircraft,» *Progress in Aerospace Sciences*, pp. 89-134, 2010.
- [13] J. M. Gordillo Arias de Saavedra y G. Riboux Acher, *Introducción a la aerodinámica potencial*, 2012.
- [14] J. L. González Santander y G. Castellano, *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*, Alicante: Club Universitario, 2014.
- [15] «[https://en.wikipedia.org/wiki/Lifting-line\\_theory#/media/File:Lifting\\_line\\_theory\\_illustration\\_\(1\).svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Lifting-line_theory#/media/File:Lifting_line_theory_illustration_(1).svg),» [En línea].
- [16] «[http://www.nptel.ac.in/courses/112104118/lecture-23/23-6\\_gen\\_vortices\\_wing.htm](http://www.nptel.ac.in/courses/112104118/lecture-23/23-6_gen_vortices_wing.htm),» [En línea].
- [17] J. Katz y A. Plotkin, *Low Speed Aerodynamics*, Cambridge University Press, 2001.
- [18] «<http://planeofinal.blogspot.com/2012/06/angulo-de-ataque-inducido.html>,» [En línea].

- [19] F. H. Proctor, N. Ahmad, F. M. Limon Duparcmeur y D. Jacob, «Review of Idealized Aircraft Wake Vortex Models,» [En línea]. Available: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20140003974>.
- [20] «Wikipedia,» [En línea]. Available: [[https://es.wikipedia.org/wiki/Acrilonitrilo\\_butadieno\\_estireno](https://es.wikipedia.org/wiki/Acrilonitrilo_butadieno_estireno)].
- [21] «ImageJ.net,» [En línea]. Available: <https://imagej.net/Thresholding>.
- [22] «mathworks.com,» [En línea]. Available: <https://www.mathworks.com/products/curvefitting.html>.
- [23] «Wikipedia,» [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo\\_de\\_confianza](https://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_de_confianza).
- [24] J. Álvarez, J. Meseguer y A. Pérez, «Instituto Universitario de Microgravedad,» [En línea]. Available: [[http://www.idr.upm.es/aero\\_aves/Perdida%20alas.pdf](http://www.idr.upm.es/aero_aves/Perdida%20alas.pdf)].
- [25] A. D. Campillejo, *Caracterización de vórtices de punta de ala mediante simulaciones CFD*, Sevilla, 2018.
- [26] «<http://www.linkindustrial.es/web/productos/mezcladores-estaticos/>,» [En línea]. Available: <http://www.linkindustrial.es/web/productos/mezcladores-estaticos/>.
- [27] «D&B Tech,» [En línea]. Available: <http://www.dbtech.es/>.
- [28] G. Michea, *Formation and early development of wingtip. PhD thesis.*, University of Glasgow, 2013.
- [29] L. Prandtl, «Applications of modern Hydrodynamics to Aeronautics,» 1923.



# ANEXO: CÓDIGOS DE MATLAB

---

Código para ejecutar trayectoria, encontrar máximos, mínimos y obtener  $V_{\theta}$  y  $R_c$ .

```
a=xlsread('datospl210218.ods');
x=a(1:1:length(a),2);
xfot=a(1:1:length(a),1);
yprev=a(1:length(a),3);
y=100-yprev;
plot(xfot,y,'b*-')
grid on
grid minor
m=1;

%Encontrar máximos y mínimos
if yprev(m+1,1)>yprev(m,1)
    c=0; %decreciente
else
    c=1; %creciente
end
max2=[0,0];
min2=[0,0];
min3=[0,0];
max3=[0,0];
max4=[0,0];
min4=[0,0];
min5=[0,0];
max5=[0,0];
min5=[0,0];
T2=0;r2=0;
T3=0;T4=0;
r3=0;r4=0;
hold on

if c==0; %%Decreciente
    i=m;
while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min1=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end
while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max1=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
```

```

        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min2=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end
while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max2=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end
while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min3=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end
while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max3=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min4=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)

```

```

        max4=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min5=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max5=[a(i,1),y(i,1)];
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

r1=((max1(1,2)-min1(1,2))+(max1(1,2)-min1(1,2)))/4;

if max2~=0
r2=((max2(1,2)-min2(1,2))+(max2(1,2)-min2(1,2)))/4;
end

T1=(min2(1,1)-min1(1,1))/125;

if min3(1,2)~=0
T2=(min3(1,1)-min2(1,1))/125;
end

if max3(1,2)~=0
r3=((max3(1,2)-min3(1,2))+(max3(1,2)-min3(1,2)))/4;
end

if max4(1,2)~=0 && min4(1,2)~=0
T3=(min4(1,1)-min3(1,1))/125;
r4=((max4(1,2)-min3(1,2))+(max4(1,2)-min4(1,2)))/4;
end
if max5(1,2)~=0 && min5(1,2)~=0
T4=(min5(1,1)-min4(1,1))/125;
end

end

if c==1;
    i=m;

while i<length(y)

```

```

        if y(i,1)>y(i+1,1)
            max1=[a(i,1),y(i,1)];
            plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
            break
        else
            i=i+1;
        end
    end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min1=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max2=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min2=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max3=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min3=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

```

```

        end
    end

while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max4=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min4=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)>y(i+1,1)
        max5=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'g*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

while i<length(y)
    if y(i,1)<y(i+1,1)
        min5=[a(i,1),y(i,1)];
        plot(a(i,1),y(i,1),'m*')
        break
    else
        i=i+1;
    end
end

r1=(max1(1,2)-min1(1,2)+max2(1,2)-min1(1,2))/4;
T1=(max2(1,1)-max1(1,1))/125;

if max3(1,1)~=0 && min3(1,1)~=0
    T2=(max3(1,1)-max2(1,1))/125;
    r2=(max2(1,2)-min2(1,2)+max3(1,2)-min2(1,2))/4;
end

if max4(1,2)~=0 && min4(1,2)~=0
    r3=(max3(1,2)-min3(1,2)+max4(1,2)-min3(1,2))/4;

```

```

T3=(max4(1,1)-max3(1,1))/125;
end

if max5(1,2)~=0 && min5(1,2)~=0
r4=(max4(1,2)-min4(1,2)+max5(1,2)-min4(1,2))/4;
T4=(max5(1,1)-max4(1,1))/125;
end

end

if T4==0
    if T3==0
        if T2==0
            T=T1;
        else
            T=(T1+T2)/2;
        end
    else
        T=(T1+T2+T3)/3;
    end
else
    T=(T1+T2+T3+T4)/4;
end

if r4==0
    if r3==0
        if r2==0
            r=r1;
        else
            r=(r1+r2)/2;
        end
    else
        r=(r1+r2+r3)/3;
    end
else
    r=(r1+r2+r3+r4)/4;
end

end

maximos=[max1;max2;max3;max4;max5]
minimos=[min1;min2;min3;min4;min5]
periodos=[T1;T2;T3;T4]
radios=[r1;r2;r3;r4]
T
r
v_theta=2*pi*r/T

end
end

```

**Código para representar  $v_{\theta}$  vs  $r$** 

```
a1=xlsread('prueba.ods')
x1=a1(1:length(a1),1);
y1=a1(1:length(a1),2);
    plot(x1,y1,'*','color',[1,0,0.5])

gamma=19480 ; %Obtenidos con la herramienta "Curve Fitting"
Rc=4.9;

title('V_\theta vs R')
r=[0:0.01:50];
xlabel('Radio');ylabel('V_\theta');

V_thetalambosen=(gamma./(2*pi.*r)).*(1-exp(-1.26*(r.^2/Rc^2)))
    plot(r,V_thetalambosen,'color',[0.5,0,1],'LineWidth',1.4)
hold on

V_thetaBH=(gamma/(2*pi*Rvinv10)).*(r/Rvinv10).*(1./((r/Rc).^2+1));

    plot(r,V_thetaBH,'color',[0,0,0],'linewidth',1.5)

    axis([0 30 0 300])
grid on
title('Velocidad tangencial en función del radio')
```