CAPÍTULO IV

Aplicaciones económicas

A. Mármol   L. Monroy

1. Introducción

La teoría de juegos proporciona un marco unificado para el análisis económico en muchos campos, lo que contribuye a estructurar el proceso de modelización del comportamiento económico. Las teorías tradicionales de la decisión y de juegos, estudian la forma en que los decisores pueden optimizar un único objetivo. Esta consideración impide una aplicación más amplia de sus técnicas, ya que cualquier problema que pueda aparecer en economía o en otras ciencias sociales envuelve más de un objetivo.

Además, cualquier situación competitiva que puede modelizarse como un juego escalar puede transformarse en un juego vectorial cuando hay más de un objetivo. Por ejemplo, las políticas de producción de dos firmas que compiten por un mercado, puede considerarse como un juego escalar. Sin embargo, cuando compiten simultáneamente en varios mercados, hay que considerar el enfoque multicriterio.

Los juegos con pagos vectoriales difieren de los juegos escalares únicamente en la estructura del pago, pero esto es suficiente para que muchos de los resultados de la teoría de juegos escalares, no tengan una extensión directa en los juegos vectoriales, debido a que en general no existe un orden total entre los pagos vectoriales y por ello, no es fácil establecer comparaciones entre los distintos pagos obtenidos. Por esta razón, en los últimos años se han propuesto nuevos conceptos de solución y procedimientos para obtener estas soluciones.

La extensión natural del concepto de estrategias minimax es difícil de conseguir en los juegos con pagos vectoriales. Sin embargo, aunque en algunos casos es posible establecer la existencia de tales estrategias, suele ser bastante complicado obtenerlas y en la mayoría de los casos los valores que proporcionan no son únicos. Por ello, el concepto de solución de estrategia de seguridad Pareto-óptima, introducido en el capítulo II, es importante para resolver juegos vectoriales desde una actitud de aversión al riesgo. En este capítulo analizamos tres casos de mercados competitivos en los que las empresas compiten simultáneamente en varios escenarios. En este análisis utilizaremos los conceptos y resultados expuestos en los capítulos anteriores

2. Campaña publicitaria

La publicidad es una variable de decisión estratégica muy importante en un modelo de oligopolio cuando la información que los consumidores tienen con respecto a preferencias, precio o características de los productos es incompleta. Con respecto a la publicidad competitiva, cada empresa tiene, generalmente, un presupuesto fijo. Cuando una empresa tiene un sólo competidor importante, su objetivo suele ser conseguir la mayor cuota de mercado posible disminuyendo los clientes de su competidor. Sin embargo, la empresa también ha de tener en cuenta la variedad de medios que puede utilizar para su publicidad con objeto de alcanzar un segmento diversificado de población.

El primer caso que estudiamos corresponde a un juego en el que el conjunto de estrategias puras de los jugadores es finito, por lo que los pagos que reciben pueden representarse por una matriz cuyos elementos son vectores. Es una extensión del modelo presentado por Shubik (1955) [85], y vamos a considerarlo bajo el punto de vista de uno de los jugadores.

Dos empresas tienen un millón de unidades monetarias (u.m.) cada una para gastar en publicidad de sus productos. Pueden utilizar radio, televisión, y prensa escrita para realizar su campaña publicitaria que va a ir dirigida a tres grupos de clientes potenciales, es decir, la publicidad va a tener efecto en tres escenarios distintos. El efecto esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente matriz:

	Radio	Televisión	Prensa
Radio	$(0, -0.2, 1)$	$(-0.5, 1, 1.2)$	$(0, 1.5, 1.5)$
Televisión	$(2, 0.5, 0.7)$	$(-0.5, 0.8, 0.7)$	$(1.5, 1.1, 0.3)$
Prensa	$(1, 1.2, -0.5)$	$(-0.5, 0.4, 0)$	$(0, 0.7, 0.2)$

Cada entrada de la matriz de pagos es un vector cuyas componentes representan la cantidad de ingreso extra obtenido en cada grupo cuando cada jugador gasta su dinero en los diferentes medios. Podemos considerar que es posible gastar distintas cantidades en cada uno de ellos, en cuyo caso las estrategias $x = (x_1, x_2, x_3)$ representan la proporción de la cantidad total que la empresa I gasta en cada medio, o bien que la empresa debe gastar todo su dinero en un solo medio, en cuyo caso la estrategia $x = (x_1, x_2, x_3)$ puede considerarse como la probabilidad con que debe considerarse cada medio. Este modelo puede analizarse como un juego matricial vectorial, donde la matriz de pagos vectoriales se descompone en tres matrices escalares $A(1)$, $A(2)$ y $A(3)$:

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad A(2) = \begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.8 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ -0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Como es usual, los espacios de estrategias mixtas de cada jugador son

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^{3} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3\}$$

y la función de pagos del juego viene dada por el vector de tres componentes

$$v(x,y) = x^t A y = (v_1(x,y), v_2(x,y), v_3(x,y))$$

donde $v_k(x,y) = x^t A(k) y, \quad k = 1,2,3.$

Cada estrategia $x \in X$ define niveles de seguridad para el jugador I en cada juego escalar inducido, de la forma:

$$v_k(x) = \min_{y \in Y} v_k(x,y), \quad k = 1,2,3$$

de donde el vector de nivel de seguridad para x es

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$$

Para resolver este juego, consideramos el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I, que consiste en maximizar (en sentido vectorial), el vector de nivel de seguridad del jugador I, es decir, el jugador I desde un punto de vista conservador, busca estrategias $x \in X$ cuyo vector de nivel de seguridad no pueda ser mejorado componente a componente.

El conjunto de estas estrategias y los correspondientes vectores de nivel de seguridad asociados, viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema lineal multiobjetivo asociado al juego vectorial

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2, v_3 \\ \text{s.a.} & x^t A(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Con el programa ADBASE hemos obtenido las soluciones extremas

$$\begin{aligned} (v^1, x^1) &= (-1/2, 342/495, 3/11; 0, 8/11, 3/11) \\ (v^2, x^2) &= (-1/2, 677/990, 663/1980; 1/18, 62/99, 7/22) \\ (v^3, x^3) &= (-1/2, 17/90, 75/90; 4/9, 5/9, 0) \\ (v^4, x^4) &= (-1/2, -1/5, 1; 1, 0, 0). \end{aligned}$$

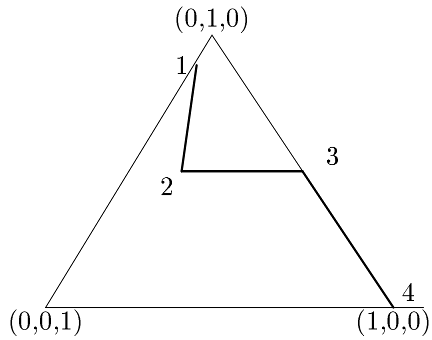

Figura 4.1.

La figura 4.1 representa le espacio de estrategias mixtas del jugador I, donde los vértices de este triángulo corresponden a las tres estrategias puras. El jugador I debe utilizar alguna de las estrategias que esté en la línea poligonal que une los puntos 1 y 4.

Por ejemplo, la estrategia $x^3 = (4/9, 5/9, 0)$ indica que utilizando la radio y televisión en proporción 4/5, se asegura una pérdida de ingresos de no más de 1/2 en el primer segmento de la población y un aumento de ingresos de al menos 17/90 y 75/90 en el segundo y el tercero respectivamente, y estos niveles no son mejorables conjuntamente.

Consideremos ahora los juegos vectoriales por objetivos para resolver este juego. Supongamos que el jugador I ha establecido los objetivos $P = (1, 0.8, 0.7)$, para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$ la función de pagos es

$$v^P(x,y) = x^t A_P y = (v_1^P(x,y), v_2^P(x,y), v_3^P(x,y))$$

donde

$$v_k^P(x,y) = x^t A_P(k) y, \; k = 1,2,3$$

y

$$A_P(1) = (\delta_{ij}^1), \quad \delta_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij} < 1 \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3$$

$$A_P(2) = (\delta_{ij}^2), \quad \delta_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq 0.8 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij} < 0.8 \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3$$

$$A_P(3) = (\delta_{ij}^3), \quad \delta_{ij}^3 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq 0.7 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij} < 0.7 \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3$$

En consecuencia, tenemos

$$A_P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cada estrategia $x \in X$ los niveles de seguridad en cada juego vienen dados por

$$v_P^k(x) = \min_{y \in Y} v_k^P(x,y) \quad k = 1,2,3$$

de donde el vector de seguridad de nivel P para el jugador I es

$$v^P = (v_1^P(x), v_2^P(x), v_3^P(x))$$

siendo $v_k^P(x)$ la probabilidad de conseguir al menos P_k en cada juego escalar cuando el jugador I juega la estrategia x.

La forma de obtener el conjunto de estrategias de seguridad de nivel P y los correspondientes vectores de nivel de seguridad, es resolviendo el problema lineal multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2, v_3 \\ \text{s.a.} & x^t A_P(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A_P(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A_P(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

La solución de este problema viene dada, en este caso, por la envolvente convexa de las soluciones eficientes extremas del mismo, que son:

$$(x^1, v^1) = (1/2, 0, 1/2; 0, 1/2, 1/2)$$
$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0; 0, 0, 1).$$

Si el jugador I utiliza la estrategia $x^1 = (1/2, 0, 1/2)$ consigue no menos de $P_1 = 1$ con una probabilidad de al menos $1/2$, $P_2 = 0.8$ con probabilidad 0 y no menos de $P_3 = 0.7$ con probabilidad no menor de $1/2$.

3. Modelo de mercados competitivos

En las ciencias sociales, al estudiar modelos en los que las variables pertenecen a conjuntos finitos con un gran número de elementos, se suele suponer que dichos conjuntos son infinitos. Esto permite aplicar las técnicas de análisis matemático a una gran variedad de problemas. Por ello, al estudiar juegos con un gran número de estrategias para un jugador, es metodológicamente natural, a la vez que útil, considerar que el conjunto de estrategias para este jugador es infinito.

El siguiente modelo corresponde a un juego en el cuadrado unidad, es decir cada jugador tiene un continuo de estrategias puras, representadas como puntos del intervalo cerrado [0,1]. Por tanto, una estrategia pura para cada jugador es un numero real en este intervalo y la función de pagos del juego es una función definida en el cuadrado unidad.

Este modelo es una extensión de un juego antagónico en el cuadrado unidad presentado por Vorobev (1977) [94].

Una empresa, el jugador II, controla dos mercados de dos bienes homogéneos en dos áreas diferentes A y B. Otra empresa, el jugador I, intenta conquistar uno de estos dos mercados, simultáneamente en las dos áreas. Con este propósito, el jugador I invierte en publicidad, en televisión y para ser emitida simultáneamente en las dos áreas, una cantidad de una unidad monetaria. Si el jugador asigna la cantidad x al primero de los mercados, entonces $1 - x$, es lo que asigna al segundo. Para mantener sus mercados intactos, el jugador II también emplea una unidad monetaria en publicidad, asignando la cantidad y al primer mercado y $1 - y$ al segundo.

Consideramos que si el jugador I consigue ventaja en uno de los mercados (no puede conquistar ambos a la vez) elimina a su oponente de este mercado y obtiene un vector de pagos cuyas componentes son el exceso de fondos asignado a este mercado multiplicado por un coeficiente que refleja la importancia de este mercado en cada una de las dos áreas. La función de pagos es por tanto:

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H(x,y) = (H_A(x,y), H_B(x,y))$$

donde

$$H_A(x,y) = \begin{cases} k_1(x-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ k_2(y-x) & \text{si} \quad x \leq y \end{cases}$$

$$H_B(x,y) = \begin{cases} k_3(x-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ k_4(y-x) & \text{si} \quad x \leq y \end{cases}$$

donde k_1 , k_2, k_3 y $k_4 \geq 0$. k_1 y k_3 reflejan la importancia del primer mercado y k_2 y k_4, la importancia del segundo mercado en las áreas A y B respectivamente.

Este juego lo resolvemos bajo el punto de vista del jugador II. Buscamos las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para este jugador, es decir, el jugador II quiere determinar la cantidad y de forma que minimize el máximo del vector de pagos en ambas áreas.

En este caso, para cada $y \in [0,1]$ los niveles de seguridad en cada mercado son:

$$\overline{H}_A(y) = \max_{x \in [0,1]} H_A(x,y), \quad \overline{H}_B(y) = \max_{x \in [0,1]} H_B(x,y)$$

y el vector de nivel de seguridad $\overline{H}(y) = (\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y))$, representa el pago que el jugador II puede garantizarse en cada mercado. Entonces el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas y los niveles de seguridad asociados vienen dados por el conjunto de soluciones eficientes del problema bicriterio

$$\begin{array}{ll} \min & \overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y) \\ \text{s.a.} & 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

Las componentes del vector de nivel de seguridad en este modelo son:

$$\begin{aligned} \overline{H}_A(y) &= \max_{0 \leq x \leq 1} H_A(x,y) = \max\{\max_{y \leq x \leq 1} k_1(x-y), \max_{0 \leq x \leq y} k_2(y-x)\} \\ &= \max\{k_1(1-y), k_2 y\}, \\ \overline{H}_B(y) &= \max_{0 \leq x \leq 1} H_B(x,y) = \max\{\max_{y \leq x \leq 1} k_3(x-y), \max_{0 \leq x \leq y} k_4(y-x)\} \\ &= \max\{k_3(1-y), k_4 y\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\overline{H}_A(y) = \begin{cases} k_1(1-y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{k_1}{k_1+k_2} \\ k_2 y & \text{si} \quad \frac{k_1}{k_1+k_2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{H}_B(y) = \begin{cases} k_3(1-y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{k_3}{k_3+k_4} \\ k_4 y & \text{si} \quad \frac{k_3}{k_3+k_4} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Basándonos en el siguiente resultado podemos obtener el conjunto de todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas de este juego

Lema 4.1 *Sean $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones convexas en X compacto. Si x^1 es el único mínimo en X para f_1 y x^2 es el único mínimo en X para f_2 , $(x^1 < x^2)$, entonces el conjunto de soluciones eficientes para el problema* $\min f_1(x), f_2(x)$ *es el intervalo cerrado $[x^1, x^2]$.*

Demostración:

1. Sea $x \in (x^1, x^2)$, probaremos que no existe $y \neq x$ tal que $f_1(y) \leq f_1(x)$ y $f_2(y) \leq f_2(x)$ con al menos una desigualdad estricta.

   Consideremos $y < x$. Como $y < x < x^2$, por ser f_2 convexa se tiene $f_2(x) \leq \lambda f_2(y) + (1-\lambda) f_2(x^2)$, $\lambda \in (0,1)$. Si $f_2(y) \leq f_2(x)$, entonces $f_2(x) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(x^2)$ y $f_2(x) \leq f_2(x^2)$, en contra de ser x^2 el único mínimo de f_2, por tanto x no está dominada por y. En el caso $y > x$ se obtiene el resultado de forma análoga.

2. Si $x = x^1$ o $x = x^2$ la eficiencia se tiene de la condición de mínimo global.

3. Sea $x \notin (x^1, x^2)$. Si $x < x^1$ probaremos que x está dominada por x^1. En primer lugar, $f_1(x^1) < f_1(x)$. Por otra parte, como $x^1 \in (x, x^2)$, por ser f_2 convexa se tiene $f_2(x^1) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(x^2) < \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(x) = f_2(x)$ y de aquí se obtiene el resultado. De forma análoga, cuando $x > x^2$ se demuestra que x está dominada por x^2. □

Este resultado puede generalizarse al caso de n funciones reales, en cuyo caso el conjunto eficiente es el menor intervalo cerrado que contiene sus mínimos.

Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *El conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador II en el juego bicriterio* $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es el intervalo cerrado* $[k_1/(k_1+k_2), k_3/(k_3+k_4)]$ *o bien* $[k_3/(k_3+k_4), k_1/(k_1+k_2)]$

Demostración: El resultado es consecuencia inmediata del lema 4.1 ya que las funciones $\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y)$ son funciones convexas en $[0,1]$ y sus mínimos globales se alcanzan en los puntos $y^1 = k_1/(k_1+k_2)$ e $y^2 = k_3/(k_3+k_4)$ respectivamente, con independencia de los valores relativos de los coeficientes k_i. □

Con respecto a la posición relativa de las funciones $\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y)$ hay dos casos básicos, que podemos observar en las gráficas

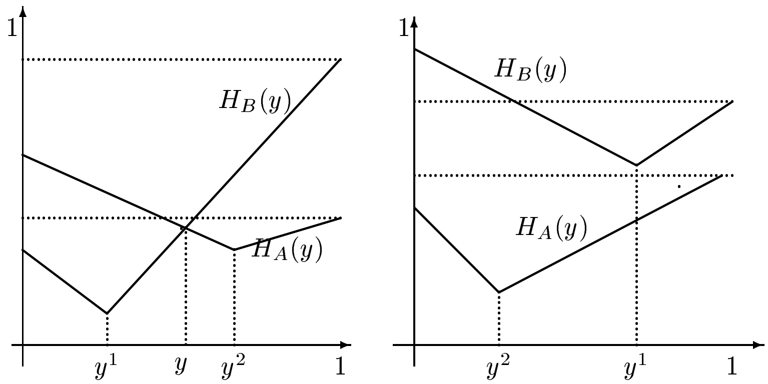

Figura 4.2.

El punto $y = k_3/(k_2+k_3)$ en la gráfica de la izquierda de la figura 4.2 es una estrategia de seguridad Pareto-óptima, que es equitativa en el siguiente sentido: cuando el jugador II juega su estrategia y, se asegura la misma pérdida máxima en ambas áreas. Cualquier desviación de esta estrategia supondrá un incremento en la máxima perdida que se asegura en una de las áreas y una disminución en la otra. Vemos que en el otro caso no existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa. Las condiciones en los parámetros k_i para la existencia de dicha estrategia se establecen en este resultado:

Proposición 4.1 *Existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa para el juego si y sólo si*

$$k_1/(k_1+k_2) \leq k_3/(k_2+k_3) \leq k_3/(k_3+k_4) \text{ cuando } k_1/(k_1+k_2) < k_3/(k_3+k_4)$$

o bien

$$k_3/(k_3+k_4) \leq k_1/(k_1+k_4) \leq k_1/(k_1+k_2) \text{ cuando } k_3/(k_3+k_4) \leq k_1/(k_1+k_2)$$

Con respecto a la existencia de estrategia minimax para este juego, notemos que como consecuencia de la forma especial de la función de pagos, el conjunto de soluciones minimax para el jugador II coincide con el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas. Sin embargo, mientras que en el caso de estas últimas la valoracion de cada estrategia viene dada por un único vector, la valoración de las estrategias minimax proporciona dos vectores diferentes.

4. Duopolio como juego bicriterio

Como hemos visto en el capítulo III, la programación multiobjetivo también puede utilizarse para analizar juegos bipersonales de suma no nula escalares desde el punto de vista de uno de los jugadores. Ahora bien, como las acciones de dicho jugador repercuten en el resultado del otro, la estrategia que el primero elegirá dependerá de la actitud que tenga hacia el otro.

En el caso de *actitud positiva*, es decir cuando el jugador I intenta conseguir el mejor resultado para ambos jugadores, si F_1 y F_2 son las funciones de pago del jugador I y II respectivamente, el juego bipersonal de suma no nula puede considerarse como un juego bicriterio cuya función de pagos es $F = (F_1, F_2)$. Desde una *actitud negativa*, es decir si el jugador I intenta conseguir el mejor resultado para él, pero perjudicando al contrario, el juego bipersonal de suma no nula puede considerarse como un juego bicriterio cuya función de pagos es $F = (F_1, -F_2)$.

Este estudio puede hacerse tanto en el caso continuo como en el discreto. Vamos a aplicar estas ideas para analizar un duopolio en el que las variables estratégicas son los precios y las dos empresas rivales intentan establecer un precio menor que el de la otra con el fin de aumentar su cuota de mercado.

4.1. Caso continuo

Dos empresas venden cada una un bien que, en el mercado, son sustitutos el uno del otro. Por ello, un cambio en el precio de un bien tiene un gran impacto en la demanda del otro. Las funciones de demanda de cada empresa son respectivamente,

$$d_1(p_1, p_2) = 10 - p_1 + 0.5p_2/p_1, \quad d_2(p_1, p_2) = 20 - 2p_2 + p_1/p_2.$$

donde p_1 y p_2 denotan los precios de la empresa 1 y de la empresa 2 respectivamente. Supongamos por simplicidad de cálculo, que ambas firmas tienen costes de producción nulos y tratan de maximizar beneficios estableciendo los precios.

Este problema puede modelizarse como un juego bipersonal en forma estratégica donde el conjunto de estrategias para ambos jugadores son respectivamente $S_1 = [0, 10]$ y $S_2 = [0, 10]$ y las funciones de pagos

$$F_1(p_1, p_2) = 10p_1 - p_1^2 + 0.5p_2, \quad F_2(p_1, p_2) = 20p_2 - 2p_2^2 + p_1.$$

Sin pérdida de generalidad, se consideran los precios en el intervalo $[0, 10]$ porque para precios mayores que 10 la función de demanda de ambos bienes puede ser cero. Las funciones de pagos son la funciones de beneficios obtenidas multiplicando las funciones de demanda por los precios respectivos.

Actitud positiva: Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $p_1 \in [0, 10]$ viene dado por

$$F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$$

donde

$$F_1(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_1(p_1, p_2), \quad F_2(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_2(p_1, p_2).$$

Este vector representa el resultado que el jugador I se asegura para él y para el jugador II cuando juega la estrategia p_1 . La expresión analítica de los niveles de seguridad es

$$F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2, \quad F_2(p_1) = p_1.$$

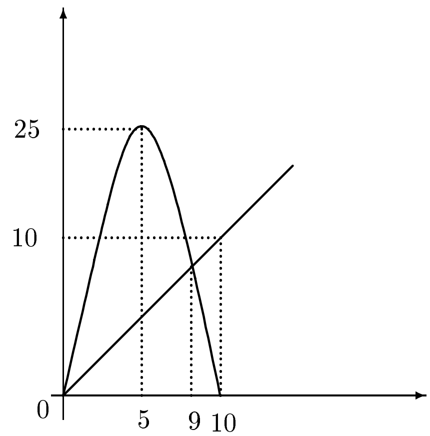

Figura 4.3.

En la figura 4.3 se tiene la representación gráfica de estas funciones.

Para maximizar el vector de nivel de seguridad hemos de resolver el problema biobjetivo

$$\begin{array}{ll} \max & F_1(p_1), F_2(p_1) \\ \text{s.a.} & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{array}$$

Como $F_1(p_1), F_2(p_1)$ son funciones cóncavas en $\mathbb{R}$ y sus valores máximos en el intervalo $[0, 10]$ se alcanzan en los puntos $p^1 = 5$ y $p^2 = 10$ respectivamente, por el lema 4.1, el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado $[5, 10]$. En este caso, el precio $p_1 = 9$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa, en el sentido que cuando el jugador I establece este precio, se asegura un beneficio de 9 unidades para él y para el otro jugador, con independencia del precio que establezca el otro jugador.

Actitud negativa Considerando una actitud negativa, el jugador I está interesado en maximizar su beneficio mínimo a la vez que minimiza el benefico máximo que el jugador II pueda obtener. Para una estrategia $p_1 \in [0, 10]$ el vector de nivel de seguridad viene dado por

$$F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$$

donde

$$F_1(p_1) = \min_{0 \leq p_2 \leq 10} F_1(p_1, p_2), \quad F_2(p_1) = \max_{0 \leq p_2 \leq 10} F_2(p_1, p_2).$$

La expresión analítica de los niveles de seguridad es

$$F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2, \quad F_2(p_1) = p_1 + 50.$$

En este caso, el jugador I quiere maximizar $F_1(p_1)$ y minimizar $F_2(p_1)$. Para encontrar las estrategias no dominadas resolvemos el problema biobjetivo

$$\begin{array}{ll} \max & F_1(p_1), -F_2(p_1) \\ \text{s.a.} & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{array}$$

Las funciones $F_1(p_1)$ y $-F_2(p_1)$ son cóncavas en $[0, 10]$, y sus valores máximos en el intervalo $[0, 10]$ se alcanzan en los puntos $p^1 = 5$ y $p^2 = 0$ respectivamente. Entonces, el lema 4.1 asegura que el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado $[0, 5]$. En este caso no existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa.

4.2. Caso discreto

Si consideramos que hay un número finito de estrategias puras, este juego puede representarse por dos matrices de pagos. Supongamos que ambos precios toman los valores $p_1, p_2 = 2, 4, 6, 8, 10$. Las matrices de pago A y B que se obtienen para los jugadores I y II respectivamente son:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 34 & 50 & 50 & 34 & 2 \\ 36 & 52 & 52 & 36 & 4 \\ 38 & 54 & 54 & 38 & 6 \\ 40 & 56 & 56 & 40 & 0 \\ 42 & 58 & 58 & 42 & 10 \end{pmatrix}$$

Los espacios de estrategias mixtas para cada jugador, en este caso, son

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^{5} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^5 : \sum_{j=1}^{5} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5\}$$

Así, para $x \in X$, $y \in Y$, las funciones son

$$F_1(x,y) = x^t Ay, \quad F_2(x,y) = x^t By.$$

En esta situación, el juego bimatrical puede analizarse como un juego matricial bicriterio. En el caso de actitud positiva, la matriz del pagos del juego bicriterio es (A,B), y en el caso de actitud negativa la matriz del juego bicriterio es $(A,-B)$.

Actitud positiva: Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $x \in X$ es

$$v_1(x) = \min_{y\in Y} x^t Ay, \quad v_2(x) = \min_{y\in Y} x^t By.$$

Para obtener las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del jugador I resolvemos el problema lineal biobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \dots, v_2) \\ & x \in X \end{array}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0,0,1,0,0;25,6)$$

$$(x^2, v^2) = (0,0,0,1,0;17,8)$$

$$(x^3, v^3) = (0,0,0,0,1;1,10)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[6,10]$.

Por ejemplo, si el jugador I establece el precio $p_1 = 6$, se garantiza un beneficio al menos de 25 para él y un beneficio al menos de 6 para el jugador II independientemente del precio que establezca este último.

Actitud negativa: Considerando una actitud negativa del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $x \in X$ es

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y, \quad v_2(x) = \max_{y \in Y} x^t B y.$$

El problema lineal biobjetivo asociado es

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, -v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \ldots, v_2) \\ & x \in X \end{array}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 1, 0, 0, 0; 25, 52)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0, 0, 0; 17, 50)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[2, 4]$.

Observemos que los conjuntos de estrategias de seguridad Pareto-óptimas obtenidos en el caso discreto son subconjuntos de los correspondientes conjuntos obtenidos en el caso continuo.