Reglas Igualitarias Restringidas para Problemas Globales de Bancarrota

Sánchez Sánchez, Francisca J. (fsansan@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, Amparo M. (amarmol@us.es)
Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla
Hinojosa Ramos, Miguel A. (mahinram@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide

RESUMEN

Se analizan problemas de reparto en los que los agentes realizan unas determinadas demandas sobre múltiples bienes. En este contexto, cada agente puede mostrar sus preferencias, valorando su reparto global por el mínimo obtenido con respecto a todos los bienes. El objetivo es proponer y analizar una regla global basada en el principio de justicia según el requisito de eficiencia leximin que garantice repartos no dominados con respecto a las preferencias de los agentes.

Palabras clave: Problemas de reparto con múltiples bienes, reglas de reparto igualitarias, eficiencia leximin.
Clasificación JEL (Journal Economic Literature): C71
Área temática: Teoría de Juegos

1. INTRODUCCIÓN

Un problema clásico de bancarrota aparece cuando hay que repartir una cantidad (llamada también estado) entre un conjunto de agentes, en los casos en que esta cantidad no es suficiente para satisfacer las demandas de los agentes que tienen adquiridos unos derechos sobre la cantidad a repartir. Desde muy antiguo se han presentado problemas reales de este tipo. Son clásicos los ejemplos que aparecen en el Talmud babilónico (ver Aumann y Maschler, 1985). Una revisión exhaustiva de las distintas reglas de reparto puede verse en Thomson (2003).

Consideramos una extensión de los problemas de bancarrota, en la que se reparten distintos bienes entre un conjunto de agentes que reclaman una cantidad distinta dependiendo del bien que se considere. En el reparto de múltiples bienes hay que considerar dos aspectos para realizar el reparto: por una parte las demandas de cada agente sobre los diferentes bienes (como en los problemas de bancarrota) y por otra parte las preferencias de los agentes con respecto a los resultados obtenidos en los diferentes bienes. En relación con el segundo punto, las preferencias de los agentes pueden ser aditivas en los bienes, es decir, cada agente valora la cantidad total recibida con respecto a todos los bienes. El modelo que surge en este caso está relacionado con el modelo introducido por Calleja (2005), si se incorporasen restricciones adicionales para asegurar que la asignación total para cada bien no excede el estado correspondiente.

En este trabajo se considera el caso en que las preferencias de los agentes son leximin, esto significa que cada agente valora su reparto global según la ordenación leximin definida en su espacio de pagos.

Basándose en la regla de Igual Ganancia se propone y analiza una regla de reparto en el caso de problemas de bancarrota con múltiples bienes. La regla de reparto se fundamenta en el principio de justicia que se determina por la eficiencia leximin.

En la sección 2, se realiza una extensión del problema clásico de bancarrota incorporando cotas inferiores sobre las cantidades que los agentes pueden conseguir. A partir de una regla clásica de reparto se propone un procedimiento para obtener repartos en el modelo extendido. La sección 3, se centra en una situación global para la que se propone una regla global basada en la eficiencia leximin y se formulan propiedades generales para reglas globales.

2. PROBLEMAS DE BANCARROTA CON COTAS INFERIORES

Los problemas de bancarrota con cotas inferiores son problemas de reparto en los que hay que considerar dos aspectos importantes: por una parte las demandas de cada agente sobre el estado y por otra un vector de cotas inferiores sobre las cantidades asignadas a cada agente.

Formalmente el problema de bancarrota con cotas inferiores se define:

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de agentes. Una situación de bancarrota con cotas inferiores viene representada por $(E, \mathbf{c}, \mathbf{a})$, donde $E \in \mathbb{R}_+$ es el estado que hay que repartir entre los agentes, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de demandas y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de cotas inferiores sobre las cantidades asignadas a cada agente. Además, se establece la siguiente condición: $\sum_{i \in N} a^i < E \leq \sum_{i \in N} c^i$. Se denota por $\mathbb{B}_L$ a la familia de este tipo de problemas.

Dado el problema $(E, \mathbf{c}, \mathbf{a})$, un reparto del estado E es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que cumple las condiciones de:

- Racionalidad individual: $x^i \geq a^i, \forall\, i \in N$.
- Eficiencia: $\displaystyle\sum_{i \in N} x^i = E$.

En este contexto, una regla de reparto es una función, f, que asocia a cada problema $(E, \mathbf{c}, \mathbf{a})$ un reparto, $\mathbf{x} = f(E, \mathbf{c}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$. Nótese que no necesariamente se cumple que $x^i \leq c^i, \forall\, i \in N$.

En la literatura se han tratado problemas relacionados con el problema de bancarrota con cotas inferiores. En Pulido (2002) y (2006), se analizan situaciones donde hay incertidumbre sobre la validez de las demandas de los agentes y se considera un punto de referencia exógeno definido según unos criterios objetivos que juega un papel importante en el reparto. En su modelo, el punto de referencia está siempre dominado por el vector de demandas de los agentes. En los problemas de negociación analizados en Chun y Thomson (1992), Bossert (1993) y Herrero (1998), se incluye un punto de desacuerdo junto con un punto de referencia fuera del conjunto factible, que domina el punto de desacuerdo.

En contraste con los trabajos antes mencionados, en el problema de bancarrota con cotas inferiores que aquí se presenta, las demandas no dominan necesariamente a las cotas inferiores, incluso puede ser necesario asignar a los agentes una cantidad mayor que su demanda.

2.1. REGLA DE IGUAL GANANCIA RESTRINGIDA PARA PROBLEMAS DE BANCARROTA CON COTAS INFERIORES

La regla de reparto que se define a continuación, está basada en una regla igualitaria, en concreto la de Igual Ganancia, CEA[1], que asigna la misma cantidad a todos los agentes sin dar a ninguno más de lo que demanda. Sin embargo, la regla que se propone aquí, además de la idea de reparto igualitario contempla un límite sobre las cantidades asignadas a los agentes. Este límite permite que los agentes, puedan en algunos casos recibir una cantidad mayor que su demanda.

Definición 2.1. *Para todo problema* $(E, \mathbf{c}, \mathbf{a}) \in \mathbb{B}_L$, *se define la regla de Igual*

[1]La asignación que proporciona la regla de reparto CEA en un problema clásico de bancarrota, $(E, \mathbf{c})$, viene dada por:

$$x^i = CEA^i(E, \mathbf{c}) = \min\{\lambda, c^i\}$$

donde $0 \leq \lambda \leq \infty$, se determina de forma que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i = E$.

Ganancia Restringida con Cotas Inferiores, $CEAL$, como:

$$x^i = CEAL^i(E, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \text{máx}\{a^i, \text{mín}\{\lambda, c^i\}\}, \quad \forall\, i \in N,$$

donde $0 \leq \lambda \leq \infty$*, se determina de forma que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i = E$.

En la Figura 1, se presentan gráficamente tres situaciones distintas de problemas de bancarrota con cotas inferiores. Se muestran los resultados de las reglas $CEAL$ y CEA para el caso de dos agentes.

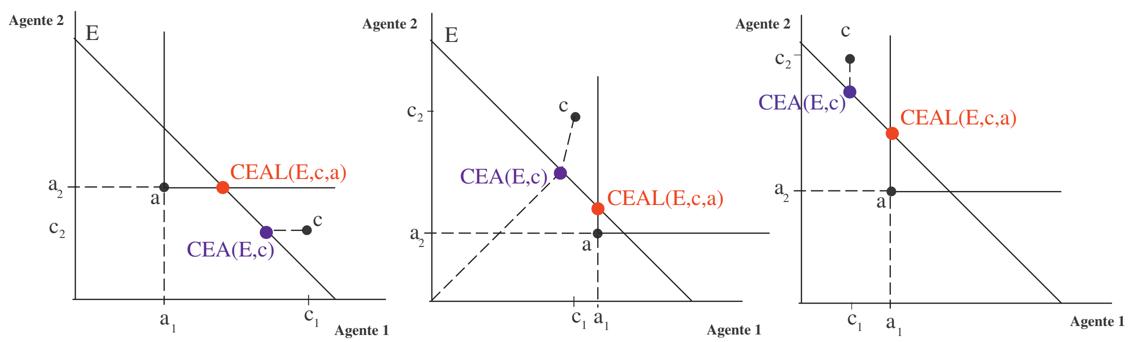

Figura 1: Regla de Igual Ganancia Restringida con Cotas Inferiores.

A continuación, se propone un procedimiento para obtener el reparto que proporciona la regla de Igual Ganancia Restringida en problemas de bancarrota con cota inferior.

Sea $(S, E^S, \mathbf{c}^S)$ un problema clásico de bancarrota, donde $S \subseteq N$ es un conjunto de agentes, E^S es el estado que hay que repartir, $\mathbf{c}^S$ es la proyección del vector $\mathbf{c}$ al espacio $|S|$-dimensional y CEA es la regla de Igual Ganancia.

Proposición 2.2. *El reparto* $\mathbf{x} = CEAL(E, \mathbf{c}, \mathbf{a})$ *se obtiene según el siguiente procedimiento:*

Sea $S = N$*,* $E^S = E$ *y* $\mathbf{c}^S = \mathbf{c}$.

- *Sea* $F_S = \{i \in S |\, CEA^i(S, E^S, \mathbf{c}^S) \leq a^i\}$*, entonces:*

- *Mientras* $F_S \neq \emptyset$*:*

  Para $k \in F_S$*, hacer* $x^k := a^k$*,*

  $S := S \setminus F_S$*,* $E^S := E^S - \sum_{k \in F_S} a^k$*, y actualizar* F_S*.*

- *Si* $F_S = \emptyset$ *entonces* $x^i = CEA^i(S, E^S, \mathbf{c}^S)$ *para* $i \in S$*.*

Demostración: Sea $\mathbf{x}$ un reparto obtenido siguiendo el procedimiento. Sea $\bar{S}$ el conjunto de agentes tal que $F_{\bar{S}} = \emptyset$, y $\lambda_{\bar{S}}$ la cantidad común obtenida en la última aplicación de la regla de Igual Ganancia (CEA) para los agentes de $\bar{S}$. Se probará que $x^i = \text{máx}\{a^i, \text{mín}\{\lambda_{\bar{S}}, c^i\}\}$.

En primer lugar si los conjuntos F_S y T_S se han construido siguiendo el procedimiento, y además $T \subset S$, entonces para $i \in T$, $CEA^i(T, E^T, \mathbf{c}^T) \leq CEA^i(S, E^S, \mathbf{c}^S)$. Esto es porque cuando un agente sale del conjunto S su cota inferior es más grande que la porción obtenida con la regla CEA, y como este valor está fijado en la cota inferior, en el siguiente paso hay un estado más pequeño para repartir entre el resto de agentes.

Cuando el procedimiento termina, el conjunto de agentes se divide en dos conjuntos, $F = \bigcup F_S$, formado por los agentes cuyos valores se han fijado en la cota inferior, y $\bar{S}$ formado por los agentes cuyos repartos se han obtenido según la regla CEA en el último paso.

Si $i \in F$, entonces $x^i = a^i$ y para algún subconjunto $T \supseteq \bar{S}$, se cumple que $CEA^i(T, E^T, \mathbf{c}^T) = \text{mín}\{\lambda_T, c^i\} \leq a^i$. Por otra parte, el $\text{mín}\{\lambda_{\bar{S}}, c^i\} \leq \text{mín}\{\lambda_T, c^i\} \leq a^i$ y entonces $x^i = \text{máx}\{a^i, \text{mín}\{\lambda_{\bar{S}}, c^i\}\}$.

Si $i \in \bar{S}$ entonces $x^i = CEA^i(\bar{S}, E^{\bar{S}}, \mathbf{c}^S) = \text{mín}\{\lambda_{\bar{S}}, c^i\} > a^i$, y en este caso también, $x^i = \text{máx}\{a^i, \text{mín}\{\lambda_{\bar{S}}, c^i\}\}$.

Además, $\sum_{i \in N} x^i = \sum_{i \in \bar{S}} x^i + \sum_{i \in F} x^i = E^{\bar{S}} + \sum_{i \in F} x^i = E$.

Para $i \in N$, la expresión $x^i = \text{máx}\{a^i, \text{mín}\{\lambda, c^i\}\}$ con $\sum_i x^i = E$, define un reparto que, necesariamente es el reparto obtenido por el procedimiento.

3. PROBLEMAS GLOBALES DE BANCARROTA

Supóngase que en una determinada Universidad un departamento dispone de dotaciones presupuestarias distintas destinadas a 5 conceptos distintos: Transporte, comunicación, dotación ordinaria no inventariable, investigación-divulgación y material-bibliografía. El departamento está compuesto por 3 áreas de conocimiento que en base al gasto de otros años, reclaman una cantidad distinta dependiendo del concepto que se considere. Las áreas pueden interpretarse como los agentes que reclaman de la dotación presupuestaria una cuantía que es variable según el concepto, además las áreas muestran sus preferencias valorando su reparto global con respecto a todos los bienes. Esto es un ejemplo del tipo de situaciones que se analizan a continuación.

Formalmente un problema global de bancarrota es un problema de asignación de múltiples bienes que consiste en una familia de problemas de bancarrota $(N, E_j, \mathbf{c}_j)$, $j = 1, \ldots, m$, donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto de agentes, $E_j \in \mathbb{R}_+$ es el estado o cantidad disponible del bien j y $\mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^n_+$ representa las demandas de los agentes con respecto al bien j.

Para cada j, $j = 1, \ldots, m$, se cumple que $\sum_{i=1}^{n} c^i_j \geq E_j$, es decir, en cada bien los agentes reclaman una cantidad mayor que la disponible, apareciendo el problema de cómo dividir el estado del bien j entre los demandantes.

Suponemos que los estados de los distintos bienes están ordenados de forma creciente, $E_1 \leq E_2 \leq, \ldots, \leq E_m$. El problema global de bancarrota se denota por (N, E, C), donde $E \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A partir de ahora si no hay confusión posible al problema global se le denota por (E, C).

Obsérvese que el problema (E, C) se podría considerar como m problemas clásicos de bancarrota, $(N, E_j, \mathbf{c}_j)$, $j = 1, \ldots, m$, uno por cada bien, pudiéndose resolver separadamente cada problema si los agentes no manifiestan preferencias sobre las combinaciones de resultados correspondientes a los distintos bienes. No obstante, cuando dichas preferencias existen, hay que tenerlas en cuenta en las propuestas de soluciones para el problema global.

Un reparto global de los bienes a los agentes es una matriz no negativa $X \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, cumpliendo para cada j, $j = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^n x_j^i = E_j$. La columna i-ésima de la matriz X, $X^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)^t \in \mathbb{R}^m$, representa el reparto del agente i-ésimo en cada uno de los m bienes. La fila j-ésima de la matriz X, $X_j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n) \in \mathbb{R}^n$, representa el reparto del bien j para cada uno de los agentes.

Una regla de reparto global para este problema es una función, $\mathcal{F}$, que asocia a cada problema global de bancarrota, (E, C), un reparto global, $X = \mathcal{F}(E, C) \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$.

3.1. REGLA IGUALITARIA LEXIMIN

Antes de definir la regla regla Igualitaria Leximin hay que introducir una serie de conceptos para formalizar la idea de eficiencia leximin.

Dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $r(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$ es el vector obtenido reordenando las componentes de $\mathbf{a}$ en sentido creciente. Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} >_{lex} \mathbf{b}$ denota si hay $k = 1, \dots, m-1$ tal que $r_i(\mathbf{a}) = r_i(\mathbf{b})$ para $i = 1, \dots, k$ y $r_{k+1}(\mathbf{a}) > r_{k+1}(\mathbf{b})$. Con $\mathbf{a} \geqslant_{lex} \mathbf{b}$ se denota si $\mathbf{a} >_{lex} \mathbf{b}$ o $r(\mathbf{a}) = r(\mathbf{b})$. Con $>_{lex}$ se denota la parte asimétrica de $\geqslant_{lex}$.

Para $X, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se dice que el agente i tiene preferencias leximin sobre los repartos globales, si prefiere X a Y cuando $X^i \geqslant_{lex} Y^i$.

Ahora se define una relación de dominancia colectiva entre los repartos globales. Dado $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la matriz $Z(X)$, de orden $m \times n$, se construye como sigue: Para cada columna X^i, se reordenan sus componentes de forma creciente, este vector reordenado es la columna i-ésima de la matriz $Z(X)$. Así, la primera fila de $Z(X)$, $Z_1(X)$, contiene el valor más pequeño de cada columna de la matriz X. La segunda fila, $Z_2(X)$, contiene el segundo valor más pequeño de cada columna de la matriz X. En general, los elementos de $Z_k(X)$ son el k-ésimo elemento más pequeño de cada columna de la matriz X. Se dice que $X \succcurlyeq_{lex} Y$, si $Z_k(X) \geq Z_k(Y)$ para la primera fila, k, tal que $Z_k(X) \neq Z_k(Y)$.

En el próximo resultado, se establece la relación entre preferencia leximin y esta relación de dominancia colectiva: Si un reparto global es eficiente leximin, entonces no existe otro que mejore la asignación de todos los agentes en un sentido lexicográfico, con una mejora estricta por lo menos para uno de los agentes.

Lema 3.1. *Dados $X, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si $X^i \geqslant_{lex} Y^i$ para todo $i \in N$ y $X^i >_{lex} Y^i$ para algún $i \in N$, entonces $X \succcurlyeq_{lex} Y$.*

Se puede definir la eficiencia leximin de la siguiente forma:

Eficiencia Leximin. Un reparto global $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es *eficiente leximin* si no hay otro $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $Y \succcurlyeq_{lex} X$.

La siguiente caracterización de reparto global eficiente leximin es una consecuencia de los resultados de Mármol y Ponsatí (2007). Para un reparto global, la condición de no dominancia con respecto a las preferencias leximin es quivalente al siguiente supuesto: Si el estado correspondiente a un bien no es menor que el estado correspondiente a otro, entonces los agentes no obtendrán menos de este estado que del otro.

Proposición 3.2. *Un reparto global, X, en un problema global de bancarrota, (E, C), es eficiente leximin si y solo si $X_1 \leqq X_2 \leqq, \ldots, \leqq X_m$.*

Una vez definida la eficiencia leximin se está en disposición de concretar la regla Igualitaria Leximin. A partir de ahora se asume que los estados de los distintos bienes son diferentes, es decir, cumplen que, $E_1 < E_2 < \ldots < E_m$.

La idea de la regla Igualitaria Leximin es lograr un objetivo de uniformidad o igualdad, es decir, cuando sea posible asigna cantidades iguales de los bienes a los agentes, pero respetando unos límites en las ganancias para que se cumpla la eficiencia leximin. Por otra parte, si fuese necesario se corrigen los límites para que se cumpla este último requisito. Así, puede ocurrir que en algún bien se pierda el carácter igualitario del reparto, aunque puede que este carácter se recupere después en el reparto de otro bien.

La regla Igualitaria Leximin que se propone consiste en aplicar recursivamente la regla de Igual Ganancia Restringida con Cotas Inferiores a los bienes siguiendo un orden ascendente. Por construcción, el resultado que se obtiene es eficiente leximin.

Definición 3.3. *Para todo problema (E, C), se define la regla Igualitaria Leximin, $UCEA$, como:*

$$x_j^i = UCEA_j^i(E, C),$$

donde

$$x_j^i = \text{máx}\{x_{j-1}^i, \text{mín}\{\lambda_j, c_j^i\}\}$$

$0 \leq \lambda_j \leq \infty$, *se determina de forma que* $\sum_{i=1}^{n} x_j^i = E_j$ *y* $x_0^i = 0$, *para* $i \in N$ *y* $j = 1, \ldots, m$.

Como se aprecia, en esta regla el reparto de cada bien depende del reparto del bien anterior. Como consecuencia del carácter ascendente, la regla da más importancia a las demandas que corresponden a bienes con demandas más bajas.

La Figura 2, ilustra gráficamente la regla $UCEA$ en problemas globales de bancarrota en el caso de tres bienes y dos agentes. A modo comparativo, también se muestra la solución de la regla CEA en cada uno de los tres problemas clásicos de bancarrota que se podrían extraer del problema global en caso de enfocar los problemas separadamente. Obsérvese como con la regla Igualitaria Leximin el carácter igualitario del reparto se pierde en segundo bien y se recupera de nuevo en el tercer bien.

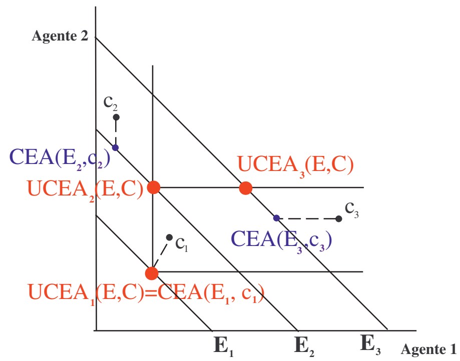

Figura 2: Regla Igualitaria Leximin.

3.2. PROPIEDADES

A continuación, se proponen algunas propiedades para reglas de reparto globales y se analizan para la regla Igualitaria Leximin.

- En situaciones donde se asigna un bien simple, es importante la propiedad de *razonabilidad*, que consiste en que cada demandante reciba a lo sumo su demanda. Esta idea se puede generalizar al caso del problema global de bancarrota de dos formas diferentes:

  Razonabilidad fuerte. $\mathcal{F}(E, C) \leqq C$.

  Razonabilidad. $\mathcal{F}^i(E, C) \not> C^i$, para todo $i \in N$.

  La regla Igualitaria Leximin cumple la propiedad de razonabilidad pero, no cumple la propiedad de razonabilidad fuerte. Las preferencias de los agentes sobre los bienes son monótonas, es decir, los agentes prefieren cantidades más grandes del bien incluso aunque estén por encima de las demandas.

- Si las demandas de dos agentes son iguales con respecto a cada bien, entonces deben recibir lo mismo en este bien:

  Tratamiento igualitario en cada bien. Para cada j, si $c_j^i = c_j^k$, entonces $\mathcal{F}_j^i(E, C) = \mathcal{F}_j^k(E, C)$.

  Es fácil ver que la regla Igualitaria Leximin no verifica el tratamiento igualitario en cada bien. El carácter igualitario del reparto se puede perder en algún bien para garantizar la eficiencia leximin.

- Si dos agentes demandan lo mismo con respecto a todos los bienes, entonces reciben lo mismo en todos los bienes.

  Tratamiento igualitario. Si $C^i = C^k$ para todo j, entonces $\mathcal{F}^i(E,C) = \mathcal{F}^k(E,C)$.

  La regla Igualitaria Leximin verifica el tratamiento igualitario.

  Demostración: Si $c^i_j = c^k_j$ para todo $j = 1,\ldots,m$, entonces en el primer paso como se aplica la regla clásica de Igual Ganancia, CEA, ambos agentes obtienen lo mismo, es decir, $x^i_1 = x^k_1$. En los pasos siguientes si se supone que $x^i_{j-1} = x^k_{j-1}$, entonces se cumple:

  $x^i_j = \text{máx}\{x^i_{j-1}, \text{mín}\{\lambda_j, c^i_j\}\} = \text{máx}\{x^k_{j-1}, \text{mín}\{\lambda_j, c^k_j\}\} = x^k_j$.

- Si para un bien la demanda del agente k es por lo menos como la del agente i, entonces en este bien el agente k, por lo menos recibe tanto como el agente i.

  Conservación del orden en cada bien. Para cada j, si $c^k_j \leq c^i_j$, entonces $\mathcal{F}^k_j(E,C) \leq \mathcal{F}^i_j(E,C)$.

  La regla Igualitaria Leximin no verifica la conservación del orden en cada bien.

- Si para todos los bienes la demanda del agente k es por lo menos como la del agente i, entonces el agente k en todos los bienes, recibe por lo menos tanto como el i.

  Conservación del orden. Si $C^k \leqq C^i$ para todo j, entonces $\mathcal{F}^k(E,C) \leqq \mathcal{F}^i(E,C)$.

  La regla Igualitaria Leximin cumple la propiedad de conservación del orden.

  Demostración: Si $c^i_j \geq c^k_j$ para todo $j = 1,\ldots,m$, en el primer paso se aplica una regla CEA estándar entonces, $x^i_1 \geq x^k_1$. En los pasos siguientes, suponemos que $x^i_{j-1} \geq x^k_{j-1}$ pudiendo ocurrir las siguientes situaciones:

a) Si $x_j^i = x_{j-1}^i$ y $x_j^k = x_{j-1}^k$, o $x_j^i = \text{mín}\{\lambda_j, c_j^i\}$ y $x_j^k = \text{mín}\{\lambda_j, c_j^k\}$, entonces es fácil comprobar que $x_j^i \geq x_j^k$.

b) Si $x_j^i = x_{j-1}^i > \text{mín}\{\lambda_j, c_j^i\}$ y $x_j^k = \text{mín}\{\lambda_j, c_j^k\}$, como $c_j^i \geq c_j^k$, entonces $x_j^i > x_j^k$.

c) Si $x_j^i = \text{mín}\{\lambda_j, c_j^i\} > x_{j-1}^i$ y $x_j^k = x_{j-1}^k$, entonces $x_j^i > x_j^k$.

- En un problema global donde hay más estado a repartir que en otro en todos los bienes, los agentes reciben repartos más grandes en todos los bienes.

  Monotonía fuerte. Si $E \geqq E'$, entonces, $\mathcal{F}(E, C) \geqq \mathcal{F}(E', C)$.

  La regla Igualitaria Leximin no verifica la monotonía fuerte.

- Si en dos problemas globales todos los bienes tienen el mismo estado, salvo un bien en el que el estado es mayor que en el otro problema entonces, la asignación en este bien no es menor que en el otro.

  Monotonía individual en los bienes. Si $E_j > E'_j$ y $E'_r = E_r$ para todo $r \neq j$, entonces, $\mathcal{F}_j(E, C) \geqq \mathcal{F}_j(E', C)$.

  La regla Igualitaria Leximin verifica la monotonía individual en los bienes.

  Demostración: Sean x_j^i y $x_j^{\prime i}$ las cantidades asignadas al agente i ($i \in N$) en el bien j ($j = 1, \ldots, m$) en los problemas (E, C) y (E', C) respectivamente. Si $r = j-1$, como $E'_{j-1} = E_{j-1}$ y la demanda c_j^i es la misma en los dos problemas entonces, $x_{j-1}^i = x_{j-1}^{\prime i}$, para todo $i \in N$.

  Para el bien j en los problemas (E, C) y (E', C) se tiene respectivamente:

$$x_j^i = \text{máx}\{x_{j-1}^i, \text{mín}\{\lambda_j, c_j^i\}\}$$

$$x_j^{\prime i} = \text{máx}\{x_{j-1}^i, \text{mín}\{\lambda'_j, c_j^i\}\}$$

  Como $E_j > E'_j$, aplicando la eficiencia para el bien j:

$$E_j = \sum_{i \in N} x_j^i = \sum_{i \in N} \text{máx}\{x_{j-1}^i, \text{mín}\{\lambda_j, c_j^i\}\} > E'_j = \sum_{i \in N} x_j^{\prime i} = \sum_{i \in N} \text{máx}\{x_{j-1}^i, \text{mín}\{\lambda'_j, c_j^i\}\}$$

Para que esto sea verdad $\lambda_j > \lambda_j^{'}$, entonces volviendo a la definición de x_j^i y de $x_j^{'i}$ se cumple que $x_j^i \geq x_j^{'i}$.

Siguiendo con el ejemplo de la Universidad que sirvió para introducir los problemas globales de bancarrota, se va a ilustrar numéricamente el funcionamiento de la regla $UCEA$.

Ejemplo 3.4. *Supóngase que el presupuesto del departamento para repartir entre las áreas para los conceptos de Transporte, comunicación, dotación ordinaria no inventariable, investigación-divulgación y material-bibliografía son los que se muestran en la tabla:*

Conceptos	*Presupuesto (euros)*
Transporte	*7118*
Comunicación	*19988*
Ordinario no inventariable	*35950*
Investigación y divulgación	*36727*
Material y bibliografía	*43358*
Total	*143141*

Supóngase que el departamento en cuestión está compuesto por 3 áreas de conocimiento. En base al gasto de otros años, cada área realiza una petición del presupuesto del departamento en los distintos conceptos, estas demandas son:

	Demandas de las Áreas			
Conceptos	*Área 1*	*Área 2*	*Área 3*	*Total*
Transporte	*4700*	*3589*	*5278*	*13566*
Comunicación	*8670*	*1860*	*9538*	*20068*
Ordinario no inventariable	*16443*	*7824*	*15287*	*39554*
Investigación y divulgación	*12699*	*6360*	*18012*	*37072*
Material y bibliografía	*17081*	*13362*	*13163*	*43606*
Total		*153867*		

Se plantea el reparto del presupuesto del departamento entre las áreas en cada uno de los conceptos. El problema surge, porque las cantidades demandadas por las áreas son superiores a las cantidades de presupuesto disponibles en cada concepto.

El problema se puede enfocar considerando separadamente cada problema de reparto, mientras que si se considera que las áreas tienen preferencias sobre el reparto global podría enfocarse como un problema global. A continuación, se analiza la solución en cada uno de los dos posibles contextos.

1. *Problema clásico de bancarrota: Se presentan 5 problemas de bancarrota, en cada uno de ellos el estado es la dotación presupuestaria y las áreas son los agentes que realizan una demanda sobre cada concepto. Aplicando la regla* CEA *el reparto obtenido es:*

Concepto	*Área 1*	*Área 2*	*Área 3*	*Total*
Transporte	$2372,\overset{\frown}{6}$	$2372,\overset{\frown}{6}$	$2372,\overset{\frown}{6}$	*7118*
Comunicación	*8670*	*1860*	*9458*	*19988*
Ordinario no inventariable	*14063*	*7824*	*14063*	*35950*
Investigación y divulgación	*12699*	*6360*	*17668*	*36727*
Material y bibliografía	*16833*	*13362*	*13163*	*43358*
Total	*54637,7*	*31778,6*	*56724,7*	*143141*

2. *Problema global de bancarrota: Hay 5 bienes distintos, que son los conceptos que disponen de cuantía económica para repartir y los agentes son las áreas de conocimiento. El reparto de la regla de reparto* $UCEA$ *bajo la eficiencia leximin es:*

Concepto	*Área 1*	*Área 2*	*Área 3*	*Total*
Transporte	*2372,*$\overset{\frown}{6}$	*2372,*$\overset{\frown}{6}$	*2372,*$\overset{\frown}{6}$	*7118*
Comunicación	***8670***	***2372,***$\boldsymbol{\overset{\frown}{6}}$	***8945,4***	*19988*
Ordinario no inventariable	*14063*	*7824*	*14063*	*35950*
Investigación y divulgación	***14063***	***7824***	***14840***	*36727*
Material y bibliografía	***15156***	***13362***	***14840***	*43358*
Total	*54324,6*	*33755,3*	*55061,1*	*143141*

Obsérvese que al aplicar la regla UCEA, en dos de los conceptos (transporte y dotación ordinaria no inventariable), el reparto coincide con el obtenido aplicando la regla CEA a los problemas clásicos de bancarrota, sin embargo, en los tres conceptos restantes el reparto es distinto al obtenido en los problemas clásicos de bancarrota. Nótese como en este segundo enfoque se cumple la eficiencia leximin.

En el problema global se ven favorecidas las demandas de las áreas que corresponden a bienes con demandas más bajas.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN R.J., MASCHLER M.(1985) "Game theoretic analysis of bankruptcy problem form the Talmud", Journal of Economic Theory, 36, 195-213.

- BOSSERT W.(1993) "An alternative solution to bargaining problems with claims", Mathematical Social Sciences", 25, 205-220.

- CHUN Y., THOMSON W. (1992) "Bargaining problems with claims" Mathematical Social Sciences 24, 19-33.

- CALLEJA P., BORM P., HENDRICKX R. (2005) "Multi-issue allocation situations", European Journal of Operational Research 164, 730-747.

- HERRERO C. (1998) "Bargaining with claims in economic environments´´, Revista Española de Economía, 15, n.1, 3-13.
- LORENZO-FREIRE S., CASAS-MÉNDEZ B., HENDRICKX R. (2005) "The two-stage constrained equal awards and losses for multi-issue allocation situations", CentER Discussion Paper, 2005-80.
- LORENZO-FREIRE S., ALONSO-MEIJIDE J.M., CASAS-MÉNDEZ B., HENDRICKX R. (2005) "Balanced Contributions for Multi-issue allocation situations", CentER Discussion Paper, 2005-93.
- MÁRMOL A.M., PONSATI C.(2007) "Bargaining over multiple issues with maxmin and leximin preferences", Forthcoming Social Choice and Welfare.
- PULIDO M., LLORCA N., SÁNCHEZ-SORIANO J.(2002) "Game theory techniques for University management: and extended bankruptcy model", Annals of Operations Research, 102, 129-142.
- PULIDO M., BORM P., HENDRICKX R., LLORCA N., SÁNCHEZ-SORIANO J., (2006) "Compromise solutions for bankruptcy situations with references", Annals of Operations Research (to appear).
- THOMSON W.(2003) "Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey", Mathematical Social Sciences 45, 249-297.