Un algoritmo para el cálculo de asignaciones en el problema de división con referencias múltiples.*

Sánchez Sánchez, Francisca J. (fsansan@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Hinojosa Ramos, Miguel A. (mahinram@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, Amparo M. (amarmol@us.es)
Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En este trabajo consideramos el problema de reparto con referencias múltiples. Como solución para este problema, hemos diseñado una regla que extiende la conocida regla del Talmud y tiene en cuenta la multidimensionalidad de las referencias de cada agente. Proponemos un algoritmo para el cálculo de las asignaciones que proporciona la regla y presentamos resultados computacionales.

Palabras clave: Problemas de reparto, referencias múltiples, Teoría de Juegos Cooperativos, regla del Talmud, algoritmo.

Área temática: Informática aplicada a los Métodos Cuantitativos.

*Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología SEJ2007-62711/ECON.

ABSTRACT

In this paper we consider an extension of the classic division problem with claims, the division problem with multiple references. For this problem, we have designed a Talmudic rule that takes into account the multidimensionality of the agents' references. We propose an algorithm to compute the allocations induced by the rule and present computational results.

Keywords: Division problems, multiple references, cooperative games, Talmud rule, algorithm.

1. INTRODUCCIÓN

En el problema de reparto clásico hay que repartir una cantidad entre un conjunto de agentes respecto a unas referencias o características de dichos agentes. Este tipo de situaciones se presentan en gran variedad de problemas reales, son clásicos los ejemplos que aparecen en el Talmud babilónico (ver Aumann y Maschler, 1985) en un contexto de bancarrota (el estado o cantidad a repartir es insuficiente para satisfacer las reclamaciones de los acreedores).

En este trabajo extendemos el problema de reparto a situaciones en las que la referencia de cada agente es multidimensional, y por consiguiente, ahora los agentes implicados en el problema están caracterizados por varios parámetros en lugar de uno solo, a este modelo lo llamaremos de referencias múltiples.

Generalizaremos al problema de reparto con referencias múltiples, la regla del Talmud, que es una de las más destacadas en los problemas de reparto clásicos. Esta regla puede extenderse para ajustarse a problemas en los que hay que repartir una cantidad mayor que la suma de las referencias de todos los agentes, como es el caso de los problemas de reparto de excedentes. Además esta extensión de la regla del Talmud coincide con el nucleolo del juego cooperativo correspondiente, como se demuestra en Serrano (1995). En nuestro caso veremos como la regla propuesta coincide con el nucleolo del juego que valora en la situación más optimista, lo que cada grupo de agentes puede conseguir.

En los últimos años se ha observado un creciente interés en el estudio de la complejidad computacional que presenta el cálculo de determinados conceptos de solución en Teoría de Juegos Cooperativos. El cálculo del nucleolo ha sido una de las cuestiones más ampliamente estudiada. En un juego cooperativo con n jugadores, el tamaño de los datos (es decir, de la función característica del juego) crece exponencialmente en el número de jugadores, por lo que cualquier algoritmo para el cálculo del nucleolo que requiera la manipulación de los datos, deberá tener ésto en cuenta. Desafortunadamente, el nucleolo no tiene una *fórmula cerrada*, en la literatura es práctica habitual calcularlo de una forma iterativa resolviendo series de problemas de programación lineal (ver por ejemplo, Maschler et al. (1979), Owen (1995)). En Leng et al. (2010) se propone un método analítico para el cálculo del nucleolo sin necesidad de cálculos iterativos que impliquen problemas de programación lineal, aunque solamente se plantea en un juego de tres jugadores.

El principal objetivo de este trabajo, es presentar un algoritmo que calcule las asignaciones que proporciona la regla de reparto que proponemos y que muestre la trayectoria[1] completa de la regla. Por otro lado, propondremos otro procedimiento que resolverá de forma iterativa problemas de programación lineal para obtener las asignaciones de la regla en un problema de reparto con referencias múltiples concreto.

2. EL PROBLEMA DE REPARTO CLÁSICO

Una cantidad $E \in \mathbb{R}_+$ de un recurso divisible, tiene que repartirse entre $N = \{1, \ldots, n\}$ agentes de acuerdo con unas referencias, representadas por el vector $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ($c_i \in \mathbb{R}_+$ representa la referencia o característica del agente $i \in N$). Un problema de reparto clásico es una terna $(N, \mathbf{c}, E)$. Denotemos por $\mathcal{C}^N$ a la clase de estos problemas. Cuando no haya confusión posible denotamos al problema de reparto por $(\mathbf{c}, E)$.

Situaciones que pueden representarse según este modelo se presentan en una gran variedad de contextos, por ejemplo, en problemas de herencia (O'Neill, 1982), en problemas de distribución de impuestos (Young, 1988, 1990), en problemas de bancarrota (Aumann y Maschler, 1985) o en problemas de reparto de beneficios

[1] Llamamos trayectoria de la regla, a las asignaciones que proporciona una regla para distintas cantidades del estado, E, y para el vector de referencias, $\mathbf{c}$.

(Moulin, 1987).

Se trata de determinar las cantidades que los agentes van a recibir de manera que la suma total sea el estado a repartir. Formalmente, una asignación o reparto para un problema $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}^N$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$, que cumple la condición de eficiencia, $\sum_{i \in N} x_i = E$. Cada componente, x_i, representa la cantidad asignada al agente i en el reparto. Sea $x(E) \subseteq \mathbb{R}_+^N$ el conjunto de todas las asignaciones del estado E. Una *regla de reparto* es una función, r, que asocia a cada problema de reparto $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}^N$ una asignación $r(\mathbf{c}, E) \in x(E)$. Una buena revisión de las reglas de reparto clásicas se puede ver en Thomson (2003).

Una regla de reparto ampliamente estudiada, en el caso concreto de problemas de bancarrota, es la del Talmud (Aumann y Maschler, 1985). Supongamos que $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$ son las demandas sobre un estado E y que $\sum_{i=1}^n c_i \geq E$. Para cada problema de reparto $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}^N$, la regla del Talmud asigna a cada agente $i \in N$,

$$T_i(\mathbf{c}, E) = \begin{cases} \text{mín}\left\{\frac{c_i}{2}, \lambda\right\} & \text{si } E \leq \sum_{i \in N} \frac{c_i}{2} \\ c_i - \text{mín}\left\{\frac{c_i}{2}, \lambda\right\} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_+$ es tal que $\sum_{i \in N} T_i(\mathbf{c}, E) = E$.

Cuando los agentes tienen acuerdos de cooperación, una herramienta válida para el estudio de los problemas de reparto es la Teoría de Juegos Cooperativos. Un juego cooperativo es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores, una coalición S es un subconjunto de N y v es una función definida en el conjunto de subconjuntos de N, con valores en $\mathbb{R}$, con $v(\emptyset) = 0$. El número $v(S)$ es el valor de la coalición S en el juego y es una medida de lo que la coalición puede conseguir por sí misma, sin la cooperación de los jugadores en $N \backslash S$. O'Neill (1982) asocia al problema de reparto $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}^N$, un juego cooperativo (N, v) definido como sigue[2]:

$$v(S) = \left(E - \sum_{i \notin S} c_i\right)_+, \ \forall\, S \subset N. \tag{1}$$

El valor $v(S)$ es una valoración pesimista de lo que la coalición S puede conseguir, puesto que primero asigna a los agentes que no pertenecen a S lo que piden y si después de ésto queda algo de la cantidad que se reparte, E, eso sería lo que la coalición S podría conseguir.

Una asignación del juego es un vector, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, cuyas componentes representan el pago que recibe cada jugador, de forma que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. La suma $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ es el pago de la coalición S. Denotamos por $I^*(N, v)$ al conjunto de las asignaciones del juego.

Un concepto de solución para juegos cooperativos es una correspondencia que asocia a cada juego un conjunto no vacío de asignaciones del juego. En este trabajo utilizaremos como concepto de solución, el nucleolo (Schmeidler, 1969). Una buena revisión se puede ver en Maschler (1992).

El nucleolo del juego (N, v) se define como:

$$N(N,v) = \{\mathbf{x} \in I^*(N,v) | H_{2^n-2}(e(\mathbf{x}, S_1), e(\mathbf{x}, S_2), \ldots, e(\mathbf{x}, S_{2^n-2})) \leq_L$$

$$\leq_L H_{2^n-2}(e(\mathbf{y}, S_1), e(\mathbf{y}, S_2), \ldots, e(\mathbf{y}, S_{2^n-2})), \forall\, \mathbf{y} \in I^*(N,v)\},$$

donde $e(\mathbf{x}, S) = v(S) - x(S)$ es el descontento del grupo S con el reparto $\mathbf{x}$. $H_{2^n-2} : \mathbb{R}^{2^n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2^n-2}$ es una correspondencia que ordena vectores de dimensión $2^n - 2$ en orden decreciente y $\leq_L$ significa no mayor con respecto al orden lexicográfico. Por la convexidad y compacidad del conjunto $I^*(N, v)$, el nucleolo es una asignación única (Owen, 1995).

Aumann y Maschler (1985) demuestran que la regla del Talmud aplicada en un contexto de bancarrota es el nucleolo del correspondiente juego. Serrano (1995)

[2]Denotamos por a_+ al máximo entre a y 0 donde $a \in \mathbb{R}$.

muestra que en un problema de reparto de beneficios, cuando $D = \sum_{i=1}^{n} c_i < E$ el nucleolo asigna a cada jugador la cantidad de $x_i = c_i + \frac{E-D}{n}$ $(\forall\, i \in N)$, extendiendo con ello la regla del Talmud, en los problemas de reparto de beneficios, mediante un reparto igualitario del excedente.

En este trabajo presentamos una extensión de estas ideas al caso en que hay más de un vector de referencias.

3. EL PROBLEMA DE REPARTO CON REFERENCIAS MÚLTIPLES

Un *problema de reparto con referencias múltiples* es una terna (N, C, E) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de agentes, $E \in \mathbb{R}_{++}$ es el estado o la cantidad que hay que repartir y $C \in \mathbb{R}_{+}^{N\times M}$ es la matriz de referencias. [3] Denotamos por c_i^j un elemento de la matriz C. Para cada $i \in N$, la fila i de la matriz C, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^M$, representa las referencias del agente i con respecto a los diferentes atributos. Para cada $j \in M$, la columna $\mathbf{c}^j \in \mathbb{R}^N$ representa las referencias de todos los agentes respecto al atributo j. También podemos representar a la matriz C como $(\mathbf{c}_i)_{i\in N}$ o como $(\mathbf{c}^j)^{j\in M}$. Cuando no haya confusión posible denotamos al problema de reparto con referencias múltiples por (C, E).

Denotamos por $\mathcal{D}_N^M$ a la clase de todos los problemas de reparto con referencias múltiples asociado a un conjunto de agentes N y al conjunto de atributos M.

Una situación que puede representarse como un modelo de reparto con referencias múltiples, es por ejemplo, la siguiente: Un determinado proyecto puede llevarse a cabo en distintos países, pero hay incertidumbre sobre cuál será el país en el que

[3] $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_{++}$) denota el conjunto de todos (no negativos, positivos) números reales y $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}_+^N$, $\mathbb{R}_{++}^N$) el producto Cartesiano de $|N|$ copias de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_{++}$), donde $|N|$ denota el cardinal de N.

finalmente se desarrollará dicho proyecto. Son también varias las empresas de ámbito multinacional (agentes) que están implicadas, a distintos niveles, en el desarrollo del proyecto. Estas empresas adjudicatarias tienen perfectamente calculados los costes de su participación para los distintos países candidatos. Estos costes son distintos dependiendo del país en el que se lleve a cabo el proyecto porque la normativa legal de los posibles países es distinta y porque la infraestructura de las empresas multinacionales también es distinta en cada país. Estos costes dan lugar a la matriz de referencias C (c_i^j es el coste de participación de la empresa i si el país en el que se desarrolla el proyecto es j). El proyecto recibe una ayuda económica (estado) de un organismo internacional, surgiendo en este caso el problema de repartir dicha ayuda entre las empresas participantes.

Una *asignación* para $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$, que cumple la propiedad de eficiencia, $\sum_{i \in N} x_i = E$. Sea $X(E) \subseteq \mathbb{R}_+^N$ el conjunto de todas las asignaciones para el problema de reparto con referencias múltiples, $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$.

Una *regla* de reparto para $\mathcal{D}_N^M$ es una función, R, que asocia a cada problema $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$ una asignación única $R(C, E) \in X(E)$.

3.1. LA REGLA

Para cada problema de reparto con referencias múltiples, $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$, podemos definir $|M|$[4] juegos cooperativos, $(N, v_{(C,E)}^j)$, $j \in M$ por el procedimiento propuesto por O'Neill (1982). Así, para cada $j \in M$ y para cada $S \subseteq N$, $v_{(C,E)}^j(S) = (E - c^j(N \setminus S))_+ = \text{máx}\,\{E - c^j(N \setminus S), 0\}$, donde $c^j(N \setminus S) = \sum_{i \in N \setminus S} c_i^j$.

La propuesta de solución que haremos está basada en la diferencia entre lo que las coaliciones obtienen con respecto a una asignación y sus valores en el juego cooperativo que hemos definido antes.

Para cada asignación, $\mathbf{x} \in X(E)$, y cada coalición, $S \subseteq N$, las $|M|$ *funciones*

[4] $|M|$ denota el cardinal de M.

de descontento vienen dadas por $e_{v^j_{(C,E)}}(\mathbf{x},S) = v^j_{(C,E)}(S) - x(S)$[5], $j \in M$. Estas funciones miden el descontento de la coalición S con la asignación $\mathbf{x}$ respecto a todos los atributos, y jugarán un papel muy importante en la definición de nuestra regla de reparto.

El objetivo es seleccionar asignaciones que sean las mejores en un sentido lexicográfico. Si consideramos un único vector de referencias, podemos definir un orden lexicográfico entre las asignaciones y determinar un único resultado, lo que nos da el nucleolo. Para el caso de varios vectores de referencias, consideraremos el máximo descontento entre los atributos como una medida del descontento de la coalición S con respecto a $\mathbf{x} \in X(E)$, es decir,

$$e_{(C,E)}(\mathbf{x},S) = \text{máx}_{j\in M}\left\{e_{v^j_{(C,E)}}(\mathbf{x},S)\right\} = \text{máx}_{j\in M}\left\{v^j_{(C,E)}(S)\right\} - x(S).$$

Para cada $\mathbf{x} \in X(E)$, construimos un vector $(2^N - 2)$-dimensional, $\pi_{(C,E)}(\mathbf{x})$, cuyas componente son el máximo descontento, $e_{(C,E)}(\mathbf{x},S)$, $S \subset N$, ordenado de forma decreciente. El vector $\pi_{(C,E)}(\mathbf{x})$ proporciona una medida de la actuación de la asignación $\mathbf{x}$ con respecto a todas las coaliciones, teniendo en cuenta todos los atributos.

Decimos que el vector $\pi(\mathbf{x})$ es lexicográficamente mejor que el vector $\pi(\mathbf{y})$, y lo denotamos como $\pi(\mathbf{x}) <_{lex} \pi(\mathbf{y})$, si $\pi^k(\mathbf{x}) < \pi^k(\mathbf{y})$ para la primera componente, k, en la que los vectores $\pi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{y})$ son diferentes. Esta relación binaria define un orden completo y además, podemos definir una regla de reparto en la clase $\mathcal{D}^M_N$, de forma que para cada $(C,E) \in \mathcal{D}^M_N$, seleccionamos de entre todas las asignaciones $\mathbf{x} \in X(E)$, aquella que minimiza lexicográficamente $\pi(\mathbf{x})$.

Definición 3.1. *Para cada problema de reparto con referencias múltiples,* $(C,E) \in \mathcal{D}^M_N$*, la regla del Talmud con referencias múltiples,* MT*, se define como* $MT(C,E) =$ *arg lex-min*$_{\mathbf{x}\in X(E)}\left\{\pi_{(C,E)}(\mathbf{x})\right\}$*, donde* $\pi_{(C,E)}(\mathbf{x})$ *es un vector cuyas componentes son*

[5]Para cada $S \subseteq N$ y cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $x(S)$ denota $\sum_{i\in S} x_i$.

el máximo descontento de los atributos, $e_{(C,E)}(\mathbf{x},S)$*,* $S \subset N$*, ordenado en forma decreciente.*

Obsérvese que para cada $(C,E) \in \mathcal{D}_N^M$, el resultado que proporciona la regla MT coincide con el obtenido por el nucleolo del juego cooperativo $(N, v_{(C,E)}^{\text{máx}})$, donde $v_{(C,E)}^{\text{máx}}(S) = \text{máx}_{j\in M}\{v_{(C,E)}^j(S)\}$. Este resultado se deduce de $e_{(C,E)}(\mathbf{x},S) = e_{v_{(C,E)}^{\text{máx}}}(\mathbf{x},S)$ para cada $\mathbf{x} \in X(E)$ y cada $S \subset N$.

A continuación, presentamos un algoritmo cuyo objetivo es el cálculo de las asignaciones que proporciona la regla MT en un problema de reparto con referencias múltiples. El procedimiento proporciona el nucleolo del juego $(N, v_{(C,E)}^{\text{máx}})$, es decir, calcula la asignación que minimiza lexicográficamente el descontento de los agentes. A efectos prácticos, el algoritmo resolverá de forma iterativa, series de problemas de programación lineal que solo dependen de los datos del problema de reparto.

3.1.1. ALGORITMO

Dado el problema de reparto con referencias múltiples $(C,E) \in \mathcal{D}_N^M$, el algoritmo que permite la obtención del reparto correspondiente a la regla MT, viene dado por:

Paso 1: Resolver el siguiente problema.

$$\left.\begin{array}{ll}
min & \epsilon \\
s.a: & (E - c^j(N\backslash S))a_S^j - \displaystyle\sum_{i\in S} x_i \leq \epsilon\,,\ \forall\, S \subset N,\ \forall\, j = 1,\ldots,m \\
& (E - c^j(N\backslash S)) - a_S^j K < 0\,,\ \forall\, S \subset N,\ \forall\, j = 1,\ldots,m \\
& (E - c^j(N\backslash S)) + b_S^j K \geq 0\,,\ \forall\, S \subset N,\ \forall\, j = 1,\ldots,m \\
& a_S^j + b_S^j = 1\,,\ \forall\, S \subset N,\ \forall\, j = 1,\ldots,m \\
& \displaystyle\sum_{i\in N} x_i = E \\
& x_i \geq 0\,,\ i = 1,2,\ldots,n
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Si la solución óptima es única, el procedimiento termina. El reparto obtenido es el reparto de la regla MT. Obsérvese que a_S^j y b_S^j $(\forall S \subset N,\ \forall j = 1, \ldots, m)$ son variables binarias, es decir, toman valores 1 ó 0. $K > 0$ es una constante positiva suficientemente grande.

En otro caso, denotemos por $\epsilon_{\mathbf{1}}$ al valor óptimo del problema (2) y por τ_1 al conjunto de las restricciones que son activas para cualquier solución óptima del problema.

Paso 2: Reemplazar las restricciones activas obtenidas en el Paso 1 por igualdades, y resolver el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} min & \epsilon \\ s.a: & (E - c^j(N\backslash S))a_S^j - \displaystyle\sum_{i\in S} x_i = \epsilon_1\,,\ \forall S \in \tau_1,\ \forall j = 1, \ldots, m \\ & (E - c^j(N\backslash S))a_S^j - \displaystyle\sum_{i\in S} x_i \leq \epsilon\,,\ \forall S \notin \tau_1\,,\ S \subset N,\ \forall j = 1, \ldots, m \\ & (E - c^j(N\backslash S)) - a_S^j K < 0\,,\ \forall S \subset N,\ \forall j = 1, \ldots, m \\ & (E - c^j(N\backslash S)) + b_S^j K \geq 0\,,\ \forall S \subset N,\ \forall j = 1, \ldots, m \\ & a_S^j + b_S^j = 1\,,\ \forall S \subset N,\ \forall j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i\in N} x_i = E \\ & x_i \geq 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} \quad (3)$$

Si la solución óptima del problema (3) es única, el procedimiento termina. En otro caso, denotemos por $\epsilon_{\mathbf{2}}$ al valor óptimo del problema (3) y por τ_2 al conjunto de las restricciones que son activas para cualquier solución óptima del problema.

$\ldots\ldots$

Si hemos llegado al Paso $n-1$ y el algoritmo no ha parado, entonces:

Paso n: Denotemos por ϵ_{n-1} al valor óptimo del problema en el Paso $n-1$. Cambiando las restricciones activas del problema obtenido en el Paso $n-1$ por igualdades con $\epsilon = \epsilon_{n-1}$, obtener y resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\left.\begin{array}{ll}
min & \epsilon \\
s.a: & (E-c^j(N\backslash S))a_S^j - \sum\limits_{i\in S} x_i = \epsilon_1\,,\ \forall\, S \in \tau_1,\ \forall\, j=1,\ldots,m \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & (E-c^j(N\backslash S))a_S^j - \sum\limits_{i\in S} x_i = \epsilon_{n-1}\,,\ \forall\, S \in \tau_{n-1},\ \forall\, j=1,\ldots,m \\
 & (E-c^j(N\backslash S))a_S^j - \sum\limits_{i\in S} x_i \le \epsilon\,,\ \forall\, S \notin \tau_1\cup\tau_2\cup\cdots\cup\tau_{n-1}\,,\ S\subset N,\ \forall\, j=1,\ldots,m \\
 & (E-c^j(N\backslash S)) - a_S^j K < 0\,,\ \forall\, S\subset N,\ \forall\, j=1,\ldots,m \\
 & (E-c^j(N\backslash S)) + b_S^j K \ge 0\,,\ \forall\, S\subset N,\ \forall\, j=1,\ldots,m \\
 & a_S^j + b_S^j = 1\,,\ \forall\, S\subset N,\ \forall\, j=1,\ldots,m \\
 & \sum\limits_{i\in N} x_i = E \\
 & x_i \ge 0\,,\ i=1,2,\ldots,n
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Si obtenemos una única solución, el algoritmo para. En otro caso, denotemos por $\epsilon_{\mathbf{n}}$ al valor óptimo del nuevo problema, y continuar en el paso $n+1$.

En cada paso hay, al menos, una restricción activa que se sustituye por igualdad. Al cabo de n pasos habrá, al menos, $n-1$ restricciones de igualdad de este tipo, que junto con la restricción de eficiencia, $\sum_{i\in N} x_i = E$, determinan unívocamente un único vector de pagos $\mathbf{x}^*$. Por lo tanto el algoritmo para en, a lo más n pasos.

3.2. LA TRAYECTORIA DE LA REGLA

Para cada $(C,E) \in \mathcal{D}_N^M$, denotamos por $\underline{\mathbf{c}}$ al vector cuyas componentes representan el valor mínimo de las referencias de cada agente, $\underline{c}_i = \min_{j\in M}\{c_i^j\}$, $i\in N$, y por $\underline{c}(N) = \sum_{i=1}^n \underline{c}_i$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $N=\{1,2,\ldots,n\}$ y que $\underline{c}_1 \le \underline{c}_2 \le \ldots \le \underline{c}_n$.

En Hinojosa et al. (2010) se muestra la trayectoria de la regla propuesta, distinguiéndose dos posibles casos:

a) El estado es menor que la suma de referencias mínimas.

Cuando el estado no excede $\underline{c}(N)$, es decir $E \leq \underline{c}(N)$, entonces la regla MT proporciona el mismo vector de repartos que la regla del Talmud para un problema de reparto clásico con referencias iguales a $\underline{\mathbf{c}}$.

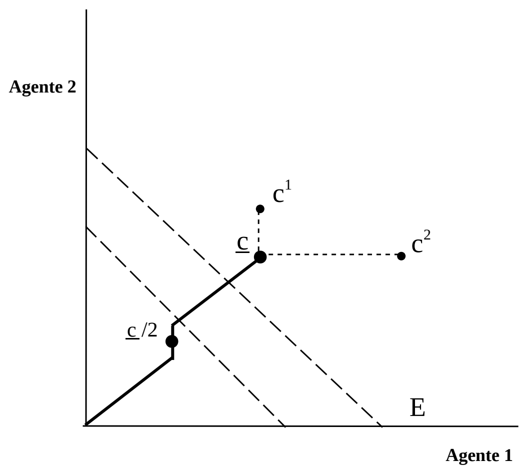


Figura 1: Trayectoria de la regla MT para dos agentes cuando el estado es menor que la suma de las referencias mínimas.

b) El estado es mayor que la suma de referencias mínimas.

Cuando $|N| = 2$ y $E > \underline{c}(N)$, al aplicar la regla MT, la diferencia $E - \underline{c}(N)$ se asigna a partes iguales entre los agentes (ver Figura 2). Como consecuencia, para dos agentes, los resultados obtenidos con la regla que hemos definido coinciden exactamente con los obtenidos con la regla clásica del Talmud con vector de reclamaciones $\underline{\mathbf{c}}$.

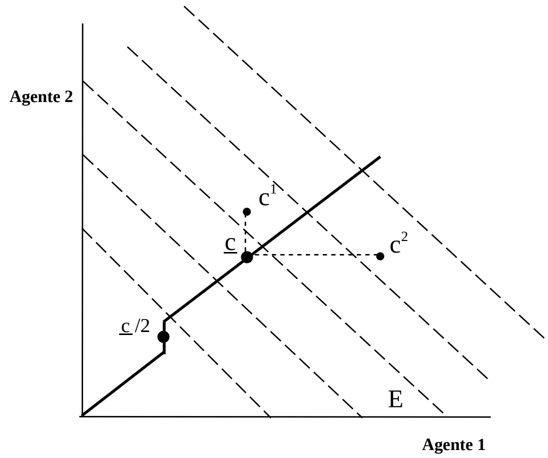


Figura 2: Trayectoria de la regla MT para dos agentes cuando el estado es mayor que la suma de las referencias mínimas.

Cuando $|N| \geq 3$ y $E > \underline{c}(N)$, la trayectoria de la regla MT es lineal a trozos con el último trozo del camino paralelo a la línea $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Es decir, para cada matriz de referencias, los excedentes por encima de $\underline{c}(N)$ se reparten siguiendo unas determinadas proporcionalidades que van cambiando hasta un cierto estado a partir del cual cualquier cantidad adicional se asigna a partes iguales a los agentes, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2. *Consideremos un problema de reparto con referencias múltiples con tres agentes, $N = \{1, 2, 3\}$ y dos atributos. Las referencias en los atributos vienen dadas por $\boldsymbol{c}^1 = (3, 7, 10)^t$ y $\boldsymbol{c}^2 = (15, 9, 2)^t$.*

Cuando $E \leq \underline{c}(N) = 12$, la trayectoria de la regla MT coincide con la del Talmud con vector de referencias $\underline{\boldsymbol{c}} = (3, 7, 2)$. Cuando $E \geq 12 = \underline{c}(N)$ la trayectoria de MT es lineal a trozos con cuatro pendientes distintas dependiendo del estado. En la siguiente tabla mostramos como la regla MT asigna cada unidad adicional del estado en los diferentes intervalos.

Asignación de una unidad adicional del estado			
	Agente 1	*Agente 2*	*Agente 3*
$12 = \underline{c}(N) < E \leq 16$	*0.25*	*0.25*	*0.5*
$16 < E \leq 28$	*0.5*	*0*	*0.5*
$28 < E \leq 32$	*0.25*	*0.25*	*0.5*
$32 < E < +\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

4. RESULTADOS COMPUTACIONALES

La construcción de la trayectoria de la regla cuando el estado es mayor que la suma de referencias mínimas, que aparece en Hinojosa et al. (2010), nos sugiere un procedimiento para obtener las asignaciones que proporciona la regla MT en cualquier problema de reparto con referencias múltiples, $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$. El procedimiento proporcionará la trayectoria completa de la regla, mientras que el algoritmo dado en la Sección 3.1.1 solamente obtiene las asignaciones de la regla para un problema $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$ concreto. Además, este nuevo procedimiento proporciona la trayectoria de la regla sin necesidad de resolver ningún problema de programación lineal.

Denotamos a cada estado $E \geq \underline{c}(N)$ con $E^{\mathbf{x}}$, donde $\mathbf{x} = MT(C, E^{\mathbf{x}})$; $E^* = \max\ \{\underline{c}(N), \max_{i \in N} \min_{j \in M}\{c^j(N \setminus \{i\})\}\}$; $F^x = \{i \in N \,|\, e(\mathbf{x}, \{i\}) \geq e(\mathbf{x}, \{j\}),$ $\forall\, j \in N\}$; $\alpha^{\mathbf{x}}$ es un vector n-dimensional, que verifica $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\mathbf{x}} = 1$, y representa la proporción de incremento infinitesimal del estado $E^{\mathbf{x}}$ que se asigna a cada agente de acuerdo a la regla MT. $A^{\mathbf{x}}$ es el máximo incremento del estado $E^{\mathbf{x}}$, para que dos coaliciones con el mismo nivel de descontento en $\mathbf{x}$, mantengan el mismo nivel de descontento.

ALGORITMO:

IF $E \leq \underline{c}(N)$

$\mathbf{x} = T(\underline{\mathbf{c}}, E)$

ELSE

$i \leftarrow 0$

$x_i \leftarrow \underline{\mathbf{c}}$

$E^{x_i} \leftarrow \underline{c}(N)$

$F^{x_i} \leftarrow F^{\underline{\mathbf{c}}}$

Calcular E^*

WHILE $E^{x_i} < E^*$ o $F^{x_i} \neq N$

DO

Calcular α^{x_i}, A^{x_i}, $\mathbf{y} = x_i + A^{x_i}\alpha^{x_i}$ y $E^{\mathbf{y}} = E^{x_i} + A^{x_i}$

IF $E \leq E^{\mathbf{y}}$

$\mathbf{x} = x_i + (E - E^{x_i})\alpha^{x_i}$

ELSE

$i \leftarrow i + 1$

$x_i \leftarrow y$

$E^{x_i} \leftarrow E^y$

END IF

END WHILE

$\mathbf{x} = x_i + (E - E^{x_i})\alpha^{x_i}$

END IF

Para terminar, hemos implementado mediante una aplicación informática, el algoritmo que describe la trayectoria completa de la regla MT. Para ilustrar el funcionamiento de la aplicación, lo aplicamos al Ejemplo 3.2.

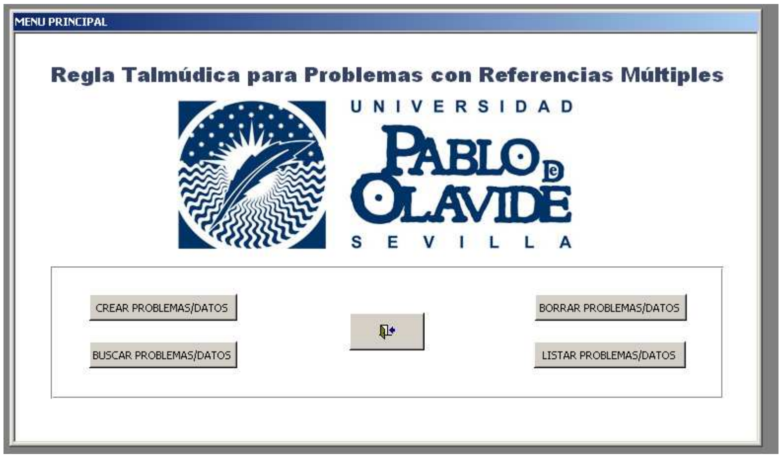


Figura 3: Menú de acceso a la aplicación informática.

Paso 1: Introducir la matriz de referencias del problema de reparto con referencias múltiples y fijar el incremento del estado que se tomará para el cálculo de las distintas asignaciones de la regla MT (Figura 4).

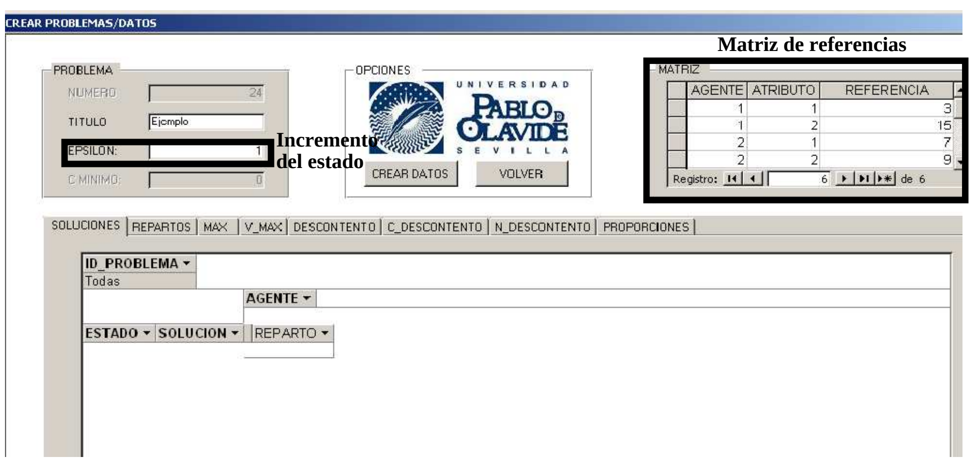
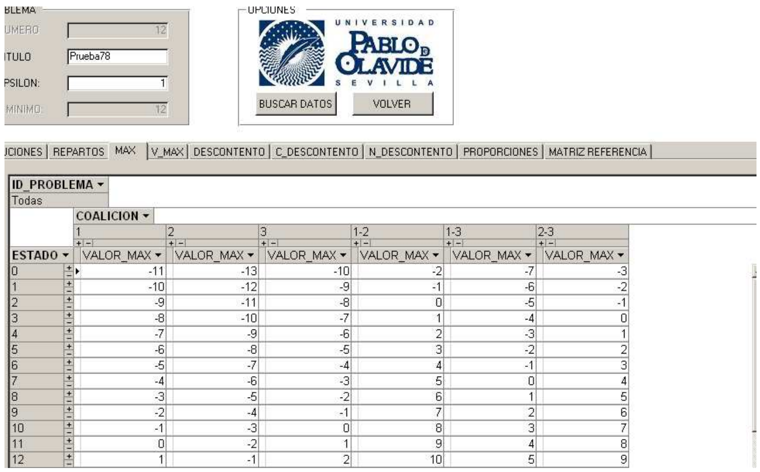


Figura 4: Matriz de referencias.

Paso 2: Cálculos intermedios.

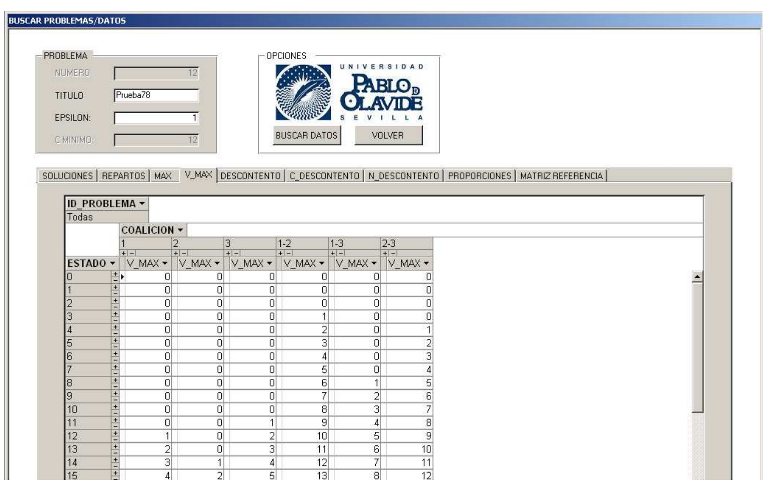
1. Para cada coalición, $S \subset N$, calcular el $\max_{j \in M}\{E - c^j(N \setminus S)\}$ (Figura 5).



ESTADO	1 VALOR_MAX	2 VALOR_MAX	3 VALOR_MAX	1-2 VALOR_MAX	1-3 VALOR_MAX	2-3 VALOR_MAX
0	-11	-13	-10	-2	-7	-3
1	-10	-12	-9	-1	-6	-2
2	-9	-11	-8	0	-5	-1
3	-8	-10	-7	1	-4	0
4	-7	-9	-6	2	-3	1
5	-6	-8	-5	3	-2	2
6	-5	-7	-4	4	-1	3
7	-4	-6	-3	5	0	4
8	-3	-5	-2	6	1	5
9	-2	-4	-1	7	2	6
10	-1	-3	0	8	3	7
11	0	-2	1	9	4	8
12	1	-1	2	10	5	9

Figura 5: Cálculo del valor máximo que puede conseguir cada coalición.

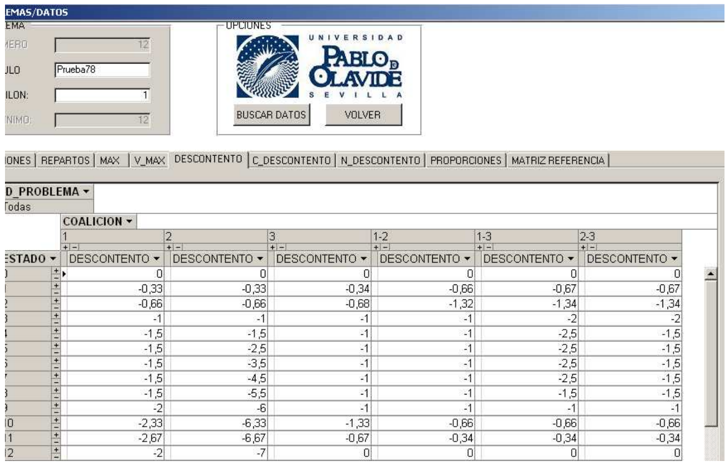
2. Para cada coalición, $S \subset N$, calcular $v^{\text{máx}}_{(C,E)}(S)$ (Figura 6).



ESTADO	1 V_MAX	2 V_MAX	3 V_MAX	1-2 V_MAX	1-3 V_MAX	2-3 V_MAX
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	2	0	1
5	0	0	0	3	0	2
6	0	0	0	4	0	3
7	0	0	0	5	0	4
8	0	0	0	6	1	5
9	0	0	0	7	2	6
10	0	0	0	8	3	7
11	0	0	1	9	4	8
12	1	0	2	10	5	9
13	2	0	3	11	6	10
14	3	1	4	12	7	11
15	4	2	5	13	8	12

Figura 6: Cálculo de la función característica del juego para cada coalición.

3. Para cada coalición, $S \subset N$, calcular $e_{(C,E)}(\mathbf{x}, S)$ (Figura 7).



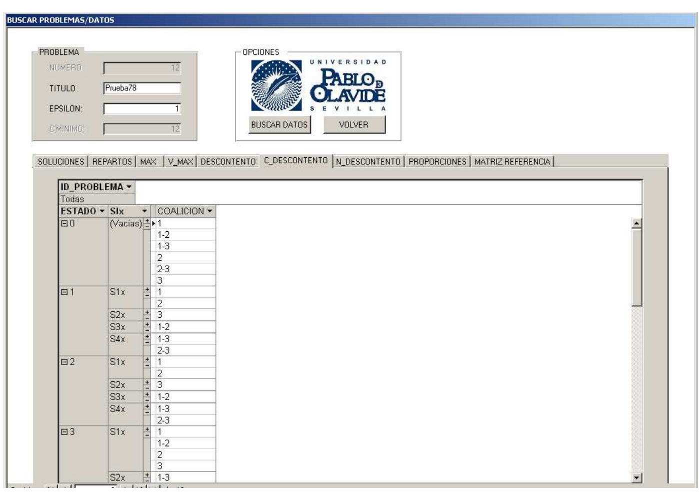
ESTADO	1 DESCONTENTO	2 DESCONTENTO	3 DESCONTENTO	1-2 DESCONTENTO	1-3 DESCONTENTO	2-3 DESCONTENTO
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,33	-0,33	-0,34	-0,66	-0,67	-0,67
2	-0,66	-0,66	-0,68	-1,32	-1,34	-1,34
3	-1	-1	-1	-1	-2	-2
4	-1,5	-1,5	-1	-1	-2,5	-1,5
5	-1,5	-2,5	-1	-1	-2,5	-1,5
6	-1,5	-3,5	-1	-1	-2,5	-1,5
7	-1,5	-4,5	-1	-1	-2,5	-1,5
8	-1,5	-5,5	-1	-1	-1,5	-1,5
9	-2	-6	-1	-1	-1	-1
10	-2,33	-6,33	-1,33	-0,66	-0,66	-0,66
11	-2,67	-6,67	-0,67	-0,34	-0,34	-0,34
12	-2	-7	0	0	0	0

Figura 7: Cálculo de descontento de cada coalición.

4. Calcular

$$\mathcal{S}_l^{\mathbf{x}} = \left\{ S \subset N \mid e_{(C,E)}(\mathbf{x}, S) \geq e_{(C,E)}(\mathbf{x}, T) \,\text{para todo}\, T \subseteq \mathcal{P} \setminus \bigcup_{k=1}^{l-1} \mathcal{S}_k^{\mathbf{x}} \right\},$$

donde $\bigcup_{k=1}^{0} \mathcal{S}_k^{\mathbf{x}} = \emptyset$ (Figura 8). Todas las coaliciones en $\mathcal{S}_1^x$ tienen el mismo nivel de descontento y son los grupos con el descontento máximo con respecto a $\mathbf{x}$. Todas las coaliciones en $\mathcal{S}_2^{\mathbf{x}}$ tienen el segundo descontento máximo con respecto a $\mathbf{x}$, y así sucesivamente.



ESTADO	SIx	COALICION
0	(Vacías)	1
		1-2
		1-3
		2
		2-3
		3
1	S1x	1
		2
	S2x	3
	S3x	1-2
	S4x	1-3
		2-3
2	S1x	1
		2
	S2x	3
	S3x	1-2
	S4x	1-3
		2-3
3	S1x	1
		1-2
		2
		3
	S2x	1-3

Figura 8: Cálculo de coaliciones con el mismo nivel de descontento.

5. Calcular la función, $L^{\mathbf{x}}$ (Figura 9), que asigna a cada coalición $S \subset N$ su nivel de descontento con respecto a $\mathbf{x}$, es decir, $L^{\mathbf{x}}(S) = l$ si $S \in \mathcal{S}_l^{\mathbf{x}}$.

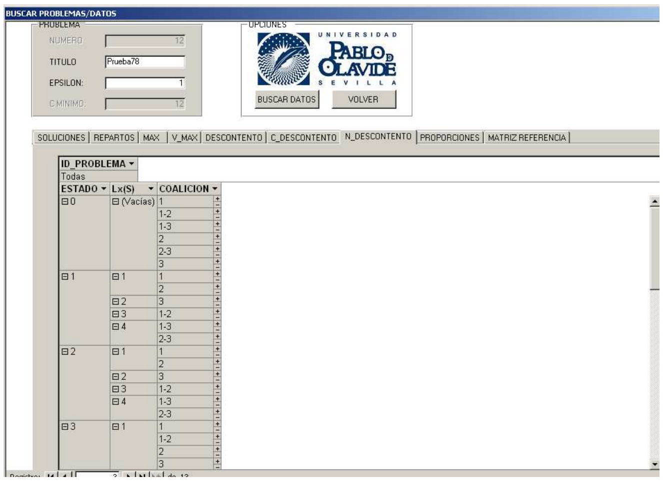


Figura 9: Cálculo del nivel de descontento.

6. Calcular el vector $\alpha^{\mathbf{x}}$ (Figura 10).

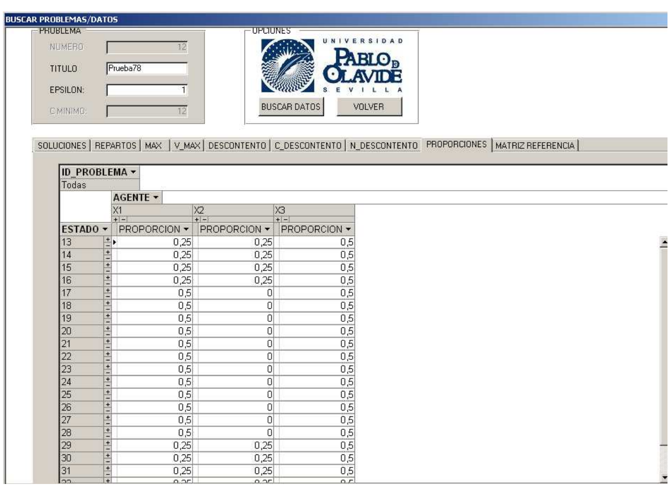
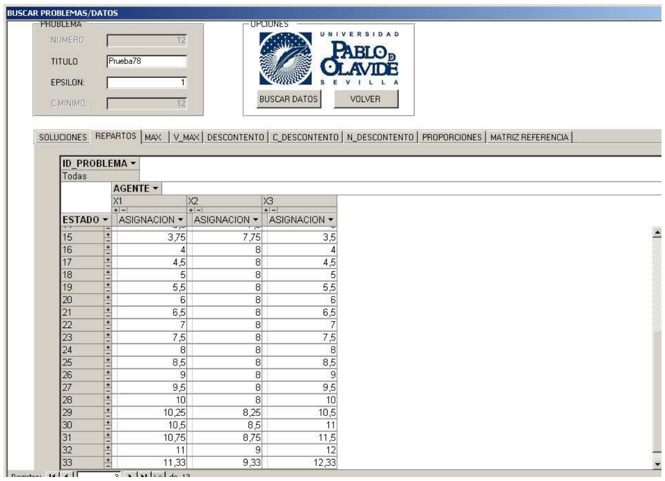


Figura 10: Cálculo de proporciones para el reparto.

Paso 3: Apoyándose en los cálculos anteriores, se obtiene la asignación que proporciona la regla $MT(C, E)$ (Figura 11).



ESTADO	X1 ASIGNACION	X2 ASIGNACION	X3 ASIGNACION
15	3,75	7,75	3,5
16	4	8	4
17	4,5	8	4,5
18	5	8	5
19	5,5	8	5,5
20	6	8	6
21	6,5	8	6,5
22	7	8	7
23	7,5	8	7,5
24	8	8	8
25	8,5	8	8,5
26	9	8	9
27	9,5	8	9,5
28	10	8	10
29	10,25	8,25	10,5
30	10,5	8,5	11
31	10,75	8,75	11,5
32	11	9	12
33	11,33	9,33	12,33

Figura 11: Asignaciones de la regla MT(C, E).

Para terminar, hemos desarrollado una aplicación que muestra gráficamente (en 3 dimensiones) la trayectoria completa de la regla $MT(C, E)$ (ver Figura 12).

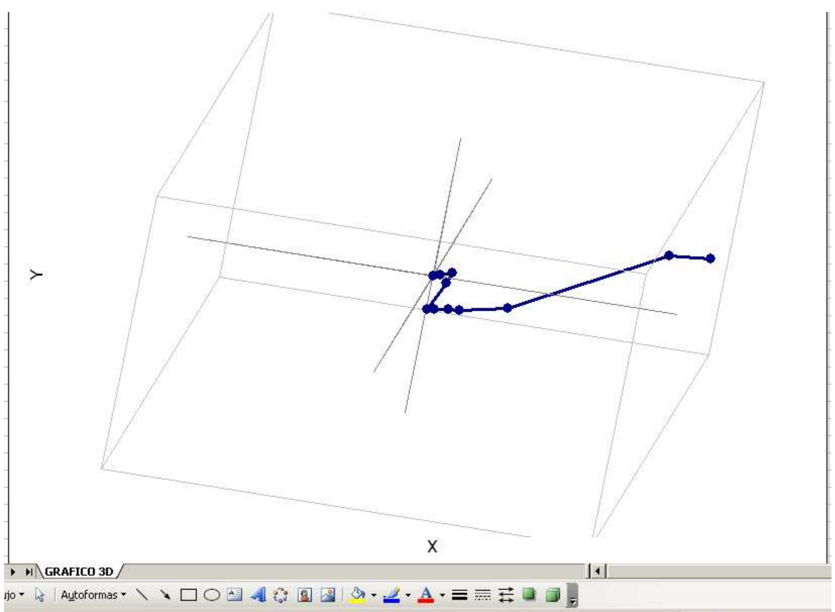


Figura 12: Trayectoria de la regla MT(C, E).

5. CONCLUSIONES

Hemos diseñado una regla para los problemas de reparto con referencias múltiples, que tiene en cuenta la multidimensionalidad de las características de cada agente. Esta regla de reparto, es el nucleolo del juego de los máximos, que minimiza el máximo descontento de los agentes. También hemos determinado la relación existente entre una regla clásica de reparto, como es la regla del Talmud y la solución que proponemos.

Presentamos un algoritmo que calcula las asignaciones que proporciona la regla de reparto, mostrando la trayectoria completa de la regla.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN R., MASCHLER M. (1985). “Game Theoretic Analysis of Bankruptcy Problem from the Talmud”. Journal of Economic Theory, Vol. 36, pp. 195-213.

- CURIEL, I., MASCHLER, M., TIJS, S. (1987). “Bankruptcy Games”. Zeitschrift für Operations Research, Vol. 31, pp. A143-A159.

- DUTTA, B., RAY, D. (1989). “A Concept of Egalitarianism under Participation Constraints”. Econometrica, Vol. 57, pp. 615-635.

- FERNANDEZ, F., HINOJOSA, M., PUERTO, J. (2002b). “Core Solutions in Vector-Valued Games”. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 112, pp. 331–360.

- FERNANDEZ, F., HINOJOSA, M., PUERTO, J. (2004). “Set Valued TU-Games”. European Journal of Operational Research, Vol. 159, pp. 181-195.

- HINOJOSA, M., MARMOL, A., THOMAS, L. (2005). “Core, Least Core and Nucleolus for Multiple Scenario Cooperative Games”. European Journal of Operational Research, Vol. 164, pp. 225–238.
- HINOJOSA, M., MARMOL, A., SANCHEZ, F. (2010). “A Consistent Talmudit Rule for Division Problems with Multiple References”. TOP (Revista de Inv. Operativa de la Soc. Española de Estadística e Inv. Operativa) , DOI: 10.1007/s11750-010-0158-4.
- LENG, M., PARLAR, M. (2010). “Analytic Solution for the Nucleolus of a Three-Player Cooperative Game”. Naval Research Logistics. Vol. 57, nº 7, pp 667-672.
- MASCHLER, M., PELEG, B., SHAPLEY, L.S. (1979). “Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus, and Related Solution Concepts ”. Mathematics of Operations Research. Vol. 4, nº 4, pp 303-338.
- MASCHLER, M. (1992). “The Bargaining Set, Kernel and Nucleolus ”. In Handbook of Game Theory with Economics Applications (R.j. Aumann y S. Hart, Eds.) Vol. I. Amsterdam: Elservier Science Publishers.
- MOULIN, H. (1987). “Equal or Proportional Division of a Surplus, and Other Methods”. International Journal of Game Theory, Vol. 16, pp. 161-186.
- O’NEILL, B. (1982). “Game Theoretic Analysis of Bankruptcy Problem from the Talmud”. Mathematics Social Sciences, Vol. 2, pp. 345-371.
- OWEN, G. (1995). “Game Theory”. Academic Press, San Diego, California.
- SCHMEIDLER, D. (1969). “The Nucleolus of a Characteristic Function Game”. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 16, pp. 1163-1170.

- SERRANO, R. (1995). "Strategic Bargaining, Surplus Sharing Problems and the Nucleolus". Journal of Mathematical Economics, Vol. 24, pp. 319-329.

- THOMSON, W. (2003). "Axiomatic and Game-Theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems: a Survey". Mathematical Social Sciences, Vol. 45, pp. 249-297.

- YOUNG, P. (1988). "Distributive Justice in Taxation". Journal of Economic Theory, Vol. 44, pp. 321-335.

- YOUNG, P. (1990). "Progressive Taxation and Equal Sacrifice". American Economic Review, Vol. 80, pp. 253-266.