Reglas leximin para problemas de bancarrota con incertidumbre*

Sánchez Sánchez, Francisca J. (fsansan@upo.es)
Hinojosa Ramos, Miguel A. (mahinram@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, Amparo M. (amarmol@us.es)
Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En este trabajo modelizamos los problemas de bancarrota en condiciones de incertidumbre, bajo el supuesto de que hay varios posibles estados de la naturaleza, identificándose cada uno de ellos con un problema de bancarrota diferente. Para esta extensión multidimensional de los problemas clásicos de bancarrota, consideramos situaciones en las que los agentes presentan preferencias de tipo aditivo y leximin sobre los posibles resultados. Proponemos reglas de reparto en las que se combinan diferentes principios de racionalidad y se garantiza la eficiencia con respecto a las preferencias de tipo leximin.

Palabras clave: Reglas de bancarrota; incertidumbre; preferencias.
Área temática: Optimización.

*Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación con Ref.ECO2011-29801-C02-02.

ABSTRACT

We model bankruptcy problems under uncertainty under the assumption that there are several possible states of nature, each of which is identified with a different bankruptcy problem. For this multi-dimensional extension of classic bankruptcy problems, we consider situations in which agents exhibit at the same time additive preferences and leximin preferences on their possible results. We propose division rules which combine different rationality principles and guarantee efficiency with respect to leximin preferences.

Keywords: bankruptcy rules; uncertainty; preferences.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema clásico de bancarrota aparece cuando hay que repartir una cantidad de un bien infinitamente divisible, entre un conjunto de agentes, y esta cantidad no es suficiente para satisfacer las reclamaciones de los agentes que tienen adquiridos unos derechos sobre la cantidad a repartir. Desde muy antiguo se han presentado problemas reales de este tipo. Son clásicos los ejemplos que aparecen en el Talmud babilónico (ver Aumann y Maschler, 1985). Una revisión exhaustiva de las distintas reglas de reparto puede verse en Thomson (2003).

Consideramos una extensión multidimensional de los problemas clásicos de bancarrota donde está presente la incertidumbre. Dependiendo de la situación, puede haber incertidumbre con respecto a la cantidad exacta del bien que se reparte, y/o en cuanto a las reclamaciones de los agentes. Por ejemplo, los presupuestos y la evaluación de necesidades pueden estar sujetas a influencias estocásticas. El modelo con incertidumbre puede reflejar una situación en la que hay distintos escenarios. Estos escenarios pueden interpretarse como diferentes estados de la naturaleza en condiciones de incertidumbre cuando no se dispone de información sobre las probabilidades de ocurrencia de los distintos estados. Podemos identificar un estado de la naturaleza con un problema de bancarrota específico, y el *problema global* puede describirse como el conjunto de todos los problemas de reparto que pueden ocurrir.

Una regla de reparto asigna a cada problema de bancarrota un vector de pagos para los agentes, es decir, una *asignación* de la cantidad total a repartir. En el caso de incertidumbre, introduciremos *reglas globales*, que asignarán un vector de pagos a cada problema de bancarrota asociado con cada posible estado de la naturaleza.

El problema global podría considerarse como un conjunto separado de problemas de bancarrota, uno por cada estado de la naturaleza. Pudiéndose resolver separadamente cada problema si los agentes no manifiestan preferencias sobre las combinaciones de resultados correspondientes a los distintos estados de la naturaleza. No obstante, cuando dichas preferencias existen, hay que tenerlas en cuenta en las propuestas de soluciones para el problema global. En términos económicos, cada agente tiene un criterio para decidir entre varios contratos eventuales.

Podrían asignarse probabilidades a los diferentes estados de la naturaleza, y el problema global podría reducirse a un problema de reparto "esperado", donde los pagos de cada agente son asignaciones de las utilidades esperadas. Habitualmente en este enfoque se hace el supuesto adicional de que las utilidades son aditivas, es decir, cada agente valora la cantidad total recibida. Sin embargo, una vez que se determina la asignación del valor esperado, no está claro cómo se relaciona con los pagos cuando ocurre un estado específico.

Si, por otro lado, los agentes no pueden asignar (objetiva o subjetivamente) probabilidades de ocurrencia a los diferentes estados de la naturaleza, entonces no podrían aplicarse argumentos de utilidad esperada. Este tipo de situaciones son las que analizamos en este trabajo y por tanto, tendremos que utilizar modelos de decisión no probabilísticos con incertidumbre.

En nuestro análisis del problema de reparto global, el primer caso que consideraremos es aquel en que los agentes tienen preferencias aditivas. Probaremos que la eficiencia estándar en cada bien es equivalente a una condición de eficiencia colectiva para preferencias aditivas. A continuación, supondremos que las preferencias de los agentes son de tipo leximin, esto significa que cada agente valora su resultado global según la ordenación leximin definida en su espacio de pagos. Las preferencias leximin no pueden representarse por una función de utilidad y, por tanto, no es posible reducir el problema global a un problema clásico de bancarrota con utilidades. Consideramos soluciones que se aplican directamente a una situación de reparto global. Los repartos serán los pagos de los agentes en cada uno de los estados de la naturaleza. Mostraremos que ser eficiente leximin implica aceptar que los pagos globales son tales que, si la cantidad disponible de un estado es mayor que la correspondiente a otro, entonces los agentes no pueden recibir menos en el primer estado que en el segundo.

Nuestro objetivo será diseñar reglas globales que garanticen resultados eficientes con respecto a las preferencias leximin. Propondremos un procedimiento para obtener reglas globales que sean eficientes leximin que está inspirado en los mismos principios de racionalidad de las reglas de reparto clásicas. En particular, definiremos reglas globales obtenidas a partir de las reglas proporcional, de igual ganancia y de igual pérdida restringida. Por analogía podrían definirse otras basadas en cualquier regla de reparto que sea consistente y monótona.

El diseño de reglas leximin para estos problemas globales, necesita describir reglas específicas para problemas de bancarrota con cotas inferiores. Por lo tanto, también presentamos en este trabajo un procedimiento para obtener las versiones con cotas de las reglas clásicas y proporcionaremos fórmulas explícitas para las reglas proporcional, de igual ganancia e igual pérdida.

En la literatura hay dos tipos de modelos que se ocupan de los problemas globales. En el primero, el reparto de la cantidad se realiza con arreglo a diferentes conceptos y dentro de estos conceptos cada agente recibe su asignación (por ejemplo la Unión Europea divide su presupuesto en distintas partidas, tales como agricultura, medio ambiente, etc. y los distintos países tienen unas reclamaciones en estos diferentes conceptos). Habitualmente en este enfoque se hace el supuesto adicional de que las utilidades son aditivas respecto de los conceptos, es decir, cada agente valora la cantidad total recibida. En estos problemas se procede en dos pasos: En el primero se agregan las reclamaciones de los agentes en cada concepto y se reparte la cantidad total entre los distintos conceptos con arreglo a dichas reclamaciones agregadas y, en un segundo paso, cada una de estas asignaciones se reparten entre los agentes. Este análisis es el que se sigue en Lorenzo-Freire et al. (2009), Moreno-Ternero (2009) y Bergantiños et al. (2010, 2011). A diferencia de los anteriores, en nuestro modelo las cantidades correspondientes a cada estado de la naturaleza vienen dadas exógenamente, de manera que los hace incomparables en términos acumulativos. Nuestra atención se centra en investigar las implicaciones de que los agentes tengan preferencias individuales sobre los resultados que no sean necesariamente aditivas.

En el otro tipo de problemas, hay distintas reclamaciones a tener en cuenta para obtener una asignación a los agentes (una de las posibles situaciones que se representan mediante este modelo es, por ejemplo, aquella en la que se pide la colaboración de expertos o árbitros para valorar las necesidades de los agentes y cada experto da unas referencias distintas que se quieren tener en cuenta en el reparto). Estos modelos se han estudiado también en los trabajos de Calleja et al. (2005), González-Alcon et al. (2007) y Ju et al. (2007).

Por otra parte, en la literatura también se han analizado problemas de reparto con varios bienes que están relacionados con los modelos que estudiamos aquí. Algunos de ellos investigan las consecuencias de aplicar criterios maxmin y maxmax (Bossert et al., 1996; Bossert y Peters, 2001). En Mármol y Ponsatí (2008) el estudio de los problemas de negociación con múltiples bienes se extienden incorporando preferencias leximin.

En este trabajo la estructura es la siguiente. En la Sección 2, se realiza una extensión del problema clásico de bancarrota en la que se incorporan cotas inferiores sobre las cantidades que los agentes pueden conseguir. A partir de una regla clásica de reparto se propone un procedimiento para obtener repartos en el modelo extendido. En la Sección 3, se introduce el modelo con incertidumbre, en el que analizaremos las implicaciones de asumir preferencias aditivas y leximin. En la Sección 4 proponemos reglas basadas en los principios asociados a las reglas clásicas que surgen al imponer el cumplimiento de la propiedad de eficiencia leximin. En la Sección 5 presentamos las conclusiones del trabajo.

2. PROBLEMAS DE BANCARROTA CON COTAS INFERIORES

Vamos a presentar una extensión del modelo de reparto clásico en la que se incorporan cotas inferiores a las asignaciones de los agentes y describiremos un método, inspirado en las reglas de reparto clásicas, para definir reglas en estos modelos.

En la literatura se han abordado problemas de reparto con cotas inferiores. En Pulido et al. (2002, 2008) se consideran problemas de bancarrota donde hay incertidumbre sobre la validez de las reclamaciones y también se introduce un vector de derechos objetivos, que desempeña un papel importante en la asignación. Este punto de referencia adicional siempre está dominado por el vector de reclamaciones, ya que si el derecho excede la reclamación, el derecho se reduce hasta la cuantía de la reclamación. Con esto, se supone que nadie puede tener derecho a un reparto que exceda su reclamación. Otros modelos relacionados, son los llamados problemas de negociación con reclamaciones, introducidos por Chun y Thomson (1992) y que se analizaron más a fondo en Bossert (1993) y en Herrero (1998). Estos problemas de negociación incluyen un punto de desacuerdo junto con un punto de referencia fuera del conjunto factible que domina al punto de desacuerdo.

Por el contrario, en el modelo de reparto con cotas inferiores que aquí introducimos, las reclamaciones no necesariamente dominan a las cotas inferiores e incluso podría ocurrir que algunos agentes obtengan cantidades mayores que sus reclamaciones. Esto tiene sentido cuando las reclamaciones de los agentes presentan un alto grado de subjetividad. En estos casos, junto a estas reclamaciones se puede considerar una medida objetiva o cota inferior que puede representar los derechos o necesidades de los agentes, pudiendo ocurrir que alguno de estos valores sea mayor que la reclamación correspondiente. Piénsese, por ejemplo, que un organismo oficial quiere asignar una ayuda económica a varios grupos de investigación y cada grupo reclama una cantidad de la ayuda. Un comité externo hace una evaluación de las necesidades de los grupos, usando para ésto un criterio fijado por el organismo. Para repartir la ayuda entre los grupos de investigación se dará prioridad a los valores objetivos designados por el comité frente a las valoraciones de los grupos de investigación, pudiendo ocurrir que algún grupo tenga derecho a un reparto que exceda su reclamación.

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de agentes. Un problema clásico de bancarrota se representa por $(N, \mathbf{c}, E)$, donde $E \in \mathbb{R}_+$ la cantidad que hay que repartir entre los agentes y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ es el vector de reclamaciones (cada componente $c_i \in \mathbb{R}_+$ representa la reclamación del agente $i \in N$). Además se cumple que $\sum_{i=1}^n c_i \geq E$. Denotemos por $\mathcal{C}_N$ a la clase de estos problemas. Cuando no haya confusión posible denotamos al problema de bancarrota por $(\mathbf{c}, E)$. Se trata de determinar las cantidades que los agentes van a recibir de manera que la suma total sea la cantidad total a repartir. Formalmente, una asignación o reparto para un problema $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$, que cumple la condición de eficiencia, $\sum_{i \in N} x_i = E$. Cada componente, x_i, representa la cantidad asignada al agente i en el reparto. Una regla de reparto clásica es una función, R, que asocia a cada problema de bancarrota $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$ una asignación $R(\mathbf{c}, E)$.

Ahora vamos a introducir un nuevo elemento en el modelo, un vector de cotas inferiores sobre las cantidades que reciben los agentes. Un *problema de bancarrota con cotas inferiores* se representa por $(N, \mathbf{c}, \mathbf{a}, E)$, donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ es un vector de cotas inferiores sobre las cantidades asignadas a cada agente. Además, se establece la condición, $\sum_{i \in N} a_i < E \leq \sum_{i \in N} c_i$, en la que la segunda desigualdad nos hace estar en un contexto de bancarrota. Las reclamaciones no necesariamente dominan a las cotas inferiores, es decir, no es necesario que se cumpla la condición $a_i \leq c_i$ para todo $i \in N$. Denotamos por $\mathcal{A}_N$ a la clase de estos problemas. A partir de ahora si no hay confusión posible al problema de bancarrota con cotas inferiores lo denotamos por $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E)$.

Dado el problema $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) \in \mathcal{A}_N$, una asignación del estado E es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ que cumple las condiciones de:

- Racionalidad individual: $x_i \geq a_i, \forall\, i \in N$.
- Eficiencia: $\sum_{i \in N} x_i = E$.

Obsérvese que el conjunto de asignaciones para el problema, $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E)$, es el conjunto de asignaciones asociadas al problema clásico de bancarrota, $(\mathbf{c}, E)$, para las que se cumple que $x_i \geq a_i$ para cada $i \in N$.

La Figura 1 muestra un problema de bancarrota con cotas inferiores para dos agentes. En el primer caso el vector de reclamaciones domina al de cotas inferiores, $\mathbf{a} \leqq \mathbf{c}$, mientras que en el segundo esta condición no se cumple[1].

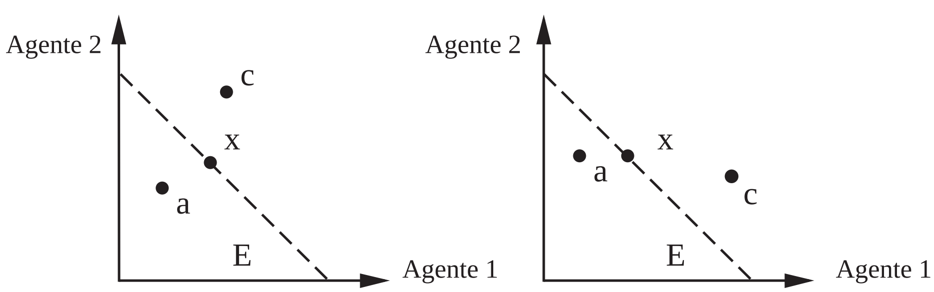

Figura 1: Asignaciones en el problema de bancarrota con cotas inferiores.

Estamos interesados en la definición de reglas para problemas de bancarrota con cotas inferiores que se basen en los mismos principios de racionalidad que las reglas clásicas. Dada una regla de reparto para el problema clásico de bancarrota, R, una regla asociada en la clase de problemas de bancarrota con cotas inferiores es una función[2], R, que asocia a cada problema $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) \in \mathcal{A}_N$ una asignación $\mathbf{x} = R(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) \in \mathbb{R}^N$. En estos problemas la cota inferior debe respetarse, incluso si se asigna a algún agente una cantidad superior a su reclamación, es decir, no necesariamente $R(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) \leqq \mathbf{c}$.

[1] $\mathbf{a} \leqq \mathbf{c}$ significa que $a_i \leq c_i\ \forall\ i = 1, 2, \ldots n$.

[2] Por simplicidad, si no hay confusión posible, denotamos por R tanto a la regla para el problema de bancarrota clásico como a la regla asociada para el problema con cotas inferiores.

A continuación, describimos un procedimiento que genera una regla para problemas de bancarrota con cotas inferiores. El algoritmo procede como sigue: Una vez que la correspondiente regla para el problema clásico se ha aplicado al problema sin cotas inferiores, a los agentes cuya reclamación está por debajo de su cota inferior, se le asigna directamente dicha cota inferior. El resto de la cantidad a repartir se asigna a los restantes agentes aplicando la misma regla clásica, pero si para algún agente, el resultado no respeta su cota inferior, entonces su asignación se fija en esta cota inferior y el procedimiento se repite hasta que todos los agentes obtengan una asignación por encima de su cota inferior.

Dada una regla, R, para un problema de bancarrota $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$, la regla asociada al problema de bancarrota con cotas inferiores, $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) \in \mathcal{A}_N$, se obtiene por medio del algoritmo que describimos en la Figura 2, en el que la notación es la siguiente:

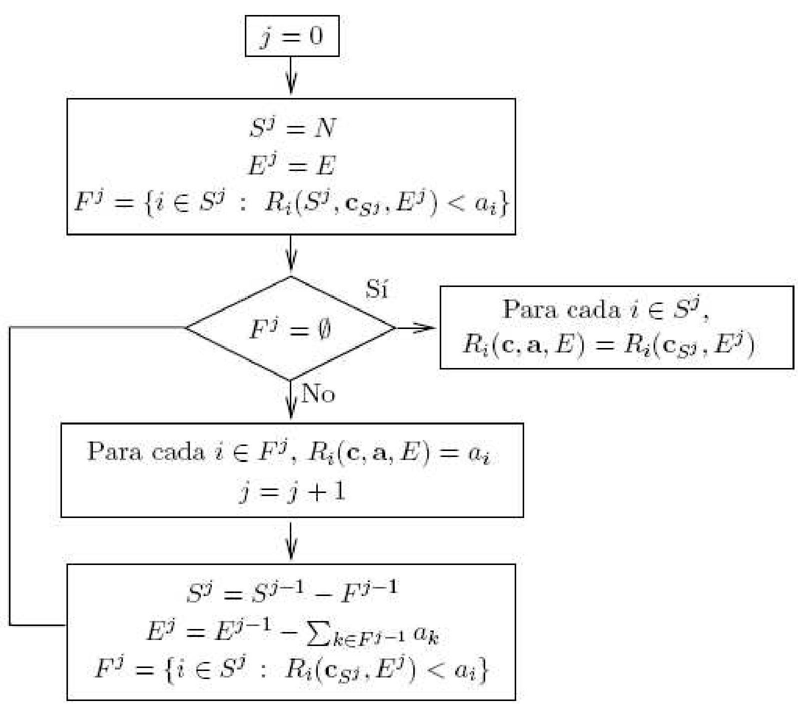

Figura 2: Procedimiento para generar una regla en problemas de bancarrota con cotas inferiores.

$\mathbf{c}_S$: Vector de reclamaciones de los agentes de la coalición $S \subseteq N$ (proyección de $\mathbf{c}$ sobre $\mathbb{R}^S$).

F^j: Conjunto de agentes que obtienen menos de su cota inferior en el paso j del algoritmo, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

E^j: Cantidad que queda tras aumentar las asignaciones de los agentes en F^{j-1} hasta su cota inferior.

$R(\mathbf{c}_{S^j}, E^j)$: Asignación obtenida mediante la regla R en el paso j del algoritmo, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

$R(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E)$: Reparto asociado a la regla R en el problema con reclamaciones $\mathbf{c}$, cantidad a repartir E y cotas inferiores $\mathbf{a}$.

Las asignaciones obtenidas con este procedimiento coinciden con las obtenidas con las correspondientes reglas clásicas, siempre que se respeten las cotas inferiores. De lo contrario, los resultados se adaptan para que se alcancen las cotas siguiendo el mismo principio de racionalidad.

Obsérvese que las reglas obtenidas aplicando el algoritmo anterior no necesariamente cumplen que $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) \leq c_i$ para $i \in N$. Sin embargo, si la regla original es tal que $R_i(\mathbf{c}, E) \leq c_i$ para $i \in N$ y el vector de reclamaciones domina a las cotas inferiores, es decir, $a_i \leq c_i$ para $i \in N$, entonces sí se cumpliría esta condición.

El siguiente resultado establece la relación entre los resultados obtenidos con el algoritmo, la regla original y las cotas inferiores. También proporciona fórmulas explícitas para las versiones con cotas de las reglas de reparto más usuales.

Proposición 2.1. *Dada una regla para el problema clásico de bancarrota, R, que es consistente*[3]*, monótona en la cantidad a repartir*[4] *y continua*[5]*, la regla asociada para el problema de bancarrota con cotas inferiores es para cada problema* $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) \in \mathcal{A}_N$ *y cada* $i \in N$*:*

$$R_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = \text{máx}\{a_i, R_i(\boldsymbol{c}, E_*)\},$$

donde E_* *es tal que* $\sum_{i=1}^n R_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = E$*.*

Demostración: Puesto que $\sum_{i \in N} a_i \leq E$, puede ocurrir que la desigualdad $R_i(\mathbf{c}, E) \geq a_i$ se cumpla para todo $i \in N$. En este caso, $E_* = E$, $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = R_i(\mathbf{c}, E) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E)\}$, para cada $i \in N$ y $\sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = E$.

En otro caso, el procedimiento representado en la Figura 2 prescribe asignar a cada agente $i \in F^0 = \{i \in N : R_i(\mathbf{c}, E) < a_i\}$ su correspondiente cota inferior, $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = a_i$, considerar una cantidad reducida, $E^1 = E - \sum_{i \in F^0} a_i$, y calcular según la regla las asignaciones correspondientes a los agentes en $S^1 = N \setminus F^0$, es decir, $R_i(\mathbf{c}_{S^1}, E^1)$ para cada $i \in S^1$.

Por la continuidad de la regla R, dado $E^1 = E - \sum_{i \in F^0} a_i$, tiene que existir una cantidad $E(1) < E$ tal que

$$\sum_{i \in S^1} (R_i(\mathbf{c}, E) - R_i(\mathbf{c}, E(1))) = \sum_{i \in F^0} (a_i - R_i(\mathbf{c}, E)),$$

es decir, $\sum_{i \in S^1} R_i(\mathbf{c}, E(1)) = E^1$.

Por otro lado, como la regla R es consistente se tiene que para cada $i \in S^1$, $R_i(\mathbf{c}_{S^1}, E^1) = R_i(\mathbf{c}, E(1))$.

[3]Una regla de reparto clásica, R, es consistente si para cada conjunto de agentes N, cada $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$, y cada $N' \subset N$, si $\mathbf{x} = R(\mathbf{c}, E)$, entonces $R(\mathbf{c}_{N'}, \sum_{N'} x_i) = \mathbf{x}_{N'}$, donde $\mathbf{x}_{N'}$ y $\mathbf{c}_{N'}$ son las proyecciones de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ al espacio $|N'|$-dimensional.

[4]Una regla de reparto clásica, R, es monótona en la cantidad a repartir si para cada problema $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$ y cada E' tal que $E < E' \leq \sum_{i \in N} c_i$, $R_i(\mathbf{c}, E) \leq R_i(\mathbf{c}, E')$ para cada $i \in N$.

[5]Una regla de reparto clásica, R, es continua si para cada problema $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$ y para cada sucesión E^ν, tal que $E^\nu \leq \sum_{i \in N} c_i$, que converja a E, se tiene que $R(\mathbf{c}, E^\nu)$ converge a $R(\mathbf{c}, E)$.

Si para cada $i \in S^1$, tenemos la desigualdad $R_i(\mathbf{c}, E(1)) \geq a_i$, entonces, para cada $i \in N$, $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E_*)\}$, donde $E_* = E(1)$, ya que $R_i(\mathbf{c}, E(1)) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E(1))\}$, para cada $i \in S^1$, $a_i = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E(1))\}$, para cada $i \in F^0$ y $\sum_{i \in S^1} R_i(\mathbf{c}, E_*) + \sum_{i \in F^0} a_i = E$.

Si todavía, en cambio, hay agentes para los que $R_i(\mathbf{c}, E(1)) > a_i$, el procedimiento representado en la Figura 2 prescribe asignar a cada agente $i \in F^1 = \{i \in N : R_i(\mathbf{c}_{S^1}, E^1) < a_i\}$ su correspondiente cota inferior, $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = a_i$, reducir todavía la cantidad a repartir hasta, $E^2 = E^1 - \sum_{i \in F^1} a_i$ y calcular según la regla las asignaciones correspondientes a los agentes en $S^2 = S^1 \setminus F^1$, es decir, $R_i(\mathbf{c}_{S^2}, E^2)$ para cada $i \in S^2$.

Por la continuidad de la regla R, dado $E^2 = E^1 - \sum_{i \in F^1} a_i$, tiene que existir una cantidad $E(2) < E(1)$ tal que

$$\sum_{i \in S^2} (R_i(\mathbf{c}, E(1)) - R_i(\mathbf{c}, E(2))) = \sum_{i \in F^1} (a_i - R_i(\mathbf{c}, E(1))),$$

es decir, $\sum_{i \in S^2} R_i(\mathbf{c}, E(2)) = \sum_{i \in S^1} (R_i(\mathbf{c}, E(1)) - \sum_{i \in F^1} a_i = E^1 - \sum_{i \in F^1} a_i = E^2$.

Por otro lado, como la regla R es consistente se tiene que para cada $i \in S^2$, $R_i(\mathbf{c}_{S^2}, E^2) = R_i(\mathbf{c}, E(2))$.

Si para cada $i \in S^2$, tenemos la desigualdad $R_i(\mathbf{c}, E(2)) \geq a_i$, entonces, para cada $i \in N$, $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E_*)\}$, donde $E_* = E(2)$, ya que $R_i(\mathbf{c}, E(2)) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E(2))\}$, para cada $i \in S^2$, $a_i = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E(1))\}$, para cada $i \in F^0 \cup F^1$ y $\sum_{i \in S^2} R_i(\mathbf{c}, E_*) + \sum_{i \in F^0 \cup F^1} a_i = E$.

Si todavía hubiera agentes para los que $R_i(\mathbf{c}, E(1)) > a_i$, el razonamiento anterior se repite hasta que eso no ocurra. Obsérvese que el procedimiento termina porque hay un número finito de agentes.

En el último paso, k^*, para cada $i \in S^{k^*}$, se verifica la desigualdad $R_i(\mathbf{c}, E(k^*)) \geq a_i$. Por lo tanto, considerando $E_* = E^{k^*}$, se tiene que $R_i(\mathbf{c}, \mathbf{a}, E) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E_*)\}$, puesto que $R_i(\mathbf{c}, E_*) = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E_*)\}$, para cada $i \in S^{k^*}$, $a_i = \text{máx}\{a_i, R_i(\mathbf{c}, E_*)\}$ para cada $i \in F^0 \cup F^1 \cup \ldots \cup F^{k^*-1} = N \setminus S^{k^*}$ y $\sum_{i \in S^{k^*}} R_i(\mathbf{c}, E_*) + \sum_{i \in N \setminus S^{k^*}} a_i = E$.

Esto termina la prueba. $\square$

Obsérvese que la demostración de este resultado depende de la consistencia, continuidad y monotonía de la regla clásica correspondiente. El resultado no tiene por qué ser válido, en general, para reglas de reparto que no cumplan estas propiedades.

A continuación se proporcionan las expresiones analíticas de algunas reglas, para los problemas de bancarrota con cotas inferiores[6].

Corolario 2.2. *La regla proporcional con cotas inferiores asigna a cada $i \in N$,*

$$p_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = \text{máx}\{a_i, \lambda c_i\},$$

donde λ es tal que $\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = E$.

Corolario 2.3. *La regla de igual ganancia restringida con cotas inferiores asigna a cada $i \in N$,*

$$CEA_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = \text{máx}\{a_i, \text{mín}\{\lambda, c_i\}\},$$

donde λ es tal que $\sum_{i=1}^{n} CEA_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = E$.

Corolario 2.4. *La regla de igual pérdida restringida con cotas inferiores asigna a cada $i \in N$,*

$$CEL_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = \text{máx}\{a_i, \text{máx}\{0, c_i - \lambda\}\},$$

donde λ es tal que $\sum_{i=1}^{n} CEL_i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = E$.

En la Figura 3 se muestra la trayectoria de las asignaciones de las reglas de reparto con cotas inferiores definidas anteriormente, en un problema con dos agentes. Las asignaciones de los agentes se representan en los ejes de coordenadas. Las líneas sólidas de color rojo indican los repartos para distintas cantidades a repartir que varían desde $\sum_{i=1}^{n} a_i$ hasta $\sum_{i=1}^{n} c_i$. Las líneas discontínuas de color

[6] Solamente mostramos las versiones de las reglas con cotas inferiores para la regla proporcional, de igual ganancia restringida e igual pérdida restringida porque serán las que extenderemos en el problema de reparto global.

azul indican la trayectoria de las asignaciones de estas reglas en un problema de bancarrota sin cotas inferiores. En los ejemplos de la primera fila, el vector de reclamaciones domina al de cotas inferiores, $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$, sin embargo, en los de la segunda fila esto no se cumple.

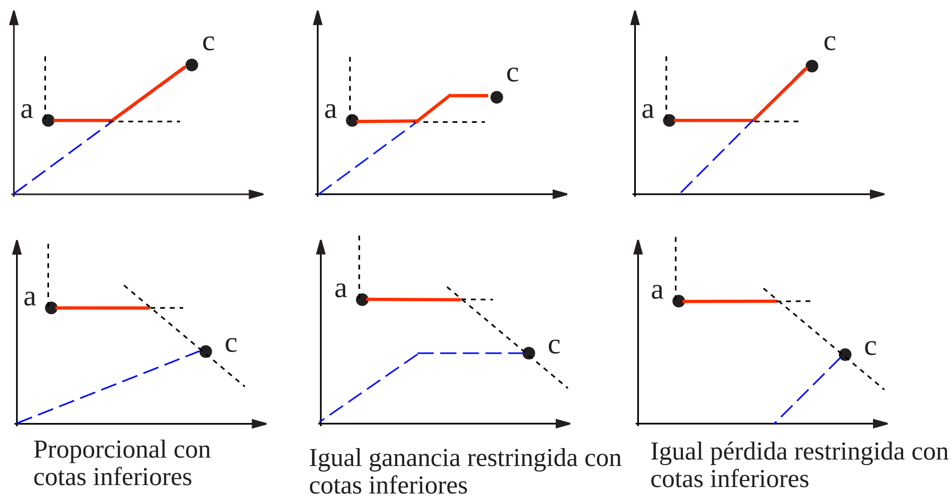

Figura 3: Trayectoria de las asignaciones de reglas de reparto con cotas inferiores.

Ejemplo 2.5. *Consideremos un problema con tres agentes,* $N = \{1, 2, 3\}$, *donde* $E = 5$, $\boldsymbol{a} = (0'5, 1, 3)$ *y* $\boldsymbol{c} = (5, 2, 3)$. *Para obtener la asignación correspondiente a la regla proporcional con cotas inferiores, el procedimiento es el siguiente:*

Paso 1*: Se calcula la solución proporcional para el problema clásico:* $p(\boldsymbol{c}, E) = (2'5, 1, 1'5)$. *Puesto que* $p_3(\boldsymbol{c}, E) = 1'5 < 3 = a_3$, $p_3(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = 3$, $S^1 = N \setminus \{3\} = \{1, 2\}$ *y* $E^1 = 5 - 3 = 2$.

Paso 2*: Se aplica la regla proporcional al problema* $(\boldsymbol{c}_{S^1}, E^1)$, *donde* $p(\boldsymbol{c}_{S^1}, E^1) = (10/7, 4/7)$. *Puesto que* $p_2(\boldsymbol{c}_{S^1}, E^1) = 4/7 < 1 = a_2$, *entonces* $p_2(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = 1$, $S^2 = S^1 \setminus \{2\} = \{1\}$ *y* $E^2 = 2 - 1 = 1$.

Paso 3*: Se aplica la regla proporcional al problema* $(\boldsymbol{c}_{S^2}, E^2)$, *donde* $p_1(\boldsymbol{c}_{S^2}, E^2) = 1 \geq 0'5 = a_1$. *El procedimiento termina por tanto en este Paso 3. La asignación obtenida es* $p(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, E) = (1, 1, 3)$.

3. PROBLEMAS DE BANCARROTA CON INCERTIDUMBRE

A continuación vamos a introducir la incertidumbre en el modelo de reparto. Para ello, consideramos varios problemas clásicos de bancarrota al mismo tiempo, uno por cada posible estado de la naturaleza. Asumimos que hay un número finito de estados de la naturaleza. Un *problema de bancarrota con incertidumbre* o un *problema global* consiste en una familia de problemas de bancarrota $(N, \mathbf{c}^j, E^j)$, $j \in M = \{1, \ldots, m\}$, donde $E^j \in \mathbb{R}_+$ es la cantidad a repartir en el estado de la naturaleza j y $\mathbf{c}^j = (c_1^j, c_2^j, \ldots, c_n^j)^t \in \mathbb{R}_+^N$ representa las reclamaciones de los agentes con respecto al estado j. Además se cumple la condición $\sum_{i \in N} c_i^j \geq E^j$ para cada j. Denotamos el problema global como (N, C, E), donde $E \in \mathbb{R}_+^M$ y $C \in \mathbb{R}_+^{N \times M}$ es la matriz de reclamaciones de los agentes. Cuando no haya confusión posible, denotaremos el problema por (C, E). Por $\mathcal{G}_N^M$ representamos la clase de todos los problemas globales asociados a un conjunto de agentes N y al conjunto de estados de la naturaleza M. Sin pérdida de generalidad, suponemos que los estados están ordenados en orden creciente, $E^1 \leq E^2 \leq, \ldots, \leq E^m$.

Un *resultado global* es una matriz no negativa $X \in \mathbb{R}_+^{N \times M}$, que verifica para cada $j = 1, \ldots, m$, $\sum_{i \in N} x_i^j \leq E^j$. Al conjunto de resultados globales lo denotamos por $\mathcal{X}(E)$. La fila i de la matriz X, $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^m) \in \mathbb{R}_+^M$, representa la asignación que recibe el agente i en cada uno de los m estados. La columna j de la matriz X, $\mathbf{x}^j = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j)^t \in \mathbb{R}_+^N$ representa la asignación del estado j. El conjunto de asignaciones factibles del estado j lo denotamos por $\mathcal{X}(E^j)$ y está formado por los vectores $\mathbf{x}^j \in \mathbb{R}_+^N$ tales que $\sum_{i \in N} x_i^j \leq E^j$ (obsérvese que $\mathcal{X}(E) = \prod_{j \in M} \mathcal{X}(E^j)$). Adoptamos la definición estándar de eficiencia y decimos que una asignación factible del estado j, $\mathbf{x}^j$, es *eficiente* si $\sum_{i \in N} x_i^j = E^j$. Una *regla global* para estos problemas, asocia un resultado global a cada problema global.

Para ilustrar los elementos del modelo, describimos una situación que puede representarse mediante un modelo de reparto con incertidumbre.

Ejemplo 3.1. *Una determinada administración tiene entre sus objetivos la mejora del sistema de salud y se plantea llevar a cabo uno de los tres proyectos de mejora que ha diseñado, dependiendo de los fondos que finalmente pueda dedicar a este objetivo. Los fondos públicos disponibles dependen de circunstancias políticas futuras, obteniéndose alguna de las siguientes cantidades* E^1, E^2 *o* E^3.

En el desarrollo de estas mejoras estarán implicados dos departamentos distintos de la administración (agentes). Las necesidades de estos departamentes para el desarrollo de los citados tres proyectos (reclamaciones) han sido evaluadas por un comité de expertos que han estimado los costes de las tareas en las que cada departamento estaría involucrado, si finalmente se llevase a cabo cada proyecto. Como resultado, tendriamos una matriz de reclamaciones C. *Como habitualmente ocurre en la administración pública, el montante total que resulta de estas valoraciones en cada proyecto supera en los tres casos la cantidad que en cada escenario futuro la administración tiene proyectado dedicar a cada plan de mejora.*

En esta situación hay un elemento importante a tener en cuenta: Las preferencias de los departamentos sobre las cantidades que obtendrán en los diferentes proyectos. Los departamentos pueden tener preferencias aditivas. En este caso desearán obtener tanto como sea posible, es decir, valoran la suma de la cantidad total que recibirían en los tres posibles proyectos (o el reparto esperado). Dado que el reparto se hace, por razones presupuestarias, con anterioridad a que se sepa con certeza cuál de los tres proyectos es el que finalmente se va a llevar a cabo, también tiene sentido considerar, en esta situación de incertidumbre, que los agentes tengan preferencias leximin en el reparto global que se plantea simultáneamente en los tres escenarios, es decir, cada agente quiera lo más posible, en el escenario que en el que menos cantidad se le asigne; entre dos repartos que *le asignen la misma cantidad en el escenario en el que menos cantidad se le adjudique, el agente prefiera aquel reparto en el que la segunda menor cantidad asignada sea mayor y si hay dos repartos globales en los que las dos menores cantidades asignadas al agente sean iguales, este prefiera aquel en el que la tercera cantidad sea mayor.*

3.1. EFICIENCIA ADITIVA

Decimos que el agente i tiene *preferencias aditivas* sobre los resultados globales si de cada resultado $X \in \mathcal{X}(E)$ valora exclusivamente la suma de las cantidades que le son asignadas en cada uno de los estados. Denotemos por $\geqslant_{ad}^i$ a la relación de preferencia del agente i. Así dados dos resultados globales, $X, Y \in \mathcal{X}(E)$, $X \geqslant_{ad}^i Y$ significa que $\sum_{j=1}^m x_i^j \geq \sum_{j=1}^m y_i^j$.

Denotamos por $>_{ad}^i$ la parte asimétrica de $\geqslant_{ad}^i$ y por $\geqslant_{ad}$ a la relación de dominancia colectiva definida como $X \geqslant_{ad} Y$ si y solo si $X \geqslant_{ad}^i Y$, $\forall\, i \in N$, con $X >_{ad}^k Y$, para algún $k \in N$.

Esta relación de dominancia colectiva permite definir el siguiente concepto de eficiencia para problemas globales.

Definición 3.2. *El resultado global $X \in \mathcal{X}(E)$ es eficiente aditivo si no hay otro resultado global, $Y \in \mathcal{X}(E)$ tal que $X \geqslant_{ad} Y$.*

El siguiente resultado muestra que el requisito de eficiencia aditiva para un resultado global es equivalente a la eficiencia estándar en cada uno de los problemas correspondientes a los distintos estados de la naturaleza.

Lema 3.3. *El resultado global $X \in \mathcal{X}(E)$, es eficiente aditivo si y solo si $\sum_{i=1}^n x_i^j = E^j$, $\forall\, j = 1, \ldots, m$.*

Demostración: Sea $X \in \mathcal{X}(E)$ eficiente aditivo y supongamos que existe $j^* \in M$ tal que $\delta^{j^*} = E^{j^*} - \sum_{i=1}^n x_i^{j^*} > 0$. Consideremos α^{j^*} tal que $0 < \alpha^{j^*} < \frac{\delta^{j^*}}{n}$ e

$Y \in \mathbb{R}^{N\times M}$ tal que $y_i^{j^*} = x_i^{j^*} + \alpha^{j^*}$, $\forall\, i \in N$, e $y_i^j = x_i^j$, $\forall\, i \in N, j \in M$, $j \neq j^*$. Entonces $Y \in \mathcal{X}(E)$ e $Y \geqslant_{ad} X$, lo que supone una contradicción.

Recíprocamente, sea $X \in \mathbb{R}_+^{N\times M}$ tal que $\sum_{i=1}^n x_i^j = E^j$, $\forall\, j \in M$ y supongamos que existe $Y \in \mathcal{X}(E)$ tal que $Y \geqslant_{ad} X$. Entonces $\sum_{j=1}^m y_i^j \geq \sum_{j=1}^m x_i^j$, $\forall\, i \in N$ y $\sum_{j=1}^m y_k^j > \sum_{j=1}^m x_k^j$ para algún $k \in N$. Por tanto, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i^j > \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i^j = \sum_{j=1}^m E^j$. Esto es una contradicción ya que si $Y \in \mathcal{X}(E)$, entonces debe cumplir $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i^j \leq \sum_{j=1}^m E^j$. □

Al exigir que la cantidad correspondiente a cada estado de la naturaleza se asigne totalmente, estamos imponiendo una condición de eficiencia colectiva para preferencias aditivas. Este resultado proporciona una nueva visión, dado que en la literatura relacionada con este tema, los modelos de múltiples bienes suponen implícitamente preferencias aditivas. En estos modelos, en una primera etapa se asigna la cantidad a repartir a los estados y posteriormente se asignan a los agentes las cantidades de cada estado de manera eficiente, por lo tanto, siempre se cumple la eficiencia aditiva.

En el Ejemplo 3.1, cualquier resultado que reparta totalmente los fondos entre los departamentos verifica la eficiencia aditiva.

3.2. EFICIENCIA LEXIMIN

Ahora vamos a considerar el caso en que los agentes tienen preferencias leximin sobre los resultados globales. Esto significa que cada agente quiere maximizar su peor resultado entre los obtenidos en los diferentes estados. En el caso de resultados globales que proporcionan el mismo peor resultado, preferirá aquellas cuyo segundo peor resultado es el mejor. Esta idea se aplica recursivamente.

Definiremos una noción de eficiencia leximin y mostraremos que ser eficiente en este sentido implica aceptar que los pagos globales son tales que, si la cantidad disponible de un estado de la naturaleza es mayor que la correspondiente a otro, entonces los agentes no pueden recibir menos en el primer estado que en el segundo.

Nuestro objetivo será diseñar reglas globales que garanticen resultados eficientes con respecto a las preferencias leximin. Propondremos un procedimiento para obtener reglas globales que sean eficientes leximin que está inspirado en los mismos principios de racionalidad de las reglas de reparto clásicas. En particular, definiremos reglas globales obtenidas a partir de las reglas proporcional, de igual ganancia y de igual pérdida restringida. Por analogía podrían definirse otras basadas en cualquier regla de reparto que sea consistente y monótona.

Dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$, denotaremos por $r(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^M$ el vector obtenido reordenando las componentes de $\mathbf{a}$ en orden creciente. Para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, denotamos $\mathbf{a} >_{lex} \mathbf{b}$ si existe $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ tal que $r_j(\mathbf{a}) = r_j(\mathbf{b})$, $\forall\, j = 0, 1, \ldots, l$, y $r_{l+1}(\mathbf{a}) > r_{l+1}(\mathbf{b})$. Con $\mathbf{a} \geqslant_{lex} \mathbf{b}$ se denota $\mathbf{a} >_{lex} \mathbf{b}$ o $r(\mathbf{a}) = r(\mathbf{b})$.

Se dirá que el agente i tiene *preferencias leximin* sobre los resultados globales, si dados dos resultados globales $X, Y \in \mathcal{X}(E)$, prefiere X a Y cuando $\mathbf{x}_i \geqslant_{lex} \mathbf{y}_i$.

A continuación definimos una relación de dominancia colectiva entre los resultados globales basada en los sucesivos pagos mínimos obtenidos por los agentes.

Dado $X \in \mathcal{X}(E)$, consideramos la matriz $Z(X) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ que se construye como sigue: Para cada fila $\mathbf{x}_i$, se reordenan sus componentes de forma creciente y este vector reordenado es la fila i-ésima de la matriz $Z(X)$. Así, la primera columna de $Z(X)$, $\mathbf{z}^1(X)$, contiene el valor más pequeño de cada fila de la matriz X. La segunda columna, $\mathbf{z}^2(X)$, contiene el segundo valor más pequeño de cada fila de la matriz X. En general, los elementos de $\mathbf{z}^j(X)$, $j \in \{1, 2, \ldots m\}$, son el j-ésimo elemento más pequeño de cada fila de la matriz X. Se dice que $X \succcurlyeq_{lex} Y$, si $\mathbf{z}^j(X) \geq \mathbf{z}^j(Y)$[7] para la primera columna, j, $j \in \{1, 2, \ldots m\}$, tal que $\mathbf{z}^j(X) \neq \mathbf{z}^j(Y)$.

En el siguiente resultado indicamos la relación entre preferencia leximin de los agentes y la relación de dominancia colectiva definida anteriormente.

[7] $\mathbf{z}^j(X) \geq \mathbf{z}^j(Y)$ significa $z_i^j(X) \geq z_i^j(Y)$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con alguna de las desigualdades estricta.

Lema 3.4. *Dados* $X, Y \in \mathcal{X}(E)$*, si* $\mathbf{x}_i \geqslant_{lex} \mathbf{y}_i$ *para todo* $i \in N$*, y* $\mathbf{x}_i >_{lex} \mathbf{y}_i$ *para algún* $i \in N$*, entonces* $X \succcurlyeq_{lex} Y$*.*

La ordenación parcial en $\mathbb{R}^{N \times M}$, $\succcurlyeq_{lex}$, permite la definición del siguiente concepto de eficiencia colectiva.

Definición 3.5. *Un resultado global* $X \in \mathcal{X}(E)$ *es eficiente leximin si no hay otro resultado global,* $Y \in \mathcal{X}(E)$*, tal que* $Y \succcurlyeq_{lex} X$*.*

Del último lema se desprende que si un resultado global es eficiente leximin, entonces no existe otro resultado global que mejore la asignación de todos los agentes en un sentido lexicográfico, con una mejora estricta al menos para uno de los agentes.

En el siguiente resultado se establece que el requisito de eficiencia con respecto a las preferencias leximin es equivalente a la siguiente hipótesis: Si la cantidad correspondiente a un estado de la naturaleza no es menor que la cantidad correspondiente a otro, entonces los agentes no obtendrán menos de este estado que del otro.

Proposición 3.6. *Un resultado global,* $X \in \mathcal{X}(E)$ *es eficiente leximin si y solo si* $\mathbf{x}^1 \leqq \mathbf{x}^2 \leqq, \ldots, \leqq \mathbf{x}^m$*.*[8]

La demostración es consecuencia de los resultados de Mármol y Ponsatí (2008).

Este resultado establece una condición de monotonía que deben cumplir los pagos de todos los agentes, con respecto a los estados de la naturaleza. Que un resultado global verifique la eficiencia leximin significa, en el Ejemplo 3.1, que el reparto que obtiene cada departamento con un presupuesto alto no debe ser inferior a la cuota obtenida con un presupuesto más bajo.

Las propiedades de eficiencia aditiva y de eficiencia leximin, son incompatibles con la condición de que las reglas globales proporcionen resultados acotados por las reclamaciones de los agentes, es decir, $0 \leq x_i^j \leq c_i^j$, para todo $i \in N$, y

[8] $\mathbf{x}^j \leqq \mathbf{x}^l$ significa $x_i^j \leq x_i^l$, $\forall\, i \in N$.

$j \in M$. Con reglas de reparto que proporcionen asignaciones que cumplen eficiencia aditiva y leximin, puede ocurrir que estas reglas asignen a algunos agentes una cantidad mayor de su reclamación en alguno de los estados de la naturaleza. Esto podemos observarlo en la Figura 4, donde se indican ejemplos de repartos para un problema global con dos estados de la naturaleza y dos agentes.

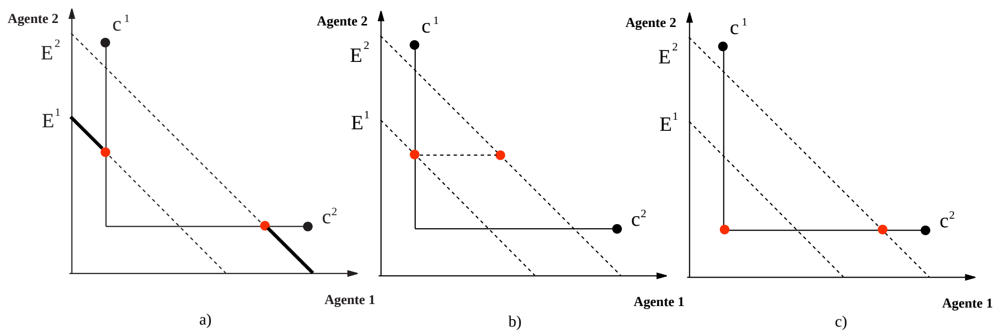

Figura 4: Incompatibilidad entre los tipos de eficiencia.

El caso a) muestra que si se respetan las cotas superiores que proporcionan las reclamaciones puede cumplirse la eficiencia aditiva, pero no la eficiencia leximin. El caso b) refleja que si se incumple la acotación en las reclamaciones de los agentes puede cumplirse la eficiencia aditiva y leximin. Por último, en el caso c) se muestra una situación en la que se cumple la acotación por las reclamaciones de los agentes y la eficiencia leximin pero no la eficiencia aditiva.

En esta sección consideramos situaciones en las que se reparte totalmente la cantidad disponible de cada estado de la naturaleza entre los agentes, es decir, se verifica la eficiencia aditiva y exigiremos eficiencia leximin por lo que, es posible que los agentes reciban cantidades de los estados por encima de las reclamaciones correspondientes.

Vamos a diseñar un procedimiento general para obtener reglas globales, que presentan al mismo tiempo eficiencia aditiva y leximin. En particular, definiremos reglas globales obtenidas a partir de las reglas proporcional, de igual ganancia restringida y de igual pérdida restringida.

4. REGLAS GLOBALES LEXIMIN

A partir de ahora suponemos que las cantidades que se reparten en los distintos estados de la naturaleza son diferentes, es decir, cumplen que $E^1 < E^2 < \ldots < E^m$.

A continuación, definimos reglas que empiezan resolviendo el problema de bancarrota correspondiente al estado de la naturaleza con cantidad a repartir más pequeña, y se procede en orden ascendente con la asignación de las cantidades correspondientes a los otros estados. Dado que, en cada etapa, el reparto depende del reparto previo, estas reglas dan más importancia a las reclamaciones correspondientes a los estados con menores cantidades. El procedimiento para obtener el resultado global consiste en: Aplicar a los problemas asociados a diferentes estados de la naturaleza de forma recursiva y en orden ascendente, una regla con cotas inferiores con el fin de cumplir las condiciones impuestas por la eficiencia leximin.

Definición 4.1. *Dada una regla de reparto para un problema clásico de bancarrota, R, una regla leximin ascendente, $\overline{R}$, para un problema global, $(C,E) \in \mathcal{G}_N^M$ se define como:*

$$\overline{R}^1(C,E) = R(\boldsymbol{c}^1, E^1) \text{ y para cada } j = 2, \ldots, m,$$

$$\overline{R}^j(C,E) = R(\boldsymbol{c}^j, \overline{R}^{j-1}(C,E), E^j),$$

donde $R(\boldsymbol{c}^j, \overline{R}^{j-1}(C,E), E^j)$ denota la regla de reparto con cotas inferiores aplicada al problema $(\boldsymbol{c}^j, \overline{R}^{j-1}(C,E), E^j)$, para cada $j = 2, \ldots, m$.

Para los casos de las reglas proporcional, de igual ganancia restringida y de igual pérdida restringida, las correspondientes reglas globales se pueden escribir de la siguiente manera:

Regla leximin proporcional ascendente ($\overline{P}$):

$\overline{P}^1(C,E) = p(\mathbf{c}^1, E^1)$ y para cada $j = 2, \ldots, m$, y cada $i \in N$,

$$\overline{P}_i^j(C,E) = \text{máx}\{\overline{P}_i^{j-1}(C,E), \lambda c_i^j\}$$

con $\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^j(C,E) = E^j$.

Regla leximin de igual ganancia ascendente ($\overline{CEA}$):

$\overline{CEA}^1(C,E) = CEA(\mathbf{c}^1, E^1)$ y para cada $j = 2, \ldots, m$, y cada $i \in N$,

$$\overline{CEA}_i^j(C,E) = \max\{\overline{CEA}_i^{j-1}(C,E), \min\{\lambda, c_i^j\}\}$$

con $\sum_{i=1}^{n} \overline{CEA}_i^j(C,E) = E^j$.

Regla leximin de igual pérdida ascendente ($\overline{CEL}$):

$\overline{CEL}^1(C,E) = CEL(\mathbf{c}^1, E^1)$ y para cada $j = 2, \ldots, m$, y cada $i \in N$,

$$\overline{CEL}_i^j(C,E) = \max\{\overline{CEL}_i^{j-1}(C,E), \max\{0, c_i^j - \lambda\}\}$$

con $\sum_{i=1}^{n} \overline{CEL}_i^j(C,E) = E^j$.

A continuación, ilustramos estas reglas globales con un ejemplo. Mostramos las diferencias entre los resultados obtenidos al aplicar reglas globales y los que se tienen al aplicar reglas clásicas a cada uno de los problemas de bancarrota que se derivan del problema global.

Ejemplo 4.2. *En un problema de producción con dos agentes y tres recursos productivos, para aplicar un principio igualitario puede usarse la regla de igual ganancia restringida por separado para la asignación de cada uno de los recursos. Sin embargo, si bajo el mismo principio de igualdad, se requiere eficiencia leximin y se da más importancia a los escenarios con disponibilidad menor, entonces debe aplicarse la regla leximin de igual ganancia ascendente. Los resultados que se obtienen cuando las disponibilidades y las reclamaciones son las que se indican, se muestran en la tabla que aparece a continuación.*

Cantidades	*Reclamaciones*	*CEA por separado*	$\overline{CEA}$
$E^1 = 80$	$\boldsymbol{c}^1 = (80, 30)$	$\mathbf{x}^1 = (50, 30)$	$\mathbf{x}^1 = (50, 30)$
$E^2 = 100$	$\boldsymbol{c}^2 = (40, 70)$	$\mathbf{x}^2 = (40, 60)$	$\mathbf{x}^2 = (50, 50)$
$E^3 = 120$	$\boldsymbol{c}^3 = (80, 60)$	$\mathbf{x}^3 = (60, 60)$	$\mathbf{x}^3 = (60, 60)$

Téngase en cuenta que el vector de cantidades mínimas que los agentes obtienen cuando se aplica por separado la regla de igual ganancia restringida es $(40, 30)$*, mientras que las cantidades mínimas obtenidas cuando se aplica la regla leximin de igual ganancia ascendente son* $(50, 30)$*. Por lo tanto, el resultado global correspondiente a esta última regla global domina lexicográficamente a la obtenida de la primera forma.*

Cuando se aplica un principio de proporcionalidad con respecto a las referencias, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 5 y en la tabla siguiente.

Cantidades	*Reclamaciones*	*Regla proporcional por separado*	$\overline{P}$
$E^1 = 80$	$\boldsymbol{c}^1 = (80, 30)$	$\mathbf{x}^1 = (\frac{640}{11}, \frac{240}{11})$	$\mathbf{x}^1 = (\frac{640}{11}, \frac{240}{11})$
$E^2 = 100$	$\boldsymbol{c}^2 = (40, 70)$	$\mathbf{x}^2 = (\frac{400}{11}, \frac{700}{11})$	$\mathbf{x}^2 = (\frac{640}{11}, \frac{460}{11})$
$E^3 = 120$	$\boldsymbol{c}^3 = (80, 60)$	$\mathbf{x}^3 = (\frac{480}{7}, \frac{360}{7})$	$\mathbf{x}^3 = (\frac{480}{7}, \frac{360}{7})$

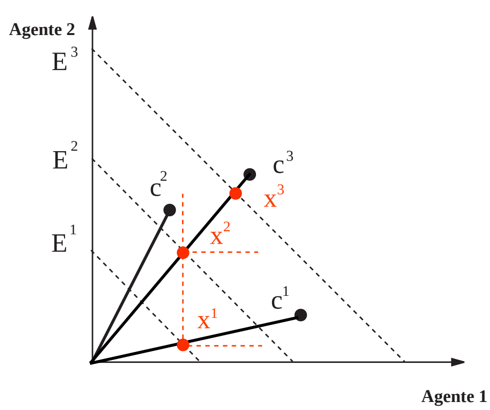

Figura 5: Regla leximin proporcional ascendente.

Los niveles mínimos cuando se aplica la regla proporcional por separado son de $(\frac{400}{11}, \frac{240}{11})$*, mientras que con la regla leximin proporcional ascendente tenemos* $(\frac{640}{11}, \frac{240}{11})$.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado las implicaciones que tiene sobre el problema de bancarrota en situaciones de incertidumbre el hecho de asumir que los agentes presentan preferencias de tipo aditivo y leximin. En el caso de preferencias aditivas de los agentes, hemos demostrado que la eficiencia estándar en cada estado es equivalente a una condición de eficiencia colectiva. El análisis del problema global cuando las preferencias de los agentes que intervienen en el reparto son del tipo leximin, implica que cada agente va a valorar su resultado global a través del orden leximin definido en su espacio de pagos. Un primer resultado es que bajo estas hipótesis, eficiencia implica que los vectores de asignaciones a los agentes para cada uno de los estados de la naturaleza van a resultar ordenados en el mismo orden que están las cantidades correspondientes a dichos estados. Es decir, si la cantidad correspondiente a un estado es mayor que la correspondiente a otro, entonces todos los agentes deben obtener cantidades menores o iguales en el estado correspondiente a la menor cantidad. Nuestro objetivo, ha sido definir reglas globales que garanticen resultados no dominados con respecto a las preferencias leximin. Hemos descrito tres propuestas basadas en los principios de racionalidad de las reglas proporcional, de igual ganancia e igual pérdida restringida. El procedimiento para obtener los repartos globales que generan estas reglas está basado en el proceso iterado de aplicación de las reglas con cotas inferiores introducido en la Sección 2.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN, R. J., MASCHLER, M. (1985).“ Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud.” Journal of Economic Theory, 36, pp. 195–213.

- BERGANTIÑOS, G., LORENZO, L., LORENZO-FREIRE, S. (2010).“ A characterizations of the proportional rule in multi-issue allocation situations.” Operations Research Letters, 38, pp. 17-19.

- BERGANTIÑOS, G., LORENZO-FREIRE, S. (2011).“ New characterizations of the constrained equal awards rule in multi-issue allocation situations.” Mathematical Methods of Operations Research, pp. 1–15.

- BOSSERT, W.(1993).“An alternative solution to bargaining problems with claims.” Mathematical Social Sciences, 25, pp. 205–220.

- BOSSERT, W., NOSAL, E., SADANAND, V. (1996).“ Bargaining under uncertainty and the monotone path solutions.” Games and Economic Behavior, 14, pp. 173–189.

- BOSSERT, W., PETERS, H. (2001).“ Minimax regret and efficient bargaining under uncertainty.” Games and Economic Behavior, 34, pp. 1–10.

- CALLEJA, P., BORM, P., HENDRICKX, R. (2005).“ Multi-issue allocation situations.” European Journal of Operational Research, 164, pp. 730–747.

- CHUN, Y., THOMSON, W. (1992).“ Bargaining problems with claims.” Mathematical Social Sciences, 24, pp. 19–33.

- GONZÁLEZ-ALCÓN, C., BORM, P., HENDRICKX, R. (2007).“ A composite run-to-the-bank rule for multi-issue allocation situations.” Methods of Operations Research, 65, pp. 339–352.

- HERRERO, C. (1998).“Bargaining with claims in economic environments.” Revista Española de Economía, 15, 1, pp. 3–13.

- JU, B-G., MIYAGAWA, E., SAKAI, T. (2007).“ Non-manipulable division rules in claim problems and generalizations.” Journal of Economic Theory, 132, pp. 1–26.

- LORENZO-FREIRE, S., HENDRICKX, R., CASAS-MÉNDEZ, B.(2009). "The two-stage constrained equal awards and losses for multi-issue allocation situations." TOP, DOI 10.1007/s11750-009-0073-8.
- MÁRMOL, A. M., PONSATÍ, C.(2008)." Bargaining over multiple issues with maxmin and leximin preferences." Social Choice and Welfare, 30(4), pp. 597–618.
- MORENO-TERNERO, J.D. (2009)." The proportional rule for multi-issue bankruptcy problems." Economics Bulletin, 29, pp. 483–490.
- PULIDO, M., SÁNCHEZ-SORIANO, J., LLORCA, N.(2002)." Game theory techniques for University management: and extended bankruptcy model." Annals of Operations Research, 102, pp. 129–142.
- PULIDO, M., BORM, P., HENDRICKX, R., LLORCA, N., SÁNCHEZ-SORIANO, J. (2008)." Compromise solutions for bankruptcy situations with references." Annals of Operations Research, 158, pp. 133–141.
- THOMSON, W. (2003)." Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: A survey". Mathematical Social Sciences, 45, pp. 249–297.