
LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS ESCOLARES: DIVERSAS CLASIFICACIONES Y DIFICULTADES

Universidad de Sevilla

Facultad de Ciencias de la Educación



2017/18

Grado en Educación Primaria

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

TUTOR: Gavilán Izquierdo, José María

ALUMNA: Gallego Mulero, Rebeca

CURSO: 4º

Contenido.

1. Resumen.....	2
2. Introducción y justificación.....	3
3. Objetivos.....	5
4. Marco Teórico.....	6
5. Metodología.....	20
• Participantes:.....	20
• Instrumento de recogida de datos:.....	20
• Procedimiento de análisis:.....	26
6. Resultados obtenidos.....	28
7. Conclusiones.....	36
8. Aprendizaje obtenido.....	38
• Didáctica de las Matemáticas:.....	38
• Trabajo de Investigación:.....	39
• En el ámbito personal:.....	39
9. Referencias.....	40

1. Resumen.

La realización de este trabajo de investigación se centra en determinar la clasificación existente de los problemas aritméticos y analizar qué tipo de problema, dentro de los problemas aritméticos de dos etapas, resultan ser de mayor dificultad para los alumnos en la etapa de la Educación Primaria.

El campo de estudio para llevar a cabo dicha investigación fue 4º curso de Educación Primaria. Para este nivel se diseñó un instrumento de investigación basado en un cuestionario que constaba de 6 problemas aritméticos: dos problemas de tipo Jerárquico, dos del tipo Compartir Todo y otros dos del tipo Compartir Parte.

Tras pasar los cuestionarios, se llevó a cabo un proceso de análisis de los mismos, en el que se determinaría de forma global, en base a las respuestas obtenidas de los alumnos, que problemas resultan más fáciles de resolver para los alumnos y cuales resultan más difíciles.

A partir de esto se pudo determinar que operaciones básicas, ya sean aditivas (suma y resta) o multiplicativas (multiplicación y división), son más difíciles de deducir para los alumnos, sobre todo en problemas aritméticos de dos etapas. También se pudo observar que dificultades generaba el orden en la realización de las operaciones, dependiendo de que se realizara en primer lugar las operaciones aditivas o multiplicativas.

Todos los frutos obtenidos del análisis de dicha investigación se muestran en los resultados y conclusiones incluidos en este trabajo, además de contener una reflexión personal del mismo.

Palabras clave: *Problemas aritméticos, problemas jerárquicos, problemas compartir todo, problemas compartir parte, esquema aditivo, esquema multiplicativo.*

2. Introducción y justificación.

La línea escogida para llevar a cabo una investigación, y como fruto de ello realizar este Trabajo de Fin de Grado, ha sido: *“Los problemas aritméticos escolares: diversas calificaciones y dificultades”*.

En esta investigación, se llevará a cabo la búsqueda de las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos que podemos encontrar, y se mostrarán algunas de ellas para determinar con mayor precisión los tipos de problemas aritméticos existentes. Además, centrándonos en la clasificación que nos muestra los estudios de Nesher y Hershkovitz (1994), sobre los esquemas compuestos presentes en los problemas de dos etapas, llevaremos a cabo un estudio empírico apropiado en la etapa de Educación Primaria, para ver qué tipo de dificultades generan estos problemas.

Hoy en día, a modo general, las matemáticas resulta ser la materia menos atractiva para los alumnos, tanto en la Educación Primaria, como en cursos superiores. Esta afirmación, a pesar del rico contenido que conlleva dicha materia, sigue presente en las aulas, sobre todo al trabajar con problemas matemáticos.

Los problemas matemáticos pueden generar ciertas dificultades, puesto que no solo conlleva realizar la operación que determina el problema, sino que antes de ello, se debe llevar a cabo un proceso de análisis de dicho problema, para obtener información mediante la comprensión lectora del mismo, detectar sus componentes, establecer un plan para llegar a su solución, etc. En definitiva, estos requieren un proceso de asimilación que va más allá de identificar la operación que se debe llevar a cabo para obtener la solución del problema.

Por todo ello, resulta interesante investigar acerca de qué tipo de problemas pueden generar mayores dificultades a los alumnos, dependiendo tanto de las operaciones que se deben realizar, ya sean aditivas (suma y resta), como multiplicativas (multiplicación y división), como

la relación que dichas operaciones tienen dentro del problema y el orden en las que se deben realizar, sobre todo en los problemas de dos etapas, donde se deben realizar dos operaciones para llegar a la solución.

Además, otra de las motivaciones para llevar a cabo esta investigación, es todo lo estudiado durante la carrera, sobre los problemas aritméticos en las asignaturas pertenecientes al ámbito de las matemáticas. En estas se pone en práctica tanto la resolución propia de problemas, como el diseño de estos, hecho que se tendrá que llevar a cabo en un futuro como docente en las aulas. Por este motivo es importante saber, en cierta medida, que es lo que genera mayor dificultad a los alumnos a la hora de enfrentarse a un problema, sobre todo cuando este contiene alguna información latente e importante para poder llegar a su solución. Además, se podrá mostrar que tipo de operaciones resultan más difíciles de realizar, o lo que es aún más importante, que tipo de operaciones son más difíciles de deducir a la hora de tener que identificarlas para llevarlas a cabo en la resolución del problema.

También, a partir de este estudio se podría investigar cómo trabaja la lógica matemática de los alumnos, sobre todo en la realización de estos tipos de problemas, mostrando cuales son los aspectos que les resulta más difíciles de deducir, y cuales les resultan menos complejos. Todo ello, al igual que se realiza en esta investigación, se debe llevar a cabo teniendo en cuenta los intereses y motivaciones de los alumnos que van a ser partícipes de él, proporcionando herramientas de análisis que sean atractivas para dichos participantes.

3. Objetivos.

Para llevar a cabo este trabajo se ha planteado la siguiente pregunta: “¿Qué tipo de dificultades presentan los diversos tipos de problemas aritméticos de dos etapas?”. Para responder a esta pregunta se debe tener claro qué tipo de problemas aritméticos de dos etapas podemos encontrar y como son los esquemas que los componen. Para ello, se debe tener en cuenta que dichos problemas deben responder a un nivel y contexto apropiado para la Educación Primaria.

Por estos motivos, los objetivos generales que se pretenden alcanzar con dicho estudio son:

- Mostrar los tipos de problemas aritméticos existentes, tanto de una etapa como de dos.
- Diseñar un instrumento de investigación acorde con la finalidad del estudio.
- Determinar qué tipo de problema aritmético de dos etapas resulta ser más fácil para los alumnos.
- Determinar qué tipo de problema aritmético de dos etapas resulta ser más difícil para los alumnos.
- Mostrar que operaciones resultan más fáciles o difíciles de deducir para los alumnos.
- Recabar información para la elaboración de futuras clases de matemáticas como docente.

4. Marco Teórico.

Como se muestra en La Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, en el ámbito de las matemáticas, los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los aspectos más importantes en el aprendizaje de estas. Estos trabajan muchas capacidades básicas como, por ejemplo, leer, reflexionar, planificar, comprobar la solución que se ha encontrado, etc. A su vez reflejan situaciones que se pueden encontrar en la vida cotidiana de los alumnos, lo que provoca que deba concebirse como una herramienta fundamental para el desarrollo de las capacidades y competencias básicas del aprendizaje de los discentes.

El aprendizaje a través de la resolución de problemas fomenta la autonomía e iniciativa personal, incentiva que el alumno busque diferentes alternativas de trabajo y puntos de vista, además de tener que poner en práctica la interpretación y el análisis de los resultados obtenidos en el contexto en el que se han propuesto.

Por todo lo anteriormente mencionado, trabajar los problemas matemáticos resulta de gran importancia, sin embargo, para los alumnos no resulta ser una tarea fácil de llevar a cabo. Estas dificultades a la hora de resolver los problemas pueden surgir por una gran diversidad de motivos, dependiendo del tipo de problema y del proceso que se debe llegar a cabo para llegar a la solución de este.

Los problemas aritméticos que se pueden llevar a cabo en la etapa de la Educación Primaria pueden ser de una o varias etapas, es decir, como se muestra en La Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, pueden ser problemas en los que intervengan una o varias de las cuatro operaciones aritméticas, las cuales son: suma, resta, multiplicación y división.

Esto resulta bastante aclarativo en la explicación que nos proporciona el estudio de Castro et al. (1998) con la definición de problema simple y problema compuesto. En su estudio, define los problemas simples como aquellos problemas que contienen solo una relación entre dos datos numéricos, con los cuales se debe operar para llegar a la solución, es decir, para resolver dicho problema se necesita realizar una sola operación aritmética. Mientras tanto, los problemas compuestos se definen como aquellos problemas que contienen más de una relación en su enunciado, por lo que es necesario emplear dos operaciones distintas o una misma operación varias veces.

A continuación, se podrán observar varias clasificaciones que se pueden dar tanto en problemas aritméticos de una etapa, como en problemas aritméticos de dos etapas.

Como muestra el estudio de Puig y Cerdán (1988), los problemas aritméticos de una etapa son la primera toma de contactos con la resolución de problemas que se encuentran los alumnos en su inicio en la Educación Primaria.

En un PAEV (Problemas Aritméticos Elementales Verbales) de una etapa se pueden observar dos partes: la parte informativa y la pregunta del problema.

Las cantidades presentes en el problema son tres: dos de ellas se nos proporcionan como datos, y la restante es la incógnita del problema; esto es, dos están contenidas en la parte informativa y otra en la pregunta del problema.

El primer análisis que puede realizarse de un PAEV puede centrarse en las palabras. En los enunciados de estos problemas podemos distinguir dos tipos de palabra: las que desempeñan algún papel en la elección de la operación y las que no desempeñan papel alguno. En estos enunciados palabras como “ganó”, “perdió”, “los dos juntos”, o las que muestra la lista de verbos de adición y la substracción establecida por Grupo de EGB de la APMA (1987), tienen un gran papel, puesto que son cruciales para la elección de la operación. Sin embargo,

“Juan”, “Silvia”, “canicas”, etc., son las que no desempeñan ningún papel respecto a la elección de la operación, pero sirven para contextualizar el problema. Esto conlleva a que, este último tipo de palabras debe estar formado por palabras conocidas para los alumnos a los que van dirigido dichos problemas.

El segundo análisis se realiza al enunciando de los PAEV, en los cuales Neshier (1982) distingue en su modelo tres componentes: el componente sintáctico, la estructura lógica y el componente semántico. El componente sintáctico forma parte de la estructura superficial del problema, como así muestran también los estudios sobre los aspectos sintácticos de los problemas verbales realizados por Jerman y sus colaboradores (Jerman, 1974; Jerman y Rees, 1972; Jerman y Mirman, 1974). La estructura lógica contiene implícita o explícitamente tres proposiciones: dos en la parte informativa y una tercera en la pregunta del problema.

En el componente semántico es donde reside los tipos de palabras que se muestran entre las tres proposiciones del texto. Dentro de este último componente encontramos cuatro grandes categorías: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

- **Cambio:** En estos problemas se distinguen tres momentos diferentes en los que se describe cómo una cantidad inicial es sometida a una acción, directa o sobreentendida, que la modifica. Las tres cantidades presentes en el problema reciben los nombres de cantidad inicial, final y de cambio o diferencia entre la inicial y la final.

	INICIAL	CAMBIO	FINAL	CRECER	DECRECER
CAMBIO1	d	d	i	*	
CAMBIO2	d	d	i		*
CAMBIO3	d	i	d	*	
CAMBIO4	d	i	d		*
CAMBIO5	i	d	d	*	
CAMBIO6	i	d	d		*

Ejemplos:

Problema Cambio1. Paola tenía 5 canicas. Le dan 6. ¿Cuántas tiene ahora?
Problema Cambio2. Paola tiene 5 canicas. Da 3. ¿Cuántas le quedan?
Problema Cambio3. Paola tenía 5 canicas. Luis le dio algunas. Ahora tiene 8. ¿Cuántas le dio Luis?
Problema Cambio4. Paola tenía 5 canicas. Dio algunas a Luis. Ahora tiene 2. ¿Cuántas dio a Luis?
Problema Cambio5. Paola tenía algunas canicas. Luis le dio 4. Ahora tiene 9. ¿Cuántas tenía?
Problema Cambio6. Paola tenía algunas canicas. Dio 2 a Luis. Ahora tiene 3. ¿Cuántas tenía?

- **Combinar:** Presenta problemas en los que se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte-parte-todo. La pregunta del problema puede tratar acerca del todo o acerca de una de las partes, con lo que hay dos tipos posibles de problemas de combinar.

	PARTE	PARTE	TODO
COMBINAR1	d	d	i
COMBINAR2	d	i	d

Ejemplos:

Problema Combinar1. Hay 3 mesas. Hay 5 sillas. ¿Cuántos muebles hay?
Problema Combinar2. Hay 3 mesas. Hay 8 muebles. ¿Cuántas sillas hay?

- **Comparar:** Son problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades. Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidad de

referencia, cantidad comparada y diferencia. La cantidad comparada aparece a la izquierda de la expresión “más que” o “menos que”, y la cantidad de referencia a su derecha.

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MÁS	MENOS
COMPARAR1	d	d	i	*	
COMPARAR2	d	d	i		*
COMPARAR3	d	i	d	*	
COMPARAR4	d	i	d		*
COMPARAR5	i	d	d	*	
COMPARAR6	i	d	d		*

Ejemplos:

Problema Comparar1. Marcos tiene 3 camisetas. Laura tiene 5. ¿Cuántas camisetas tiene Laura más que Marcos?
Problema Comparar2. Marcos tiene 5 camisetas. Laura tiene 3 camisetas. ¿Cuántas camisetas tiene Laura menos que Marcos?
Problema Comparar3. Marcos tiene 3 camisetas. Laura tiene 2 más que Marcos. ¿Cuántas camisetas tiene Laura?
Problema Comparar4. Marcos tiene 5 camisetas. Laura tiene 3 menos que Marcos. ¿Cuántas camisetas tiene Laura?
Problema Comparar5. Laura tiene 5 camisetas. Laura tiene 2 más que Marcos. ¿Cuántas camisetas tiene Marcos?
Problema Comparar6. Laura tiene 3 camisetas. Laura tiene 2 menos que Marcos. ¿Cuántas camisetas tiene Marcos?

- **Igualación:** Estos problemas se caracterizan debido a que hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen establecidas por medio del comparativo de igualdad “tantos como”.

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MÁS	MENOS
IGUALAR1	d	d	i	*	
IGUALAR2	d	d	i		*
IGUALAR3	d	i	d	*	
IGUALAR4	d	i	d		*
IGUALAR5	i	d	d	*	
IGUALAR6	i	d	d		*

Ejemplos:

Problema Igualar1. María tiene 6 dados. Pablo tiene 3. ¿Cuántos dados tiene que ganar Pablo para tener tantos como María?
Problema Igualar2. María tiene 6 dados. Pablo tiene 8. ¿Cuántos dados tiene que perder Pablo para tener tantos como María?
Problema Igualar3. María tiene 6 dados. Si Pablo gana 2, tendrá tantos como María. ¿Cuántos dados tiene Pablo?
Problema Igualar4. María tiene 6 dados. Si Pablo pierde 2, tendrá tantos como María. ¿Cuántos dados tiene Pablo?
Problema Igualar5. Pablo tiene 4 dados. Si Pablo gana 2, tendrá tantos como María. ¿Cuántos dados tiene María?
Problema Igualar6. Pablo tiene 8 dados. Si Pablo pierde 3, tendrá tantos como María. ¿Cuántos dados tiene María?

Tras la clasificación semántica mostrada anteriormente de los problemas, mediante el análisis del enunciado de estos, con problemas propuestos de una etapa para facilitar la comprensión de dicho análisis, a continuación, se podrá observar una nueva clasificación, esta vez referida a la realización del esquema de los enunciados dependiendo de las operaciones que se deben realizar para la resolución del problema, y generalmente centrado en los problemas de dos etapas.

Como muestra el estudio de Nesher y HersHKovitz (1994), en los últimos años, los estudios encaminados a trabajar con los problemas matemáticos llegaron a la conclusión de que, la realización de dichos problemas es un proceso multidimensional. Ello conlleva analizar la “base de texto”, es decir, la elaboración de la estructura verbal del problema, y tener en cuenta el “modelo de situación” lo cual hace referencia a la representación descrita en el texto.

Para poder unir estas dimensiones, el uso de un esquema constituye una herramienta facilitadora para relacionar los aspectos semánticos del texto y su estructura matemática.

El proceso para llegar a la representación esquemática no se realiza en una sola dirección desde el nivel lingüístico hasta la estructura matemática, sino que se trata de un proceso continuo, interactivo y paralelo. Para ello la persona que realiza el problema interactúa con todos los niveles de interpretación. La ventaja de describir este tipo de problemas mediante esquemas es que, ante un problema confuso, para la persona que lo realiza, este puede solucionarlo mediante esquemas ya establecidos. Por ello es importante que dicha persona esté familiarizada con los posibles esquemas para un cierto dominio.

Estos esquemas pueden estar relacionados con problemas de enunciados aditivos o multiplicativos. Estos son numerosos cuando los problemas son de una etapa, y son escasos conforme los problemas son más complejos, como por ejemplo puede suceder con los problemas de dos etapas.

Sobre los problemas de enunciados aditivos de una etapa, como hemos visto anteriormente, se encontraron varios tipos tales como: el esquema “cambio”, el esquema “parte-todo” o “combinar”, o el esquema “comparar”. De manera similar, se formularon esquemas para los problemas con enunciados multiplicativos.

Todo ello ayuda a la solución de problemas de una etapa, pero resulta de mayor interés descubrir posibles esquemas para problemas de niveles superiores, como puede suceder con

los problemas de dos etapas. Además, nos permitirá comprobar los procesos cognitivos involucrados en la interpretación y resolución de estos problemas.

Los problemas de dos etapas son combinaciones de las estructuras aditivas y las multiplicativas. En ellos también se incluyen variables adicionales relacionadas con la naturaleza del enunciado, dependiendo de que se trate de una cantidad “extensiva” o “intensiva”. Las cantidades “extensivas” se miden o cuentan directamente, por ejemplo: metros, segundos, etc. Mientras que las cantidades “intensivas” se describen por una relación entre dos cantidades extensivas como, por ejemplo: kilómetros por hora, niños por clase, etc.

Otros de los términos que se emplean en estos tipos de problemas son: “componente”, “esquema” y “esquema compuesto”. Para poder entenderlo de forma más fácil, lo mostramos en un problema de una etapa:

Problema 1: Hay 16 chicos y 20 chicas en el grupo. ¿Cuántos chicos/as hay en total en el grupo?

En este problema de una etapa (una operación para llegar a la solución), el enunciado contiene tres componentes, dos de los cuales transmiten las cantidades (componentes completos) y uno que es la incógnita (componente incompleto), en el que falta la información numérica.

Cada componente tiene dos partes básicas: el número y la descripción de los objetos cuantificados. Por ejemplo: en el primer componente, el número es 16 y la descripción es “chicos en el grupo”. Mientras que en el tercer componente no sabemos el número, pero si la descripción del objeto “chicos/as en total el grupo”.

Toda esta información se podría interpretar como un esquema que consta de tres componentes relacionados. A cada componente se le puede asignar un rol en la relación, por ejemplo, el componente “16 chicos en el grupo”, y el componente “20 chicas en el grupo”, representarían los subconjuntos, mientras que el componente “¿Cuántos chicos/as en total hay en el grupo?” representa la unión de estos dos subconjuntos.

Hablamos de una relación aditiva en lugar de operaciones de suma o resta puesto que, esta situación (36 chicos/as en un grupo compuesto por 16 chicos y 20 chicas) puede producir problemas diferentes dependiendo de cuál sea la incógnita, es decir, si preguntan por los chicos, por las chicas, o por los chicos y chicas como conjunto, e incluso no importa si se resuelve por sustracción (resta) o adición (suma).

El término “esquema compuesto” significa una composición de dos o más esquemas elementales. Esta composición se muestra de forma más aclarativa cuando analizamos los problemas de dos etapas.

Un problema de dos etapas requiere dos operaciones para llegar a la solución numérica del problema. Por ejemplo:

Problema 2: Un total de 36 niños se distribuyen equitativamente entre 6 clases. En cada clase hay 3 rubios y el resto son morenos. ¿Cuántos niños morenos hay en cada clase?

Los componentes de este problema son:

1. Un total de 36 niños se distribuye por igual entre clases. (Complemento completo)
2. Hay 6 clases. (Componente completo)
3. Hay 3 rubios en cada clase. (Componente completo)
4. ¿Cuántos niños morenos hay en cada clase? (Componente incompleto)

Como hemos visto anteriormente esperaríamos encontrar en estos problemas una composición de dos esquemas y, por lo tanto, seis componentes. Pero hasta ahora solo hemos identificado tres números y cuatro descriptores.

Para identificar el resto de información debemos fijarnos en el componente adicional que se deduce del texto. En este problema el componente adicional sería “¿Cuántos niños hay

en cada clase?”. Este aparece dos veces, con un rol diferente en cada esquema. Teniendo en cuenta esto, los componentes del problema 2 serían:

1. Hay 36 niños en total. (multiplicativo)
2. Hay 6 clases. (relación)
3. ¿Cuántos niños hay en cada clase? (adicional)
4. Hay [?] niños en cada clase. (adicional) (aditivo)
5. En cada clase hay 3 niños rubios. (relación)
6. ¿Cuántos niños morenos hay en cada clase?

El descubrimiento del componente adicional permitirá el análisis de los problemas de dos etapas, y la categorización en diferentes tipos de problemas, una de acuerdo con las operaciones y otra de acuerdo con los esquemas.

Si comenzamos la categorización por los problemas de dos etapas de acuerdo con las operaciones, debemos tener en cuenta que estas operaciones se encuentran como un factor importante en la predicción de los niveles de dificultad de los problemas planteados. Si tenemos en cuenta los problemas con dos operaciones, y consideramos todas las combinaciones posibles de las cuatro operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división), llegamos a tener 16 tipos distintos de problemas. Además, llegaremos a una mayor cantidad de problemas cuando se tratan de operaciones no conmutativas puesto que, no es lo mismo $a:(b+c)$; $a: b + c$; y $(a+b):c$.

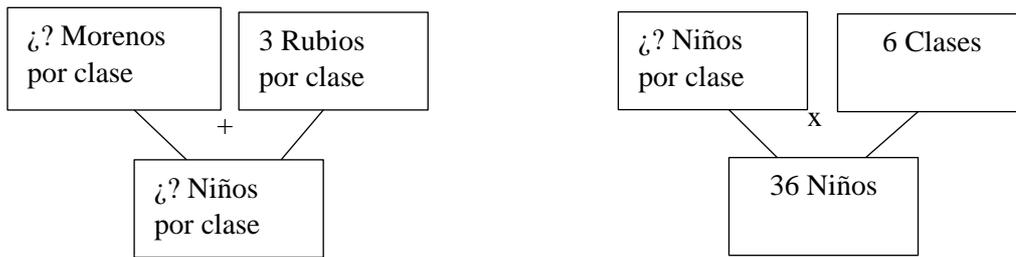
Sin embargo, este tipo de categorización no explica completamente la dificultad de ciertos problemas puesto que, para una misma operación, pueden existir problemas fáciles y difíciles, dependiendo de las variables adicionales.

Si pasamos a realizar la categorización por esquemas, debemos tener en cuenta que el análisis básico de un esquema es una relación de 3 lugares, y no una operación. Por lo tanto,

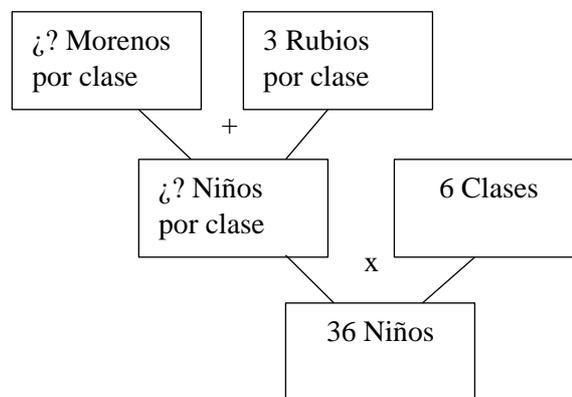
estos tienen solo dos bloques de construcción, los esquemas aditivos y multiplicativos, cuya composición dará lugar a problemas de dos etapas.

Un ejemplo de esquema en problemas de dos etapas, como puede ser el problema 2 visto anteriormente, podría ser:

1. Composición de dos esquemas, aditivo y multiplicativo.



2. Para la solución del problema se deberán realizar los dos esquemas, convirtiéndose la suma del esquema aditivo en uno de los factores del esquema multiplicativo.

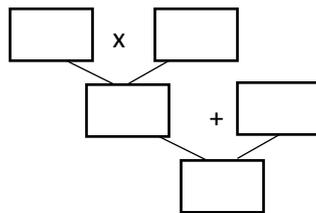


Existen tres formas de conectar los esquemas simples. Podemos encontrar ejemplos conectando un esquema aditivo y uno multiplicativo, aunque también es posible combinar dos aditivos, al igual que dos esquemas multiplicativos. Sin embargo, en este trabajo nos centraremos en ejemplos con esquemas compuestos de aditivos y multiplicativos.

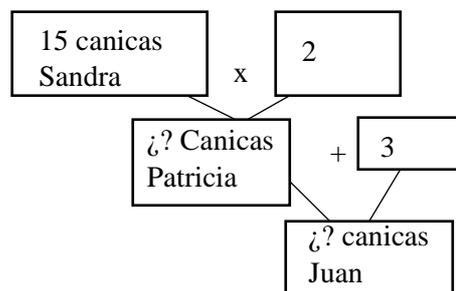
El esquema aditivo consta de tres componentes: el todo y sus dos partes. Mientras tanto los multiplicativos consisten en: el producto (igual al todo) y sus dos factores (igual a las partes).

Los esquemas de combinación que existen son los siguientes:

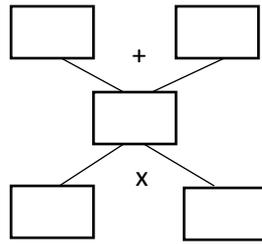
- Esquema Jerárquico: el conjunto de un esquema se convierte en parte del otro esquema, es decir, la suma (total) del esquema aditivo se convierte en un factor en el esquema multiplicativo. También podemos encontrar problemas con el mismo esquema compuesto en el que, el producto del esquema multiplicativo se convierte en uno de los sumandos (las partes) en el esquema aditivo.



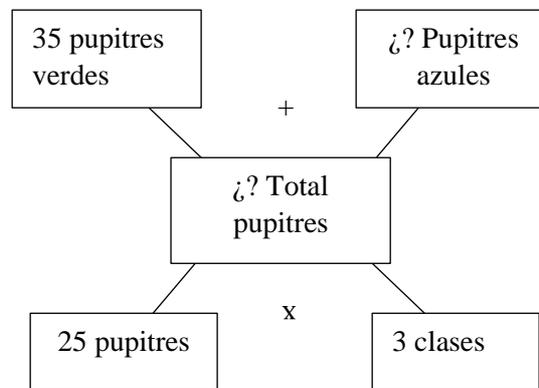
Ejemplo: Sandra, Patricia y Juan, tienen cada uno un saco de canicas. Sandra tiene 15 canicas en su bolsa y Patricia tiene el doble de canicas que Sandra. Si Juan tiene 3 canicas más que Patricia, ¿Cuántas canicas tiene Juan en total?



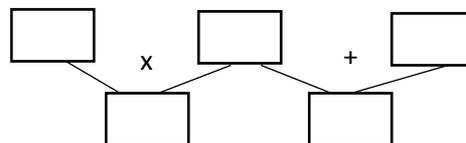
- Esquema Compartir Todo: los dos esquemas comparten un todo. En ellos el conjunto o el producto de un esquema es el producto (o suma) del otro esquema.



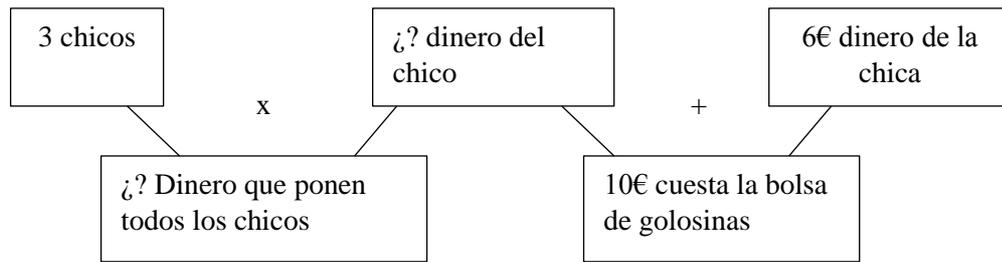
Ejemplo: En un colegio hay 3 clases con 25 pupitres verdes y azules en cada clase. Si en total hay 35 pupitres verdes, ¿Cuántos pupitres azules hay?



- Esquema Compartir Parte: los dos esquemas comparten una parte. En estos una parte (o factor) de un esquema es también un factor (o parte) del otro esquema.



Ejemplo: Una pareja, chico y chica, quieren comprar en la tienda una bolsa de golosinas entre los dos. La bolsa de golosinas cuenta 10€, de los cuales la chica pone 6€. Si 3 parejas más compran una bolsa de golosinas cada uno, ¿Cuánto dinero pondrán todos los chicos?



Esta última clasificación de los problemas aritméticos es la que se utilizará para analizar qué tipo de problemas les resultan más difíciles a los alumnos. Teniendo en cuenta que se tratan de problemas aritméticos de dos etapas, este estudio se llevará a cabo en cursos pertenecientes al segundo ciclo de la Educación Primaria. Con los resultados obtenidos se podrá analizar si los alumnos consiguen realizar adecuadamente, mediante las operaciones pertinentes, los esquemas que se deben plantear en cada uno de los problemas aritméticos que se les presentan.

5. Metodología.

- Participantes:

Este estudio se ha llevado a cabo con la participación de 43 alumnos pertenecientes a un colegio de Sevilla. Dichos alumnos rondan entre los 9 y 10 años de edad, y se encuentran cursando cuarto de Educación Primaria. De todos ellos, 21 pertenecen al curso de 4º A y los 22 alumnos restantes pertenecen al curso de 4º B.

- Instrumento de recogida de datos:

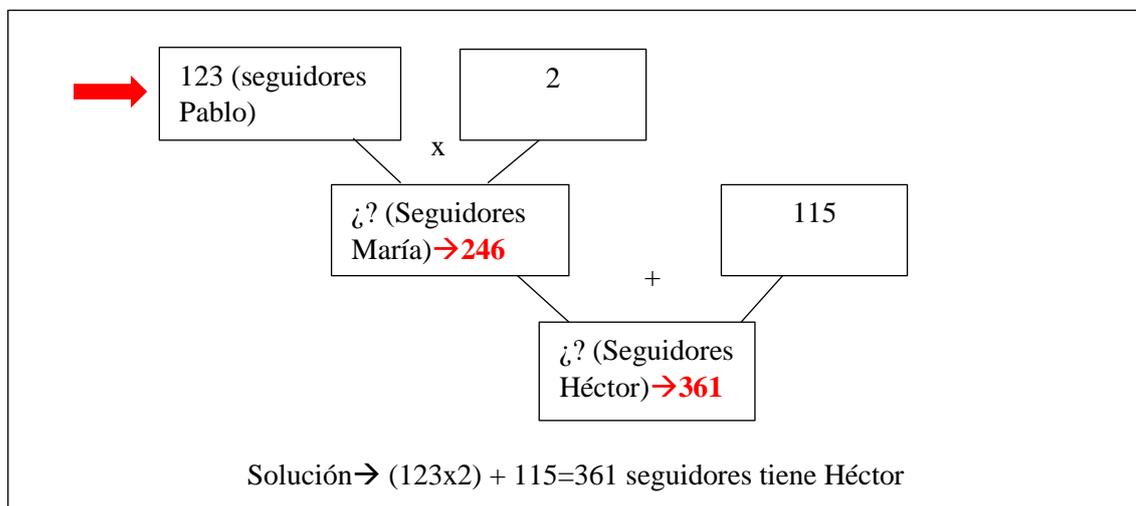
En la recogida de datos de dicho estudio, se ha utilizado como instrumento un cuestionario de problemas aritméticos de dos etapas.

El cuestionario consta de seis problemas aritméticos de dos etapas, los cuales son:

1. María, Pablo y Héctor, tienen cada uno una cuenta de Instagram. Pablo tiene 123 seguidores en su cuenta y María tiene el doble de seguidores que Pablo. Si Héctor tiene 115 seguidores más que María, ¿Cuántos seguidores tiene Héctor en total?
2. Carlos, Julia y Silvia tienen el juego Pokémon GO. Carlos ha conseguido capturar 316 pokémons en total, y Silvia ha capturado 138 menos que él. Si Julia ha conseguido capturar la mitad que Silvia, ¿Cuántos pokémons ha capturado Julia?
3. En un pueblo se han contratado 9 autobuses de 35 plazas para ir a ver el Derbi Betis-Sevilla. Si de todas las personas que van hay 163 béticos, ¿Cuántos Sevillistas hay?
4. Carmen y Javier quieren comprar entre los dos, unos regalos a sus 3 hermanos pequeños para celebrar sus comuniones. Carmen pone 233€ y Javier pone 268€. Quieren gastar la misma cantidad de dinero para cada hermano. ¿Cuánto pueden gastar en cada uno de ellos?

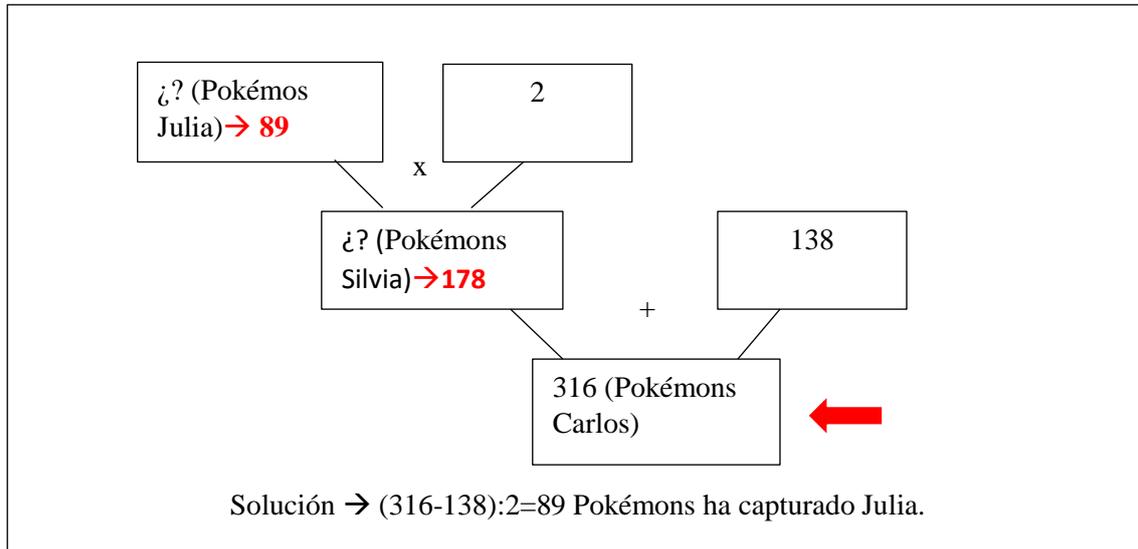
5. Una pareja, chico y chica, van a realizar un viaje a Disneyland. El viaje cuesta por pareja 242€, de los cuales 165€ los ha puesto el chico. Si el viaje lo realizan 6 parejas, ¿Cuánto dinero pondrán todas las chicas?
6. Para celebrar la fiesta del Día de Andalucía en un colegio, han venido 425 alumnos, de los cuales 235 son chicos. Entre las chicas, se han repartido por igual, 570 lazos para el pelo con la bandera de Andalucía. ¿Cuántos lazos se le entregó a cada niña?

Los Problemas 1 y 2 son problemas Jerárquicos, pero entre ellos reside algunas diferencias. El Problema 1 es un problema Jerárquico directo puesto que, para poder resolverlo, hay que seguir el orden de su esquema compuesto, es decir, se comenzaría realizando las operaciones del esquema multiplicativo para posteriormente terminar resolviendo el esquema aditivo. Posteriormente, con la correcta realización del esquema compuesto y sus operaciones se obtendría la solución del problema. Esto se puede ver en la siguiente figura que muestra el esquema del Problema 1.



El Problema 2 es un problema Jerárquico Inverso, es decir, para poder resolverlo se debe comenzar por su esquema aditivo, para posteriormente resolver el esquema multiplicativo.

Con la realización de dicho esquema compuesto y sus operaciones se obtendría la solución del problema. Esto se muestra en la siguiente figura que muestra el esquema del Problema 2.

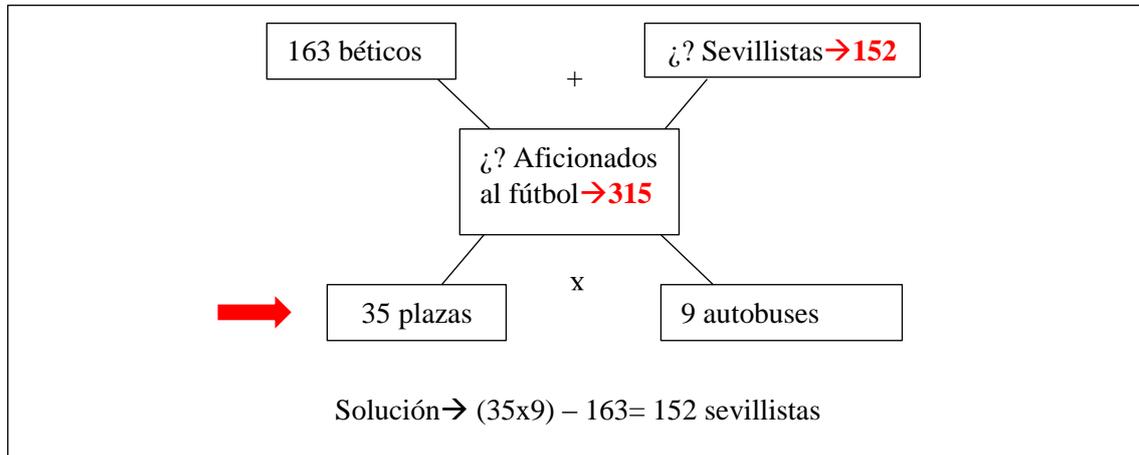


Como se muestra anteriormente, los problemas Jerárquicos de este cuestionario son de dos tipos: Problema Jerárquico Directo, y Problema Jerárquico Inverso. Con estos problemas se podrá observar que tipo de problema Jerárquico resulta más fácil a los alumnos de 4° de primaria.

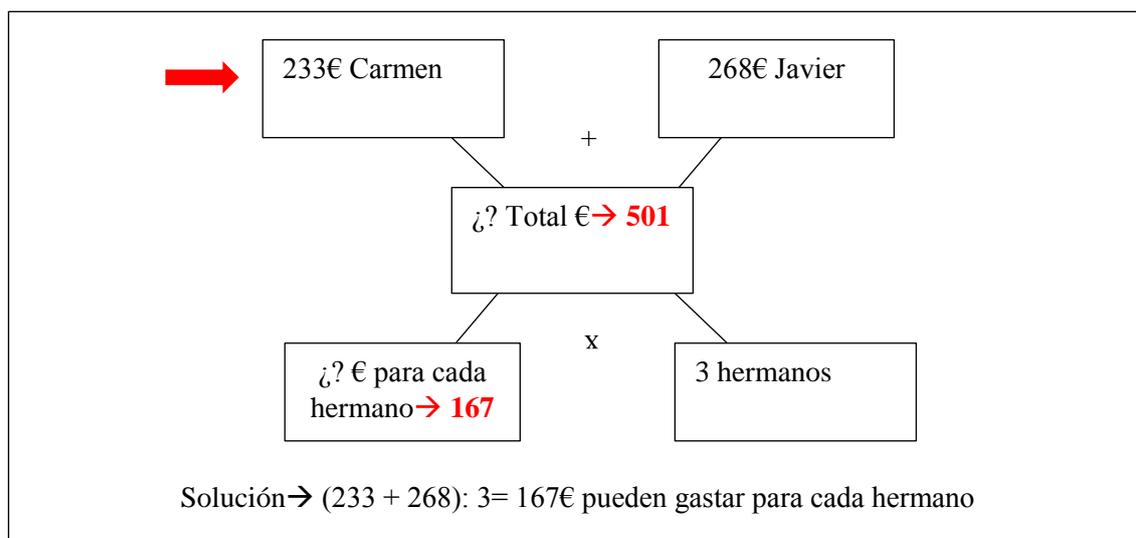
Los Problemas 3 y 4 son problemas de Compartir Todo. En dichos problemas no existen varios tipos que diferencien unos problemas de otros, como sucede en el caso de los problemas Jerárquico. Sin embargo, en este cuestionario se han propuesto dos problemas de compartir todo, para evitar el acierto por probabilidad de estos en el caso de que solo se hubiera propuesto un problema.

A pesar de su similitud, los problemas planteados se distinguen por las operaciones que hay que realizar para llegar a obtener la solución.

En el problema 3 se comienza por el esquema multiplicativo de su esquema compuesto, hasta llegar al todo, para posteriormente, mediante el esquema aditivo, poder obtener una de las partes de dicho problema. Esto se muestra en la siguiente figura sobre el esquema del Problema 3.



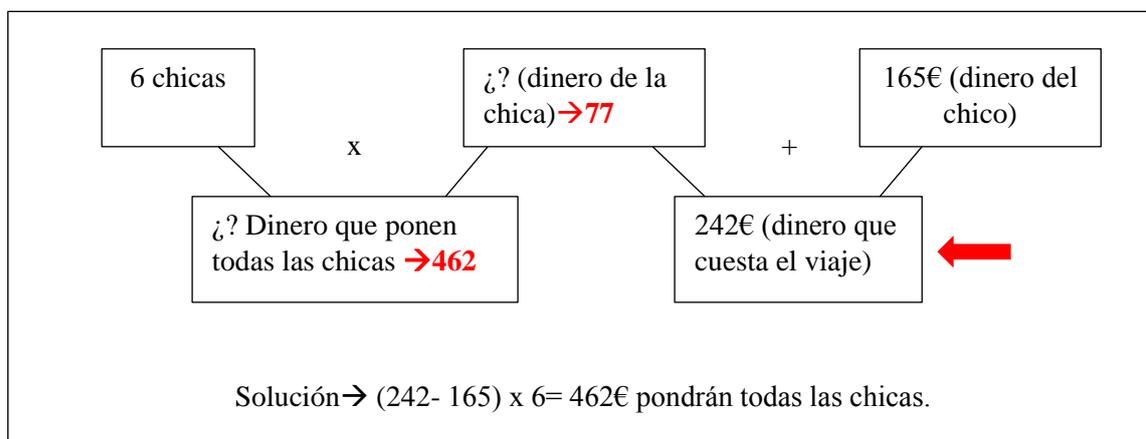
A diferencia del Problema 3, en el Problema 4 se comienza por el esquema aditivo para poder obtener el todo. Posteriormente, mediante el esquema multiplicativo se intenta obtener uno de los factores de dicho esquema. Esto lo podemos observar en la siguiente imagen sobre el esquema del Problema 4.



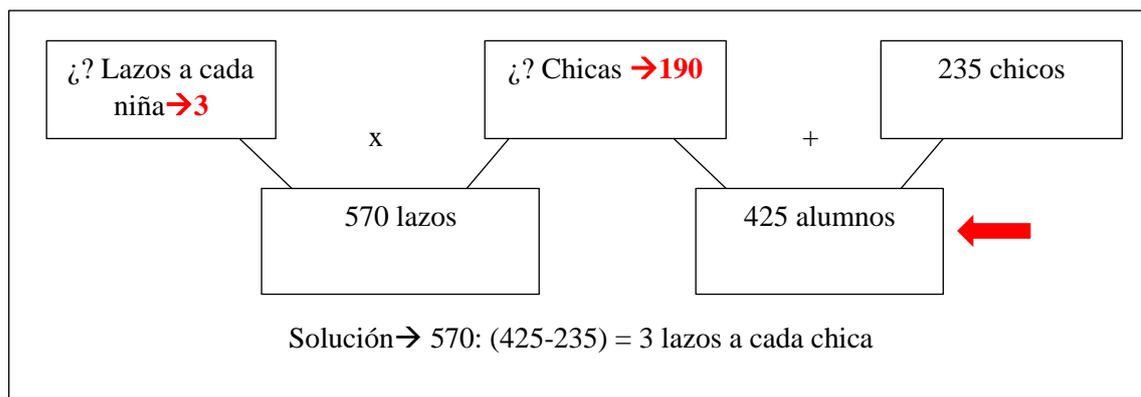
Con estos se podrá observar qué problemas de Compartir Todo resultan ser más difíciles para los alumnos, los problemas que comienzan o terminan por su esquema aditivo, o los problemas que comienzan o terminan por su esquema multiplicativo.

Por último, los problemas 5 y 6 son problemas de Compartir Parte. Estos problemas no tienen una diferenciación de tipos dentro de ellos, por lo que, al igual que con los problemas de Compartir Todo, los hemos diferenciado por las operaciones que se deben realizar para resolverlos.

Para poder resolver el Problema 5 se debe comenzar, dentro del esquema compuesto de este, por el esquema aditivo. La solución de este nos llevará a realizar el esquema multiplicativo para poder obtener la solución final del problema. Esto se muestra en la siguiente figura donde se observa el esquema del Problema 5.



En el Problema 6, sucede lo mismo que en el Problema 5, se comienza por el esquema aditivo de este para, posteriormente, pasar al esquema multiplicativo y obtener la solución final del problema. Se puede observar en la siguiente imagen sobre el esquema compuesto del Problema 6.



El Problema 6 se realiza con la misma consecución de esquemas que el Problema 5, la diferencia reside en el hecho de que, en el Problema 5, para poder resolverlo correctamente, en el esquema multiplicativo hay que realizar una multiplicación, puesto que, lo que se pretende obtener y por lo que pregunta el problema, es por el producto de dicho esquema. A diferencia de esto, para poder resolver el Problema 6, también se debe resolver el esquema multiplicativo de este, pero para ello se debe realizar una división, puesto que el problema nos pregunta por uno de los factores de dicho esquema y no por el producto como sucede en el Problema 5.

Estos últimos problemas se compararán en base al tipo de operación que hay que realizar para resolver el esquema multiplicativo, por lo que podremos saber qué problema genera mayor dificultad a los alumnos.

Se debe señalar que todos los problemas anteriormente mostrados, han sido diseñados en base a los gustos y preferencias generales de los niños/as del tramo de edad establecido, para que la realización de dichos cuestionarios no resultara de gran dificultad y se produjera cierta motivación e interés.

Finalmente, para su presentación, los problemas se situaron en casillas donde se dejaron tres huecos en blanco: uno para que los alumnos escribieran los datos del problema, otro para que realizaran las operaciones oportunas y por último, otro donde deberían escribir la solución final del problema.

A continuación, se muestra uno de los problemas como ejemplo:

1º PROBLEMA: María, Pablo y Héctor, tienen cada uno una cuenta de Instagram. Pablo tiene 123 seguidores en su cuenta y María tiene el doble de seguidores que Pablo. Si Héctor tiene 115 seguidores más que María, ¿Cuántos seguidores tiene Héctor en total?

DATOS:

RESUELVE:

SOLUCIÓN:

- Procedimiento de análisis:

Antes de mostrar los resultados obtenidos se debe tener en cuenta que, en el análisis de los cuestionarios, cuando se habla de respuestas correctas no hace referencia a que las soluciones de las operaciones para resolver los problemas estén bien realizadas, sino que se ha dado por respuesta válida, aquellos problemas en los que los alumnos, han escrito las operaciones correctas en relación con lo que este pedía, y el orden en el que estas se debían realizar. Esto nos mostrará si los alumnos entienden el problema y saben qué operaciones deben realizar para obtener la solución, puesto que es uno de los principales objetivos de este análisis.

$$\begin{array}{r} 376 \\ - 138 \\ \hline 238 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 12 \\ \hline 34 \\ 170 \\ \hline 204 \end{array}$$

La imagen mostrada es un ejemplo de la explicación anteriormente dada. Estas operaciones las ha realizado uno de los alumnos para llegar a la solución del Problema 2, y como podemos ver, la solución de las operaciones no serían correctas ya que se ha cometido

un error en la resta, el cual perjudica también al resultado de la división. Sin embargo, la respuesta se ha dado como correcta puesto que, el alumno ha elegido bien las operaciones que debe realizar y el orden en el que las debe hacer.

6. Resultados obtenidos.

Tras el proceso de análisis de los cuestionarios, teniendo en cuenta el criterio anteriormente mencionado, se ha obtenido los siguientes resultados mostrados en la tabla de los 43 alumnos que han participado:

Problemas	Nº de alumnos con respuestas correctas	Porcentajes %
Problema 1	38	88%
Problema 2	31	72%
Problema 3	37	86%
Problema 4	30	70%
Problema 5	18	42%
Problema 6	7	16%

En la siguiente tabla se muestra los resultados obtenidos según el tipo de problema realizado. Estos porcentajes se han obtenido realizando la media aritmética entre los problemas con el mismo tipo de esquema compuesto, pudiéndolos así representar como un todo.

Problemas	Porcentajes % de alumnos con respuestas correctas
Problemas Jerárquicos	80%
Problemas Compartir Todo	78%
Problemas Compartir Parte	29%

Como se puede observar existen numerosas diferencias, tanto entre los problemas con el mismo esquema compuesto, como entre los problemas con diferente esquema compuesto.

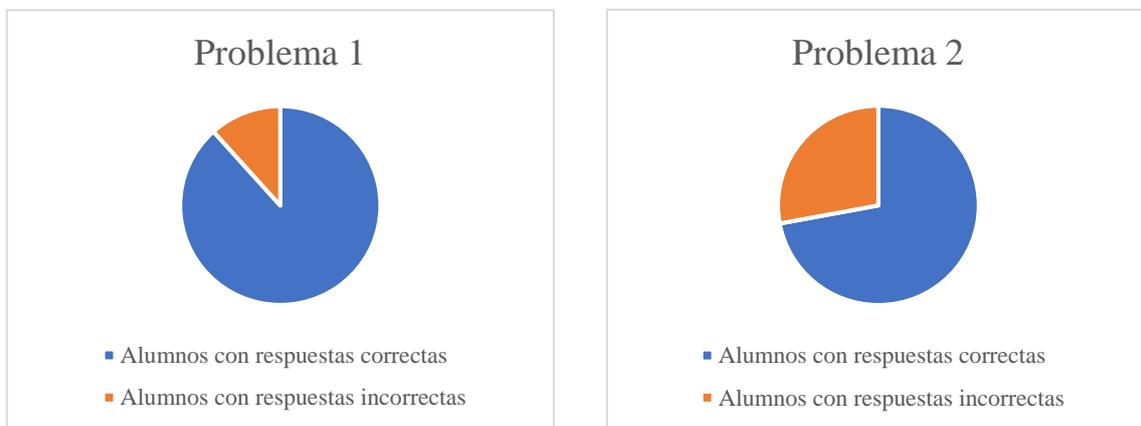
Para poder verlo detalladamente, se comenzará realizando un análisis centrado en cada tipo de problema para posteriormente, realizar un análisis global de todos.

En los problemas Jerárquicos, es decir, problemas 1 y 2:

1. María, Pablo y Héctor, tienen cada uno una cuenta de Instagram. Pablo tiene 123 seguidores en su cuenta y María tiene el doble de seguidores que Pablo. Si Héctor tiene 115 seguidores más que María, ¿Cuántos seguidores tiene Héctor en total?

2. Carlos, Julia y Silvia tienen el juego Pokémon GO. Carlos ha conseguido capturar 316 pokémons en total, y Silvia ha capturado 138 menos que él. Si Julia ha conseguido capturar la mitad que Silvia, ¿Cuántos pokémons ha capturado Julia?

Existen algunas diferencias en lo referente a las respuestas correctas que los alumnos han dado. El Problema 1 lo han realizado bien el 88% de todos los alumnos que han realizado los cuestionarios, mientras que el Problema 2 lo han realizado correctamente el 72%. La diferencia se puede observar en los diagramas obtenidos de dichas cantidades que se muestran a continuación:



Esto muestra que los problemas Jerárquicos propuestos, aun teniendo el mismo esquema compuesto, a los alumnos les resulta más fácil deducir qué operaciones deben realizar en un problema Jerárquico directo que en un problema Jerárquico inverso, puesto que muchos de los alumnos en el Problema 2 han llevado a cabo el esquema multiplicativo de forma directa, al igual que sucede en el Problema 1, y no a la inversa como se debe hacer. Por ello, muchos han realizado en el Problema 2 una multiplicación en lugar de una división.

En las siguientes imágenes se muestran dos ejemplos de alumnos diferentes que han realizado el Problema 2. En la primera imagen el alumno lo ha realizado correctamente deduciendo que debe realizar una división, sin embargo, en la segunda imagen el alumno ha

realizado una multiplicación puesto que no ha deducido que debía realizar el esquema multiplicativo de forma inversa.

RESUELVE: $316 - 138 = 178$ $178 : 2 = 89$

$$\begin{array}{r} 316 \\ -138 \\ \hline 178 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 178 \overline{) 178} \\ \underline{180} \\ 0 \end{array}$$

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 316 \\ -138 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 138 \\ \times 2 \\ \hline 276 \end{array}$$

A continuación, mostramos otros dos ejemplos diferentes, cada uno con dos imágenes:

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 2 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 245 \\ + 115 \\ \hline 360 \end{array}$$

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 316 \\ \times 3 \\ \hline 948 \end{array}$$

Este primer ejemplo muestra las operaciones realizadas por un alumno para resolver el Problema 1 (primera imagen) y el Problema 2 (segunda imagen). Como se puede ver, es un caso en el que lleva a cabo correctamente las operaciones correspondientes en el Problema 1 y en el orden en las que el problema lo establece, pero no sucede lo mismo en el Problema 2. Este es el caso más común de error que se presenta en los problemas Jerárquicos planteados en los cuestionarios.

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times 2 \\ \hline 230 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 230 \\ \times 2 \\ \hline 460 \end{array}$$

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 316 \\ -138 \\ \hline 178 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 178 \overline{) 178} \\ \underline{180} \\ 0 \end{array}$$

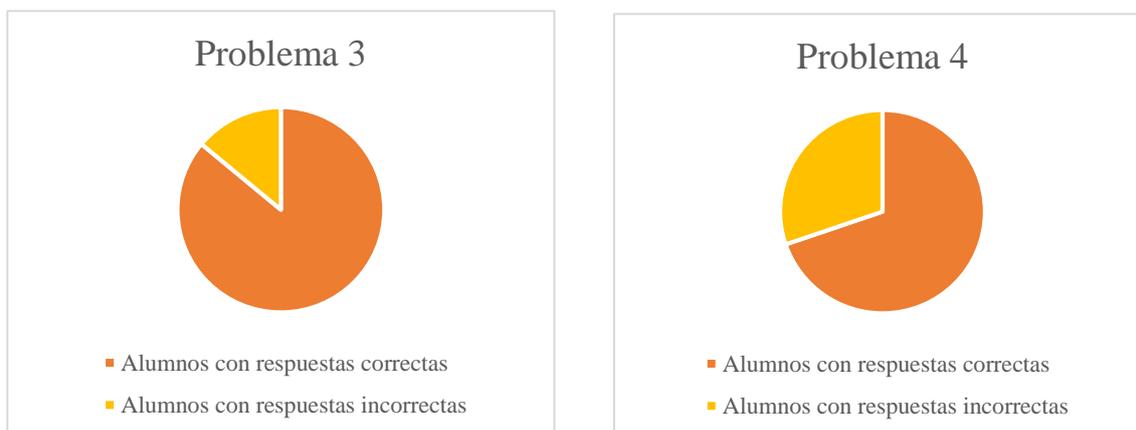
Este segundo ejemplo realizado por otro alumno, cuyas imágenes pertenecen al Problema 1 y 2, es una clara muestra de la situación contraria al ejemplo mostrado anteriormente. En este el alumno ha llevado a cabo correctamente las operaciones pertenecientes al Problema 2, pero no ha sucedido lo mismo en el Problema 1. Este es el caso

menos común que se presenta dentro de los errores de los problemas Jerárquicos, puesto que la división es lo que resulta más difícil de deducir a los alumnos.

En los problemas de Compartir Todo, es decir, problemas 3 y 4:

3. En un pueblo se han contratado 9 autobuses de 35 plazas para ir a ver el Derbi Betis-Sevilla. Si de todas las personas que van hay 163 béticos, ¿Cuántos Sevillistas hay?
4. Carmen y Javier quieren comprar entre los dos, unos regalos a sus 3 hermanos pequeños para celebrar sus comuniones. Carmen pone 233€ y Javier pone 268€. Quieren gastar la misma cantidad de dinero para cada hermano. ¿Cuánto pueden gastar en cada uno de ellos?

En estos también se muestran algunas diferencias, aun teniendo el mismo esquema compuesto. El Problema 3 los han realizado correctamente el 86% de todos los alumnos, mientras que el Problema 4 lo han realizado correctamente el 70%. En los siguientes diagramas se puede observar la diferencia entre ambos problemas.



En los problemas de Compartir Todo propuestos, se puede observar claramente como a los alumnos les resulta más fácil, cuando la solución del problema que deben calcular se trata de una de las partes del esquema aditivo, como sucede en el Problema 3. Cuando deben calcular uno de los factores del esquema multiplicativo, como sucede en el Problema 4, les resulta más difícil llegar a deducir que operaciones deben realizar para ello, puesto que, para llegar a la

solución deben realizar una división, en lugar de una multiplicación, para resolver ese esquema, y esto puede provocar confusiones.

En las imágenes siguientes se puede ver un claro ejemplo de uno de los alumnos, el cual ha realizado correctamente el problema 3, mostrado en la primera imagen, pero no ha realizado de forma correcta el Problema 4 mostrado en la segunda imagen. Este es el error más común que se presenta en los problemas de Compartir Todo.

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 9 \\ \hline 315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ - 163 \\ \hline 152 \end{array}$$

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 268€ \\ - 233€ \\ \hline 036 \end{array}$$

A continuación, se muestra otro ejemplo opuesto al anteriormente mostrado, en el que el alumno ha realizado correctamente el Problema 4, mostrado en la segunda imagen, pero no el Problema 3, mostrado en la primera imagen. Este es el error menos común dentro de esta tipología de problemas ya que, como se ha mostrado anteriormente, la división es lo que resulta más complejo de deducir para los alumnos.

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 136 \\ + 35 \\ \hline 171 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 171 \\ 81 \\ \hline 252 \end{array}$$

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 268 \\ + 233 \\ \hline 501 \end{array}$$

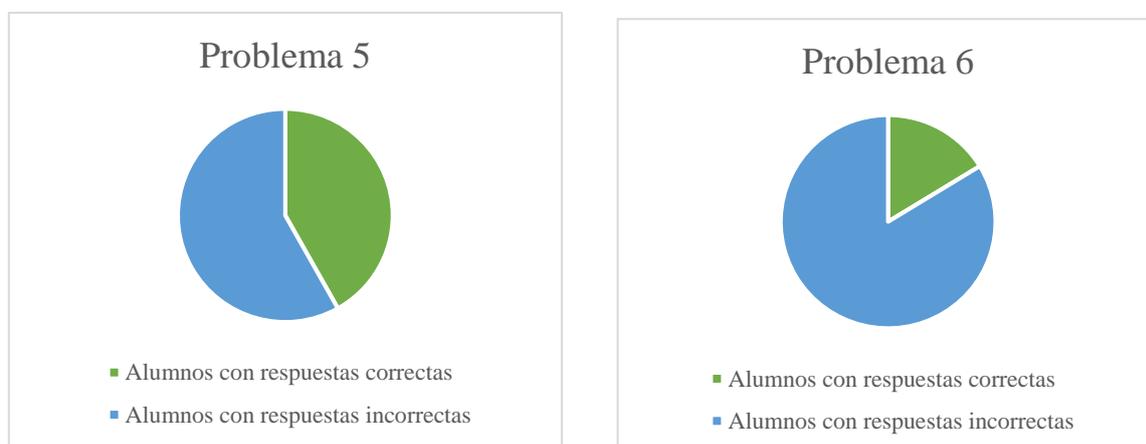
$$\begin{array}{r} 501 \\ 70 \\ 21 \\ \hline 571 \end{array}$$

En los problemas de Compartir Parte, es decir, los problemas 5 y 6:

- Una pareja, chico y chica, van a realizar un viaje a Disneyland. El viaje cuesta por pareja 242€, de los cuales 165€ los ha puesto el chico. Si el viaje lo realizan 6 parejas, ¿Cuánto dinero pondrán todas las chicas?

6. Para celebrar la fiesta del Día de Andalucía en un colegio, han venido 425 alumnos, de los cuales 235 son chicos. Entre las chicas, se han repartido por igual, 570 lazos para el pelo con la bandera de Andalucía. ¿Cuántos lazos se le entregó a cada niña?

En ellos se puede observar una mayor diferencia de alumnos que realizan correctamente uno u otro problema, a pesar de tener el mismo esquema compuesto. El problema 5 lo realizan correctamente el 42% de todos los alumnos que han realizado los cuestionarios, mientras que el Problema 6, solo el 16% lo han realizado correctamente. Esta diferencia se muestra en los diagramas siguientes de dichos problemas:



La diferencia mostrada reside, como se puede observar, en que, en estos tipos de problemas, resulta más fácil para los alumnos utilizar el esquema multiplicativo para llegar a calcular el producto de este, y resulta más difícil utilizarlo para poder calcular uno de los factores de dicho esquema. La diferencia que hay entre uno y otro es el hecho de que, para calcular el producto del esquema multiplicativo, como sucede en el Problema 5, se debe realizar una multiplicación, mientras que, como ocurre en el Problema 6, para calcular uno de los factores del esquema multiplicativo se debe realizar una división. Por este motivo a los alumnos les resulta más dificultoso deducir qué operaciones se deben realizar en el Problema 5, que en el Problema 6.

En las imágenes siguientes se muestra un ejemplo de un alumno que ha realizado correctamente el Problema 5, mostrado en la primera imagen, y no ha realizado correctamente el Problema 6 mostrado en la segunda imagen. Este es el error más común presentado en los problemas de Compartir Parte, ya que la división es lo que resulta de mayor dificultad para los alumnos.

RESUELVE: $242 - 165 = 77$

$$\begin{array}{r} 242 \\ -165 \\ \hline 077 \end{array}$$

$77 \times 6 = 462$

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 6 \\ \hline 462 \end{array}$$

RESUELVE: $425 - 235 = 190$

$$\begin{array}{r} 425 \\ -235 \\ \hline 190 \end{array}$$

A continuación, se muestra el ejemplo de otro alumno que ha realizado correctamente el Problema 6, mostrado en la segunda imagen, pero no el Problema 5, mostrado en la primera imagen. Este error es el menos común dentro de esta tipología de problemas, por el mismo motivo mencionado en el ejemplo anterior.

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times 6 \\ \hline 990 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ \times 6 \\ \hline 1452 \end{array}$$

RESUELVE:

$$\begin{array}{r} + 268 \\ + 233 \\ \hline 501 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 501 \overline{) 167} \\ \underline{70} \\ 21 \\ \underline{20} \\ 10 \end{array}$$

Finalmente, realizando un análisis global de los resultados obtenidos, podemos observar como los problemas Jerárquicos resultan ser los más fáciles de resolver para los alumnos, contando estos con un 80% de respuestas correctas.

En un nivel muy igualado, aunque un poco inferior a los problemas Jerárquicos, encontramos los problemas de Compartir Todo. Estos resultan ser un poco más difíciles que los problemas anteriores para los alumnos, aunque a pesar de ello, cuentan con un 78% de respuestas correctas.

Por último, encontramos los problemas de Compartir Parte que, con gran diferencia a los anteriores, resultan ser los problemas más difíciles de resolver para los alumnos. Como podemos observar, estos cuentan solamente con un 29% de respuestas correctas entre todos los alumnos que han realizado los cuestionarios, lo que muestra una gran diferencia con los anteriores tipos de problemas.

7. Conclusiones.

Con respecto al objetivo de esta investigación, que consiste en conocer el grado de dificultad que pueden presentar los problemas aritméticos de dos etapas en los alumnos, se han obtenido numerosos resultados de los cuestionarios realizados.

Los resultados obtenidos tras el análisis concreto de los problemas permiten realizar un análisis global en el que, por lo general, se observa que para los alumnos, los problemas que resultan ser menos dificultosos son los problemas Jerárquicos, con un porcentaje de respuestas correctas del 80%. Dentro de este tipo de problema podemos observar como destacan los problemas Jerárquicos directos. Estos se muestran con el valor más alto, un 88% de los alumnos han conseguido dar una respuesta correcta a este tipo de problemas.

En el lado opuesto se encuentran los problemas que resultan ser de más difíciles para los alumnos, estos son los problemas de Compartir Parte, los cuales tienen un porcentaje del 29% de respuestas correctas. Esto sucede en mayor medida, en los problemas en los que se debe realizar una división para poder solucionar el esquema multiplicativo que el enunciado presenta. Estos problemas presentan el valor más bajo, un 16% de los alumnos ha contestado correctamente a este tipo de problema.

En un nivel intermedio encontramos los problemas de Compartir Todo, los cuales tienen un porcentaje de respuestas correctas bastante elevado, del 78%. Dentro de estos, los problemas que resultan ser más difíciles para los alumnos son aquellos en los que hay que deducir que, para resolver el esquema multiplicativo de dicho problema, hay que realizar una división. Esto es lo que sucede en el Problema 4 que, como se puede observar, se encuentran menos respuestas correctas, llegando estas a un 70%. Sin embargo, el Problema 3 consta de bastantes respuestas correctas llegando estas a ser del 86%.

Tras esta investigación, por norma general, se observa que a los alumnos les resulta de gran facilidad resolver los esquemas aditivos. Sin embargo, les resulta más difícil aquellos problemas en los que se debe emplear la división para llegar a la solución en los esquemas multiplicativos, que si se debe realizar otro tipo de operación como la multiplicación. Esto sucede independientemente del esquema compuesto que esté formado el problema.

Por último, este estudio podría ampliarse si se llevara a cabo a un mayor número de participantes a los que realizar dichos cuestionarios, modificándolos y adaptándolos al nivel e intereses de los sujetos a participar. Además, se podría ampliar el número de problemas propuestos y el número de cifra de las operaciones, llegando a crear cuestionarios con diferentes niveles de dificultad. También podría llevarse a cabo estudios con diferentes problemas, en los que sus esquemas compuestos se inicien y acaben, para resolver el problema, de forma diferente a la mostrada anteriormente, o cuyos esquemas compuestos estén formados por dos esquemas del mismo tipo, ya sean aditivos o multiplicativos, con lo que se podría obtener una mayor variedad de resultados y datos recogidos.

8. Aprendizaje obtenido.

Al realizar este Trabajo de Fin de Grado he aprendido multitud de cosas, muchas de ellas me han servido para afianzar contenidos que ya conocía, y muchas otras para adquirir nuevos conceptos y contenidos.

Todo lo aprendido se muestra en los siguientes puntos:

- **Didáctica de las Matemáticas:**

La didáctica de las matemáticas es un ámbito que ya conocía antes de realizar este trabajo. Esta la vi por primera vez como asignatura en segundo curso del Grado y fue mucho lo que aprendí en este momento. Sin embargo, nunca imaginé que tendría la oportunidad de realizar mi trabajo con contenidos de dicha materia.

Todo el contenido de esta asignatura me ha sido de gran ayuda para poder realizar esta investigación, sobre todo para comenzar con una base sólida en este estudio. Pero, no solo esta asignatura es la que me ha aportado conocimientos, el hecho de realizar este trabajo con esta temática específica, ha provocado que me adentre mucho más en su contenido, aprendiendo nuevas cosas y afianzando enormemente lo ya aprendido.

El aprendizaje obtenido ha sido el siguiente:

1. Clasificación de los problemas aritméticos de una etapa.
2. Clasificación de los problemas aritméticos de dos etapas según su esquema compuesto: Jerárquico, Compartir Todo y Compartir Parte.
3. Diseño de problemas aritméticos de dos etapas.

Todo ello se muestra en la realización del presente trabajo de investigación.

- Trabajo de Investigación:

En este ámbito es donde más aspectos nuevos he aprendido puesto que, nunca había realizado un trabajo de investigación de esta medida.

En este trabajo he aprendido a investigar de forma profunda sobre temas concretos y a buscar información de forma rápida y fiable, siempre citando todo aquello que perteneciera a otros estudios y autores. También he aprendido a diseñar instrumentos de investigación apropiados al estudio que se realiza, creándolos de forma atractiva y motivante para los participantes a los que van dirigidos.

- En el ámbito personal:

En este ámbito he aprendido a organizar mejor mi tiempo y mi trabajo, para poder llevar a cabo aquello que me proponía.

También he aprendido que no se debe subestimar las capacidades de los alumnos, encasillándolos por su edad, no hay un alumno igual que otro, y por ello los conocimientos que tienen son en cierta medida diferentes, a pesar de tener la misma edad y pertenecer a un mismo grupo.

Además, he aprendido a valorar más mi capacidad de investigación, puesto que antes de comenzar este trabajo, pensaba que me resultaría mucho más difícil encontrar información y, sobre todo, realizar un correcto trabajo.

9. Referencias.

- Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., González, E., Morcillo, N. y Fernández, F. (1998). *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones*. (Seminario CIEM). Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Grupo de EGB de la APMA. (1987). Aritmética elemental para la resolución de problemas en el Tercer Ciclo de la EGB (Segunda parte). *Épsilon*, 6/7, 55-72.
- Jerman, M. (1974). Problem Length as a Structural Variable in Verbal Arithmetic Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 109-123.
- Jerman, M., Rees, R. (1972). Predicting the Relative Difficulty of Verbal Arithmetic Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 306-323.
- Jerman, M., Mirman, S. (1974). Linguistic and Computational Variables in Problem Solving in Elementary Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 317-362.
- Nesher, P. (1982). Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 251-270.
- Nesher, P., Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 1-23.
- Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 60, de 27 de marzo de 2015, pp. 9 a 618.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Editorial Síntesis.