

R. 10780026

Universidad de Sevilla
Facultad de Física

T.S.-234

**La medida en mecánica cuántica:
movimiento de partículas en campos
magnéticos inhomogéneos y estabilidad de
las trayectorias de Bohm**

Grégory Potel Aguilar

Memoria de Tesis
Presentada en la Facultad de Física
de la
Universidad de Sevilla
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas



i 20754048

Trabajo dirigido por los Profesores
Francisco Barranco Paulano
Joaquín Gómez Camacho

Sevilla, 4 de Marzo de 2005

T-S. 234

Universidad de Sevilla
Facultad de Física

141
394
9-3-05.
[Handwritten signature]

**La medida en mecánica cuántica:
movimiento de partículas en campos
magnéticos inhomogéneos y estabilidad de
las trayectorias de Bohm**

Grégory Potel Aguilar

[Handwritten signature]

Memoria de Tesis
Presentada en la Facultad de Física
de la
Universidad de Sevilla
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas

Directores:

Joaquín Gómez Camacho

[Handwritten signature]

Francisco Barranco Paulano

[Handwritten signature]

Agradecimientos

Desgraciadamente, debo reconocer que no me siento capaz de evitar que en esta página no estén todos los que son. Sí puedo asegurar que, desde luego, son todos los están.

Ha sido mucho el tiempo dedicado a este trabajo, y han sido tantas y tan diversas las deudas contraídas por el camino que se me antoja un tanto pretencioso abordar estas líneas con la idea de hacer un mínimo de justicia. Desde este convencimiento, creo que lo más razonable es ser breve.

Quiero agradecer muy especialmente a Carmen y a Patrick. No tiene mucho sentido que trate de enumerar los motivos.

Gracias, Olivia, mucha felicidad (me parece mejor así, en singular). Gracias, Mimi, por saber esperar a que llegara nuestro turno. Gracias Fabio, gracias Abuela, gracias, en fin, a toda mi familia, a todos mis amigos.

En este trayecto he contado con muchos guías. Debo agradecer a Martín Muñoz el haberme introducido a la fundamentación cuántica, y por darme bastante más que un impulso inicial. Su responsabilidad en la elaboración de esta Tesis va más allá de la colaboración científica. Muchas gracias a Adán Cabello, y a todos los miembros del Departamento de Física Aplicada. Siempre me ha gustado la enseñanza, y ha sido un placer tener la ocasión de iniciarme en esta tarea con vosotros.

Ha sido un verdadero privilegio (y una suerte verdadera) haber desarrollado este trabajo junto con Francisco Barranco y Joaquín Gómez Camacho. Sencillamente, no sabía que se podía saber tanta Física. Además de haber aprendido una barbaridad (lo cual es, cuando menos, útil), me ha permitido entrever la barbaridad que me queda por aprender (cosa que es, sin duda, muy estimulante). Gracias por la paciencia, por la ciencia y por la confianza depositada.

Quiero agradecer también a todos los miembros del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear por la acogida que se me ha dispensado. Muchas gracias a Sara Cruz Barrios, por haber colaborado activamente en la elaboración de este trabajo. Muchas gracias a Enrico Vigezzi, tanto por la colaboración científica como por confiar en mí.

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Medida de un sistema cuántico	3
1.1.1. Descripción de la medida	5
1.1.2. Decoherencia y selección del puntero	6
1.2. El Stern–Gerlach como paradigma de la medida	9
1.2.1. Primera aproximación al problema	9
1.2.2. El Stern–Gerlach como proceso de medida	11
1.2.3. Estados coherentes internos y trayectorias semiclásicas	14
1.2.4. Trayectorias semiclásicas en el Stern–Gerlach	17
1.3. El problema de la medida	22
1.3.1. Decoherencia	23
1.3.2. Interpretaciones alternativas	25
1.4. Mecánica Bohmiana	32
1.4.1. Formalismo matemático	33
1.5. La distribución inicial en la mecánica Bohmiana	39
1.5.1. El equilibrio cuántico de Dürr, Goldstein y Zanghì	39
1.5.2. Teorías estocásticas de onda piloto	43
2. Partícula en un campo magnético inhomogéneo	45
2.1. Cálculo numérico	49
2.2. Aproximaciones cuánticas analíticas	51
2.2.1. Desarrollo del operador de evolución	52
2.2.2. Aproximación adiabática	55
2.2.3. Aproximación pseudo-adiabática	56
2.2.4. Aproximación de Estados Coherentes	57
2.2.5. Aproximación simetrizada	59
2.3. Análisis comparativo de los resultados	60
2.3.1. Distribuciones de probabilidad	61
2.3.2. Spin-flip	68
2.3.3. Solapamientos con el cálculo exacto	74
2.4. Medida del espín	76

2.4.1.	Matriz M	76
2.4.2.	Tomografía de espín	84
2.5.	El Stern–Gerlach en la mecánica Bohmiana	87
2.5.1.	Análisis del doble paquete libre	88
2.5.2.	Trayectorias de Bohm en el imán	91
3.	Estabilidad de $\Psi ^2$ en la mecánica Bohmiana	101
3.1.	Sistemas cerrados	101
3.2.	Sistemas abiertos	103
3.2.1.	Función de onda de un sistema abierto	105
3.2.2.	Preparación de un estado cuántico	106
3.3.	Ruido aleatorio	108
3.3.1.	Demostración de Bohm	110
3.4.	El Teorema H de Valentini	113
3.5.	La distribución cuántica como distribución asintótica de equi- librio	116
4.	Resumen y conclusiones	127
A.	Efectos de borde	129
B.	Evolución libre	133
C.	Conservación de I_B	137
C.1.	Desarrollo de las exponenciales	138
C.2.	Desarrollo del integrando	140
C.3.	Aplicación al Stern–Gerlach	141

Índice de figuras

1.1. Campo magnético y fuerza clásica en un dispositivo de Stern–Gerlach	18
1.2. Trayectorias del doble paquete	36
2.1. Dispositivo experimental	46
2.2. Gaussiana inicial	64
2.3. Distribución de probabilidad final	64
2.4. Líneas de campo y fuerza clásica	65
2.5. Distribución de las amplitudes G_{mB}	69
2.6. Distribución momentos	70
2.7. Distribuciones a la salida del imán	71
2.8. Probabilidad de spin–flip	73
2.9. Solapamientos con el cálculo exacto	75
2.10. Contraste de la matriz M	81
2.11. Dirección de los estados coherentes internos	82
2.12. Asimetrías	83
2.13. Trayectorias de Bohm en el campo magnético	94
2.14. Trayectorias de Bohm y semiclásicas en el campo magnético	95
2.15. Correlación entre espín y posición inicial	96
2.16. Comparación del spin–flip con la aproximación semiclásica	97
2.17. Ampliación de la figura (2.13)	100
3.1. Evolución de la distribución de probabilidad	121
3.2. Distribución de probabilidad asintótica	122
3.3. Potencial cuántico	123
3.4. Trayectorias en el pozo cuadrado	123

Capítulo 1

Introducción

La Mecánica Cuántica, tras aproximadamente 100 años de existencia, puede sin duda alguna considerarse como una teoría plenamente consolidada. Es fácil oír hablar de ella tanto en los institutos de enseñanza secundaria como en las aulas de la Universidad. Es manejada con soltura por los científicos teóricos y experimentales de cualquier rama de la ciencia, los ingenieros, los filósofos . . . Sus predicciones teóricas se han visto confirmadas en los laboratorios con una precisión sin precedentes en la historia de la ciencia, y las aplicaciones tecnológicas basadas en fenómenos cuánticos inundan la vida diaria. Probablemente pueda afirmarse que se ha convertido, junto con las teorías especial y general de la relatividad, en el nuevo paradigma de la física, suplantando a la mecánica clásica de Newton. En otras palabras: el mundo, tal y como es concebido hoy por la inmensa mayoría de los científicos, es cuántico, y la mecánica de Newton es una teoría aplicable en ciertos casos límite. Desde luego, esta ruptura con el paradigma anterior no fue brusca, y la mecánica cuántica tuvo que andar su camino para ir calando en las mentes de los físicos de las primeras décadas del siglo XX. Un ejemplo ilustrativo de este proceso es precisamente el experimento de O.Stern y W.Gerlach realizado en 1922. Incluso algunos de los fundadores de la mecánica cuántica eran reacios a creer que la cuantificación de las propiedades de la materia (en este caso, del momento angular) pudiera manifestarse mediante un desplazamiento macroscópico de las posiciones de un haz de átomos. A Born, por ejemplo, le llevó cierto tiempo tomarse en serio la propuesta de Stern para realizar el experimento. Al principio, pensaba que la cuantificación era más bien una especie de expresión simbólica de algo todavía mal comprendido [16]. El propio Debye dijo: “No creerá en serio que la orientación espacial de los átomos es algo físicamente real; sólo es una especie de agenda para los electrones” [84]. Este hecho puede servir para ilustrar lo que ha sido una de las constantes en la historia del desarrollo de la mecánica cuántica desde su aparición: la tensión existente entre lo *físicamente real* (definido con más o menos rigor en términos de *resultados experimentales*) y el formalismo

matemático altamente abstracto en el que se expresa la teoría. Probablemente, nunca antes había sido tan problemático definir el isomorfismo entre teoría y fenómenos. Sin embargo, el resultado espectacular de experimentos como el Stern–Gerlach ha ido alimentando una confianza creciente en el poder predictivo de la Mecánica Cuántica, de forma que es habitual oír decir hoy en día que los físicos han adquirido una cierta “intuición cuántica”. Esta paulatina aceptación del nuevo paradigma ha permitido ir incorporando directamente a la categoría de lo *físicamente real* cada vez más objetos del formalismo matemático de la teoría. Ejemplos de ello son las posiciones macroscópicamente cuantificadas de un haz de átomos de plata (observadas, como ya se ha mencionado, en el experimento de Stern–Gerlach), la observación y manipulación de sistemas cuánticos individuales como átomos, iones y fotones (en contra de la sospecha de que, debido al contenido esencialmente estadístico de las predicciones de la Mecánica Cuántica, su objeto eran *colectividades* de sistemas cuánticos) o los estados entrelazados, protagonistas de la paradoja de Einstein–Podolsky–Rosen y de las desigualdades de Bell (verificadas en los experimentos de Aspect), y que ponen de relieve algunas de las características menos “clásicas” de la teoría. En definitiva, parece que el formalismo puede expresarse hasta sus últimas consecuencias sin temor a que no responda, permitiendo que todos los sistemas que acabamos de mencionar pasen incluso del laboratorio a la industria, siendo uno de los últimos y más llamativos ejemplos el campo de la computación y criptografía cuántica.

A pesar de todo ello, la Mecánica Cuántica tiene todavía grandes problemas a la hora de describir la relación antes mencionada entre el formalismo teórico y los resultados experimentales. Sin embargo, es evidente a partir de lo expuesto anteriormente que la Mecánica Cuántica *funciona*, es decir, dicha relación está bien establecida desde el punto de vista práctico. Es probable que este sea el motivo por el que muchos físicos no se preocupen por la existencia de esas lagunas teóricas, limitándose a utilizar una herramienta que ha demostrado con creces estar perfectamente engrasada. Para algunos se trata a lo sumo de un problema de interpretación metafísica del formalismo de la Mecánica Cuántica, y, como tal, es más de la competencia de los filósofos que de los físicos. Sin embargo, el problema existe, y, como hemos mencionado anteriormente, los nuevos avances permiten frecuentar un terreno cada vez más resbaladizo. Cabe preguntarse cuánto tiempo pasará antes de que el problema nos estalle en plena cara. Según Zurek [118]:

... given that, to date, most of the applications had nothing to do with the nature of quantum states, entanglement, and such, the attitude of avoiding the most flagrantly quantum aspects of quantum theory is easy to understand.

Yet, novel applications force one to consider questions about the information content, the nature of the quantum, and the

emergence of the classical much more directly, with a focus on states and correlations, rather than on the spectra, cross sections, and the expectation values. Hence problems that are usually bypassed will come to the fore.

Nuestra intención en esta tesis es la de indagar en estos problemas, tratando de arrojar alguna luz sobre la forma en la que extraemos información de un sistema cuántico a través de un experimento. Presentamos pues contribuciones concretas a la teoría cuántica de la medida.

Empezamos por abordar el estudio detallado de un problema cuántico paradigmático: una partícula neutra de espín $1/2$ en un campo magnético inhomogéneo. Como es bien sabido, el comportamiento de un sistema de estas características, observado por O. Stern y W. Gerlach en 1922, fue una de las primeras y más espectaculares evidencias experimentales que asentaron la por entonces joven teoría cuántica. Desde entonces se ha convertido en uno de los *experimentos cuánticos* más citados, utilizándose frecuentemente como ejemplo de *medida* cuántica sobre un sistema. A pesar de ello, no se ha ofrecido hasta la fecha una descripción cuántica detallada del proceso. Procuraremos pues colmar esta laguna, ofreciendo un estudio del experimento de Stern–Gerlach. Haremos especial hincapié en el análisis de la aparición de la correlación entre la magnitud física medida (el espín de la partícula) y el resultado del experimento (la posición de la partícula en una pantalla detectora).

Para describir la aparición de un resultado único en un experimento se han propuesto diferentes interpretaciones de la Mecánica Cuántica, entre las cuales se encuentra la mecánica Bohmiana, introducida por Louis de Broglie y desarrollada posteriormente por David Bohm. Completaremos pues el estudio iniciado con la aplicación de este formalismo al experimento de Stern–Gerlach, dando así por terminada la descripción explícita del proceso de medida del estado de polarización de una partícula neutra.

Seguidamente trataremos de contribuir al esclarecimiento de uno de los puntos más oscuros de la mecánica Bohmiana: el significado de la densidad cuántica de probabilidad $|\Psi|^2$. Empezaremos exponiendo las razones por las que algunas de las soluciones propuestas a este problema no nos parecen del todo convincentes, y expondremos a continuación nuestra propia aportación.

1.1. Medida de un sistema cuántico

Como es bien sabido, una de las diferencias fundamentales entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica radica en la caracterización de un estado físico en cada una de estas teorías. En Mecánica Clásica, un sistema está determinado por un punto (\mathbf{q}, \mathbf{p}) en el espacio de las fases (donde $\mathbf{q} \equiv q_1, \dots, q_N$ es el conjunto de coordenadas generalizadas y $\mathbf{p} \equiv p_1, \dots, p_N$ los correspondientes momentos conjugados), y la trayectoria de este punto

(determinada a través de la integración de las ecuaciones de Hamilton) caracteriza al sistema en todo instante. En este formalismo, cualquier magnitud física será una función $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ del estado del sistema, cuyo valor podemos determinar a través del conocimiento de las coordenadas y momentos (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Se postula (más o menos explícitamente) que este conocimiento constituye la experiencia sensible que tenemos del sistema, y accedemos directamente a él con una precisión arbitraria.

El estado de un sistema cuántico tiene, sin duda, una definición matemática mucho más abstracta: consiste en asociar a cada estado accesible un vector de estado $|\Psi\rangle$ en un espacio de Hilbert. La evolución temporal está determinada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle, \quad (1.1)$$

donde el hamiltoniano H es un operador lineal sobre los vectores del espacio, es decir:

$$H(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle) = H|\Psi\rangle + H|\Phi\rangle. \quad (1.2)$$

Este formalismo permite la descripción de una de las propiedades más genuinamente cuánticas (o, si se prefiere, menos clásicas) de la naturaleza: la existencia de superposiciones de estados. Si $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ son dos estados accesibles del sistema, también lo será el estado $|S\rangle = |\Psi\rangle + |\Phi\rangle$ (que, desde luego, también es un vector en el espacio de Hilbert). Por otro lado, (1.2) indica que si un estado puede escribirse como superposición de otros dos, su evolución será equivalente a la superposición de las evoluciones de los dos estados que lo componen. Esto supone que, en cualquier instante de tiempo, el sistema tendrá propiedades que no podrán adscribirse a uno u otro estado, sino que serán la consecuencia de una cierta “colaboración” entre ambos. Esto queda perfectamente patente si consideramos la expresión del valor esperado $\langle A \rangle = \langle S|A|S \rangle$ de un observable A (que se corresponde con una magnitud física) en el estado S :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(t) = & \langle \Psi(t)|A|\Psi(t) \rangle + \langle \Phi(t)|A|\Phi(t) \rangle + \\ & \langle \Psi(t)|A|\Phi(t) \rangle + \langle \Phi(t)|A|\Psi(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si consideramos, por ejemplo, el experimento de la doble rendija, $|\Psi(0)\rangle$ y $|\Phi(0)\rangle$ serán los estados correspondientes a las partículas localizadas en una y otra rendija respectivamente, y A el operador de posición. En este caso, los términos cruzados de la ecuación (1.3) describen las franjas de interferencia que suponen la principal diferencia frente a la descripción clásica del proceso. Puede decirse por lo tanto que esta diferencia proviene del hecho de que la evolución cuántica es lineal en las *amplitudes de probabilidad* (representadas por los vectores de estado), y no en las *probabilidades* (descripción clásica), ya que en este último caso la distribución de las posiciones de las partículas

sería en todo momento la superposición de las distribuciones obtenidas con sendas rendijas cerradas alternativamente.

De esta manera da cuenta la Mecánica Cuántica de los fenómenos de interferencia observados en algunos procesos. El primer problema surge cuando queremos describir procesos en los que *nunca* se observan tales fenómenos de interferencia, como la mayoría de aquellos en los que intervienen sistemas macroscópicos (¡este es uno de los motivos por los cuales la mecánica de Newton tardó siglos en cuestionarse!). Para poner de manifiesto esta dificultad, nos ocuparemos en seguida de recordar brevemente cómo describe el formalismo de la Mecánica Cuántica “Ortodoxa” (MCO) el proceso de obtención de información sobre un sistema. La denominación misma que suele darse al estudio de este proceso en el contexto de la Mecánica Cuántica (*teoría de la medida*) sugiere desde el principio que el observador deja de ser el sujeto pasivo descrito en Mecánica Clásica para ser integrado en el formalismo y tomar parte activa en el proceso.

Llamamos brevemente la atención sobre el hecho de que, a pesar de ser seguramente la interpretación más extendida de la Mecánica Cuántica, pueden existir sutiles diferencias de matiz entre lo que hemos denominado MCO y lo que algunos lectores entiendan por “interpretación estándar de la Mecánica Cuántica”. Para ser más específicos, puede tomarse como definición de lo que entenderemos aquí por MCO el conjunto de postulados enunciados en el libro de texto de Cohen, Diu y Laloë [31]. Se ha evitado por ejemplo utilizar el término “interpretación de Copenhage”, por estar quizás demasiado relacionado con las ideas originales de Bohr según las cuales sólo el “mundo cuántico” debería ser descrito según las leyes de la Mecánica Cuántica, estableciendo así una frontera con el “mundo clásico” regido por las leyes de la Mecánica Clásica (o relativista)[15]. Para nuestra exposición es esencial considerar que todos los sistemas físicos pueden (y, en última instancia, deben) ser descritos por la Mecánica Cuántica, independientemente de su grado más o menos definido de “macroscopicidad”. Por otro lado, esta visión está actualmente muy generalizada, y ha sido expresada desde muy pronto [72].

1.1.1. Descripción de la medida

Procedemos pues a enunciar el tratamiento clásico de Von Neumann del proceso *ideal* de medida, es decir, aquel en el cual la interacción con el aparato de medida no altera las probabilidades asociadas a cada uno de los posibles resultados. Consideremos un sistema microscópico \mathcal{S} en un estado descrito en la base ortogonal $\{|s_n\rangle\}$ del correspondiente espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Para tener acceso a las propiedades del sistema, necesitamos establecer una correlación entre sus diferentes configuraciones (“invisibles” en tanto que microscópicas) y las de un aparato de medida \mathcal{A} (macroscópicamente distinguibles, es decir, accesibles a la experiencia sensible de forma similar

a las de un sistema descrito en el formalismo de la Mecánica Clásica) representado en la base ortogonal $\{|a_n\rangle\}$ de \mathcal{H}_A . La aparición de las correlaciones deseadas estará totalmente descrita en términos de la evolución lineal (1.1) generada por el hamiltoniano del sistema $\mathcal{S} + \mathcal{A}$, y puede esquematizarse de la forma siguiente [72]:

$$\left(\sum_n c_n |s_n\rangle \right) |a_0\rangle \longrightarrow \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle. \quad (1.4)$$

De esta forma, el estado del aparato pasa de un estado neutro $|a_0\rangle$, en el que aún no ha mostrado ningún resultado, a una superposición de estados *macroscópicamente distinguibles* (de acuerdo con la hipótesis de partida) $|a_n\rangle$. De acuerdo con el desarrollo (1.4), cada uno de ellos estará correlacionado con un estado $|s_n\rangle$ del sistema cuántico, por lo que este proceso se asocia con la medida de la propiedad física representada por algún operador hermítico con la forma general $\mathbf{O} = \sum_n \lambda_n |s_n\rangle \langle s_n|$. Atendiendo a la función que desempeñan en el contexto de la medida del sistema cuántico, denominaremos de manera general “posiciones del puntero” a los estados $|a_n\rangle$ del aparato.

En esta tesis verificaremos explícitamente que el establecimiento de las correlaciones descritas en (1.4) dista mucho de ser trivial. Para comprenderlo, basta observar que la interacción entre el sistema cuántico \mathcal{S} y el aparato \mathcal{A} , lejos de ser inocente, ha de obedecer una serie de requerimientos que no hemos hecho más que esbozar en el breve análisis anterior. Estos requerimientos, que enunciaremos a continuación de forma más concreta, sólo se verán en general satisfechos tras un cuidadoso diseño del experimento, lo cual equivale a una elección adecuada del hamiltoniano del sistema compuesto y su implementación en un laboratorio.

1.1.2. Decoherencia y selección del puntero

La condición de que los estados $\{|a_n\rangle\}$ formen una base ortogonal suele asociarse con la necesidad de que las distintas posiciones del puntero puedan distinguirse [87].

A pesar de esta condición, el esquema (1.4) no basta para definir la propiedad física que está siendo medida [87],[117],[7]. En efecto, la descomposición $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle$ del estado del conjunto $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ definido en el espacio $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ no es, en general, única¹. Será por tanto posible reescribir $|\Psi\rangle$ en función de otras dos bases *ortogonales* $\{|s'_n\rangle\}$ y $\{|a'_n\rangle\}$ de \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_A respectivamente: $|\Psi\rangle = \sum_n c'_n |s'_n\rangle |a'_n\rangle$. A pesar de que este cambio de base no responde a ninguna acción física sobre el sistema, la aparente conclusión a la que se llega es que hemos pasado de medir el observable $\mathbf{O} = \sum_n \lambda_n |s_n\rangle \langle s_n|$ a medir otro distinto $\mathbf{O}' = \sum_n \lambda'_n |s'_n\rangle \langle s'_n|$, lo cual parece

¹Más concretamente, sólo será única si todos los c_n son distintos entre sí.

carecer de sentido (considérese además que, en general, \mathbf{O} y \mathbf{O}' no conmutan). Esta ambigüedad tiene un carácter muy general: las correlaciones descritas en (1.4) generadas por una interacción arbitraria son incapaces de seleccionar el observable medido² cuando se aplican a un sistema $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ aislado [7],[117],[87].

Para entender cómo se establece la selección efectiva del puntero del aparato de medida, es necesario “abrir” el sistema, haciéndolo interactuar con un “entorno”. De esta manera, entramos en el ámbito de la teoría de la *decoherencia*³, que describe cómo el entorno selecciona los estados de un aparato macroscópico que pueden observarse, y por lo tanto ser susceptibles de actuar como punteros en un proceso de medida.

Trataremos de ilustrar este fenómeno de forma sencilla, considerando la interacción de un aparato \mathcal{A} de dos niveles con un entorno \mathcal{E} . A partir de la base ortogonal $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ del aparato de medida, el estado conjunto $\mathcal{A} + \mathcal{E}$ puede escribirse de forma totalmente general como:

$$|\Psi\rangle = c_1|a_1\rangle|e_1\rangle + c_2|a_2\rangle|e_2\rangle, \quad (1.5)$$

donde $|e_1\rangle$ y $|e_2\rangle$ son estados del entorno *no necesariamente ortogonales entre sí*. Según los postulados de la MCO, la observación del aparato de medida se describe a través de un operador hermítico A que actúa sobre el espacio del aparato $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \omega \\ \omega^* & \alpha_2 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{E}}. \quad (1.6)$$

El valor esperado de esta medida en el estado $|\Psi\rangle$ es

$$\langle A \rangle = \alpha_1|c_1|^2 + \alpha_2|c_2|^2 + \epsilon^*\omega + \omega^*\epsilon, \quad (1.7)$$

donde $\epsilon = \langle e_1|e_2\rangle$. Reconocemos en esta última expresión los términos proporcionales a $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$, que representan las contribuciones al valor esperado de los estados $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$, así como los términos proporcionales a ϵ , asociados a los fenómenos cuánticos de interferencia entre estos estados. Ahora bien, si $\epsilon \approx 0$, se sigue de (1.7) que cualquier observación sobre el aparato lo encontrará en el estado $|a_1\rangle$ con probabilidad $|c_1|^2$ o en el estado $|a_2\rangle$ con probabilidad $|c_2|^2$. Los términos de interferencia habrán desaparecido, y el valor medio puede interpretarse a partir de una alternativa *clásica* entre los estados $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$. En estas circunstancias, podremos decir que

²Es decir, la base $\{|s_n\rangle\}$ del sistema cuántico o, equivalentemente, la base $\{|a_n\rangle\}$ que designa las posiciones del puntero del aparato.

³La literatura sobre decoherencia es muy extensa, pero pueden consultarse las revisiones recientes [87], [118], [114], así como la más breve [53]. Citamos algunas referencias clásicas: [113], [117], [112], [115]. No es nuestra intención profundizar en este tema, por lo que nos limitaremos a presentar algunos resultados ya establecidos útiles para nuestros propósitos.

la interacción $H_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$ entre el aparato y el entorno ha seleccionado la base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ como la de las posiciones del puntero.

Es esencial tener en cuenta que la cantidad ϵ depende del tiempo⁴, por lo que la selección del puntero será un proceso dinámico que tendrá lugar para cualquier condición inicial. En particular, será necesario establecer una condición de estabilidad que garantice la robustez de la base instantánea $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ ante el paso del tiempo. Estas y otras consideraciones⁵ establecen que, en un gran número de casos, los estados del puntero serán estados del aparato *localizados en regiones macroscópicamente separadas del espacio de posición* [118],[87],[53]. De esta manera se le da un sentido concreto a las condiciones mencionadas más arriba al establecer (1.4). Insistimos en que la selección de la base de posición no puede considerarse un resultado general [118], [87]. El comportamiento de la cantidad ϵ en un caso concreto sólo puede establecerse resolviendo el problema para la interacción $H_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$ que corresponda. Sin embargo, además de la plausibilidad de la decoherencia de sistemas macroscópicos separados en el espacio tridimensional, la resolución explícita de varios modelos indica que es, efectivamente, un resultado muy generalizado [112],[118].

En definitiva, hemos extendido el esquema (1.4) de una medida ideal para incluir el entorno:

$$\left(\sum_n c_n |s_n\rangle \right) |a_0\rangle |e_0\rangle \longrightarrow \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle |e_n\rangle. \quad (1.8)$$

La introducción de un tercer vector en la descomposición (1.4) tiene una consecuencia algebraica esencial para el estudio que llevaremos a cabo: *si tal descomposición existe*, es única [87], [18], [21]. De esta forma desaparece la ambigüedad en la definición del observable medido a la que aludíamos más arriba, pero por otro lado no se ofrece ninguna garantía de que tal descomposición pueda establecerse. La aparición de esta restricción puede interpretarse como consecuencia de la imposición, por parte del entorno, de una base determinada del aparato de medida. Esta base será la de posición⁶.

Estamos pues en condiciones de enunciar el programa que tendremos que llevar a cabo para estudiar el proceso de medida en un caso concreto: debemos identificar (si existe) la base ortogonal $\{|s_n\rangle\}$ del sistema cuántico que

⁴Obsérvese que la evolución de cada subsistema \mathcal{E} y \mathcal{A} por separado no es lineal, por lo que el producto interno $\langle e_1 | e_2 \rangle$ no es conservado por el hamiltoniano conjunto $H_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$.

⁵Una posible condición de estabilidad consiste en imponer que los proyectores $P_n = |a_n\rangle\langle a_n|$ sobre los estados del puntero sean una magnitud conservada por la interacción: $[H_{\mathcal{A}\mathcal{E}}, P_n] = 0$. Si admitimos que esta interacción es local, los punteros seleccionados estarán bien localizados en el espacio de posición [87].

⁶Recordamos de nuevo que este resultado, aunque muy extendido, no es, en principio, general. En cualquier caso, para el sistema que estudiaremos más adelante (una partícula neutra en un campo magnético inhomogéneo), ha sido establecido explícitamente siguiendo varios modelos de interacción con el entorno [98], [37].

se acople con estados *localizados en regiones macroscópicamente separadas del espacio de posición* del aparato de medida.

Este análisis se efectuará explícitamente (de forma totalmente cuántica) para el caso de la medida del espín de una partícula neutra. Repasamos por lo tanto a continuación los antecedentes existentes, insistiendo especialmente en la descripción semiclásica de Gómez–Camacho y Cruz–Barrios [40],[39].

1.2. El Stern–Gerlach como paradigma de la medida

El experimento de Stern-Gerlach⁷ consiste, como es bien sabido, en hacer incidir un haz de partículas eléctricamente neutras sobre una pantalla detectora tras haber atravesado el espacio entre los polos de un imán diseñado para producir un campo magnético inhomogéneo. En el experimento original de 1922 [92], el haz estaba constituido por átomos de plata (con momento angular orbital $\mathbf{L} = 0$ en el estado fundamental) y se observó que el campo magnético producía una deflexión en el haz. Esta interacción de los átomos de plata con el campo magnético se manifiesta en la pantalla detectora, en la cual el haz incidente se distribuye siguiendo un patrón parecido al de los dos labios de una boca entreabierta.

Para interpretar el fenómeno se postuló la existencia en los átomos de un momento angular interno (espín) $\vec{\mu}$ que interacciona con el campo \vec{B} a través del término $U = -\vec{\mu}\vec{B}$. De acuerdo con esto, a una distribución aleatoria de las orientaciones del vector $\vec{\mu}$ respecto a la dirección del campo \vec{B} correspondería una distribución continua del haz en la pantalla. Sin embargo, la distribución en dos labios bien diferenciados implica que la proyección de $\vec{\mu}$ sobre la dirección de \vec{B} está cuantificada, pudiendo tomar, en este caso, sólo dos valores distintos y bien definidos.

1.2.1. Primera aproximación al problema

Para determinar cuantitativamente cómo se establece la correlación entre la posición final del átomo de plata en la pantalla y la orientación de su espín, muchos libros de texto [85], [10], [65], [66] recurren a un argumento semiclásico relativamente sencillo.

Este esquema consiste en considerar un campo magnético no uniforme en la dirección del eje z :

$$\vec{B} = B_1 z \hat{e}_z. \quad (1.9)$$

La energía potencial de interacción entre el átomo y el campo será:

$$U = -\vec{\mu}\vec{B} = -\mu_z B_1 z \quad (1.10)$$

⁷Para una exposición básica, véase por ejemplo [85]. Una excelente presentación bastante más sofisticada puede encontrarse en el libro de texto de Bohm [14]. Para descripciones más técnicas y realistas, véase por ejemplo [105], [91], [32],

donde μ_z es la proyección del momento magnético de espín del átomo en la dirección del campo. Ahora bien, la teoría cuántica asocia un operador $\boldsymbol{\mu}_z$ (que actúa sobre un espinor) al observable μ_z que, en el caso presente y tomando el eje z como eje de cuantización, es proporcional a una matriz de Pauli 2×2 :

$$\boldsymbol{\mu}_z = -\mu_b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

donde $\mu_b = e\hbar/2M$ es el magnetón de Bohr. Los autovalores de este operador son $\pm\mu_b$, dado lo cual se admite en el contexto de este tratamiento que cada átomo estará sometido a una fuerza clásica F_z en la dirección z que tomará dos valores posibles:

$$(F_x, F_y, F_z) = -\vec{\nabla}U = (0, 0, -\mu_z B_1) = (0, 0, \pm\mu_b B_1). \quad (1.12)$$

Se propone pues que los átomos siguen la trayectoria clásica correspondiente a la aplicación de la fuerza F_z . La probabilidad de que un átomo individual esté sometido a uno u otro de los posibles valores de la fuerza dependerá de la polarización inicial del haz. En un experimento típico de Stern-Gerlach, el haz no está polarizado, y cada átomo es desviado en el sentido positivo o negativo del eje z con igual probabilidad, dando lugar a la distribución de átomos antes mencionada en la pantalla detectora.

En definitiva, según este modelo, una partícula que entre en el imán en una posición (x_0, z_0) en el instante t_0 seguirá la trayectoria uniformemente acelerada

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x_0 \\ z_m(t) &= z_0 + \frac{\mu_b B_1 m}{2M} (t - t_0)^2 \quad ; \quad m = \pm 1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

mientras esté dentro del imán. A partir del instante t_f en el que salga de la zona de interacción con el campo magnético, proseguirá su movimiento con velocidad constante

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x_0 \\ z_m(t) &= z_m(t_f) + \frac{\mu_b B_1 m}{M} (t_f - t_0)(t - t_f), \end{aligned} \quad (1.14)$$

de modo que la posición final en la placa fotográfica revela la proyección $m\mu_b$ del momento magnético sobre el eje z .

Cabe hacerle a este análisis varias objeciones, que quizá puedan resumirse en dos puntos:

- Al asociar el *autovalor de un observable* con el valor que toma una *fuerza generadora de una trayectoria*, el tratamiento mezcla conceptos *cuánticos* y *clásicos*, lo cual, sin duda, ha de justificarse con un análisis más riguroso.

- El campo magnético $\vec{B} = B_1 z \hat{e}_z$ no es físico, ya que su divergencia es distinta de cero. Debemos considerar por lo tanto un campo que sea inhomogéneo en al menos dos direcciones espaciales perpendiculares, como por ejemplo:

$$\vec{B} = (B_0 + B_1 z) \hat{e}_z - B_1 x \hat{e}_x. \quad (1.15)$$

Por lo tanto, para aplicar el esquema desarrollado en esta sección, habría que calcular la fuerza a la que se ven sometidos los átomos de acuerdo con (1.12). Pero, en este caso, aparece una componente F_x de la fuerza en la dirección x . No se explica entonces por qué, independientemente de la polarización del haz incidente, sólo se observa una deflexión en la dirección del eje z . En definitiva, seguimos sin poder determinar el motivo por el que el eje z es especial en esta situación.

Hay que decir sin embargo que, a pesar de todo, este modelo va más allá de un mero argumento de plausibilidad, ya que, como veremos más adelante, predice algunos resultados cuantitativamente correctos. Esto sugiere que los elementos introducidos en este análisis pueden ser reciclados provechosamente en un tratamiento riguroso. En este sentido, referimos más adelante los resultados del tratamiento semiclásico [40], y veremos cómo son resueltos los problemas a los que acabamos de aludir. Pero antes nos detendremos brevemente en la descripción del proceso de medida del espín en el contexto de este tratamiento.

1.2.2. El Stern–Gerlach como proceso de medida

Precisamente por la simplicidad del tratamiento que acabamos de describir, este modelo ha sido frecuentemente utilizado como paradigma del proceso de medida (véase por ejemplo [14]). Consideramos ilustrativo detenernos brevemente en la descripción de la medida del espín de una partícula neutra en este modelo, con dos objetivos principales: el de proporcionar un ejemplo concreto (aunque simplificado) de la medida de un sistema cuántico tal y como la hemos descrito en secciones anteriores, e introducir, en un contexto sencillo, elementos de descripción que iremos sofisticando a medida que refinemos nuestra descripción del sistema.

Consideramos, para describir el problema planteado, el esquema siguiente: deseamos “medir” el espín⁸ de una partícula neutra de espín 1/2, para lo cual observamos la posición de la partícula tras haber establecido una correlación entre ésta y el espín por medio del campo magnético inhomogéneo (1.9). De esta forma, “el sistema cuántico” \mathcal{S} es el estado de espín,

⁸O “determinar” u “observar”. . . el uso de estos términos para describir “un experimento cuyo resultado depende del espín de la función de onda” es estándar en MCO aunque no está exento de polémica. No entraremos aquí en estas consideraciones.

que elegimos describir en la base de autoestados del operador I_z de espín a lo largo del eje z :

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z + |-\rangle_z). \quad (1.16)$$

El “aparato de medida” será la posición de la partícula, descrita cuánticamente por su función de onda $\phi(\vec{x}, t)$ (véanse las secciones (1.1.1) y (1.1.2)). De acuerdo con nuestro modelo simplificado, describiremos las dos posibles deflexiones, en las direcciones positiva y negativa del eje z , por medio de las funciones de onda $\phi_+(\vec{x}, t)$ y $\phi_-(\vec{x}, t)$ respectivamente. Si dejamos evolucionar el sistema un tiempo suficiente, las dos funciones de onda que describen la posición de la partícula (y de las que puede decirse que ejercen el papel de “puntero” del aparato de medida) dejarán de solapar en el espacio de posición, adecuándose así el sistema total al esquema propuesto por Von Neumann para describir el proceso de medida:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_+|+\rangle_z + \phi_-|-\rangle_z). \quad (1.17)$$

Según la MCO, la medida se completa observando la posición de la partícula, que será la descrita por ϕ_+ con probabilidad $1/2$ o la descrita por ϕ_- con igual probabilidad. En ese instante, la reducción del vector de estado seleccionará la componente correspondiente, dándose así por concluido el proceso de medida del operador $I_z = |+\rangle_z\langle +|_z - |-\rangle_z\langle -|_z$ en el formalismo de la MCO ⁹.

Como ya hemos comentado, esta descripción es ambigua a la hora de definir el observable medido [87]. Para ilustrar este punto, considérese la expresión siguiente del estado $|\Psi\rangle$, totalmente equivalente a (1.17), en términos de bases ortogonales distintas del sistema y del aparato:

$$|\Psi\rangle = 1/2 [(\phi_+ + \phi_-)|+\rangle_x + (\phi_+ - \phi_-)|-\rangle_x], \quad (1.18)$$

donde hemos utilizado los estados polarizados en la dirección del eje x :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z) \quad ; \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - |-\rangle_z). \quad (1.19)$$

Con el estado $|\Psi\rangle$ escrito de esta forma, podríamos redefinir el proceso como una medida del operador $I_x = |+\rangle_x\langle +|_x - |-\rangle_x\langle -|_x$, cuyo resultado estaría determinado por la observación del estado final del aparato de medida, que podrá ser $(\phi_+ + \phi_-)$ o $(\phi_+ - \phi_-)$. ¿Cómo saber cuál de las dos bases¹⁰ del aparato de medida describirá los “estados del puntero” observados en el experimento? Como vimos más arriba, esta selección la realiza el entorno del sistema, bastándonos en este caso con incluir, por ejemplo, las moléculas

⁹Este aspecto controvertido de la MCO será tratado más adelante.

¹⁰Se trata de elegir entre las bases ortogonales $\{\phi_+, \phi_-\}$ y $\{(\phi_+ + \phi_-), (\phi_+ - \phi_-)\}$.

de la placa fotográfica sobre la que inciden las partículas. De esta forma, $|\Psi\rangle$ admite una *única descomposición* [87] del tipo:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_+ |+\rangle_z |e_+\rangle + \phi_- |-\rangle_z |e_-\rangle), \quad (1.20)$$

siendo $|e_+\rangle$ y $|e_-\rangle$ estados *ortogonales* de las moléculas de la placa fotográfica. De estas consideraciones se sigue inmediatamente¹¹ que la matriz densidad reducida $\rho(\vec{x}, t)$ obtenida promediando sobre las variables del entorno (que es, en definitiva, la matriz que describe la estadística del experimento) es diagonal en la base $\{\phi_\pm(\vec{x})|\pm\rangle_z\}$. Para ser más explícitos, mostramos la expresión concreta de esta matriz en la base indicada:

$$\rho(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} |\phi_+(\vec{x}, t)|^2 & 0 \\ 0 & |\phi_-(\vec{x}, t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Si el tiempo transcurrido es suficientemente largo y asumimos que las trayectorias (1.13) y (1.14) reproducen correctamente la evolución del sistema, los elementos de la matriz densidad serán simplemente

$$|\phi_\pm(\vec{x}, t)|^2 = \delta[x - x_{\pm 1}(t), z - z_{\pm 1}(t)]; \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

El proceso de medida que acabamos de describir es *ideal* en varios sentidos:

1. El valor del observable medido I_z no se ve alterado durante el proceso (más explícitamente, I_z conmuta con el hamiltoniano que describe la evolución del sistema).
2. Existe una correspondencia unívoca entre el resultado observado de la medida (es decir, la posición de la partícula) y el valor del observable medido. Este importante hecho es consecuencia de que la matriz (1.21), además de ser diagonal, tiene (como máximo) un sólo elemento distinto de cero.
3. Por otro lado, los distintos “resultados observados de la medida” se corresponden con estados del puntero seleccionados por el entorno, es decir, están localizados en posiciones separadas macroscópicamente. Esto es consecuencia de la separación macroscópica entre ϕ_+ y ϕ_- (evidente a partir del comportamiento de las trayectorias (1.13) y (1.14) para $t \rightarrow \infty$).

En otras palabras, este experimento reproduce perfectamente la descripción de Von Neumann de la medida de un sistema cuántico. Uno de los objetivos de este trabajo consiste en tratar de reproducir estos resultados con una descripción realista del sistema en cuestión: una partícula neutra de espín 1/2 en un campo magnético inhomogéneo.

¹¹Véase también la sección 1.3.1.

1.2.3. Estados coherentes internos y trayectorias semiclásicas

En esta sección se resumirán los trabajos de Cruz Barrios y Gómez Camacho [40], [39] mediante los cuales, como hemos mencionado, se obtiene de forma rigurosa una descripción semiclásica del experimento de Stern-Gerlach en términos de las trayectorias seguidas por los átomos. La inclusión de este capítulo en el ámbito de esta tesis obedece a una doble motivación: por un lado, introduciremos conceptos que, a pesar de estar definidos en el contexto de una aproximación semiclásica, se mostrarán relevantes en las descripciones totalmente cuánticas que se abordarán más tarde. Se trata fundamentalmente de los estados coherentes internos (CIS en la nomenclatura de los autores), que serán presentados en breve.

Por otro lado, la incorporación de trayectorias en este tratamiento a partir del formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica puede permitir construir un puente hacia la teoría de Bohm, y dedicaremos por lo tanto parte de este trabajo a comparar las trayectorias que obtendremos ahora con las que predice dicha teoría. Sin embargo, es importante recordar que dichas trayectorias aparecen de forma conceptualmente muy distinta en cada una de las dos teorías: en un caso (Bohm) forman parte de los elementos constitutivos de la teoría, y, como tales, aparecerán en cualquier situación física sin necesidad de mayores justificaciones. En el otro caso, se trata de un concepto fundamentalmente ajeno a la teoría, y su uso precisa de una justificación en términos de una determinada aproximación con rangos de validez cuidadosamente definidos.

Definición de los estados coherentes internos

Como ya ha sido mencionado, el trabajo [40] se basa en el concepto de estados coherentes internos (CIS), introducido por los mismos autores en un artículo anterior [39]. Allí se muestra que para el análisis de la dispersión de un sistema con grados de libertad internos, como el espín, la descripción semiclásica en término de trayectorias constituye una buena aproximación sólo para un determinado conjunto de estados internos (los CIS) que forman además una base del espacio de estados internos del sistema. Por lo tanto, la función de onda inicial habrá de ser descompuesta en función de los CIS, asignándole una trayectoria a cada uno de estos estados. Así, la función de onda de dispersión podrá ser aproximada por un conjunto de trayectorias clásicas, una por cada CIS.

Vamos a ocuparnos ahora de la definición de los CIS, para lo cual consideramos primero la matriz de amplitudes de dispersión $\langle j|A(\theta, \phi)|i\rangle$. Esta matriz, descrita en la base de los estados internos $\{|i\rangle, i = 1, N\}$ describe la amplitud de probabilidad de que un estado inicial $|i\rangle$ se disperse en un estado final $|j\rangle$ con los ángulos de dispersión (θ, ϕ) con respecto a la dirección incidente.

A partir de la matriz A_{ij} y de la matriz densidad inicial ρ , podemos definir la sección eficaz diferencial correspondiente a la dirección de dispersión sumada para todos los estados finales:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{i,k,j}^N \langle k|\rho|i\rangle \langle i|A^\dagger|j\rangle \langle j|A|k\rangle. \quad (1.23)$$

Definimos la matriz sección eficaz [39]:

$$M_{ik} = \frac{d\sigma_{ik}}{d\Omega} = \sum_j^N \langle i|A^\dagger|j\rangle \langle j|A|k\rangle, \quad (1.24)$$

de forma que la sección eficaz diferencial para una determinada matriz densidad inicial está dada por $\text{Tr}(\rho M)$. La matriz M así definida es un operador hermítico definido en el espacio de estados internos, con lo cual podemos considerar sus autovectores $|n\rangle$ y los correspondientes autovalores $d\sigma_n/d\Omega$ que formarán una base de ese espacio. Es conveniente relacionar estos autovectores con los vectores $|\tilde{n}\rangle$ definidos de la forma:

$$|\tilde{n}\rangle = \left(\frac{d\sigma_n}{d\Omega} \right)^{-1/2} A|n\rangle. \quad (1.25)$$

Es sencillo comprobar que estos estados cumplen:

$$\langle \tilde{m}|\tilde{n}\rangle = \delta_{nm}, \quad (1.26)$$

y constituyen, por lo tanto, una base ortonormal del espacio de estados internos. La relación existente entre los estados $|n\rangle$ y $|\tilde{m}\rangle$, a los que llamaremos Estados Coherentes Internos (CIS), queda reflejada mediante la expresión:

$$\langle \tilde{m}|A|n\rangle = \delta_{nm} \left(\frac{d\sigma_n}{d\Omega} \right)^{-1/2}, \quad (1.27)$$

que indica que, a los ángulos de dispersión θ, ϕ , la amplitud de dispersión de un estado $|n\rangle$ en otro $|\tilde{m}\rangle$ con $n \neq m$ es nula (y, por lo tanto, la probabilidad de dispersión también lo es). Dicho de otra forma, dos CIS iniciales distintos $|n\rangle$ y $|m\rangle$ (como hemos visto, ortogonales entre sí) se dispersan *independientemente* en dos CIS finales $|\tilde{n}\rangle$ y $|\tilde{m}\rangle$ respectivamente *ortogonales* entre sí. Nótese finalmente que M es una matriz $N \times N$ definida en cada dirección θ, ϕ del espacio, y que por lo tanto su diagonalización nos permite obtener un conjunto de CIS que será, en general, distinto en cada dirección de dispersión.

Los CIS y la medida cuántica

Es interesante considerar la relación de los estados coherentes internos con el proceso de medida del estado interno de un sistema cuántico. Puede ser ilustrativo empezar por considerar una definición alternativa de la matriz M , consistente en realizar la suma (1.23) para los estados *iniciales* en lugar de hacerlo para los finales. La matriz así obtenida puede interpretarse como la sección eficaz diferencial de dispersión *en función* de los estados internos finales, y sería totalmente equivalente a la matriz (1.21) definida en un contexto similar (siempre que podamos asimilar las funciones de onda a las amplitudes de dispersión, es decir, si ha transcurrido un tiempo suficiente desde el momento de la interacción). Como sabemos, los estados que diagonalizan esta matriz son los que podrán ser *medidos* por el experimento (o, como mínimo, mejor discriminados. Véase la discusión final en la sección (1.2.2)). Éstos serán los CIS finales, los $|\tilde{n}\rangle$ en nuestra notación.

En cierto modo, podremos decir que de esta forma determinamos el estado final $|\tilde{n}\rangle$ en el que se encuentra el sistema *después* de la interacción, mientras que con la definición original de M determinábamos el estado inicial $|n\rangle$ *anterior* al proceso. Así consideramos explícitamente la posibilidad de que la interacción no conserve el estado interno del sistema, aunque el desarrollo anterior deja claro que el conocimiento de las amplitudes de dispersión nos permite acceder a cualquiera de las dos descripciones.

En definitiva, el conjunto de CIS determina qué observable estamos midiendo en un determinado experimento, aunque recordamos una vez más que la posibilidad teórica de obtener un resultado arbitrariamente bueno (es decir, de que la medida revele el CIS concreto del sistema con un grado arbitrario de precisión), no está en absoluto garantizada, y deberá ser establecida de forma independiente para cada caso concreto.

Aplicación a la aproximación semiclásica

La esencia de la aproximación semiclásica reside en asociar una trayectoria en el espacio a la amplitud de dispersión del sistema [17]. El procedimiento general consiste en obtener una trayectoria para cada par de estados inicial y final sustituyendo la integral de camino por una integral a lo largo de la trayectoria $\vec{x}(t)$ que haga estacionaria la fase del integrando [81]. No obstante, este procedimiento tiene el inconveniente de no respetar el principio de superposición, ya que las trayectorias serán diferentes para cada par de estados inicial y final [39].

Sin embargo, en [39] los autores muestran que este programa puede llevarse a cabo de forma consistente siempre que la base utilizada para calcular las trayectorias sea la de los CIS. En otras palabras, el procedimiento general consistirá en descomponer el sistema en términos de los CIS y obtener una trayectoria para cada uno de estos estados. Ello es debido a que la evolución

de los CIS preserva la ortogonalidad *en cada punto dirección* $(\theta, \phi) \equiv \Omega$ *del espacio* gracias a la propiedad (1.26). Esto queda más claramente expresado a través de la forma adoptada por la sección eficaz diferencial (1.23) en la base de los CIS [39]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} &= \sum_{n,m,k} \langle n|\rho|m\rangle \langle m|A^\dagger(\Omega)|\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}|A(\Omega)|n\rangle \\
&= \sum_{n,m,k} \langle n|\rho|m\rangle \left(\frac{d\sigma_k(\Omega)}{d\Omega}\right)^{1/2} \left(\frac{d\sigma_n(\Omega)}{d\Omega}\right)^{1/2} \delta_{nk}\delta_{km} \\
&= \sum_n \langle n|\rho|n\rangle \left(\frac{d\sigma_n(\Omega)}{d\Omega}\right), \tag{1.28}
\end{aligned}$$

es decir, la sección eficaz diferencial definida para cualquier dirección de dispersión no mezcla los CIS, lo cual nos permite definir una trayectoria individual para cada uno de ellos de forma coherente con el principio de superposición.

Hacemos hincapié en el hecho de que, a pesar de haber hecho uso del formalismo de los estados coherentes internos en el contexto de una aproximación semiclásica, su definición formal como autovectores de la matriz sección eficaz (1.24) es totalmente cuántica. Será pues interesante comprobar su relevancia en los tratamientos cuánticos del experimento de Stern-Gerlach que presentaremos más adelante.

1.2.4. Trayectorias semiclásicas en el Stern–Gerlach

Como ya hemos mencionado al principio de este capítulo, el experimento de Stern-Gerlach con partículas de espín I , masa M y momento magnético μ_0 ha sido tradicionalmente descrito en término de trayectorias semiclásicas, determinadas en función de los grados de libertad internos de espín. Es, por lo tanto, un candidato ideal para ser tratado en el formalismo que acabamos de presentar.

Como acabamos de ver, para definir de forma consistente un conjunto de trayectorias que constituyan una buena aproximación de la evolución del sistema, necesitamos primero determinar los CIS. Si seguimos el procedimiento descrito en [40] y [39] (que consiste esencialmente en diagonalizar la sección eficaz diferencial), los CIS resultan ser los autoestados $|m_B\rangle$ del operador de espín I_B *en la dirección del campo magnético*. Para un campo realista como (1.15), esta dirección no sólo no coincide con el eje z de laboratorio, sino que varía de forma continua con la posición. Los CIS definidos de esta forma pueden expresarse fácilmente en función de los autoestados m_z del operador de espín I_z en la dirección z :

$$|m_B\rangle = \sum_{m_z} d_{m_z, m_B}^I [\beta(\vec{x})] |m_z\rangle, \tag{1.29}$$

donde los $d_{m_z, m_B}^I [\beta]$ son los elementos de la matriz de rotación en el espacio de espín. Hemos querido recalcar que el ángulo β que forma la dirección del campo con el eje z (y que define la matriz de rotación) depende de la posición \vec{x} considerada. De hecho, este ángulo viene dado por [40]

$$\tan [\beta(\vec{x})] = xB_1/(B_0 - zB_1). \quad (1.30)$$

Una vez determinados los CIS, tendremos que asociar una trayectoria semiclásica a cada uno de ellos. Este cálculo revela que la trayectoria corre-

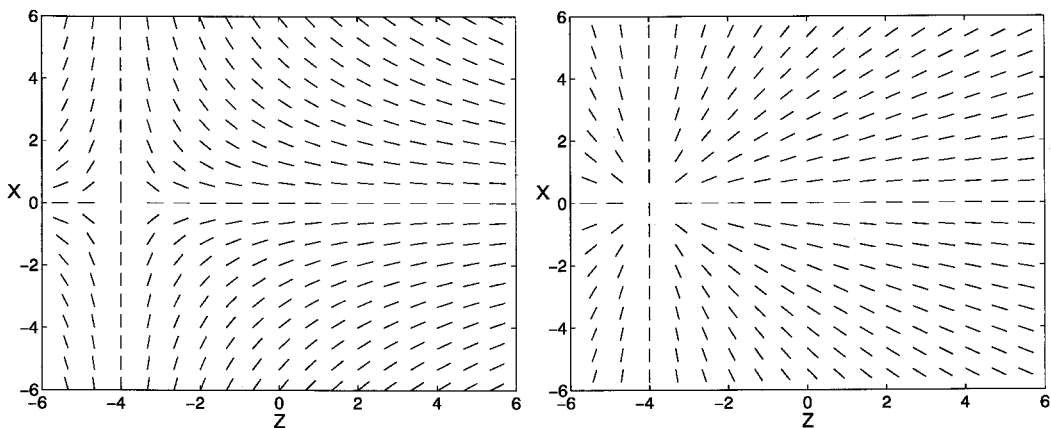


Figura 1.1: Direcciones del campo $\vec{B} = (B_0 + B_1 z)\hat{e}_z - B_1 x\hat{e}_x$ (izquierda) y de la fuerza clásica ejercida por el campo sobre un dipolo magnético (derecha). El haz de partículas neutras penetra en el imán inicialmente centrado en el origen, propagándose esencialmente en la dirección y perpendicular al plano mostrado. Las distancias están representadas en unidades de la anchura σ inicial del haz, para un caso en el que $B_0/B_1\sigma = 4$.

spondiente a una partícula que entra en el campo magnético en la posición (x_0, z_0) en un estado de espín correspondiente al CIS caracterizado por el número cuántico m ($m = -I, -I + 1, \dots, I - 1, I$) es [40]:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x_0 - \frac{\mu_0 B_1 m}{2M} (t - t_0)^2 \sin [\beta(x_0, z_0)] \\ z_m(t) &= z_0 + \frac{\mu_b B_1 m}{2M} (t - t_0)^2 \cos [\beta(x_0, z_0)] \end{aligned} \quad (1.31)$$

mientras esté en el interior del imán. Al abandonarlo en el instante t_f , la partícula evoluciona libremente con velocidad constante:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x_m(t_f) - \frac{\mu_0 B_1 m}{M} (t_f - t_0)(t - t_f) \sin [\beta(x_0, z_0)] \\ z_m(t) &= z_m(t_f) + \frac{\mu_b B_1 m}{M} (t_f - t_0)(t - t_f) \cos [\beta(x_0, z_0)] \end{aligned} \quad (1.32)$$

(hemos supuesto que la partícula entra en el imán con velocidad inicial nula en las direcciones x e y).

Es interesante comparar estas trayectorias con las que presentamos anteriormente en el contexto de la descripción simplificada tradicional. Ya no se trata de trayectorias paralelas al eje z , sino que ahora se dirigen en la dirección de la fuerza clásica, es decir, a lo largo de la línea que une el punto (x_0, z_0) con el punto $(x_0, -B_0/B_1)$ donde se anula el campo (véase la figura (1.1)). Al igual que antes, el sentido del movimiento estará determinado por la proyección m del espín *a lo largo de la dirección local del campo en cada punto* (x_0, z_0) . Es importante observar que el movimiento preserva la dirección del campo magnético que experimenta la partícula, sin lo cual los CIS correspondientes a una trayectoria cambiarían de forma complicada con el tiempo. Más concretamente, el ángulo $\beta(\vec{x}(t))$ asociado a una partícula en su movimiento cumple: $\beta(x_0, z_0) = \beta(x(t), z(t))$. A pesar de estas discrepancias, este tratamiento comparte con la descripción simplificada anterior el hecho de que la magnitud y la dirección de las deflexiones experimentadas por las partículas coinciden con la que se deriva de la expresión clásica de las fuerzas en cada caso.

En general, nuestra partícula no se encontrará en un CIS, sino que tendrá una polarización arbitraria caracterizada por el número cuántico m_z , expresada normalmente en una base referida a un eje fijo, como por ejemplo el eje z de laboratorio. En tal caso, la partícula seguirá la trayectoria $(x_{m_B}(t), z_{m_B}(t))$ con la probabilidad

$$p(m_B; m_z) = |d_{m_z, m_B}^I[\beta(x_0, z_0)]|^2 \quad (1.33)$$

determinada por el cuadrado del coeficiente correspondiente del desarrollo (1.29).

Haz de partículas y medida del espín

Para describir de forma más realista un experimento, es conveniente aplicar la descripción a un haz colimado de partículas. Concretamente, consideramos un haz de sección gaussiana de anchura σ_c que viaja en el seno del campo magnético (1.15) (con $B_0, B_1 > 0$) en la dirección y del eje del imán. Describiremos la distribución de partículas en el plano perpendicular a este eje mediante la densidad de probabilidad [40]:

$$P(x, z) = \frac{1}{\pi\sigma_c^2} \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{\sigma_c^2}\right). \quad (1.34)$$

Resaltamos que esta última expresión representa la distribución *clásica* de partículas en la sección transversal del haz. En este contexto, $P(x, z)$ no es, por lo tanto, el cuadrado del módulo de la función de onda espacial de las partículas del haz, que, por otro lado, no juega explícitamente ningún papel en esta descripción.

Cada partícula del haz con proyección del espín m_z a lo largo del eje z entrará en el imán en una posición (x_0, z_0) con la densidad de probabilidad $P(x_0, z_0)$ definida en (1.34). La trayectoria seguida será, con probabilidad (1.33), la correspondiente al CIS determinado por la dirección del campo en el punto (x_0, z_0) . Teniendo en cuenta la forma de las trayectorias, el resultado será que algunas partículas se alejarán del punto $(x_0, -B_0/B_1)$ donde se anula el campo (deflexión “hacia arriba”, es decir, en el sentido positivo del eje z), creando un efecto de *desenfoque*, mientras que otras se acercarán a él (deflexión “hacia abajo”), creando en la placa fotográfica un efecto de *enfoque*.

En estas condiciones, la matriz densidad será diagonal *en la base de los CIS, es decir, de los autovalores del operador de espín I_B en la dirección del campo magnético*. Por otro lado, si el tiempo de deriva libre ha sido suficiente para separar totalmente las trayectorias correspondientes a distintos autoestados de I_B , habrá (como máximo) un único elemento de la diagonal distinto de cero. Teniendo en cuenta además que los CIS, definidos en (1.29), varían de forma continua con la posición, podemos extraer, en relación con la medida de la proyección del espín, las siguientes conclusiones importantes:

- El observable medido mediante este experimento (es decir, el operador cuyos autoestados están correlacionados con la posición de la partícula) es I_B . La conservación del ángulo $\beta(\vec{x}(t))$ garantiza que este observable no se ve modificado por la interacción. La correspondencia entre el valor del observable medido (proyección del espín en la dirección del campo) y el puntero del aparato de medida (posición de la partícula) es, además, perfecta.
- Sin embargo, la posición de la partícula tendría que determinarse con una precisión infinita para poder discriminar los distintos ejes de cuantificación correspondientes a posiciones arbitrariamente próximas. En la práctica, cualquier detección de la posición de la partícula tendrá una precisión finita, lo que equivale al solapamiento del puntero para distintos resultados de la medida.

De esta forma, la medida tendrá una determinada *fiabilidad* asociada a la determinación de la proyección del espín a lo largo de un eje determinado. Consideremos el caso estándar en el que pretendemos medir la proyección del espín sobre el eje z , para lo cual debemos asociar un valor de la proyección de espín a cada posición final de la partícula en la pantalla detectora. La fiabilidad de la medida estará determinada por la probabilidad de que el autoestado de I_z medido de esta forma coincida con el estado de espín real de la partícula. Esta magnitud no es más que la proyección (1.33) del autoestado de I_z sobre el CIS correspondiente a esa posición, y puede integrarse sobre todas las partículas del haz. De esta forma puede determinarse la *fiabilidad de un experimento de Stern–Gerlach para la medida del espín a lo largo del*

eje z así como la probabilidad $\langle p_e(m_z) \rangle$ de obtener un resultado erróneo para un determinado valor m_z de la proyección medida. Puede comprobarse que, si el campo no es demasiado inhomogéneo en la zona explorada por el haz (es decir, si $B_1\sigma_c \ll B_0$, en cuyo caso el ángulo $\beta(\vec{x})$ es muy pequeño, véase (1.30)) se obtiene [40]:

$$\langle p_e(m_z) \rangle = \left(\frac{I(I+1) - m_z^2}{2} \right) \frac{\sigma_c^2 B_1^2}{2B_0^2}. \quad (1.35)$$

En otras palabras: para que un experimento de Stern–Gerlach mida correctamente la proyección del espín a lo largo del eje z de laboratorio, es necesario $B_1\sigma_c \ll B_0$.

1.3. El problema de la medida

El debate alrededor del formalismo de la MCO tiene una larga tradición, que se suele dar por iniciada a mediados de los años 20 en las conferencias de Solvay [15]. Desde entonces, muchos autores se han ocupado de los problemas conceptuales de esta teoría, singularizados principalmente en el *problema de la medida*, y la literatura existente al respecto es inmensa¹².

El problema de la medida puede formularse de manera concisa considerando la necesidad de describir, a partir de la superposición de estados del puntero (1.4), la percepción de un *único* resultado de la medida. La solución ofrecida por la MCO es la *reducción del vector de estado*, que recordamos brevemente. Consideremos el estado del aparato $\sum_n c_n |s_n\rangle$. El postulado de la medida indica que la medida del observable correspondiente al operador $\mathbf{O} = \sum_n \lambda_n |s_n\rangle\langle s_n|$ dará como resultado uno de sus autovalores λ_n con probabilidad $|c_n|^2$, después de lo cual la reducción del vector de estado es el responsable de que éste evolucione instantáneamente hacia el autoestado correspondiente $|s_n\rangle$ [31]. En definitiva, para caracterizar totalmente la medida del sistema \mathcal{S} , podemos completar de la siguiente manera el esquema (1.4):

$$\left(\sum_n c_n |s_n\rangle \right) |a_0\rangle \longrightarrow \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle \xrightarrow{\text{reducción}} |s_n\rangle |a_n\rangle. \quad (1.36)$$

Evidentemente, la evolución del vector de estado descrita por la reducción rompe con la linealidad de la evolución determinada por (1.1). El comportamiento de un sistema cualquiera puede por lo tanto estar descrito por dos leyes bien distintas, tal como se muestra en (1.36): la evolución lineal de Schrödinger y la reducción del vector de estado. Ambas formas de evolución están matemáticamente bien definidas, pero se plantea el problema de determinar cuál de ellas será la experimentada por un sistema físico concreto en una situación determinada. Dicho de otro modo, debemos determinar en qué momento del proceso descrito en (1.36) se produce la *medida* propiamente dicha y la consiguiente reducción. Hasta ese preciso instante, que queda en gran medida indeterminado (sólo sabemos que los estados que conforman la superposición han de estar “macroscópicamente separados”), el aparato macroscópico exhibe una superposición de resultados de la medida que impiden asignar un resultado único al experimento (y que, recordémoslo, predice la existencia de fenómenos de interferencia *teóricamente observables* entre los distintos estados macroscópicos del aparato). Este tema ha sido abundantemente tratado en el contexto de la MCO, y suele considerarse como el *problema de la medida* propiamente dicho.

¹²Para una revisión reciente del estado de este debate, pueden consultarse, por ejemplo, los artículos [58] y [87], así como la colección de artículos [116]. Puede encontrarse una valiosa y exhaustiva reseña bibliográfica sobre este y otros temas relacionados con la fundamentación cuántica en [19].

1.3.1. Decoherencia

Como hemos visto en (1.1.2), la interacción de un sistema macroscópico \mathcal{A} con el entorno \mathcal{E} “separa” en cierto sentido los estados correspondientes a distintas localizaciones del sistema, lo cual es crucial para explicar la selección de los estados susceptibles de ser observados. Nos permitimos ahora hacer un breve inciso sobre la relación de la decoherencia con el problema de la medida, intentando mostrar por qué hay autores que dan por resuelto el problema al permitir la interacción del aparato de medida con el entorno.

El análisis del sistema total $\mathcal{A} + \mathcal{E}$ estará representado por un vector en el espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ o, equivalentemente, por una matriz densidad $\rho^{\mathcal{A}\mathcal{E}}$. Sin embargo, si sólo estamos interesados en las propiedades del aparato \mathcal{A} , la matriz densidad relevante será la matriz reducida $\rho^{\mathcal{A}}$ [60], resultado de promediar (realizar la traza parcial) sobre las variables del entorno \mathcal{E} :

$$\rho^{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\rho^{\mathcal{A}\mathcal{E}}) = \sum_n \langle e_n | \rho^{\mathcal{A}\mathcal{E}} | e_n \rangle. \quad (1.37)$$

Hemos mencionado (1.1.2) que gran parte del esfuerzo realizado en los trabajos sobre decoherencia se ha dedicado a mostrar que los estados del entorno acoplados a distintos estados macroscópicos del aparato de medida *localizados en regiones suficientemente separadas del espacio ordinario tridimensional* son ortogonales entre sí [87], [53]. Por lo tanto, la matriz reducida $\rho^{\mathcal{A}}$ es prácticamente diagonal *en la representación de posición*, es decir, describe una mezcla de estados *localizados* del sistema \mathcal{A} .

El sistema queda pues descrito por una matriz densidad formalmente (casi) idéntica a la que describiría una mezcla estadística de estados puros localizados (es decir, originada por la ignorancia del estado en el que “realmente” se encuentra el sistema). Por lo tanto, puede ser tentador dar por resuelto el problema de la medida descartando la reducción del vector de estado y afirmando simplemente que la matriz densidad *es* una mezcla estadística, es decir, que el sistema está en uno *y sólo uno* de los estados que conforman la base localizada espacialmente en la cual la matriz es diagonal. A partir de aquí, la obtención de un resultado único de la medida (por lo demás libre de interferencias macroscópicas) no ofrecería problemas teóricos distintos de los que pudiera tener la explicación clásica de por qué obtenemos una carta concreta al escogerla al azar en una baraja. Sin embargo, esto equivale a negar la existencia de las superposiciones de estados en una situación determinada, cuando sólo han desaparecido (con muy buena aproximación) de la matriz *reducida* $\rho^{\mathcal{A}}$ y siguen existiendo si consideramos todos los grados de libertad involucrados en $\rho^{\mathcal{A}\mathcal{E}}$. Para entender mejor este matiz, consideremos la diferencia entre la matriz

$$\rho_1 = 1/2 (|a_1\rangle|e_1\rangle\langle e_1|\langle a_1| + |a_2\rangle|e_2\rangle\langle e_2|\langle a_2|), \quad (1.38)$$

y la matriz

$$\rho_2 = 1/2 (|a_1\rangle|e_1\rangle + |a_2\rangle|e_2\rangle)(\langle a_1|\langle e_1| + \langle a_2|\langle e_2|), \quad (1.39)$$

donde supondremos que los estados del entorno son ortogonales: $\langle e_1|e_2\rangle = 0$. Claramente, ρ_1 puede interpretarse como una mezcla estadística de los estados $|a_1\rangle|e_1\rangle$ y $|a_2\rangle|e_2\rangle$ en el sentido *clásico*, no así ρ_2 . El hecho de que la matriz reducida ρ^A sea idéntica en ambos casos no quiere decir que no existan diferencias *observables* entre ρ_1 y ρ_2 [8]. Estas diferencias estarán relacionadas con los términos de interferencia entre $|e_1\rangle$ y $|e_2\rangle$, y se manifiestan a través de operadores hermíticos como $B = |e_1\rangle\langle e_2| + |e_2\rangle\langle e_1|$. Aunque en la mayoría de los casos la observación asociada a operadores como B es casi imposible desde el punto de vista práctico, subsiste el problema de principio. Por otro lado, los fenómenos de interferencia se observan en sistemas cada vez más “macroscópicos”, véase por ejemplo [5], sin que parezca existir solución de continuidad en el proceso de pérdida de coherencia [45]. Por lo tanto, volvemos a encontrarnos con el problema de la medida: ¿en qué momento desaparecen las superposiciones?

Puede decirse que la decoherencia es responsable de que en el catálogo de mundos que nos ofrece la MCO no haya ninguno en el cual se observen interferencias entre objetos macroscópicos (es decir, desaparecen los elementos no diagonales de la matriz densidad reducida), pero, no solamente es incapaz de indicarnos qué mundo es el que debemos elegir (qué elemento de la diagonal), sino que nos obliga a considerarlos todos a la vez. Joos, uno de los principales investigadores sobre el fenómeno de decoherencia, lo expresa claramente cuando responde a la pregunta que plantea en la sección (5.1) de su artículo [53]:

Does decoherence solve the problem? Clearly not. What decoherence tells us, is that certain objects appear classical when they are observed. But what is an observation? At some stage, we still have to apply the usual probability rules of quantum theory.

En uno de los pasajes de su extenso artículo [58, pág. 677], Laloë identifica la raíz del problema cuando escribe

The starting point is the necessity for some kind of limit of the validity of the linear Schrödinger equation, . . . it is then clear that this problem will never be solved by invoking any process that is entirely contained in the linear Schrödinger equation, such as decoherence or any other similar linear process; . . .

Este último punto ha sido tratado explícitamente por Bassi y Ghirardi [34], que mostraron recientemente de forma rigurosa que una evolución lineal del tipo (1.1) es incompatible con la existencia de un valor único como resultado de la medida de un sistema:

...the very possibility of performing measurements on a microsystem combined with the assumed general validity of the linear nature of quantum evolution leads to a fundamental contradiction.

1.3.2. Interpretaciones alternativas

Una vez expuesta la necesidad de modificar (o, por lo menos, de reinterpretar) la MCO, procedemos a presentar brevemente algunas de las propuestas surgidas, así como los principales problemas suscitados por cada una de ellas. Resaltamos que no tenemos la intención de ofrecer un catálogo exhaustivo de todas las teorías aparecidas con el fin de superar el problema de la reducción (o colapso) del vector de estado, y mucho menos desarrollarlas con cierta profundidad. La literatura al respecto es abundante, y nuestra intención es simplemente la de ofrecer un contexto para exponer la mecánica Bohmiana.

Por otro lado, sería más adecuado hablar de familias o categorías de interpretaciones más que de teorías aisladas, ya que bajo un mismo esquema general, varios autores introducen diferencias más o menos sutiles de interpretación. Intentaremos por lo tanto presentar brevemente en cada caso el formalismo común subyacente a cada familia de interpretaciones.

Historias consistentes

La interpretación de las historias consistentes (IHC), propuesta por Griffiths ([42], [43], [44]) y desarrollada posteriormente principalmente por autores como Omnès ([73],[74],[75],[76]), y Gell-Mann y Hartle ([64],[61],[62],[63]), es, quizá, la más fiel a la MCO. No añade apenas ningún elemento nuevo a la teoría, sino que prácticamente sólo la reformula. Consigue así evitar las ambigüedades relativas al colapso, y aclara en gran medida conceptos escurridizos como el de complementariedad. En este sentido, parece indicado hablar de una reinterpretación más que de una teoría nueva. De hecho, según Bub [18], merece el apelativo de “new orthodoxy”.

En la MCO, el sistema sigue una evolución lineal, y el carácter estocástico de los resultados experimentales queda reflejado sólo “al final del camino”, mediante la aplicación del postulado del colapso en el instante mismo de la observación. Una de las consecuencias más impactantes de este hecho es que, de acuerdo con la MCO, es en general imposible adscribir cualquier propiedad física de forma consistente a un sistema mientras evoluciona entre dos medidas sucesivas, a lo que suele aludirse como una falta de *realismo* de la teoría. En cambio, en la IHC la evolución del sistema es completamente estocástica, lo cual veremos que permite dar sentido a la afirmación de que el sistema tiene una propiedad determinada en un instante dado. De esta forma, la *identidad* y la *realidad* de un sistema cerrado adquieren un significado concreto sin necesidad de que sea observado.

El formalismo se basa en asignar probabilidades a *historias* definidas por un conjunto de proyectores en una serie de instantes determinados. Una historia \mathcal{H} está pues definida a partir de un conjunto $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de tiempos ($t_0 < t_1 < \dots < t_n$) y un conjunto de proyectores sobre subespacios del espacio de Hilbert del sistema $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$. Esta historia se asocia a la proposición “el vector de estado que representa al sistema pertenece al subespacio generado por \mathbf{P}_0 en el instante t_0 , al subespacio generado por \mathbf{P}_1 en el instante t_1, \dots , y al subespacio generado por \mathbf{P}_n en el instante t_n ”. A cada historia (proposición), se le asocia una probabilidad mediante la expresión siguiente [58]:

$$P(\mathcal{H}) = \text{Tr}\{\tilde{\mathbf{P}}_n \dots \tilde{\mathbf{P}}_1 \rho(t_0) \tilde{\mathbf{P}}_1 \dots \tilde{\mathbf{P}}_n\}, \quad (1.40)$$

donde los $\tilde{\mathbf{P}}$ son los proyectores en la representación de Heisenberg, es decir, sujetos a la transformación unitaria definida por el operador de evolución:

$$\tilde{\mathbf{P}}_m = \mathbf{U}^\dagger(t_m, t_0) \mathbf{P}_m \mathbf{U}(t_m, t_0). \quad (1.41)$$

Sólo queda postular que el sistema seguirá una historia \mathcal{H} (es decir, poseerá en los tiempos correspondientes las propiedades físicas descritas por los proyectores) con una probabilidad $P(\mathcal{H})$. De esta forma se completa el programa de asignar propiedades físicas concretas a sistemas cerrados (es decir, no observados). La libertad en la elección de los proyectores utilizados para definir \mathcal{H} refleja la posibilidad de utilizar diferentes variables físicas para describir un sistema.

Falta, sin embargo, dar cuenta en el contexto de esta teoría del concepto de *complementariedad*, es decir, de la incompatibilidad de ciertas descripciones físicas. Por ejemplo, debe quedar reflejada la imposibilidad de asignar *simultáneamente* una probabilidad determinada a estas dos historias: una primera que contenga en un instante t el proyector sobre un posición concreta $|x_0\rangle\langle x_0|$ y otra que contenga, en el mismo instante t , un proyector sobre un valor determinado del momento $|p_0\rangle\langle p_0|$. Es útil, por lo tanto, agrupar la miríada de posibles historias (obtenidas variando los proyectores y los instantes de tiempo) en *familias consistentes*, de forma que sólo podremos asignar una probabilidad (de acuerdo con 1.40) a dos o más historias simultáneamente si pertenecen a la misma familia. Las historias \mathcal{H}_i de una misma familia consistente están definidas en la misma serie temporal t_0, t_1, \dots, t_j por proyectores $\tilde{\mathbf{P}}_i(t_j)$ en cada tiempo t_j tales que:

$$\sum_i \tilde{\mathbf{P}}_i(t_j) = \mathbb{I}. \quad (1.42)$$

y

$$\tilde{\mathbf{P}}_i(t_j) \tilde{\mathbf{P}}_k(t_j) = \tilde{\mathbf{P}}_i(t_j) \delta_{ik} \quad (1.43)$$

Esto garantiza que el sistema seguirá con toda seguridad *alguna* de las historias de la familia. Consideremos ahora la definición de una historia obtenida

combinando, en un tiempo determinado, dos proyectores de la familia. Teniendo en cuenta que los proyectores son ortogonales, puede decirse que representan sucesos excluyentes, por lo que la probabilidad asociada a la historia resultante debería ser la suma de las probabilidades de las historias correspondientes a cada uno de los proyectores por separado. Sin embargo, a la vista de 1.40, la probabilidad obtenida sustituyendo un proyector por una suma incluye términos de interferencia que destruyen la aditividad de las probabilidades. Definimos por lo tanto la condición de *consistencia* de una familia exigiendo la anulación de los términos de interferencia:

$$\text{Tr}\{\tilde{\mathbf{P}}_{i_n}(t_n) \dots \tilde{\mathbf{P}}_{i_1}(t_1) \rho(t_0) \tilde{\mathbf{P}}_{i'_1}(t_1) \dots \tilde{\mathbf{P}}_{i'_n}(t_n)\} \propto \delta_{i_1, i'_1} \dots \delta_{i_n, i'_n}. \quad (1.44)$$

Así pues, la noción de complementariedad de las descripciones de un sistema físico enunciada en la MCO (de la cual el ejemplo paradigmático es la dualidad onda-corpúsculo) queda reflejada en la IHC por la prohibición de utilizar en la discusión de un problema historias pertenecientes a diferentes familias consistentes.

Esta interpretación (probablemente la más “minimalista” de las que enunciaremos) ofrece pues una solución al problema que supone el tránsito de la evolución hamiltoniana al colapso estocástico del vector de estado. Esta solución consiste en descartar la evolución lineal del sistema y considerar que éste obedece en todo momento una ley estocástica de evolución. En el contexto de la IHC, el operador de evolución se limita a contribuir a la asignación de una probabilidad a cada historia, así como a determinar, a través de (1.44), la consistencia de las familias de historias.

Como ya hemos mencionado, la gigantesca cantidad de posibles familias se corresponde con la cantidad de variables distintas que pueden utilizarse para describir un sistema. Por otro lado, independientemente de la capacidad de una teoría de reproducir resultados experimentales concretos, es deseable que tenga el máximo poder predictivo posible (lo cual puede considerarse como una medida de la utilidad de la teoría). Concretamente, sería interesante que contuviera a la Mecánica Newtoniana como un caso límite, por ejemplo descartando los demás comportamientos posibles por ser abrumadoramente improbables. En este sentido, la debilidad de la IHC estriba, según algunos autores ([54],[56],[57]), en la imposibilidad de privilegiar, entre todas las familias posibles, aquellas que corresponden a la descripción mediante variables clásicas de los sistemas macroscópicos. De hecho, se ha mostrado que la mayoría de las familias consistentes son totalmente no clásicas [87]. Kent expresa claramente esta opinión en [54]:

This, in fact, is the key question. The formalism offers a myriad of possible variables for describing physics. Can it, suitably interpreted, explain why the world reliably continues to appear to us always to be described by the particular measure zero subset

corresponding to familiar quasi-classical variables? Dowker and I argue that it cannot.

A esta afirmación cabe añadir el punto de vista de Pearle [80]:

There is a test I think should be applied to all theories with fundamental pretensions. If, confronted with an initial state vector of a seriously complicated and realistic part of the world (e.g., the local galactic group), are there well-defined procedures for constructing the mathematical quantities which correspond to the possible real events which take place in the world? The point of this test is to see if a theory can do more than just handle some simplified models into which ad hoc features creep. So far the consistent histories approach does not pass this test.

Interpretación de Everett

Ante la incapacidad de la MCO de ofrecer un resultado único a una medida, Everett [30] propuso una solución a primera vista sencilla: *no* existe tal resultado único. La interpretación de Everett, denominada también por algunos autores [1] interpretación de los muchos mundos (Many Worlds Interpretation o MWI) comparte con sus secuelas (ver por ejemplo [28],[41]) una característica esencial: resuelve el problema del colapso simplemente eliminando el postulado del formalismo. En esta teoría, un sistema siempre es descrito por un vector de estado y evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, sin apelar en ningún momento a una evolución no lineal.

La MWI se propone pues explicar cómo un observador tiene la *impresión* de que las superposiciones de estados (que, como hemos visto, son una consecuencia inevitable de la evolución lineal del vector de estado) desaparecen del mundo macroscópico. Para entender esto, debemos incluir el estado $|o\rangle$ del observador en la descripción de cualquier fenómeno. Consideremos, por ejemplo, la medida de un sistema cuántico de dos niveles ($|s_1\rangle$ y $|s_2\rangle$) mediante su interacción con un aparato de medida, que podrá estar en los estados macroscópicamente diferenciados correspondientes $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$. Inmediatamente después de la medida, el vector de estado total $|\Psi\rangle$ refleja las correlaciones aparecidas entre el observador y el aparato de medida:

$$|\Psi\rangle = c_1|s_1\rangle|a_1\rangle|o_1\rangle + c_2|s_2\rangle|a_2\rangle|o_2\rangle. \quad (1.45)$$

El vector $|\Psi\rangle$ describe la superposición de dos estados: uno en el cual el observador ha obtenido el resultado 1 y otro estado en el que ha obtenido el resultado 2. Lo esencial es que la teoría no prevé la existencia de correlaciones entre un estado determinado del observador y una superposición de estados macroscópicos del aparato, por lo que no necesita eliminar explícitamente esta eventualidad mediante otro postulado como el del colapso del vector

de estado. Para entender esto correctamente, es imprescindible recordar los resultados relativos al fenómeno de decoherencia enunciados anteriormente, según los cuales la descomposición (1.45) es única. De esta forma, queda seleccionada una base privilegiada en la cual se establecen las correlaciones. Como vimos, esta base es la de posición, lo cual descarta la posibilidad antes mencionada de que exista un estado que contenga un factor del tipo $(|a_1\rangle + |a_2\rangle)|o_1\rangle$, siendo $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ estados con soporte (macroscópicamente) disjunto en el espacio ordinario [90].

Esta interpretación explica de forma natural la emergencia de la percepción clásica de la naturaleza como consecuencia de la localización descrita por la decoherencia. De esta forma, da cuenta de la relevancia de las variables clásicas (por ejemplo, las coordenadas del centro de masa de una bola de billar en el espacio ordinario) en la descripción de un sistema macroscópico, algo que presentaba grandes dificultades en el contexto de la IHC.

Puede parecer, a la vista de lo que acabamos de exponer, que la MWI supone únicamente el reconocimiento de que el colapso es una consecuencia fenomenológica de la evolución lineal hamiltoniana, y que es por lo tanto superfluo postularlo. Sin embargo, al despojar la teoría de todo carácter estocástico aparece otro problema, considerado insalvable por la mayoría de los detractores de la MWI (véanse por ejemplo las críticas de Bell aparecidas en [13]): el de reproducir los resultados probabilísticos de la MCO (por otro lado ampliamente contrastados experimentalmente). Este problema puede ilustrarse mediante el sencillo ejemplo propuesto más arriba (1.45), tomando $c_1 \neq c_2 \neq 1/\sqrt{2}$. Nada en la MWI permite en principio relacionar los coeficientes c_1 y c_2 con las probabilidades relativas de obtener uno u otro resultado de la medida, sobre todo teniendo en cuenta que *los dos* son observados simultáneamente. Citamos a Kent [55]:

Most obviously, there is the problem of how a probabilistic interpretation with definite measurements arises from a deterministic wave function evolution which superimposes the state vectors of all possible measurements.

Se han hecho varios intentos de derivar las probabilidades predichas por la MCO en el contexto de la MWI sin recurrir al postulado de Born que relaciona explícitamente la norma del vector de estado con la probabilidad ([28], [41] y, muy recientemente, [118]), aunque algunos autores los consideran insatisfactorios (ver, por ejemplo, [55] y [87]).

Según los detractores de las MWI es necesario completar estas teorías con un mecanismo que “elijan” (con la probabilidad requerida) una u otra proyección de la función de onda desechando de paso las componentes “vacías”. Si esta elección se hace de manera continua, tendremos esencialmente una generalización de las teorías de onda piloto (ver más adelante), tal como ha sido descrito por Bell [13].

Por lo tanto, los defensores de las MWI rechazan normalmente las teorías de onda piloto precisamente por considerar que introducen elementos superfluos y arbitrarios, al dar por resuelto el problema de la asignación de probabilidades. Zeh [46] defiende claramente esta postura:

The Schrödinger equation, which unavoidably leads to drastic (eventually universal) entanglement between all macroscopic systems... would not have to be modified at all by means of the apparently required probabilistic terms if one dropped the further prejudice that there is only one state of each observer...

...Bohm's pilot wave theory is successful only because it keeps Schrödinger's (exact) wave mechanics unchanged, while the rest of it is observationally meaningless and solely based on classical prejudice...

donde alude explícitamente a la mecánica Bohmiana, que será expuesta más adelante.

Colapso explícito del vector de estado

Hemos mencionado anteriormente que el problema de la medida estriba esencialmente en la indefinición del colapso, es decir, del proceso físico mediante el cual se trunca la evolución lineal hamiltoniana. La estrategia seguida por los proponentes de las teorías de colapso explícito del vector de estado (CEV) es la de incluir el proceso del colapso en la evolución del sistema como un proceso físico más. De esta forma, se pretende señalar el punto concreto en el que se sitúa el corte de Heisenberg que determina, según la MCO, la frontera (hasta entonces borrosa) entre el mundo microscópico y el macroscópico (véase el extenso repaso de estas teorías en [80]).

Como ejemplo de este tipo de teorías, presentamos aquí el formalismo propuesto por Ghirardi, Rimini y Weber (GRW) ([106],[107],[108]). Según estos autores, la función de onda $\Psi(\mathbf{x}, t)$ de una partícula (es decir, el vector de estado en la representación de posición) es sometida a procesos aleatorios de localización (saltos). Estos saltos están descritos mediante la multiplicación de la función de onda por una Gaussiana $\exp(-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/2\sigma^2)$, cuyo centro \mathbf{x}_0 se establece aleatoriamente con una distribución de probabilidad proporcional a $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$. Los intervalos de tiempo entre saltos para una misma partícula se distribuyen también aleatoriamente según una distribución de Poisson de frecuencia λ . Se ha mostrado que, en un sistema de N partículas interactuantes, el salto de una de ellas precipita el colapso efectivo de todas las demás "alrededor" de ella, de forma que la frecuencia de localización del sistema completo será del orden de $N\lambda$. De esta forma, el valor $\lambda^{-1} \approx 10^8$ años propuesto por GRW supone el colapso casi instantáneo de objetos macroscópicos mientras que permite que las superposiciones de

estados sobrevivan por tiempos astronómicos en el caso de sistemas microscópicos de pocas partículas.

Claramente, la localización de una partícula en el espacio ordinario no constituye el caso general de colapso tal como lo define la MCO. De acuerdo con lo expuesto más arriba, el colapso de un vector $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$ descompuesto en una base *arbitraria* $\{|a_n\rangle\}$ se describe mediante la selección aleatoria de uno de los estados de la base. Teniendo esto en cuenta, se han propuesto teorías en las cuales la inclusión de un término no lineal en la ecuación de Schrödinger es responsable de esta selección. En estas teorías, el colapso es un proceso continuo (mientras que para GRW era instantáneo) en el cual uno de los coeficientes c_i del desarrollo del vector de estado tiende a 1 exponencialmente ($|c_i|^2 = 1 - \exp(-\gamma t)$) mientras que los demás tienden a 0 [80]. Sin embargo, el carácter arbitrario de la elección de una base del espacio de Hilbert para la descripción de un estado cualquiera supone una dificultad a la hora de considerar este modelo de colapso como un fenómeno físico objetivo. La teoría de GRW evita este problema eligiendo explícitamente la base de posición para describir el vector de estado.

En cualquier caso, cabe destacar que estos formalismos de CEV, a diferencia de otras *interpretaciones* de la Mecánica Cuántica, pueden considerarse más bien como *teorías* alternativas. Como hemos visto, describen sin ambigüedad el paso de los sistemas microscópicos (con superposición de estados) a los macroscópicos mediante la introducción de nuevas constantes físicas fundamentales, tales como la longitud σ y la frecuencia λ de la teoría de GRW. El valor de estas constantes y la eventual refutación de estas teorías frente a la MCO es, en principio, verificable experimentalmente.

En cualquiera de sus formas, las teorías de CEV presentan un problema adicional a la hora de relacionar el vector de estado con el resultado de una observación. El postulado de la medida de la MCO establece que un resultado único sólo se obtiene si el sistema se encuentra en uno de los autoestados del observable considerado. Ahora bien, este colapso nunca se consigue *estrictamente* en los formalismos que acabamos de presentar (en el caso de las teorías de colapso continuo habría que esperar un tiempo infinito, mientras que en la teoría de GRW la localización nunca es completa). Esto obliga a relajar en cierta medida la relación entre el autovalor y el resultado de la medida.

Teorías de onda piloto

Una de las dificultades conceptuales de la MCO es, sin duda, la de establecer de qué trata exactamente. Es habitual ilustrar este punto mencionando la dificultad de conciliar los dos enunciados siguientes: (i) la descripción exhaustiva de un sistema está dada por su vector de estado, (ii) el vector de estado proporciona una distribución de probabilidad. La interpretación natural de una distribución de probabilidad es la de asociarla a

una propiedad del sistema cuyo valor exacto se ignora, lo cual estaría en conflicto con el enunciado (i). Por lo tanto, en el contexto de la MCO no puede hablarse de la probabilidad de que una propiedad *tenga* un determinado valor, sino de la probabilidad de que *se mida* un determinado valor cuando se realiza un experimento sobre el sistema. En definitiva, la mayoría de los físicos consideran que el objeto de la MCO son los *resultados experimentales* (expresados en términos de variables clásicas). En palabras de Bell [12]:

Then came the Born interpretation. The wavefunction gives not the density of stuff, but gives rather (on squaring its modulus) the density of probability. Probability of what, exactly? Not of the electron being there, but of the electron being found there, if its position is “measured”.

Sin embargo, parece lógico preguntarse si la Mecánica Cuántica puede reformularse de forma que se recupere la interpretación natural de la distribución de probabilidad. Evidentemente, esto supondría abandonar el enunciado (i) y completar la descripción del sistema con lo que ha sido a menudo denominado como “variables ocultas”. Este es precisamente el programa de las teorías de onda piloto, incorporando al formalismo estas variables adicionales (que, como veremos, serán las posiciones de las partículas en el espacio de configuración). La dinámica de estas variables está determinada por la función de onda, que, de este modo, guía a la partícula en su movimiento. Este es el origen del término “onda piloto”, utilizado por primera vez por Louis de Broglie en 1926 [27]. Esta interpretación resuelve de forma muy natural el problema de la medida: las posiciones de las partículas tienen una existencia objetiva que puede ser observada directamente. Estudiaremos con más detalle este formalismo en la sección siguiente, considerando el caso concreto de la mecánica Bohmiana.

1.4. Mecánica Bohmiana

La mecánica Bohmiana (MB), desarrollada por David Bohm en 1952¹³ surge al interpretar los resultados estadísticos encarnados en la función de onda de un sistema de una forma natural, es decir, admitiendo que proporciona la distribución de probabilidad *genuina* de que las partículas que conforman el sistema ocupen una posición determinada. Estas posiciones existen en todo momento y pueden determinarse con precisión arbitraria. Una consecuencia inmediata es la existencia de trayectorias en el espacio de configuración para cualquier sistema, independientemente de que sea *cerrado* o esté interactuando con el entorno. En definitiva, al igual que en la IHC,

¹³Las referencias originales son [23],[24]. Existen también buenas monografías sobre el tema [49],[51]. Puede también consultarse una breve exposición reciente [70].

un sistema físico posee una realidad *objetiva* independiente del proceso de observación.

En este punto, es importante tener en cuenta que la mecánica Bohmiana postula un nivel de descripción subyacente a la MCO, y que, por lo tanto, a la hora de comparar las predicciones de ambas teorías hay que ser especialmente cuidadosos. Concretamente, los resultados de la MCO relativos a un sistema microscópico deben expresarse en última instancia en términos de hechos experimentales y variables clásicas. Por lo tanto, para cotejarlos con los de la mecánica Bohmiana tendremos que considerar una situación equivalente, es decir, la interacción del sistema microscópico con uno macroscópico que haga las veces de aparato de medida. Dicho de otro modo, aunque la mecánica Bohmiana permite hablar con toda propiedad del comportamiento de un sistema cerrado, veremos explícitamente en la segunda parte de este trabajo que la interacción con un aparato de medida es fundamental para entender aspectos esenciales. La medida de propiedades físicas distintas de la posición, cómo puede reconciliarse la mecánica Bohmiana con el concepto de complementariedad, la forma de eludir teoremas de *imposibilidad de las variables ocultas* tales como los de Von Neumann ¹⁴[72] o Kochen–Specker [89], o la desaparición de superposiciones de estados en sistemas macroscópicos son fenómenos que sólo pueden entenderse a través de la interacción del sistema con un entorno.

1.4.1. Formalismo matemático

Según este formalismo, un sistema de N partículas con masas $m_1 \dots m_N$ está caracterizado por las posiciones $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N$ de cada una de ellas (un conjunto de N coordenadas tridimensionales al que nos referiremos con la letra mayúscula \vec{X} : $\vec{X} \equiv \vec{x}_1 \dots \vec{x}_N$) y por la función de onda $\psi(\vec{X})$. Así pues, la caracterización completa del sistema en cualquier instante de tiempo t vendrá dada por el binomio $(\psi(\vec{X}, t); \vec{X}(t))$. Debemos pues ocuparnos del comportamiento de estos dos objetos, es decir, de las leyes que gobiernan su dinámica. Las ecuaciones correspondientes conforman el formalismo matemático de la mecánica Bohmiana, y su derivación más habitual es la que aparece en los artículos originales de Bohm [23], [24] y en los libros de Bohm y Hiley y de Holland [49], [51]. Sin embargo, seguiremos aquí el desarrollo propuesto por Dürr, Goldstein y Zanghì [68], [70], que pretende resaltar las simetrías que posee la ley de evolución de las partículas.

La evolución de la función de onda del sistema está determinada por la

¹⁴La relevancia general de varios “teoremas de imposibilidad de las variables ocultas” y su relación en particular con la mecánica Bohmiana está espléndidamente tratada en varios artículos recogidos en el libro de Bell [13].

ecuación de Schrödinger habitual en la representación de posición:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_k} \psi + V \psi, \quad (1.46)$$

donde $V = V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$ es la energía potencial del sistema. Para reproducir la fenomenología de la Mecánica Cuántica, es imprescindible que la evolución de las coordenadas de las partículas del sistema esté determinada por la función de onda. Intentaremos pues establecer esta ley de evolución a partir de tres exigencias: (i) invariancia ante transformaciones de Galileo, (ii) acuerdo con las predicciones de la MCO, y (iii) en el caso de que subsista alguna ambigüedad (como, de hecho, ocurrirá) apelaremos a un criterio de simplicidad (que será, inevitablemente, más subjetivo).

Invariancia de Galileo

Como opción más sencilla (por el hecho de involucrar sólo las derivadas primeras de las coordenadas), exploraremos la posibilidad de que la función de onda determine directamente el campo de velocidades de las partículas. Por lo tanto, la evolución de cada partícula k estará determinada por la siguiente ecuación diferencial de primer grado:

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = \vec{v}_k(\psi(\vec{X})), \quad (1.47)$$

donde resaltamos que la dependencia funcional de la velocidad con las coordenadas se establece a través de la función de onda del *sistema total*. Nótese que, dado que tanto (1.46) como (1.47) son ecuaciones diferenciales de primer grado, la especificación en cualquier instante de la función de onda y las coordenadas de las partículas (además, claro está, del conocimiento del potencial V), determina en todo momento el estado del sistema (es decir: $\psi(t)$ y $\vec{X}(t) \equiv \vec{x}_1(t) \dots \vec{x}_N(t)$).

Consideremos primero un sistema formado por una sola partícula de masa m . Una transformación de Galileo define la relación existente entre las coordenadas de la partícula en un sistema de referencia O y en otro O' que se desplaza respecto de aquél a una velocidad constante \vec{V} :

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t \\ t' = t. \end{cases} \quad (1.48)$$

Por lo tanto, para que sea invariante de Galileo, la relación entre las velocidades de la partícula ha de ser:

$$\vec{v}'(\psi'(\vec{x}')) = \vec{v}(\psi(\vec{x} - \vec{V}t)) - \vec{V}. \quad (1.49)$$

Ahora bien, ante una transformación de Galileo, la función de onda se transforma del modo siguiente [36]:

$$\psi'(\vec{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar} m V^2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} m \vec{x}' \cdot \vec{V}} \psi(\vec{x}' + \vec{V}t). \quad (1.50)$$

Si suponemos además que la velocidad es una función homogénea de grado 0 de la función de onda (de modo que una diferencia en la constante de normalización de la función de onda no modifique la trayectoria de la partícula), puede comprobarse que la función de ψ más sencilla para la velocidad que cumpla (1.49) es [68]:

$$\vec{v} = -\frac{\hbar}{m} \text{Im} \frac{\psi \vec{\nabla} \psi^*}{|\psi|^2}. \quad (1.51)$$

La velocidad de una partícula k perteneciente a un sistema de N partículas se obtiene generalizando la expresión anterior:

$$\vec{v}_k = -\frac{\hbar}{m_k} \text{Im} \frac{\psi \vec{\nabla}_k \psi^*}{|\psi|^2}, \quad (1.52)$$

donde el subíndice k en el gradiente indica que las derivadas deben calcularse respecto a las coordenadas de la partícula k .

Incluimos como ejemplo en la figura 1.2 las trayectorias correspondientes a un caso que será tratado en detalle más adelante (2.5.1). Se trata del movimiento en una dimensión de la superposición de dos paquetes gaussianos libres moviéndose en direcciones opuestas con velocidad constante. Obsérvese que en los primeros instantes las trayectorias se curvan, recreando así las interferencias entre los dos paquetes. A medida que se separan, las partículas adquieren trayectorias rectilíneas, correspondientes a una velocidad constante (el tiempo es demasiado corto como para apreciar el ensanchamiento natural).

Compatibilidad con la MCO

Nos ocuparemos ahora de verificar que las ecuaciones (1.46) y (1.52) definen una teoría compatible con la MCO. Teniendo en cuenta que la MCO no contempla la existencia de una posición definida para la partícula (salvo en el caso muy especial de que su función de onda sea una delta de Dirac), la comparación debe hacerse a nivel estadístico. Debemos, pues, estudiar la distribución estadística de posiciones generada por el movimiento de las partículas en el campo de velocidades definido por (1.52).

Consideremos un conjunto de muchas partículas *no interactuantes*, sometidas a un mismo potencial monoparticular $V(\vec{x})$ y distribuidas aleatoriamente según una densidad inicial de probabilidad $P(\vec{x}, t_0)$. Si suponemos que todas las partículas poseen la misma función de onda (de una sola partícula) $\psi(\vec{x})$, estarán sometidas al mismo campo de velocidades (1.51), y la densidad de probabilidad en cualquier instante de tiempo será la solución de una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial P(\vec{x}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hbar}{m} \text{Im} \frac{\psi \vec{\nabla} \psi^*}{|\psi|^2} P(\vec{x}, t) \right) = 0 \quad (1.53)$$

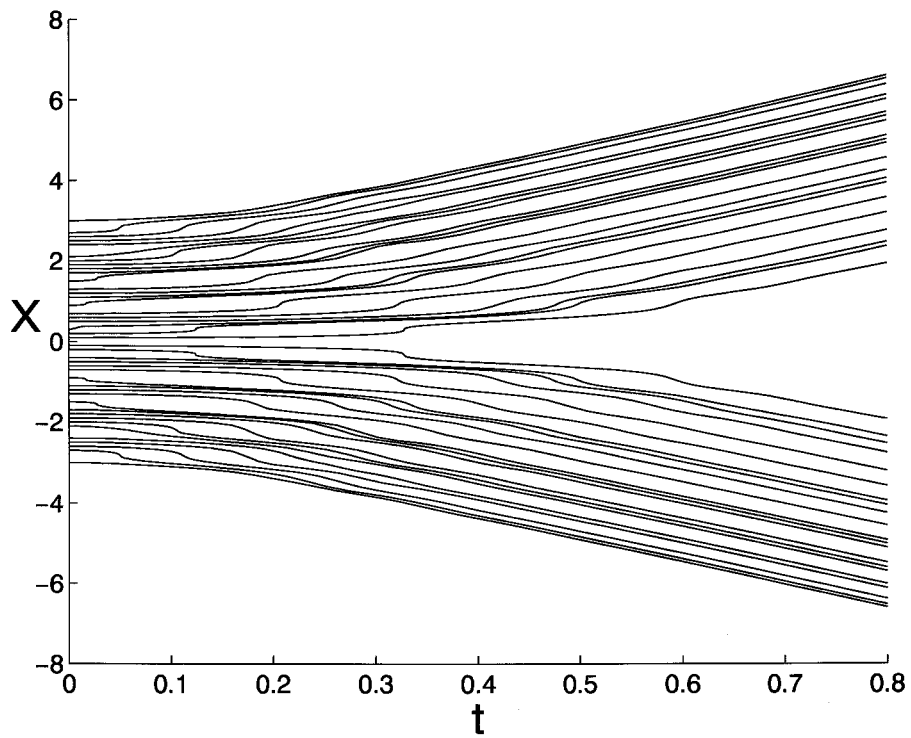


Figura 1.2: Trayectorias de Bohm correspondientes a una superposición equilibrada de dos paquetes gaussianos libres moviéndose en direcciones opuestas con velocidad constante. Los parámetros que relacionan estas trayectorias con la descripción hecha en la sección (2.5.1) son: $S = 5$, $a = b = 1/\sqrt{2}$.

con la condición inicial correspondiente. La compatibilidad de ambas teorías supone que la probabilidad, según la mecánica Bohmiana, de que la partícula *esté* en una determinada posición debe coincidir con la probabilidad de que la partícula *se mida* en esa misma posición según la MCO. En definitiva, debemos comprobar que la distribución $P(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$ es solución de la ecuación (1.53). Basta para ello recordar que la distribución cuántica $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ también es solución de una ecuación de continuidad (ver, por ejemplo, [60]):

$$\frac{\partial |\psi(\vec{x}, t)|^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0, \quad (1.54)$$

con el vector de flujo cuántico:

$$\vec{\mathbf{J}} = -\frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi \vec{\nabla} \psi^*). \quad (1.55)$$

Sustituyendo (1.55) en (1.54), obtenemos la ecuación (1.53) para $P(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$, con lo cual queda establecido que la distribución de probabilidad predicha por la MCO es solución de la ecuación de continuidad que define la distribución correspondiente de la mecánica Bohmiana. Este resultado es fácilmente extrapolable al caso de un sistema de varias partículas, y define la propiedad de *equivariancia* de la distribución $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ en el campo de velocidades bohmiano.

Sin embargo, es fácil comprobar que la solución $P = |\psi|^2$ de la ecuación (1.53) no es única, sino que para obtenerla es necesario imponer la condición siguiente sobre las posiciones iniciales de las partículas:

$$P(\vec{x}, t_0) = |\psi(\vec{x}, t_0)|^2. \quad (1.56)$$

En el contexto de la mecánica Bohmiana esta condición es, cuando menos, insólita, ya que cabría más bien esperar que la distribución estadística fuera consecuencia de la dinámica de las partículas. En principio no es descabellado imponer restricciones sobre las condiciones iniciales de las variables libres del problema (en este caso, las posiciones), de acuerdo con criterios físicos. Por ejemplo, en el caso de tratar con un sistema ligado, podría parecer sensato descartar distribuciones iniciales que no se anularan con suficiente rapidez fuera del rango del potencial. Pero la imposición de la condición (1.56) parece demasiado arbitraria, sobre todo teniendo en cuenta que, en la mecánica Bohmiana, la función de onda actúa simplemente como *guía* del movimiento de las partículas, papel que no parece estar lógicamente relacionado con el de una distribución de probabilidad. Este es, sin duda, uno de los principales problemas que presenta la mecánica Bohmiana (este hecho ha sido reconocido desde muy pronto [52], [79] incluso por el propio Bohm [25]), y uno de los resultados presentados en esta tesis pretende ser un paso hacia su solución. Volveremos sobre él más adelante.

Puede parecer que, en los párrafos anteriores, sólo hemos establecido el acuerdo entre las descripciones de experimentos destinados a medir la

posición de las partículas. Sin embargo, la MCO permite la descripción del vector de estado de un sistema en términos de una base cualquiera del espacio de Hilbert, lo que permite obtener distribuciones de probabilidad relativas a cualquier observable físico, algo no contemplado explícitamente en la mecánica Bohmiana. Sin embargo, los autoestados de *cualquier* operador pueden representarse en la base de posición¹⁵, de modo que la probabilidad de medida de una propiedad física siempre puede expresarse, según la MCO, en términos del módulo de una función de onda al cuadrado (para una formulación explícita de la Mecánica Cuántica no relativista en términos de *funciones de onda* y sin mencionar los *vectores de estado*, véase [60]).

En este sentido, la mecánica Bohmiana es una expresión concreta de la idea de Bohr según la cual cualquier resultado experimental debe ser expresado en última instancia mediante variables clásicas. Consideraremos explícitamente un caso concreto estudiando la medida del espín de una partícula neutra desde las perspectivas de la mecánica Bohmiana y de la MCO.

Existencia y unicidad de las trayectorias

Una cuestión (algo más técnica) que merece ser mencionada es la de la existencia general de las trayectorias definidas por (1.47) y (1.52). Estas trayectorias han sido integradas (analítica o numéricamente) para varios casos de interés, tales como la partícula libre, el experimento de doble rendija [77], [50] el oscilador armónico [100], [97] el átomo de Hidrógeno [103] o el experimento de Stern–Gerlach (en este trabajo). Sin embargo, el campo de velocidades presenta singularidades en los nodos de la función de onda, lo cual hace pensar que el caso general puede presentar dificultades. Con todo, ha sido mostrado que las trayectorias definidas por la mecánica Bohmiana existen para una clase muy amplia de hamiltonianos, y que estas trayectorias no pasan por los puntos singulares del campo de velocidades [69].

A la vista de la derivación de las ecuaciones de la dinámica del sistema $(\psi; \vec{X})$ que hemos presentado más arriba, es natural plantearse si la forma concreta de \vec{v}^ψ es única. Nos referimos aquí a la posibilidad de que pueda definirse una velocidad distinta de la propuesta en (1.52) que satisfaga los mismos criterios (salvo, quizá, el de “simplicidad”).

Esta cuestión ha sido estudiada con bastante detalle por Deotto y Ghirardi [35]. No nos ocuparemos aquí de ella, pero la conclusión es que existen infinitas trayectorias no equivalentes que satisfagan las condiciones de invariancia de Galileo y reproduzcan la distribución cuántica de probabilidades.

¹⁵Con la importante excepción de los operadores de espín. La medida del espín en el contexto de la mecánica Bohmiana será tratada explícitamente en esta tesis.

1.5. La distribución inicial en la mecánica Bohmiana

Hemos mencionado ya que una de las principales críticas que se le han hecho a la mecánica Bohmiana [52], [79], [25] es la necesidad de postular la distribución inicial de partículas $P(\vec{x}, t_0) = |\psi(\vec{x}, t_0)|^2$, donde $\psi(\vec{x}, t_0)$ es la función de onda en el instante inicial. Las críticas expresan generalmente la necesidad de que, en una teoría como la mecánica Bohmiana, la distribución final de las posiciones de las partículas sea una consecuencia directa de la dinámica aplicada a una distribución inicial *arbitraria* de estas partículas.

Como ya sabemos, la ecuación (1.53) sin ninguna modificación no permite, en general, obtener la distribución cuántica a partir de una distribución arbitraria. Un caso particularmente ilustrativo es el de un estado estacionario del tipo

$$\psi(x, t) = f(x) e^{iEt/\hbar} \quad (1.57)$$

con $f(x)$ real. Según (1.51), la velocidad de la partícula será siempre nula, con lo cual la distribución de partículas en un conjunto de sistemas de este tipo será, en todo momento, igual a la distribución inicial. En definitiva, la distribución cuántica no puede de ningún modo considerarse una solución asintótica de equilibrio de la ecuación (1.53) (a menos, repetimos, que se modifique de alguna forma su ecuación de evolución).

1.5.1. El equilibrio cuántico de Dürr, Goldstein y Zanghì

En su artículo de 1992 [68], Dürr, Goldstein y Zanghì abordan el problema de forma totalmente distinta a la de la mayoría de los autores que se han ocupado del asunto. Se proponen justificar lo que denominan la *hipótesis del equilibrio cuántico*, que es, esencialmente, la exigencia de que cualquier sistema tenga la distribución cuántica habitual. A pesar de ser bien conocida, la citamos literalmente para futuras referencias:

Si un sistema tiene una función de onda $\psi(x)$, la distribución de probabilidad $\rho(x)$ de sus coordenadas es

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2. \quad (1.58)$$

Empezamos por mencionar algunas de las sutilezas que esconde la expresión (1.58) en el contexto de la mecánica Bohmiana. Consideremos un sistema macroscópico cuya función de onda conste de varios paquetes de onda localizados en regiones disjuntas del espacio (por ejemplo, un aparato después de una medida). Sabemos que, a pesar de que la posición de la partícula Bohmiana localizará el sistema en uno de los paquetes, la función de onda seguirá conteniendo la superposición completa. Por lo tanto, la distribución de posiciones observada parece estar en flagrante contradicción con

(1.58). Evidentemente, la MCO evita este problema “actualizando” la función de onda mediante el postulado del colapso, pero la mecánica Bohmiana no prevé ningún mecanismo equivalente.

Es cierto que en mecánica Bohmiana puede también actualizarse la función de onda del subsistema a partir del conocimiento de las posiciones de algunos de los grados de libertad que interactúan con él (véase más adelante en la sección (3.2)). Por lo tanto, parece lógico admitir que esta función de onda es la que debe aparecer en el segundo miembro de la expresión (1.58). Sin embargo, esta función carece en general de las propiedades dinámicas que deberían permitir definir la trayectoria de la partícula¹⁶(véase (3.2)), a menos que esté perfectamente *aislado*. Sólo en este último caso podrá asignársele una función de onda “genuina” con la que poder determinar su evolución de forma autónoma, calculando, en el caso de la mecánica Bohmiana, el campo de velocidades.

La conclusión, aparentemente sorprendente, es que el único sistema del que se puede afirmar (en sentido estricto y sin más análisis) que tiene una función de onda y al que, por lo tanto, podemos aplicar la mecánica Bohmiana, es el formado por todas las partículas del universo. Obviamente, es crucial saber cómo fijar la atención en subsistemas más pequeños y describir su dinámica en términos de un hamiltoniano y una función de onda más o menos “autónomos”, es decir, desacoplados del resto del universo. Para lograrlo, tendremos que seguir (más o menos explícitamente) el procedimiento descrito más adelante de *preparación de un estado cuántico* (3.2.2). Sólo entonces podremos hablar de la *función de onda del sistema* con un grado razonable de aproximación, sin necesidad de tener explícitamente en cuenta que, en última medida, la trayectoria seguida por la partícula que nos interesa no es más que una proyección de la trayectoria $\vec{Z}(t) \equiv \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_N\}$ seguida por todas las partículas del universo. Siendo la mecánica Bohmiana una teoría determinista, esta trayectoria universal (y, por lo tanto, el estado de cualquier subsistema) estará totalmente determinada por los siguientes elementos: (i) el hamiltoniano universal H , y (ii) el estado inicial $(\Psi_0; \vec{Z}_0)$ del universo, caracterizado por la función de onda inicial y las posiciones iniciales de todas las partículas.

Probabilidad en el colectivo microcanónico

Para indagar en el origen de la aleatoriedad en el contexto de una teoría determinista, consideramos el ejemplo del colectivo microcanónico, para el cual la mecánica estadística establece dos niveles de descripción: por un lado, el macroestado Γ_M del sistema (determinado por la energía total y otras

¹⁶Si el sistema no está aislado, su evolución no estará determinada por un hamiltoniano expresado únicamente en términos de las variables que lo definen, sino que dependerá también de las posiciones del entorno en contacto con él. Concretamente, su evolución no será lineal.

magnitudes termodinámicas *macroscópicas*, como, por ejemplo, el número medio de partículas en elementos de volumen de cierto tamaño del espacio de las fases), representa toda la información sobre el sistema a la que podemos tener acceso. Por otro lado, el microestado, definido por el punto $X_m \equiv \{\vec{Q}_m, \vec{P}_m\}$ en el espacio de las fases ocupado por el sistema, describe exhaustivamente el mismo.

Evidentemente, el microestado del sistema nos es desconocido, aunque deberá ser compatible con su macroestado, lo cual supone, entre otras posibles restricciones, que el punto X_m esté incluido en la superficie de energía constante correspondiente a la energía total del sistema. Intentaremos refinar esta descripción estableciendo una densidad de probabilidad $\mathbb{P}(X | \Gamma = \Gamma_M(X)) dX$ que determine la probabilidad por unidad de volumen fásico de que el sistema se encuentre en un punto determinado condicionada a que el macroestado sea precisamente Γ_M . Esta densidad de probabilidad deberá reflejar un desconocimiento máximo de X *dadas las restricciones* (determinadas por Γ), y ser conservada por la evolución dinámica de X : $\mathbb{P}(X_m(t)) dX = \mathbb{P}(X_m(0)) dX$. Esta última condición es muy importante, y refleja simplemente el hecho de que $X(t)$ está totalmente determinado por $X(0)$ (recordemos que ambos puntos están relacionados entre sí por medio de la evolución determinista hamiltoniana).

Como es sabido, la densidad de probabilidad que emana de estos criterios es simplemente la distribución uniforme en la superficie de energía correspondiente, es decir, la asignación de la misma probabilidad a todos los microestados. Sin embargo, el hecho de que esta elección parezca especialmente *natural* y poco arbitraria no debe distraernos del papel fundamental que juega la dinámica a la hora de justificarla. En efecto, la invariancia de esta distribución está garantizada por el teorema de Liouville, según el cual la evolución hamiltoniana preserva el volumen en el espacio de las fases. Sin este resultado, habría que abandonar la distribución microcanónica (uniforme) por otra distribución invariante. En definitiva, es esencial considerar la función de la dinámica a la hora de establecer una definición *natural* de probabilidad en el espacio de las variables relevantes (en este caso, el espacio de las fases, mientras que para la mecánica Bohmiana lo será el espacio de configuración).

Para concluir este breve paso por la mecánica estadística, puede ser interesante observar que el único sistema que puede ser estrictamente caracterizado por un colectivo microcanónico es el formado por todo el universo. Esto es así, además, exactamente por el mismo motivo por el que es el único que tiene función de onda: porque está *perfectamente* aislado, es decir, tiene una energía total *estrictamente* constante.

Posiciones iniciales *típicas* en un universo bohmiano

Con estos antecedentes, los autores intentan llevar a cabo un programa similar para el caso de la mecánica Bohmiana. En un universo bohmiano determinista, la aleatoriedad de las posiciones de un sistema cualquiera es consecuencia del desconocimiento de la configuración inicial \vec{Z}_0 del universo. Al igual que en el caso del colectivo microcanónico, nos gustaría caracterizar lo mejor posible esta aleatoriedad a través de una distribución de probabilidad en el espacio de configuración. Obviamente, esta distribución deberá ser *natural* en el sentido que hemos definido anteriormente, es decir, tendrá que ser conservada por la dinámica del sistema. De acuerdo con estas consideraciones, para cualquier función de onda inicial Ψ_0 la elección $\mathbb{P}(\vec{Z}_0) = |\Psi_0|^2$ se perfila como la más adecuada, ya que, en virtud de la ecuación (1.54), esta distribución de probabilidad es *equivariante*, es decir, está conservada por la dinámica definida por la propia función de onda inicial.

Evidentemente, no tenemos a nuestra disposición un conjunto de universos sobre el que verificar la hipótesis sobre la distribución inicial $\mathbb{P}(\vec{Z}_0)$. Por lo tanto, según DGZ, debe interpretarse esta distribución como una medida natural de *tipicalidad* en el espacio de configuraciones. Por otro lado, si admitimos esta distribución de probabilidad para las posiciones de un sistema grande (en este caso, el universo), la distribución de probabilidad restringida a cualquier subsistema será la definida a partir de la función de onda condicional (3.8) según la regla de Born habitual, con lo que quedaría justificada la expresión (1.58).

De acuerdo con esto, podríamos resumir la tesis defendida por estos autores mediante la afirmación de que para posiciones iniciales *típicas* del universo se verifica la hipótesis del equilibrio cuántico. Sin embargo, al ser la mecánica Bohmiana una teoría determinista, las condiciones iniciales del universo (supuestos fijos el hamiltoniano y la función de onda) determinan totalmente el comportamiento posterior de todos los sistemas, incluidos los resultados experimentales en cualquier momento y en cualquier lugar. Concretamente, existirán posiciones iniciales tales que no se verifique (1.58) para algunos experimentos actuales, o incluso para ninguno. Lo que afirman DGZ es simplemente que estas condiciones iniciales son altamente improbables de acuerdo con su definición de *tipicalidad*. O, desde otro punto de vista, el hecho de que verifiquemos experimentalmente (1.58) sería una indicación de que la configuración inicial del universo no es demasiado improbable. Esto contrasta con la situación de *no-equilibrio* termodinámico en la que se encuentra el universo actual, que obliga a postular una situación inicial *termodinámicamente improbable*, lo cual, desde luego, es más difícil de justificar, y ha sido (y es) objeto de grandes controversias.

1.5.2. Teorías estocásticas de onda piloto

La mayoría de las soluciones a este problema que se han propuesto han consistido en modificar de una u otra forma la ecuación (1.53) [26], [25], [9], [29]. La estrategia empleada consiste normalmente en redefinir el campo de velocidades (1.51) de forma que $P(\vec{x}, t) \rightarrow |\psi(\vec{x}, t_0)|^2$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Nelson [29] propuso sustituir la evolución determinista de la partícula por un proceso de difusión, definido por el proceso estocástico [83]:

$$d\vec{x} = \vec{b}dt + \vec{\omega}(t) \sqrt{D} dt, \quad (1.59)$$

donde $\vec{\omega}(t)$ es un proceso aleatorio delta-correlacionado y de valor medio cero:

$$\langle \omega_i(t) \omega_j(s) \rangle = \delta_{i,j} \delta(t - s), \quad (1.60)$$

siendo i y j las componentes cartesianas del vector.

Las ecuaciones anteriores definen un proceso de difusión caracterizado por una *velocidad de arrastre* \vec{b} y un *coeficiente de difusión* D . La evolución de la densidad de probabilidad $P(\vec{x}, t)$ estará determinada por la ecuación de Fokker-Planck asociada:

$$\frac{\partial P(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{b}P(\vec{x}, t)) = \frac{D}{2} \nabla^2 P(\vec{x}, t). \quad (1.61)$$

Debemos ahora definir el coeficiente de difusión y la velocidad de arrastre para lograr un doble objetivo: (i) alejar las partículas de las zonas donde $|\psi|^2$ es pequeño para acumularlas en las zonas en las que es grande, y (ii) una vez que se haya alcanzado la distribución de partículas cuántica, mantenerla en todo instante posterior. Esto puede conseguirse con las definiciones siguientes:

$$\vec{b} = \frac{\hbar}{m} \nabla S + \frac{\hbar}{2m} \frac{\nabla |\psi|^2}{|\psi|^2} \quad ; \quad D = \frac{\hbar}{m}. \quad (1.62)$$

El segundo término de la velocidad de arrastre \vec{b} tiene la dirección de la máxima variación de $|\psi|^2$, y un módulo inversamente proporcional a esta cantidad. Por lo tanto, es el responsable de evacuar rápidamente las partículas de las zonas en las que la función de onda es pequeña y mantenerlas en las zonas donde es grande el mayor tiempo posible. Es, en cierto sentido, asimilable a una especie de *velocidad osmótica* proporcional a los gradientes de concentración en un medio. Puede comprobarse sustituyendo $P = |\psi|^2$ en (1.61) que, una vez alcanzada la distribución cuántica, el término de difusión compensa esta velocidad osmótica. A partir de entonces, el primer término de la velocidad de arrastre (idéntico a la velocidad Bohmiana) se ocupa de que la ecuación de Fokker-Planck se transforme (salvo fluctuaciones estocásticas que tenderán a ser rápidamente compensadas) en la ecuación de continuidad (1.54). De esta forma, la evolución subsiguiente de la densidad

de probabilidad P consistirá en pequeñas fluctuaciones alrededor de su valor medio $\bar{P} = |\psi|^2$.

Mencionamos brevemente que, al igual que en el caso de la mecánica Bohmiana, es posible considerar definiciones alternativas para \vec{b} y D . Podemos por lo tanto hablar de una *familia* de teorías, caracterizadas con cierto detalle por Bacciagaluppi [9].

Cabe destacar que este formalismo, al igual que todos los que no postulan una distribución inicial igual a $|\psi|^2$, no es totalmente equivalente en sus predicciones a la MCO. Teóricamente, es posible detectar eventuales discrepancias entre la distribución real de partículas y la distribución cuántica, especialmente en el periodo de transición hacia el equilibrio. Esto invalidaría desde luego la MCO, aunque es probable que llevar tales experimentos a cabo sea muy difícil. Entre otros motivos, según veremos más tarde, la función de onda del sistema está sometida a pequeñas fluctuaciones aleatorias que podrían enmascarar los efectos del proceso estocástico (1.59).

Esto último podría sugerir que el origen del proceso de difusión sean precisamente estas fluctuaciones aleatorias de la función de onda, o cualquier otra consecuencia espuria de la falta de un control total sobre las condiciones experimentales. Sin embargo esto es imposible, ya que en tales circunstancias el valor concreto del coeficiente de difusión sería también prácticamente aleatorio y no precisamente el necesario para anular la velocidad osmótica en el momento adecuado. De hecho, la introducción de un proceso de difusión sugiere que se estaría haciendo una descripción estadística del comportamiento de un medio subcuántico hasta ahora desconocido. Este medio y su relación con los sistemas cuánticos habituales estarían estadísticamente descritos por los valores de la velocidad osmótica y del coeficiente de difusión, pero su caracterización completa estaría aún por determinar. Esto constituye probablemente el aspecto menos atractivo de este tipo de teorías.

Capítulo 2

Partícula en un campo magnético inhomogéneo

Abordamos a continuación el estudio totalmente cuántico del experimento de Stern–Gerlach [20]. Antes de proceder con el cálculo analítico siguiendo diversas aproximaciones, presentamos los resultados obtenidos integrando numéricamente la ecuación de Schrödinger. Este resultado numérico, obtenido abordando el problema en toda su complejidad, servirá también para calibrar la bondad de las distintas aproximaciones que consideraremos más adelante. Por otro lado, nos permitirá introducir los parámetros relevantes para caracterizar el problema.

Consideraremos un haz colimado de perfil gaussiano de partículas neutras de masa M y espín $1/2$ en un campo magnético

$$\vec{B} = (B_0 + B_1 Z)\hat{e}_z - B_1 X\hat{e}_x, \quad L > Y > 0; \quad (2.1)$$

$$\vec{B} = 0, \quad Y > L, Y < 0 \quad (2.2)$$

(véase la figura (2.1)). En lo sucesivo, usaremos letras mayúsculas (X, Y, Z, T) para representar magnitudes con dimensiones, mientras que las minúsculas (x, y, z, t) se referirán a las correspondientes magnitudes adimensionales. El hamiltoniano será:

$$H = \frac{P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2}{2M} - \vec{\mu}\vec{B} \quad (2.3)$$

siendo $\vec{\mu}$ el momento magnético de la partícula:

$$\vec{\mu} = \mu_0(I_x\hat{e}_x + I_y\hat{e}_y + I_z\hat{e}_z). \quad (2.4)$$

En esta expresión, I_x , I_z e I_y son los operadores de espín en las direcciones cartesianas correspondientes. En el caso concreto que estamos tratando (partículas de espín $1/2$), serán proporcionales a las matrices 2×2 de Pauli:

$$I_x = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_z = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

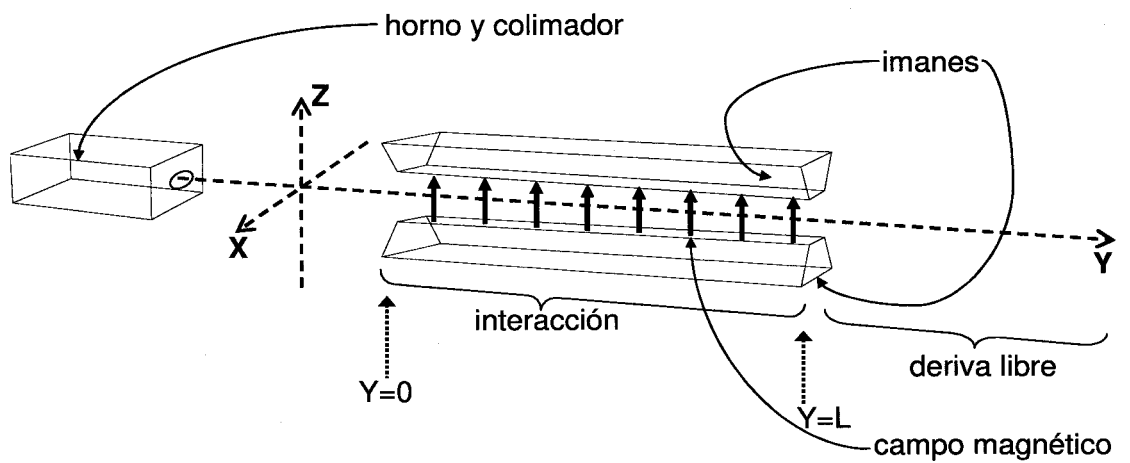


Figura 2.1: Esquema del dispositivo experimental en un experimento de Stern–Gerlach. Los átomos neutros salen en un haz colimado con una velocidad térmica que depende de la temperatura del horno. El haz se propaga de izquierda a derecha en la dirección del eje y , pasando por el campo magnético inhomogéneo entre los imanes. Tras salir de la zona de interacción (entre $y = 0$ e $y = L$), se propaga en ausencia de campo en la zona de deriva libre antes de ser detectado en una pantalla. Los vectores de la figura representan la dirección del campo magnético en puntos del eje z .

Al penetrar en el imán, el campo magnético se estabiliza paulatinamente hasta alcanzar la forma (2.1). De este modo aparecerán efectos de borde que podrían introducir una dependencia en Y del campo magnético. No puede a priori descartarse que estos efectos sean relevantes en el estudio de los fenómenos que pretendemos abordar, tales como las transiciones entre distintas proyecciones del espín en la dirección del eje z . Sin embargo, mostramos explícitamente en el apéndice A que estos efectos son despreciables en las condiciones experimentales que nos interesarán. En este caso, el potencial no actúa sobre la componente Y de la función de onda, y el hamiltoniano puede separarse en dos términos:

$$H = \frac{P_X^2 + P_Z^2}{2M} \mathbb{I} + \mu_0[(B_0 + B_1 Z)I_z - B_1 X I_x] + \frac{P_Y^2}{2M} \mathbb{I} \quad (2.6)$$

$$= H_{XZ} + H_Y,$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad en el espacio de espín. La función de onda puede ser por lo tanto factorizada de la forma

$$\langle X, Y, Z, m | \Phi \rangle = \Psi(X, Z, m, t) \chi(Y, t), \quad (2.7)$$

donde m designa el estado de espín. La evolución de la función de onda $\chi(Y, t)$ estará determinada por el hamiltoniano libre H_Y , siendo además totalmente independiente del estado de espín. Nos interesaremos únicamente por el espinor $\Psi(X, Z, m, t)$ que describe la evolución del sistema sometido al hamiltoniano H_{XZ} . Buscamos pues el espinor descrito en la base de autoestados de I_z :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(X, Z, T) \\ \tilde{\beta}(X, Z, T) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

solución de la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{P_X^2 + P_Z^2}{M} - \mu_0(B_0 + ZB_1) & \mu_0 B_1 X \\ \mu_0 B_1 X & \frac{P_X^2 + P_Z^2}{M} + \mu_0(B_0 + ZB_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(X, Z, T) \\ \tilde{\beta}(X, Z, T) \end{bmatrix}$$

$$= i\hbar \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\alpha}}(X, Z, T) \\ \dot{\tilde{\beta}}(X, Z, T) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Con las condiciones iniciales:

$$\tilde{\alpha}(X, Z, T = 0) = \frac{a}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{X^2 + Z^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\tilde{\beta}(X, Z, T = 0) = \frac{b}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{X^2 + Z^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.10)$$

donde σ es la anchura inicial del haz, y a y b son números complejos que determinan la polarización inicial del haz gaussiano. Es conveniente, en este

punto, introducir las variables adimensionales:

$$x = \frac{X}{\sigma} \quad ; \quad z = \frac{Z}{\sigma} \quad ; \quad t = \frac{T}{\tau} \quad ; \quad \alpha = \sigma \tilde{\alpha} \quad ; \quad \beta = \sigma \tilde{\beta}, \quad (2.11)$$

siendo τ el tiempo de interacción, es decir, el tiempo de tránsito entre los polos del imán. Definiremos también los siguientes parámetros adimensionales

$$A = \frac{\hbar\tau}{M\sigma^2} \quad ; \quad z_0 = \frac{B_0}{B_1\sigma} \quad ; \quad S = \frac{\mu_0 B_1 \sigma \tau}{\hbar} \quad (2.12)$$

- Parámetro adiabático A : relación entre el tiempo de interacción τ y el tiempo de ensanchamiento natural de la gaussiana inicial.
- Parámetro de inhomogeneidad z_0 : relación entre la anchura σ de la gaussiana inicial y el rango de variación del campo. El campo magnético se anula en el punto ($x = 0, z = -z_0$).
- Separación en momentos S : relación entre el impulso sufrido por el haz en el seno del campo y la anchura en el espacio de momentos de la gaussiana inicial.

Podemos realizar una estimación de los valores típicos de estos parámetros remitiéndonos, por ejemplo, al artículo de Porter *et al.* [59], donde se describe un experimento de Stern–Gerlach con un haz de átomos de plata. En este experimento, la intensidad del campo magnético es $B_0 \simeq 0,3\text{T}$, y el gradiente $B_1 \simeq 40\text{T/m}$. Los átomos, de masa $m = 1,8 \times 10^{-25}\text{kg}$, son evaporados de un horno a una temperatura de 1400K , cruzando un imán de longitud $l = 180\text{mm}$ y una zona libre de campo de longitud $L = 885\text{mm}$ antes de ser detectados.

La velocidad v_y en la dirección del eje del imán puede estimarse a partir de la temperatura del horno: $v_y \simeq \sqrt{3kT/m} \simeq 500\text{m/s}$ de donde pueden inferirse el tiempo de interacción $\tau \simeq 10^{-4}\text{s}$.

La estimación de la longitud σ es algo más especulativa¹. Debe determinarse a partir del rango de la función de onda asociada a los átomos de plata, cuyo valor mínimo puede tomarse como la longitud de onda asociada al movimiento en el plano perpendicular al eje del imán. Teniendo en cuenta la colimación del haz, la velocidad asociada a este movimiento es del orden de $10^{-4}v_y$, y la longitud de onda correspondiente $\lambda_{\perp} \simeq 10^{-9}\text{m}$. Entre este límite inferior y el límite superior marcado por la dimensión del orificio de salida del horno ($\sim 1\text{mm}$) hay un margen muy amplio, y el valor concreto de σ dependerá de factores como la densidad de átomos en el haz. Si tomamos

¹No debe confundirse la longitud σ que pretendemos estimar ahora con la anchura σ_t del haz. Esta última es la que sirve para definir la distribución *clásica* de partículas en el contexto de la aproximación semiclásica [40] (véase también la sección (1.2.4)). En general, puede suponerse que el haz está constituido por una distribución gaussiana de anchura σ_m de pequeños paquetes gaussianos de anchura σ , de forma que $\sigma_t = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma^2}$.

$\sigma \simeq 10^{-5}\text{m}$, obtenemos los siguientes valores aproximados de los parámetros que caracterizarán este experimento:

$$A \simeq 10^{-3}, \quad S \simeq 4 \times 10^2, \quad z_0 \simeq 10^3. \quad (2.13)$$

Las componentes adimensionales α, β del espinor son ahora solución de la ecuación de Schrödinger definida a partir del hamiltoniano adimensional $h = H\tau/\hbar$:

$$h = h_0 + v; \quad h_0 = \frac{A}{2}(p_x^2 + p_z^2), \quad v = -S(I_z(z + z_0) - I_x x), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A\nabla^2 - S(z_0 + z) & Sx \\ Sx & A\nabla^2 + S(z_0 + z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(x, z, t) \\ \beta(x, z, t) \end{bmatrix} \\ = i \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(x, z, t) \\ \dot{\beta}(x, z, t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde el punto y el laplaciano indican derivación con respecto a las variables adimensionalizadas. Desarrollando la ecuación matricial, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para las componentes superior e inferior del espinor:

$$\begin{aligned} \frac{A}{2}\nabla^2\alpha - \frac{S}{2}(z_0 + z)\alpha + \frac{S}{2}x\beta &= i\dot{\alpha} \\ \frac{A}{2}\nabla^2\beta + \frac{S}{2}(z_0 + z)\beta + \frac{S}{2}x\alpha &= i\dot{\beta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1. Cálculo numérico

Para integrar estas ecuaciones numéricamente, descomponemos cada componente del espinor en la base del espacio de configuración bidimensional constituida por el producto de las autofunciones del hamiltoniano del oscilador armónico en cada una de las direcciones espaciales:

$$\begin{aligned} \alpha(x, z, t) &= \sum_{nm} a_{nm}(t)\phi_n(x)\phi_m(z)e^{itSz_0/2} \\ \beta(x, z, t) &= \sum_{nm} b_{nm}(t)\phi_n(x)\phi_m(z)e^{-itSz_0/2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $\phi_n(x)$ y $\phi_n(z)$ son las autofunciones de orden n del hamiltoniano del oscilador armónico en las direcciones x y z respectivamente. El siguiente paso consiste en reescribir las ecuaciones 2.16 en términos de los operadores

de creación y destrucción a_x^+ , a_x , a_z^+ , a_z que actúan sobre $\phi_n(x)$ y $\phi_n(z)$ del modo habitual:

$$\begin{aligned}
\int \phi_n(x) a_x \phi_n(x) dx &= \sqrt{n} \delta_{m,n-1}, \\
\int \phi_n(x) a_x^+ \phi_n(x) dx &= \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}, \\
\int \phi_n(z) a_z \phi_n(z) dz &= \sqrt{n} \delta_{m,n-1}, \\
\int \phi_n(z) a_z^+ \phi_n(z) dz &= \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Para ello, basta recordar la expresión de \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_z , x , z en función de estos operadores:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^+ + a_x) \quad , \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_z^+ + a_z) \\
\mathbf{p}_x &= \frac{i}{\sqrt{2}} (a_x^+ - a_x) \quad , \quad \mathbf{p}_z = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_z^+ - a_z),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Sustituyendo en 2.16, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{nm} \left[-A/4 \left(a_x^{+2} + a_x^2 - 2a_x^+ a_x + a_z^{+2} + a_z^2 - 2a_z^+ a_z - 2 \right) - \right. \\
&\quad \left. S/2 \left(z_0 + 1/\sqrt{2} (a_z^+ + a_z) \right) \right] a_{nm} \phi_n(x) \phi_m(z) e^{itS z_0/2} + \\
&\quad \frac{S}{2\sqrt{2}} (a_x^+ + a_x) b_{nm} \phi_n(x) \phi_m(z) e^{-itS z_0/2} \\
&= i \sum_{nm} \left(\dot{a}_{nm} + \frac{iS z_0}{2} a_{nm} \right) \phi_n(x) \phi_m(z) e^{itS z_0/2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{nm} \left[-A/4 \left(a_x^{+2} + a_x^2 - 2a_x^+ a_x + a_z^{+2} + a_z^2 - 2a_z^+ a_z - 2 \right) + \right. \\
&\quad \left. S/2 \left(z_0 + 1/\sqrt{2} (a_z^+ + a_z) \right) \right] b_{nm} \phi_n(x) \phi_m(z) e^{-itS z_0/2} + \\
&\quad \frac{S}{2\sqrt{2}} (a_x^+ + a_x) a_{nm} \phi_n(x) \phi_m(z) e^{+itS z_0/2} \\
&= i \sum_{nm} \left(\dot{b}_{nm} - \frac{iS z_0}{2} b_{nm} \right) \phi_n(x) \phi_m(z) e^{-itS z_0/2}
\end{aligned}$$

Multiplicando las dos ecuaciones anteriores por $\phi_n^*(x) \phi_n^*(z)$ e integrando, obtenemos finalmente las ecuaciones diferenciales ordinarias para los coefi-

cientes $a_{nm}(t)$, $b_{nm}(t)$ utilizando 2.18:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{nm} = & i \frac{A}{4} \left(a_{n+2,m} \sqrt{(n+1)(n+2)} + a_{n-2,m} \sqrt{n(n-1)} + \right. \\
& \left. a_{n,m+2} \sqrt{(m+1)(m+2)} + a_{n,m-2} \sqrt{m(m-1)} - 2a_{nm}(n+m+1) \right) + \\
& i \frac{S}{2\sqrt{2}} \left(a_{n,m+1} \sqrt{m+1} + a_{n,m-1} \sqrt{m} - (b_{n+1,m} \sqrt{n+1} + b_{n-1,m} \sqrt{n}) e^{-itS z_0} \right) \\
\dot{b}_{nm} = & i \frac{A}{4} \left(b_{n+2,m} \sqrt{(n+1)(n+2)} + b_{n-2,m} \sqrt{n(n-1)} + \right. \\
& \left. b_{n,m+2} \sqrt{(m+1)(m+2)} + b_{n,m-2} \sqrt{m(m-1)} - 2b_{nm}(n+m+1) \right) + \\
& i \frac{S}{2\sqrt{2}} \left(-b_{n,m+1} \sqrt{m+1} - b_{n,m-1} \sqrt{m} - (a_{n+1,m} \sqrt{n+1} + a_{n-1,m} \sqrt{n}) e^{itS z_0} \right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Este sistema de ecuaciones puede ser integrado numéricamente, en nuestro caso hemos utilizado un método de Runge–Kutta de orden 4.

Estas ecuaciones ya fueron resueltas numéricamente por Garraway y Stenholm en [91], mediante un método distinto. Sin embargo, el principal objetivo de su artículo era el estudio del efecto del campo magnético inhomogéneo sobre una partícula cargada (concretamente, un electrón), por lo que apenas consideraron el caso que nos ocupa.

2.2. Aproximaciones cuánticas analíticas

En esta sección derivaremos expresiones analíticas de la función de onda del Stern–Gerlach siguiendo diferentes aproximaciones. Empezaremos con algunas consideraciones previas, que nos serán útiles en los desarrollos posteriores.

Teniendo en cuenta las características geométricas del campo (2.1), es conveniente definir las coordenadas polares adimensionales:

$$\rho = \sqrt{x^2 + (z + z_0)^2}; \quad \text{sen}(\beta) = \frac{x}{\rho}; \quad \text{cos}(\beta) = \frac{z + z_0}{\rho}. \tag{2.21}$$

Obsérvese que, según estas definiciones, ρ representa la distancia al punto $(0, 0, -z_0)$ en el que se anula el campo magnético, mientras que β es el ángulo que forma el campo con el eje z de laboratorio.

En estas coordenadas, la gaussiana inicial se escribe

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{2}\right) = \\
& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \text{cos}(\beta) + z_0^2}{2}\right),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

y podemos expresar las condiciones iniciales para el espinor en la base de autoestados del espín en la dirección del eje z :

$$\begin{aligned} \langle \rho, \beta; m_z = 1/2 | \Psi(t=0) \rangle &= \\ \frac{a}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2}\right) & \\ \langle \rho, \beta; m_z = -1/2 | \Psi(t=0) \rangle &= \\ \frac{b}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2}\right); \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, & \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde, al igual que antes, los coeficientes a y b dan cuenta de la polarización inicial del haz. En términos de estas coordenadas, el potencial adimensional v tiene una expresión especialmente sencilla:

$$v = -S\rho I_B, \quad (2.24)$$

donde I_B es el operador de espín en la dirección del campo magnético, que en el caso de una partícula de espín $1/2$ puede definirse en función de las matrices de Pauli:

$$I_B = I_z \cos(\beta) - I_x \sin(\beta) = 1/2 \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Del mismo modo, podemos definir el operador de espín en la dirección *perpendicular* a la dirección del campo magnético:

$$I_T = I_z \sin(\beta) + I_x \cos(\beta) = 1/2 \begin{pmatrix} \sin(\beta) & \cos(\beta) \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Estos operadores obedecen las relaciones de conmutación habituales entre componentes del momento angular:

$$[I_B, I_T] = iI_y, \quad [I_y, I_B] = iI_T, \quad [I_T, I_y] = iI_B, \quad (2.27)$$

donde I_y es el operador de espín en la dirección paralela al eje del imán.

El término de energía cinética del hamiltoniano adimensional también puede reescribirse en función de los correspondientes momentos conjugados p_ρ y p_β de las coordenadas polares:

$$h_0 = \frac{A}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\beta^2}{\rho^2} \right). \quad (2.28)$$

2.2.1. Desarrollo del operador de evolución

Como punto de partida de las aproximaciones analíticas que nos proponemos derivar, consideramos la expresión formal de la función de onda en cualquier instante:

$$\langle x, z; m | \Psi(t) \rangle = \langle x, z; m | U(t) | \Psi(t=0) \rangle, \quad (2.29)$$

siendo $U(t) = \exp(-i(h_0 + v)t)$ el operador de evolución. La siguiente expresión de este operador es totalmente equivalente a la anterior:

$$U(t) = U_I(t)U_0(t) \quad (2.30)$$

con

$$\begin{aligned} U_0(t) &= \exp(-ih_0t) \\ U_I(t) &= \exp(-i(h_0 + v)t) \exp(ih_0t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

A continuación desarrollamos $U_I(t)$ hasta el tercer orden en el tiempo de interacción, para lo cual consideramos la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff para dos operadores A y B que no conmutan:

$$e^A e^B \approx \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] - [B, [A, B]])\right), \quad (2.32)$$

hasta tercer orden en los conmutadores.

Para completar el cálculo necesitaremos, además de los conmutadores (2.27), las reglas de conmutación habituales entre variables conjugadas adimensionales q y p_q

$$[q, p_q] = i \quad , \quad [f(q), p_q] = i \frac{\partial f}{\partial q}, \quad (2.33)$$

de las cuales se deriva fácilmente

$$[p_\beta, I_B] = iI_T \quad , \quad [I_T, p_\beta] = iI_B \quad , \quad [I_y, p_\beta] = 0. \quad (2.34)$$

En el caso que nos ocupa, $A = -i(h_0 + v)t$ y $B = ih_0t$, por lo que los conmutadores relevantes para nuestro desarrollo son:

$$\begin{aligned} [v, h_0] &= -iAS \left(p_\rho I_B - \frac{1}{2\rho}(p_\beta I_T + I_T p_\beta) \right) \\ [v, [v, h_0]] &= -AS^2 (I_B^2 + I_T^2 - p_\beta I_y) \\ [h_0, [v, h_0]] &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Estamos interesados en descartar los términos que no conmuten con I_B y tengan traza nula (es decir, cuyo valor esperado en un estado no polarizado sea nulo). Puede justificarse esta práctica considerando que, si el parámetro S (la intensidad de la interacción) es suficientemente grande frente al parámetro A (término cinético), la evolución del estado conserva aproximadamente la proyección del espín a lo largo de la dirección local del campo magnético. Para un tratamiento más riguroso de este argumento, véase el Apéndice C.

El segundo término del primer conmutador ($p_\beta I_T + I_T p_\beta$) no conmuta con I_B , y no es difícil comprobar explícitamente que su traza es nula. Este

término será por lo tanto descartado, pero el caso del operador $p_\beta I_y$ que aparece en el doble conmutador es algo más delicado. Aunque no conmuta con I_B , aporta una contribución de traza no nula que debemos extraer antes de despreciarlo en su totalidad.

Para entender la sutileza que encierra el operador p_β , comparemos las relaciones de conmutación (2.34) con (2.27). Comprobamos así que el operador p_β no sólo actúa sobre la parte espacial de la función de onda, sino que también lo hace como el generador I_y de las rotaciones en el espacio de las variables de espín. Podemos entender este hecho si observamos que p_β rota la función de onda sobre un fondo fijo constituido por el campo magnético, cuya dirección varía de forma continua con la posición. Por lo tanto, esta rotación espacial supondrá también una modificación de la distribución del campo magnético en el soporte de la función de onda, con el consiguiente cambio de la proyección del espín en la dirección del campo. No es, por lo tanto, trivial, separar la componente espacial de la componente de espín en los operadores que debemos considerar. Para establecer esta separación, es útil considerar la expresión del hamiltoniano (2.14) en coordenadas cartesianas, a partir de la cual podemos reescribir (2.35):

$$\begin{aligned} [v, h_0] &= -iAS(p_z I_z - p_x I_x) \\ [v, [v, h_0]] &= -AS^2(I_z^2 + I_x^2 - L_y I_y), \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $L_y = zp_x - xp_z$ es la componente y del momento angular. Si definimos el operador

$$K_y = L_y - I_y, \quad (2.37)$$

podemos reescribir el doble conmutador:

$$[v, [v, h_0]] = -AS^2(I_z^2 + I_x^2 - I_y^2 - K_y I_y). \quad (2.38)$$

Es inmediato comprobar que K_y es una constante del movimiento: $[K_y, v] = [K_y, h_0] = 0$. Como cabía esperar tras la discusión anterior, tanto la interacción v como el hamiltoniano total son invariantes frente a una rotación espacial alrededor del eje y seguida de una rotación *inversa* de las variables de espín alrededor del mismo eje, que es precisamente la transformación generada por el operador K_y . Sin embargo, I_y no conmuta con la interacción v y, por lo tanto, no conserva el espín en la dirección del campo magnético. Hemos identificado pues el operador I_y^2 , que conmuta con I_B y que constituye la contribución de traza no nula al operador $L_y I_y$, mientras que $K_y I_y$ tiene traza nula y no conserva la proyección del espín en la dirección del campo, por lo que será despreciado. Para el caso concreto de una partícula de espín $1/2$, se verifica que $I_x^2 + I_z^2 - I_y^2 = 1/4$, de manera que obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} [v, h_0] &\approx -iASp_\rho I_B \\ [v, [v, h_0]] &\approx -\frac{AS^2}{4}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.2.2. Aproximación adiabática

La aproximación más sencilla de las que derivaremos es la aproximación adiabática, que consiste en despreciar el término h_0 del hamiltoniano. Se trata, pues, de considerar la aproximación siguiente al operador de evolución:

$$U(t) \simeq \exp(-ivt) = \exp(iS\rho I_B t) \quad (2.40)$$

En este caso podemos diagonalizar directamente el hamiltoniano, lo que equivale a determinar los autoestados del operador v . Según (2.24), éstos serán simplemente los autoestados de I_B , es decir, los estados de espín con una proyección bien definida a lo largo de la dirección del campo. Pueden obtenerse fácilmente en la base de autoestados de I_z : basta con rotar estos últimos el ángulo β existente entre el eje z de laboratorio y la dirección del campo magnético, o sea aplicarles la matriz de rotación inversa en el espacio de espín $R^{-1}(\beta) = R(-\beta)$, siendo

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) & d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) \\ d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) & d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

con:

$$\begin{aligned} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) &= d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) = \cos(\beta/2), \\ d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) &= -d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) = \text{sen}(\beta/2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

De esta forma obtenemos los estados $|+\rangle_B, |-\rangle_B$ en función de la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$:

$$|+\rangle_B = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \\ -\text{sen}(\beta/2) \end{pmatrix}, \quad |-\rangle_B = \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta/2) \\ \cos(\beta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

A partir de aquí la solución es sencilla, basta con expresar la función de onda inicial en función de la base $\{|+\rangle_B, |-\rangle_B\}$ a partir de los elementos (2.42) de la matriz de rotación:

$$\begin{aligned} \langle \rho, \beta; m_B | \Psi(t=0); m_0 \rangle &= \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2}\right) & d_{m_B m_0}^{1/2}(\beta), \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde m_0, m_B son los espines iniciales en las bases de autovectores de I_z y de I_B respectivamente. Esta función de onda es autofunción del hamiltoniano aproximado con autovalor

$$\lambda_{m_B} = -m_B S \rho, \quad m_B = \pm 1/2 \quad (2.45)$$

de manera que la ecuación de Schrödinger se integra inmediatamente:

$$\begin{aligned} \langle \rho, \beta; m_B | \Psi(t); m_0 \rangle = & \\ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2}\right) \exp(i m_B S \rho t) \times \\ & \times d_{m_B m_0}^{1/2}(\beta). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Partiendo de una polarización inicial arbitraria $|m_0\rangle$, podemos expresar este resultado en la base de laboratorio aplicando de nuevo la rotación *inversa* a los espinores, obteniendo de esta forma la expresión definitiva de la *componente con proyección m_f del espín sobre el eje z de laboratorio* de la función de onda adiabática:

$$\begin{aligned} \Phi_{m_f, m_0}^a(\rho, \beta, t) &\equiv \sum_{m_B} \langle m_f | m_B \rangle \langle \rho, \beta; m_B | \Psi(t); m_0 \rangle \\ &= \sum_{m_B} d_{m_f m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B}^a(\rho, \beta, t) d_{m_B m_0}^{1/2}(\beta), \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde hemos introducido las amplitudes:

$$G_{m_B}^a(\rho, \beta, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2}\right) \exp(i m_B S \rho t). \quad (2.48)$$

Insistimos de nuevo en que, en estas expresiones, los números cuánticos m_0 y m_f designan las proyecciones (inicial y final respectivamente) del espín sobre el eje z de laboratorio.

Nótese que esta expresión es totalmente equivalente a la obtenida por França, Marshall, Santos, y Watson [105] en un contexto similar.

2.2.3. Aproximación pseudo-adiabática

La siguiente aproximación derivada a partir de este desarrollo es la que llamaremos *pseudo-adiabática*, consistente en descartar todos los conmutadores en el desarrollo (2.32). El operador de evolución aproximado resultante es:

$$U(t) \simeq \exp(-ivt) \exp(-ih_0t) = \exp(iS\rho I_B t) U_0(t). \quad (2.49)$$

En esta aproximación, la función de onda final se obtiene dejando que la gaussiana inicial evolucione libremente durante el tiempo de interacción, multiplicando después *cada autoestado de I_B* por la fase $\exp(i m_B S \rho t)$ correspondiente. Esta fase está relacionada con el impulso mecánico clásico ejercido por el campo magnético sobre la partícula.

Podemos determinar la expresión analítica de esta función de onda partiendo de la acción de la evolución libre sobre una gaussiana:

$$\langle \rho, \beta | U_0(t) | \Psi(t=0); m_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+iAt)} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2(1+iAt)}\right) |m_0\rangle, \quad (2.50)$$

que consiste simplemente en considerar el ensanchamiento natural $(1+iAt)$.

A partir de este punto, el proceso es idéntico al descrito en la sección sobre la aproximación adiabática: desarrollamos la función de onda (2.50) en autoestados de I_B y multiplicamos cada uno de ellos por la fase correspondiente:

$$\begin{aligned} \Phi_{m_f, m_0}^{pa}(\rho, \beta, t) &\equiv \sum_{m_B} \langle m_f | m_B \rangle \langle \rho, \beta; m_B | \Psi(t); m_0 \rangle \\ &= \sum_{m_B} d_{m_f m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B}^{pa}(\rho, \beta, t) d_{m_B m_0}^{1/2}(\beta), \end{aligned} \quad (2.51)$$

con las amplitudes:

$$G_{m_B}^{pa}(\rho, \beta, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+iAt)} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2(1+iAt)}\right) \exp(i m_B S \rho t). \quad (2.52)$$

2.2.4. Aproximación de Estados Coherentes

Consideremos a continuación el desarrollo (2.32) hasta el tercer orden en los conmutadores, que nos permite escribir el operador de evolución aproximado:

$$U(t) \approx \exp\left(i\frac{AS^2}{48}t^3\right) \exp\left(-ivt + [v, h_0]\frac{t^2}{2}\right) \exp(-ih_0t). \quad (2.53)$$

Desarrollamos la exponencial central de la expresión anterior hasta el mismo orden de aproximación, haciendo de nuevo uso de (2.32) con $A = -ivt$ y $B = t^2[v, h_0]/2$:

$$\exp\left(-ivt + [v, h_0]\frac{t^2}{2}\right) \approx \exp\left(-i\frac{AS^2}{16}t^3\right) \exp(-ivt) \exp\left([v, h_0]\frac{t^2}{2}\right). \quad (2.54)$$

Estamos ya en medida de obtener la expresión definitiva del operador de evolución aproximado que sirve de base para la *aproximación de estados coherentes*. A partir de (2.31), (2.53) y (2.54) se obtiene:

$$U(t) \approx \exp\left(-i\frac{AS^2}{24}t^3\right) \exp(iS\rho t I_B) \exp\left(-i\frac{AS}{2}p_\rho I_B t^2\right) \exp(-ih_0t). \quad (2.55)$$

La aplicación sobre la función de onda inicial de este operador supone, por este orden: (i) ensanchamiento libre de la gaussiana, (ii) desplazamiento de la coordenada ρ de cada uno de los autoestados de I_B en una cantidad $ASt^2m_B/2$, (iii) multiplicación por una fase $\exp(im_B S\rho t)$ que, como ya hemos mencionado, refleja la adquisición por parte de cada autoestado del impulso correspondiente ejercido por el campo.

En definitiva, la función de onda final en esta aproximación es:

$$\begin{aligned}\Phi_{m_f, m_0}^{cs}(\rho, \beta, t) \\ = \sum_{m_B} d_{m_f m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B}^{cs}(\rho, \beta, t) d_{m_B m_0}^{1/2}(\beta),\end{aligned}\quad (2.56)$$

donde hemos introducido de nuevo las amplitudes:

$$\begin{aligned}G_{m_B}^{cs}(\rho, \beta, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+iAt)} \sqrt{\frac{\rho_{m_B}}{\rho}} \exp(im_B S\rho t) \\ \times \exp\left(-i\frac{AS^2}{24}t^3\right) \exp\left(-\frac{\rho_{m_B}^2 - 2\rho_{m_B}z_0 \cos(\beta) + z_0^2}{2(1+iAt)}\right),\end{aligned}\quad (2.57)$$

y ρ_{m_B} es la coordenada ρ desplazada por el efecto del campo:

$$\rho_{m_B} = \rho - \frac{1}{2}ASt^2m_B. \quad (2.58)$$

Las amplitudes G_{m_B} introducidas en las últimas secciones representan esencialmente las funciones de onda² con una proyección determinada en la dirección del campo \vec{B} . Estos son precisamente los estados coherentes internos introducidos por Gómez Camacho y Cruz Barrios [40] (mencionados en este trabajo en la sección (1.2.4)) en el contexto de la aproximación semiclásica. Veremos más adelante que ocupan un lugar central en nuestros análisis, desempeñando un papel similar al de los estados con proyección definida a lo largo del eje z en el modelo simplificado (sección (1.2.1)).

Por otro lado, se mostrará que constituyen la extensión natural del concepto de CIS, definido en este caso en cualquier instante del proceso cuántico. Resaltamos finalmente que la posibilidad de descomponer la función de onda en términos G_{m_B} cuya única dependencia con el espín es a través de su proyección en la dirección de \vec{B} es consecuencia de la diagonalidad del operador U_I que contiene a la interacción en las aproximaciones consideradas. Por lo tanto, no puede a priori considerarse una característica del cálculo exacto. Tendremos ocasión de comprobar explícitamente que algunas de las consecuencias de proponer un desarrollo genérico del tipo

$$\Phi_{m_f, m_0}(\rho, \beta, t) = \sum_{m_B} d_{m_f m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B}(\rho, \beta, t) d_{m_B m_0}^{1/2}(\beta) \quad (2.59)$$

sólo se aplican *aproximadamente* al resultado exacto.

²Obsérvese también que estas amplitudes están normalizadas: $\int |G_{m_B}|^2 d\vec{r} = 1$.

2.2.5. Aproximación simetrizada

A continuación refinaremos la descripción del sistema añadiendo un orden más en el desarrollo (2.32), es decir, considerando conmutadores en los que aparezcan *cuatro* operadores. Para ello, buscaremos el operador U_B que proporcione la mejor aproximación para el operador U_S definido de la forma:

$$U(t) \simeq U_S(t) = U_0(t/2)U_B(t)U_0(t/2). \quad (2.60)$$

Esta expresión consiste en ejercer instantáneamente la interacción debida al campo magnético en el instante intermedio del proceso, dejando actuar simétricamente la evolución libre al principio y al final durante la mitad del tiempo total de interacción. Por este motivo hemos denominado esta expresión *aproximación simetrizada*, y ofrece la ventaja de que, en el desarrollo de U_B , sólo intervienen términos *impares* en el número de operadores. Por lo tanto, la incorporación de todos los términos hasta el orden tres en los conmutadores proporcionará una aproximación válida hasta el cuarto orden.

Este hecho puede justificarse exigiendo que el operador U_S verifique la condición $U_S(t)U_S(-t) = \mathbb{I}$, que debe cumplir cualquier operador de evolución:

$$\begin{aligned} U_S(t)U_S(-t) &= U_0(t/2)U_B(t)U_B(-t)U_0(-t/2) = \mathbb{I} \\ \Rightarrow U_B(t)U_B(-t) &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Esta última condición implica que el exponente de $U_B(t)$ cambie de signo cuando lo haga t , lo cual supone que deban desaparecer los términos que involucren exponentes pares de t . Como puede comprobarse fácilmente, el exponente de t coincide con el número de operadores que aparecen en el término correspondiente, por lo que este número ha de ser impar.

Teniendo en cuenta que el conmutador $[h_0, [v, h_0]]$ se anula, podemos reescribir (2.55) del modo:

$$\begin{aligned} U(t) \simeq & \exp\left(-i\frac{AS^2}{24}t^3\right) \exp(-ivt) \\ & \exp\left(-ih_0\frac{t}{2}\right) \exp\left([v, h_0]\frac{t^2}{2}\right) \exp\left(-ih_0\frac{t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Necesitamos reordenar los términos, para lo cual consideramos el desarrollo

siguiente:

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= \left(1 + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right) \left(1 + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) = \\
&1 + B + \frac{B^2}{2} + A + \frac{A^2}{2} + BA + \frac{B^2 A}{2} + \frac{BA^2}{2} + \\
&[A, B] + B[A, B] + A[A, B] + \frac{1}{2}([[[A, B], A] + [[A, B], B]]) + \dots \\
&\simeq e^B e^A \exp\left(\frac{1}{2}[[A, B], A]\right) \exp\left(\frac{1}{2}[[A, B], B]\right) \exp([A, B]),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

válido hasta el tercer orden en los conmutadores. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\exp(-ivt) \exp\left(-ih_0 \frac{t}{2}\right) &\simeq \\
\exp\left(-ih_0 \frac{t}{2}\right) \exp(-ivt) \exp\left(i \frac{AS^2}{16} t^3\right) \exp\left(-[v, h_0] \frac{t^2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Sustituyendo en (2.62), obtenemos finalmente el operador de evolución en la aproximación simetrizada:

$$\begin{aligned}
U(t) &\simeq \exp\left(-ih_0 \frac{t}{2}\right) \exp\left(i \frac{AS^2}{48} t^3\right) \\
&\exp(i S \rho t I_B) \exp\left(-ih_0 \frac{t}{2}\right),
\end{aligned} \tag{2.65}$$

que, como ya hemos comentado, es exacto hasta el cuarto orden en los conmutadores. Sin embargo, no podemos derivar a partir de (2.65) una expresión analítica de la función de onda del sistema, a causa de la última evolución libre. A pesar de ello, podemos obtener una expresión numérica descomponiendo la función de onda afectada por las dos primeras exponenciales en la base de oscilador armónico, obteniendo después los coeficientes del desarrollo tras la última evolución libre como se indica en el Apéndice B.

2.3. Análisis comparativo de los resultados

Presentamos a continuación los resultados obtenidos al calcular la función de onda en las diferentes aproximaciones analíticas desarrolladas en secciones anteriores. No nos centraremos únicamente en la estructura de la densidad de probabilidad final de la función de onda de las partículas (las “manchas” en la pantalla), sino que analizaremos además distintos aspectos del fenómeno, haciendo hincapié en las diferencias encontradas entre las distintas aproximaciones. Estos resultados podrán ser comparados con la

integración numérica de la ecuación exacta de Schrödinger, que servirá de criterio para establecer la bondad de cada una de las aproximaciones. Tendremos en cuenta las siguientes consideraciones generales:

- Recordamos que todas las magnitudes utilizadas en este análisis serán adimensionales, definidas de tal forma que la unidad natural de longitud es la anchura σ de la gaussiana inicial, y la de tiempo, la duración τ de la interacción con el campo magnético. Las condiciones experimentales quedan totalmente determinadas por el conjunto de los valores de los parámetros A, S y z_0 definidos en (2.12).
- En general, el haz será detectado tras haber evolucionado durante un tiempo de deriva t_d en la zona libre de campo situada entre la salida del imán y la pantalla detectora. Esta evolución libre se calcula *de forma exacta para todas las aproximaciones*. Para ello, descomponemos primero la función de onda correspondiente en la base de oscilador armónico, calculando después los coeficientes del desarrollo tras la evolución libre como se indica en el Apéndice B.
- Para realizar nuestros análisis, dispondremos de las dos amplitudes del espínor por separado, a pesar de que ni éstas ni sus módulos al cuadrado son accesibles experimentalmente. Para referirnos a ellas, utilizaremos los subíndices $+$ y $-$ para los valores $m = 1/2$ y $m = -1/2$ respectivamente. Querremos también distinguir entre las distintas aproximaciones utilizadas, para lo cual utilizaremos los superíndices a, pa, cs, s, ex para referirnos a la aproximación adiabática, pseudo-adiabática, de estados coherentes, simetrizada y exacta respectivamente. Así, la amplitud $\Phi_{-,+}^{ex}$ designa la componente $m_z = -1/2$ de la función de onda con componente inicial $m_z = 1/2$ calculada mediante la integración numérica de la ecuación de Schrödinger (siendo z el eje fijo de laboratorio). Será también especialmente útil considerar las amplitudes G_{m_B} referidas a la proyección del espín en la dirección del campo, definidas en las secciones (2.2.2, 2.2.3, 2.2.4).

2.3.1. Distribuciones de probabilidad

En este apartado nos ocuparemos de estudiar la distribución de las partículas del haz en la pantalla detectora, determinada por el módulo de la función de onda³:

$$|\Phi(\vec{r})|^2 = |\Phi_{+,m_0}(\vec{r})|^2 + |\Phi_{-,m_0}(\vec{r})|^2, \quad (2.66)$$

³Es de recalcar que una de las primeras y más evidentes diferencias con respecto al análisis simplificado de la sección (1.2.1) es la existencia de términos $\Phi_{m,m'}$ con $m \neq m'$, siendo m y m' proyecciones del espín a lo largo del eje z . Este fenómeno de spin-flip es consecuencia de que I_z no es una constante del movimiento, y será tratado en detalle en la sección (2.3.2).

que también podemos expresar en función de las amplitudes G_{m_B} :

$$|\Phi(\vec{r})|^2 = |G_+(\vec{r})|^2 \left(d_{\frac{1}{2}, m_0}^{1/2}(\beta) \right)^2 + |G_-(\vec{r})|^2 \left(d_{-\frac{1}{2}, m_0}^{1/2}(\beta) \right)^2. \quad (2.67)$$

Estas distribuciones de probabilidad pueden observarse en la figura (2.3) para una polarización inicial $|m_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle + |-z\rangle)$ y dos situaciones dinámicas distintas.

Es interesante analizar por separado lo ocurrido *dentro* del imán (durante el periodo de interacción con el campo magnético) y fuera de él (en el tiempo de deriva libre).

Movimiento dentro del imán

La descripción de la evolución inducida por el campo magnético sobre el haz es, desde luego, distinta según cuál sea la aproximación considerada. Sin embargo, pueden identificarse en general los siguientes efectos de la interacción del campo magnético con el haz:

1. Impulso mecánico: cada componente m_B del espín en la base de autoestados de I_B (es decir, cada amplitud G_{m_B}) se ve afectada por una fase

$$e^{im_B S \rho t}. \quad (2.68)$$

Esta fase, proporcional a S , es el resultado de la acción del potencial v , y aparece en todas las aproximaciones. La aplicación de esta fase sobre una función de onda supone un incremento en el valor medio del momento

$$p_\rho = m_B S. \quad (2.69)$$

Este efecto puede por lo tanto interpretarse como el impulso mecánico ejercido por el campo sobre las partículas del haz, es decir, la variación de la cantidad de movimiento correspondiente a la acción de la fuerza clásica adimensional $F = m_B S$.

Es importante observar que este impulso se ejerce en la dirección radial, y que su sentido queda determinado por la proyección del espín a lo largo de la dirección del campo magnético (véanse las figuras (2.4) y (2.5)). Estudiaremos con más detalle este efecto en la sección dedicada a la deriva libre.

2. Ensanchamiento natural: el paquete de onda sufre la difusión cuántica característica debida a la acción del hamiltoniano libre h_0 . En el caso de nuestra gaussiana inicial, esto supone un aumento de su anchura natural de 1 a $1 + At$. Este efecto, de primer orden en el parámetro A e independiente del espín, no se observa en la aproximación adiabática, ya que ésta se obtuvo despreciando totalmente h_0 . Por otro lado, es

fácil observar que la aproximación adiabática puede obtenerse a partir de cualquiera de las demás sin más que tomar $A = 0$ (véanse las figuras (2.3) y (2.2)).

3. Desplazamiento del centro del paquete gaussiano: la acción conjunta de los operadores h_0 y v desplaza el máximo de cada amplitud G_{m_B} en la dirección radial (es decir, en la dirección de la fuerza clásica) y en un sentido determinado por el valor (positivo o negativo) de m_B (véase la figura (2.5)). En las aproximaciones simetrizada y de estados coherentes, la acción es considerada en el primer orden en A y en S , siendo por lo tanto generada por el conmutador $[v, h_0]$. Este desplazamiento se desprecia totalmente en las aproximaciones adiabática y pseudo-adiabática.

Para comprender mejor este efecto, puede comprobarse que equivale a sustituir, en el factor gaussiano que afecta a G_{m_B} , la coordenada ρ por la coordenada $\rho_{m_B} = \rho + \frac{1}{2}ASt^2m_B$ desplazada en función del autovalor m_B (véase (2.58)). Es especialmente destacable que este desplazamiento radial del *centro* del paquete gaussiano es idéntico al de la partícula semiclásica⁴, tal como se obtuvo en (1.31). Por otro lado, la sustitución de la variable ρ por ρ_{m_B} supone también una deformación que reproduce el efecto de enfoque y desenfoco. (véase la figura (2.3)). Al igual que en el caso de la aproximación semiclásica, este efecto queda bien ilustrado por la dirección de la fuerza en la figura (2.4). En esta figura observamos que el desplazamiento en el sentido de los vectores (asociado a la amplitud G_+) desenfoca la distribución de probabilidad, mientras que el desplazamiento en el sentido contrario (asociado a la amplitud G_-) supone un efecto de enfoque (véase también la figura (2.5)).

Distribución de momentos y deriva libre

Es frecuente que las condiciones experimentales sean tales que el desplazamiento del paquete de onda dentro del imán no sea lo suficientemente grande como para resolver en manchas diferenciadas las distintas componentes del espín. Esto ocurrirá, concretamente, cuando el desplazamiento descrito en el punto (3) anterior sea menor que la anchura natural de la gaussiana:

$$\frac{AS}{4} < 1 + A, \quad (2.70)$$

en cuyo caso la distribución de probabilidad (2.66) a la salida del imán presentaría esencialmente una sola mancha.

⁴En nuestro caso, la gaussiana inicial está centrada en el origen de coordenadas, por lo que la dirección radial para el centro del paquete coincide con el eje z .

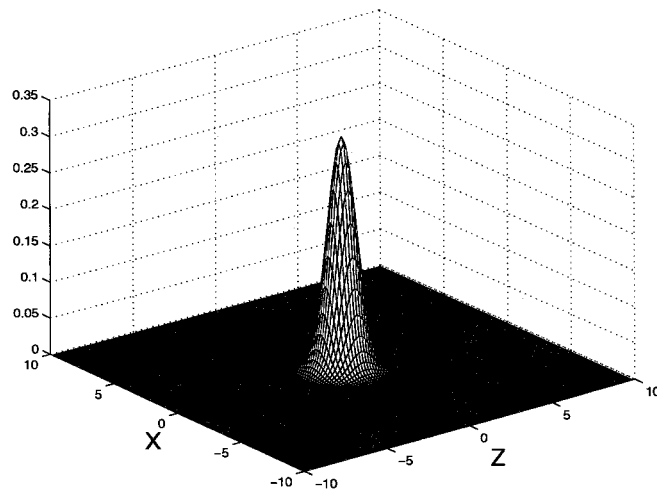


Figura 2.2: Gaussiana inicial

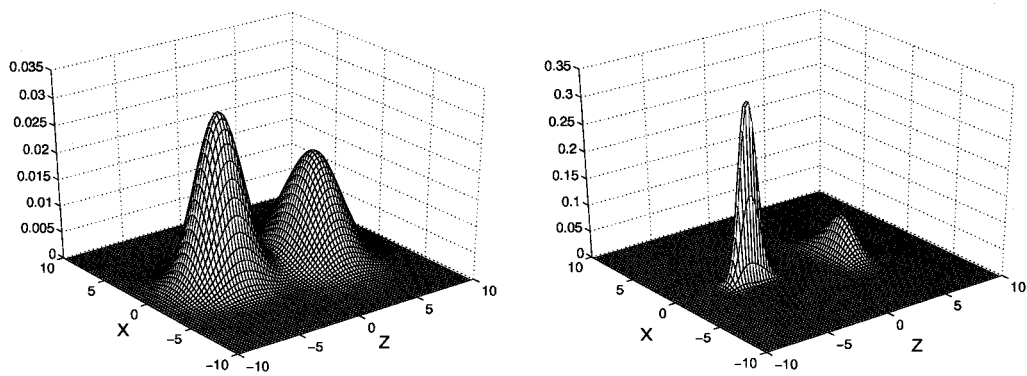


Figura 2.3: Distribución de probabilidad final para $A = 0,5$ y $S = 4$ (izquierda) y para $A = 0,1$ y $S = 20$ (derecha), tras un tiempo de deriva libre $t_d = 3,5$. La posición del centro de los paquetes en los puntos $z = \pm 4$, predicha por todos los cálculos cuánticos, coincide con la estimación del modelo simplificado (véase (1.13), (1.14) y la expresión (2.71)). También puede observarse el fenómeno de enfoque (especialmente cuando $A = 0,1$, ya que no se encuentra enmascarado por el ensanchamiento libre) y el ensanchamiento libre (sobre todo en el caso de $A = 0,5$).

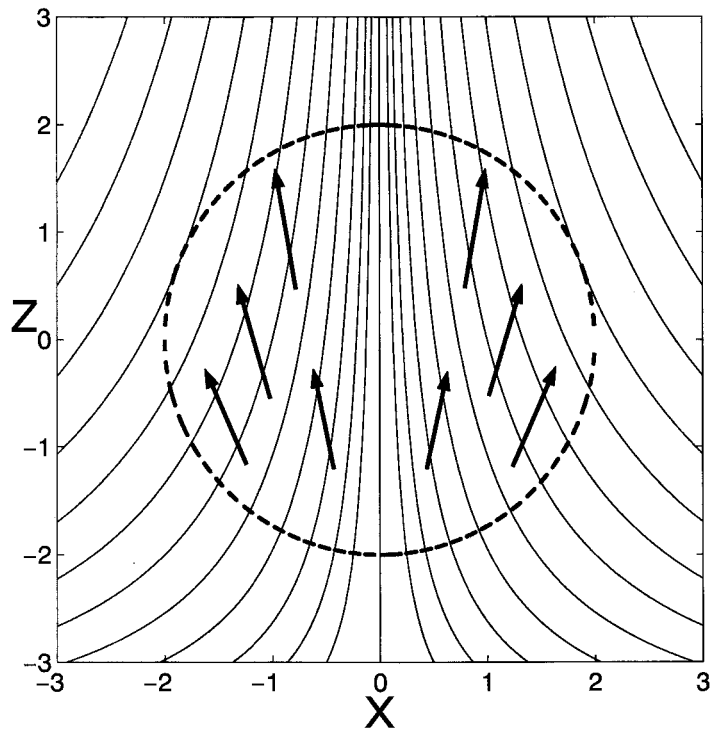


Figura 2.4: En esta figura podemos apreciar, para $S = 4$ y $z_0 = 4$, las líneas de campo en la zona en la que la función de onda inicial tiene un valor apreciable (delimitada por la línea discontinua). Se indica también con vectores la dirección de la fuerza clásica en distintos puntos. El sentido representado corresponde al autovalor positivo del espín m_B en la dirección *local* del campo magnético, mientras que al autovalor negativo correspondería una fuerza antiparalela a la mostrada. Las distancias están representadas en unidades de la anchura inicial del haz, y las longitudes de los vectores son arbitrarias.

Sin embargo, si el impulso adquirido por el haz en la zona de interacción está suficientemente diferenciado en función de las distintas proyecciones del espín (es decir, si la distribución de probabilidad en el espacio de momentos presenta picos claramente separados para cada proyección del espín), cabe esperar que una evolución libre los separe de forma efectiva. Tal como ya señalaron França, Marshall, Santos y Watson [105], si el tiempo de deriva libre es suficientemente grande, la distribución de posiciones final será una imagen de la distribución de momentos a la salida del imán. De hecho, se ha comprobado que el movimiento del *centro* del paquete gaussiano se corresponde con la trayectoria clásica, tanto dentro del imán (como se indicó en la sección anterior) como durante la evolución libre (véase la figura (2.3)). En definitiva, la posición z_c del centro del paquete es:

$$z_c = \pm \frac{AS}{2} \left(\frac{1}{2} + t_d \right), \quad (2.71)$$

siendo t_d el tiempo de deriva libre en unidades del tiempo de interacción.

Así pues, para obtener la separación deseada será necesario que el impulso mecánico definido anteriormente supere la anchura natural en el espacio de momentos de la gaussiana:

$$\frac{S}{2} > 1. \quad (2.72)$$

Queda claro de esta forma el interés de considerar la distribución de momentos $|\tilde{\Phi}(p_x, p_z)|^2$ del haz de partículas al entrar en la zona libre de campo, definida a partir de la transformada de Fourier de la distribución de posiciones:

$$\tilde{\Phi}(p_x, p_z) = \int \Phi(x, z) e^{-i(p_x x + p_z z)} dx dz. \quad (2.73)$$

Estas amplitudes en el espacio de momentos serán calculadas desarrollando las funciones de onda en la base de autofunciones del oscilador armónico, considerando posteriormente la relación (B.1) entre éstas y sus transformadas de Fourier. Mostramos en la figura (2.6) la distribución de momentos a la salida del imán correspondiente a una polarización inicial $|m_0\rangle = |+_z\rangle$, para las componentes $\tilde{\Phi}_{++}$ y $\tilde{\Phi}_{+-}$. La imagen muestra con claridad que la separación de los picos en el espacio de momentos supera la anchura de las distribuciones, de forma que, de acuerdo con la discusión anterior, cabe esperar que una evolución libre durante un tiempo suficiente los separe también en el espacio ordinario. Esto es precisamente lo que se observa en la figura (2.3).

La distribución $|\tilde{\Phi}(p_x, p_z)|^2$ está en gran medida (tanto más cuanto menor sea la influencia del término cinético h_0) determinada por el factor (2.68) introducido por la interacción con el campo, que supone el impulso mecánico mencionado en la sección anterior. Esto nos permite interpretar de forma

intuitiva la distribución de momentos de una partícula en un punto (ρ, β) como un doble pico (cada uno de ellos asociado a una de las G_{m_B}) simétrico respecto del origen de p_ρ ⁵. Esta imagen de la partícula con dos posibles velocidades en la dirección radial coincide con la descripción semiclásica, y queda ilustrada en la figura (2.5). En esta figura se muestra como a cada componente G_{m_B} le corresponde una distribución de momentos centrada en el valor del impulso mecánico clásico⁶ (2.69). Se comprueba también que las componentes $\tilde{\Phi}_{++}$ y $\tilde{\Phi}_{-+}$ con un espín definido en la dirección z no tienen un pico único⁷, ya que en el desarrollo (2.59) de cada una de ellas aparecen las dos amplitudes G_{m_B} .

La figura (2.7) resume el contenido de las dos últimas secciones, y puede interpretarse en términos de la distribución de momentos a la salida del imán (figura (2.6)). En ellas mostramos las distribuciones de probabilidad en el espacio ordinario a la salida del imán, tanto para el cálculo exacto Φ_{m_z, m_0}^{ex} como para el correspondiente a la aproximación de estados coherentes Φ_{m_z, m_0}^{cs} , obtenido a partir de las $G_{m_B}^{cs}$, en las mismas condiciones en las que se obtuvo la figura (2.6).

A la salida del imán ($t = 1$) se observa que la distribución $|\Phi_{-+}|^2$ presenta franjas de interferencia, como consecuencia de la superposición equilibrada de las amplitudes G_+ y G_- (responsable también del doble pico en la distribución de momentos $|\tilde{\Phi}_{-+}(\vec{p})|^2$). Cada una de estas amplitudes es proporcional a una fase (2.68), por lo que el término cruzado oscilará con una longitud de onda radial $\lambda \simeq 2\pi/S \approx 1,5$. Este valor está en buen acuerdo con el que puede inferirse a partir de la imagen mostrada.

En definitiva, las amplitudes G_{m_B} parecen jugar un papel similar al adoptado por las funciones de onda asociadas a proyecciones definidas del espín en la dirección z en la descripción simplificada (1.2.1) del problema. En aquél modelo, cada proyección del espín a lo largo del eje z se asocia con una localización espacial, obteniéndose así la correlación entre espín y posición necesaria para completar el proceso de medida (véase la sección (1.2.2)). La situación es aquí más sutil: el eje paralelo al campo magnético que define

⁵Desde luego, no es riguroso hablar de partículas en este contexto, pero puede interpretarse la distribución total en el espacio de momentos como una especie de convolución de estas distribuciones "monoparticulares" con la distribución espacial del haz.

⁶Téngase en cuenta que, a pesar de que hacemos habitualmente referencia a *dos* amplitudes G_+ y G_- , el eje paralelo a \vec{B} que sirve para definir las varía de forma continua. Sin embargo, dado que esta variación no es demasiado grande (véase la figura (2.4)), el autovalor $m_B = 1/2$ puede asociarse con un impulso esencialmente "hacia arriba" y el autovalor $m_B = -1/2$ con un impulso "hacia abajo". Este hecho nos permite interpretar la figura (2.5).

⁷Uno de los picos de la distribución $|\tilde{\Phi}_{++}|^2$ es imperceptible en la escala representada. Este hecho es consecuencia de que el coeficiente de G_- en su desarrollo (2.59) es $\sin^2(\beta/2)$, siendo en este caso el ángulo β que forma el campo \vec{B} con el eje z muy pequeño (véase la figura (2.4)). Sin embargo, los dos picos visibles en la distribución $|\tilde{\Phi}_{-+}|^2$ son pequeños pero de un tamaño similar, debido a que los coeficientes correspondientes de G_- y G_+ en (2.59) son ambos proporcionales a $\sin(\beta)$.

las G_{m_B} varía de forma continua, de manera que ninguna región finita del espacio puede asociarse con un único eje privilegiado de cuantificación. Esto tendrá importantes consecuencias a la hora de establecer el mecanismo de medida del espín, y serán estudiadas más adelante.

2.3.2. Spin-flip

En el modelo simplificado expuesto en (1.2.1), se presenta el Stern-Gerlach como un proceso que conserva la proyección del espín respecto del eje z de laboratorio. Un haz polarizado en la dirección de dicho eje no vería modificado su estado de espín al atravesar el imán. Sin embargo, tanto en la aproximación semiclásica como en todos los tratamientos analíticos presentados en este trabajo, el eje de cuantización es la dirección del campo \vec{B} , y la interacción mezclará las distintas polarizaciones en la dirección z . Esto nos permite identificar el *spin-flip* o probabilidad de transición entre estados con distintas polarizaciones en la dirección z como una de las señas de identidad del tratamiento más riguroso frente al modelo simplificado. En la figura (2.8) mostramos la probabilidad de spin-flip en función del parámetro S para distintos cálculos.

La amplitud de spin-flip puede definirse en cada punto \vec{r} del espacio a partir de la componente de la función de onda final con espín antiparalelo al espín inicial. Para la probabilidad de transición $1/2 \rightarrow -1/2$:

$$\begin{aligned}\Phi_{-,+}(\vec{r}, t) &= \sum_{m_B} d_{-\frac{1}{2}, m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B}(\vec{r}, t) d_{m_B, \frac{1}{2}}^{1/2}(\beta) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}(\beta) (G_{-}(\vec{r}, t) - G_{+}(\vec{r}, t)) \\ &= \Phi_{+,-}(\vec{r}, t).\end{aligned}\tag{2.74}$$

El valor concreto de las amplitudes G_{m_B} dependerá de la aproximación considerada (véanse las secciones (2.2.2, 2.2.3, 2.2.4)), pero trataremos de interpretar la figura (2.8) a partir de esta última expresión general.

Lo primero que cabe resaltar es que, en todas de las aproximaciones, el spin-flip es invariante frente al intercambio de las proyecciones inicial y final del espín respecto al eje z . Es interesante destacar que esto es consecuencia de la diagonalidad del operador de evolución de la interacción U_I en *alguna* base local del espacio de espín caracterizada por un ángulo *real* β , lo cual permite establecer el desarrollo (2.59). Sin embargo se comprueba que, en el cálculo exacto, la probabilidad de la transición $|+\rangle_z \rightarrow |-\rangle_z$ es distinta de la de la transición $|-\rangle_z \rightarrow |+\rangle_z$ (véase la figura (2.8)). Esto indica que *no se conserva ninguna proyección del espín a lo largo de algún eje local*, y que la conservación de la proyección a lo largo de la dirección de \vec{B} sólo es una (buena) aproximación.

Nos interesamos ahora por la probabilidad de spin-flip propiamente dicha, es decir, por la integral del cuadrado del módulo de (2.74) (esta es precisa-

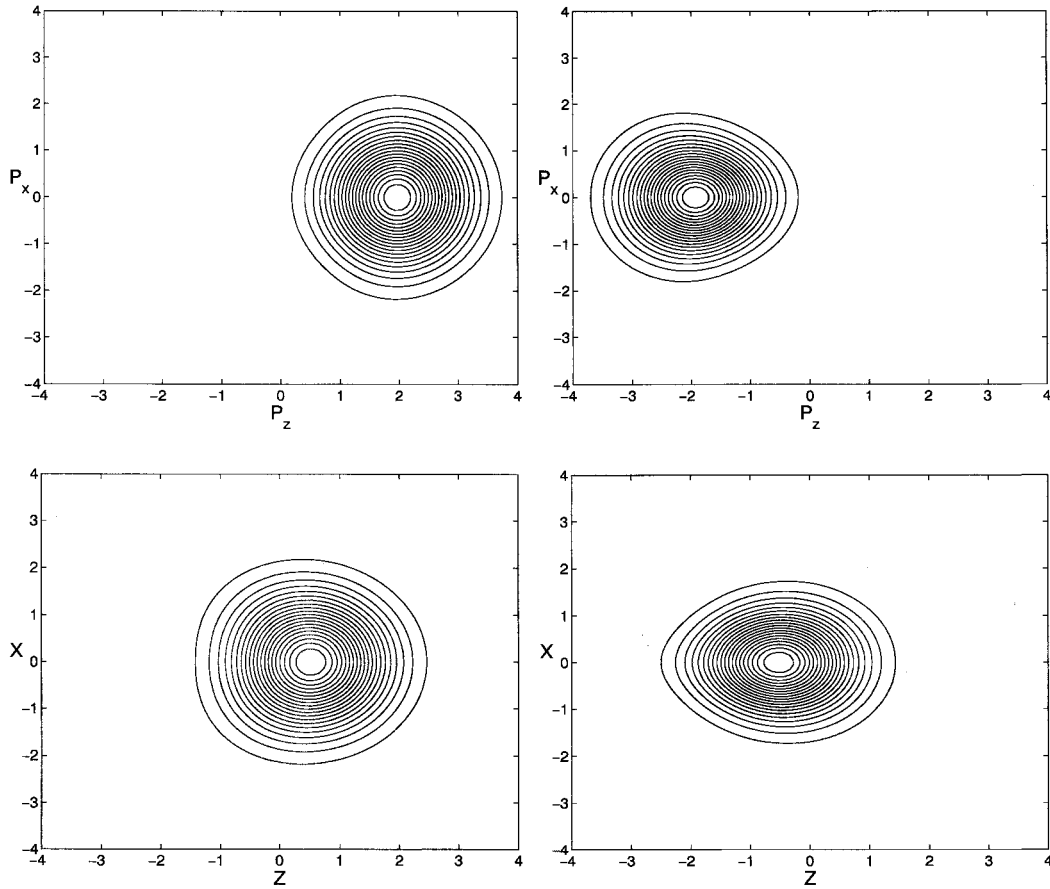


Figura 2.5: En la parte superior mostramos la distribución de momentos $|\tilde{G}(\vec{p})_+^{cs}|^2$ (izquierda) y $|\tilde{G}(\vec{p})_-^{cs}|^2$, (derecha) para $A = 0,5$, $S = 4$ a la salida del imán. La componente G_- tiene un pico bien diferenciado centrado en $p_z = -S/2 = -2$ (correspondiente al valor del impulso ejercido por la fuerza clásica $F = \pm m_B S$), mientras la componente G_+ presenta un pico en $p_z = 2$. En la parte inferior mostramos las distribuciones en el espacio ordinario $|G_+(\vec{r})|^2$ (izquierda) y $|G_-(\vec{r})|^2$ (derecha) para los mismos valores de los parámetros. Se observa que estas distribuciones presentan picos en los valores $z = 0,5$ y $z = -0,5$, de acuerdo con (2.71) para $t_d = 0$.

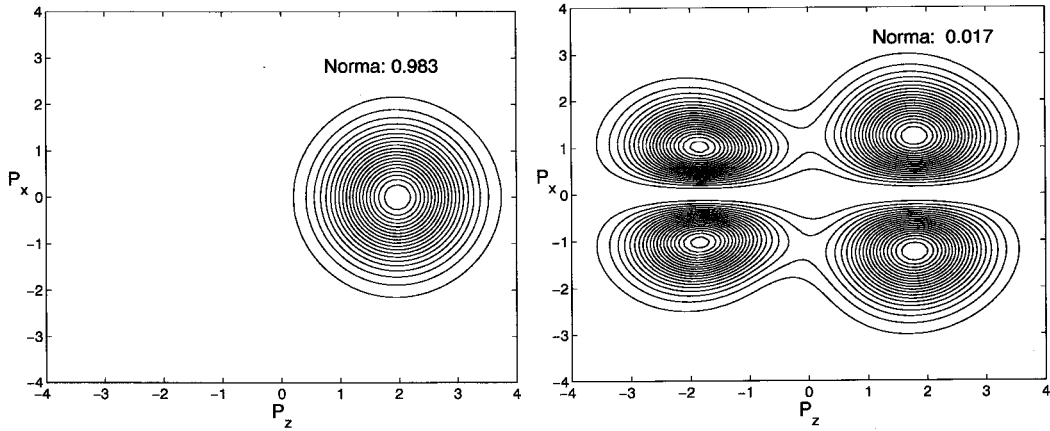


Figura 2.6: Mostramos la distribución de momentos $|\tilde{\Phi}(\vec{p})_{+,+}^{ex}|^2$ directa (izquierda) y de spin-flip ($|\tilde{\Phi}(\vec{p})_{-,+}^{ex}|^2$, a la derecha) para $A = 0,5$, $S = 4$. La componente de spin-flip tiene picos bien diferenciados centrados en $p_z = \pm S/2 = \pm 2$ (correspondientes a los valores del impulso ejercido por la fuerza clásica $F = \pm m_B S$) de magnitud similar, mientras que en la componente directa sólo se aprecia el pico correspondiente a $p_z = 2$ (en realidad contiene otro pico en $p_z = -2$ inapreciable a esta escala).

mente la cantidad representada en en la parte derecha de la figura (2.7):

$$P_{sf} = \frac{1}{4} \int (|G_+|^2 + |G_-|^2 - 2\text{Re}(G_+^* G_-)) \text{sen}^2(\beta) d\vec{r}. \quad (2.75)$$

Las amplitudes G_+ y G_- estarán ensanchadas, desplazadas y desfasadas según se describe con más detalle en (2.3.1). Esta expresión permite interpretar de forma inmediata el orden de magnitud del spin-flip que se observa en la figura (2.8). Para ello, consideramos que $\text{sen}^2(\beta) = x^2/\rho^2 \simeq x^2/z_0^2$, y, como primera aproximación, estimamos la integral como el valor medio de esta cantidad sobre la gaussiana inicial. De esta forma obtenemos fácilmente: $P_{sf} \simeq 0,0156$, lo cual reproduce el orden de magnitud de los valores de la figura (2.8). Esta primera estimación pone además de manifiesto la relación del spin-flip con la inhomogeneidad del campo magnético en la región del haz, aunque no da cuenta todavía de los efectos dinámicos que se aprecian en la figura.

Si el parámetro S es grande (recordemos que para separar las distintas componentes del espín no debe ser pequeño, véase (2.72)), el desfase entre G_+ y G_- a la salida del imán será también grande ya que cada una de ellas es proporcional a un factor (2.68) distinto. En estas circunstancias, el término cruzado

$$\text{Re}(G_+^* G_-) \propto \cos(S\rho) \quad (2.76)$$

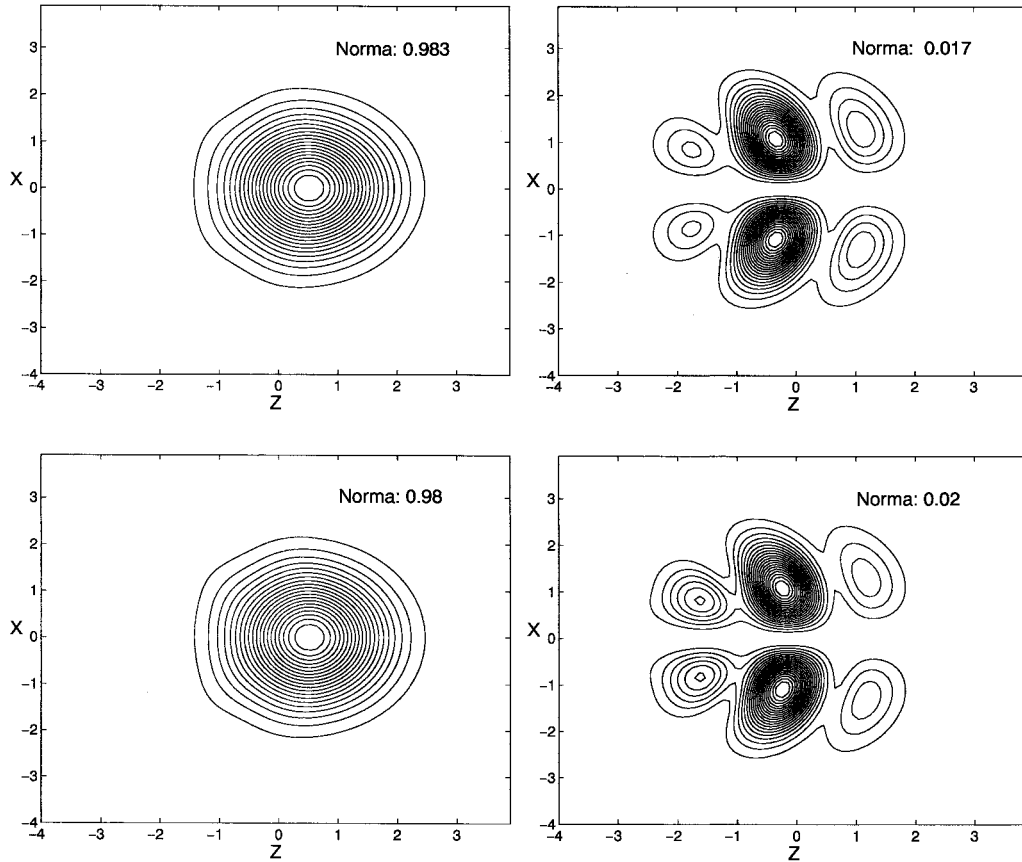


Figura 2.7: En la parte superior mostramos la distribución de probabilidad en el espacio ordinario $|\Phi_{+,+}^{ex}|^2$ (izquierda) y $|\Phi_{-,+}^{ex}|^2$ (derecha) a la salida del imán para $A = 0,5$, $S = 4$, con una polarización inicial $|m_0\rangle = |+_z\rangle$. Obsérvense las franjas de interferencia en la distribución $|\Phi_{-,+}^{ex}|^2$. En la parte inferior mostramos las mismas distribuciones calculadas a partir de las amplitudes G_{m_B} : $|\Phi_{+,+}^{cs}|^2$ (izquierda) y $|\Phi_{-,+}^{cs}|^2$ (derecha) para los mismos valores de los parámetros. Se indica en cada figura la integral de la distribución representada.

(recuérdese que a la salida del imán $t = 1$) oscilará rápidamente. Al integrar, este término oscilante se hará muy pequeño, de forma que la probabilidad total de spin-flip corresponderá exclusivamente a la contribución del término directo⁸ $|G_+|^2 + |G_-|^2$. Si además el parámetro A es pequeño, las gaussianas prácticamente no se habrán ensanchado ni desplazado, y tendremos:

$$|G_+|^2 \approx |G_-|^2 \propto \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+z^2)}. \quad (2.77)$$

En esta situación, la probabilidad de spin-flip es esencialmente el valor medio de $\sin^2(\beta)$ sobre la distribución gaussiana inicial. Este era precisamente el resultado obtenido en la aproximación semiclásica [40],(1.35)⁹, por lo que, en este caso, la probabilidad de spin-flip coincide cuantitativamente con el cálculo semiclásico con $I = 1/2$. En cualquier caso, la estabilización del spin-flip tras las oscilaciones que se aprecia en la figura puede entenderse si considera el comportamiento del valor medio de $\sin^2(\beta)$ en las distribuciones de probabilidad $|G_+|^2$ y $|G_-|^2$. La naturaleza del movimiento en el campo magnético es tal que tiende a conservar el rango de ángulos abarcados por ambas distribuciones (recuérdese el efecto de enfoque discutido en las secciones anteriores). La variación del valor medio de $\sin^2(\beta)$ proviene, pues, exclusivamente, del ensanchamiento libre de las distribuciones, y será por lo tanto un efecto muy lento en las condiciones consideradas de A pequeño.

Esta última discusión está referida al spin-flip justo a la salida del imán ($t = 1$), pero el conocimiento de las amplitudes G_+ y G_- en cualquier instante nos permite conocer la evolución temporal del spin-flip. Es interesante observar que el desfase entre las dos amplitudes tiene la dependencia temporal $\exp(iS\rho t)$, de forma que la contribución del término cruzado (y, por lo tanto, el spin-flip total) oscilará en el tiempo con una frecuencia $\omega_{sf} \simeq Sz_0$ (siempre que consideremos que $\rho \simeq z_0$). Obsérvese que esta es precisamente la frecuencia de precesión del espín para una partícula situada en el punto $(0, 0, z_0)$. Las oscilaciones observadas en la figura (2.8) pueden explicarse de forma similar, teniendo ahora en cuenta que variamos S manteniendo un tiempo de interacción fijo $t = 1$. La forma (2.76) del término oscilante sugiere estimar la longitud de onda de las oscilaciones como $\lambda_S \simeq 2\pi/z_0 = 1,57$, lo cual está en buen acuerdo con la figura.

⁸Es interesante observar que la condición sobre S que acabamos de enunciar es equivalente a la condición (2.72) necesaria para separar las funciones de onda en el espacio de momentos. Por lo tanto, la atenuación del término oscilante puede entenderse en términos de la disminución del solapamiento entre las dos componentes del espín como consecuencia de su alejamiento en el espacio de momentos.

⁹Téngase sin embargo en cuenta que, para derivar la expresión concreta presentada en [40] y reproducida en este trabajo en (1.35), se ha realizado la aproximación adicional de considerar pequeño el ángulo β . De acuerdo con esto, en la aproximación semiclásica se obtiene $P_{sf}^{sc} \simeq 0,0156$. Este resultado idéntico a nuestra primera estimación no debe sorprender, considerando que en la aproximación semiclásica este fenómeno es simplemente consecuencia de la distribución de CIS en el haz de partículas, lo cual está exclusivamente ligado a la inhomogeneidad del campo magnético.

Otro aspecto interesante de este fenómeno es el comportamiento perturbativo para S pequeño. A partir de las expresiones (2.75) y (2.76), cabe esperar que para $S \ll 1$, la probabilidad de spin-flip sea $P_{sf} \sim S^2$, ya que $\cos(S\rho) \simeq 1 - S^2\rho^2$. Concretamente, teniendo en cuenta que en estas circunstancias $|G_+|^2 \approx |G_-|^2 = |G|^2$, siendo G la gaussiana inicial:

$$P_{sf} \simeq \frac{1}{2} \int |G|^2 S^2 \rho^2 \sin^2(\beta) d\vec{r} = \langle x^2 \rangle \frac{S^2}{2} = \frac{S^2}{2}, \quad (2.78)$$

donde hemos tenido en cuenta que, en las unidades adimensionales, el valor medio de x^2 es 1. Este comportamiento, predicho por las aproximaciones analíticas, puede también observarse para el cálculo exacto en la figura (2.8).

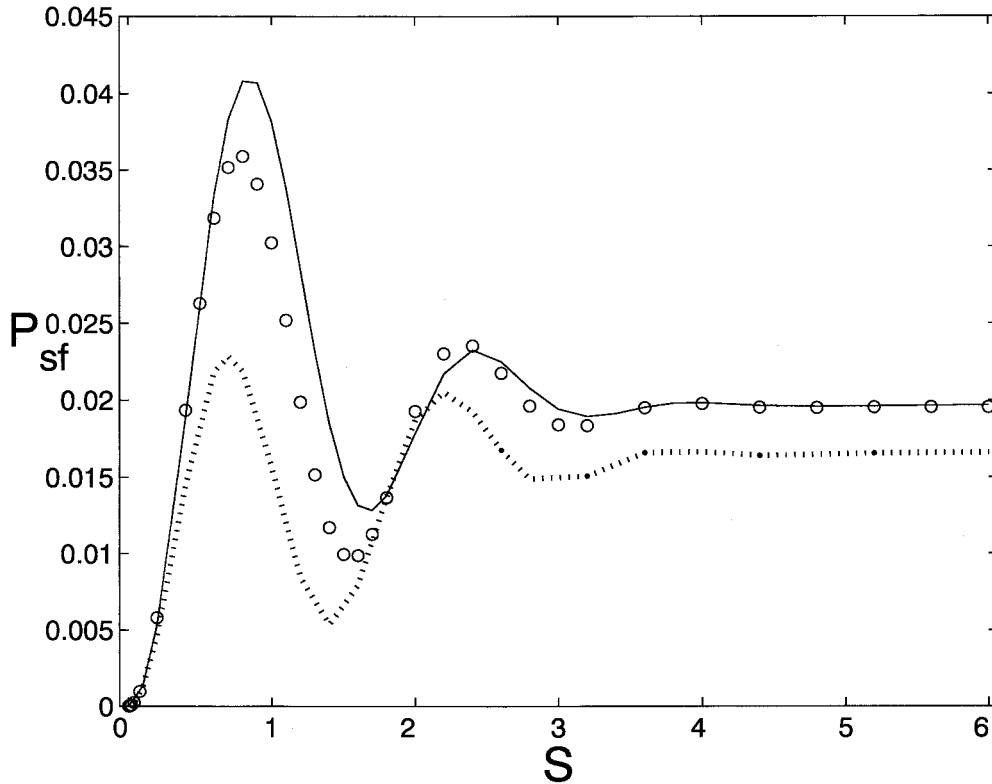


Figura 2.8: Probabilidad de spin-flip en función de S , para $A = 0,5$ y $z_0 = 4$. La línea continua representa la transición $-1/2 \rightarrow 1/2$ en el caso del cálculo exacto, la línea de puntos se refiere a la transición $1/2 \rightarrow -1/2$ para el mismo cálculo, y los círculos vacíos muestran los resultados obtenidos en la aproximación de estados coherentes.

2.3.3. Solapamientos con el cálculo exacto

Ahora que conocemos mejor la acción del campo \vec{B} sobre el haz de partículas así como su diferente tratamiento en las distintas aproximaciones, es interesante intentar cuantificar de alguna forma las discrepancias entre estas aproximaciones y el cálculo exacto, obtenido, como ya se ha dicho, integrando numéricamente la ecuación de Schrödinger.

Sin entrar en consideraciones más sofisticadas, una medida sencilla de la diferencia entre dos estados $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ en un espacio de Hilbert estará basada en el producto escalar $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$ entre los dos estados. En nuestro caso, nos interesará el solapamiento entre la función de onda exacta $\Phi^{ex}(\vec{r}; m_0)$ y la función de onda $\Phi^{ap}(\vec{r}; m_0)$ evaluada en una determinada aproximación a partir de la misma función de onda inicial, ambas en el tiempo $t = 1$, es decir, a la salida del imán.

Sin embargo, al calcular explícitamente este solapamiento nos encontramos con una ambigüedad a la hora de elegir el estado inicial m_0 de polarización con respecto al eje z . Esta elección no será inocente a la hora de establecer el resultado, ya que es de esperar que las distintas proyecciones del espín no estén igualmente bien representadas por la función de onda aproximada. Preferimos definir la *matriz de solapamiento* S a partir de la expresión general del producto escalar entre los dos estados finales $|\Phi^{ap}(t = 1); m'_0\rangle$ y $|\Phi^{ex}(t = 1); m_0\rangle$:

$$S(m_0, m'_0) = \langle\Phi^{ex}(t = 1); m_0|\Phi^{ap}(t = 1); m'_0\rangle. \quad (2.79)$$

Esta matriz proporciona de forma compacta la información sobre el solapamiento en $t = 1$ para la función de onda inicial $\Phi_0(\vec{r})$ y para *cualquier* polarización inicial $|m_0\rangle$. Podemos pues considerar el valor absoluto

$$O = 1/2|\text{Tr}(S)| \quad (2.80)$$

de la traza de S como una medida del solapamiento *medio* independiente de la polarización inicial.

En la figura (2.9) podemos ver el solapamiento en función del parámetro A de las distintas aproximaciones con el cálculo exacto, para un valor constante del producto $AS = 2$. Podemos observar como, para un determinado valor de AS , el solapamiento de la aproximación pseudo-adiabática es prácticamente independiente de los parámetros A y S . Este hecho puede entenderse si tenemos en cuenta que la principal fuente de discrepancia en este caso radica en que, en esta aproximación, se desprecia el movimiento del haz dentro del imán. Dado que este desplazamiento es proporcional a AS (véase la sección(2.3.1)), el solapamiento depende esencialmente de este producto. El caso de la aproximación adiabática es parecido, aunque ahora el solapamiento empeora al aumentar A , ya que la función de onda (2.47) no incluye el ensanchamiento libre proporcional a este parámetro.

El análisis del caso de las aproximaciones simetrizada y de estados coherentes es algo más sutil. En estos casos no puede establecerse un orden determinado del desarrollo en potencias de S , A , o AS . El problema consiste esencialmente en que, al derivar los operadores de evolución correspondientes a estas aproximaciones, se han despreciado términos del mismo orden en los parámetros relevantes que los términos conservados (concretamente, se desecharon los términos que no conmutaban con I_B . Véase la sección (2.2.1)). Esto explica la complicada dependencia del solapamiento con estos parámetros que refleja la figura. Sin embargo, tal como se muestra en el Apéndice C, cabe esperar que los términos despreciados para obtener estas aproximaciones pierdan importancia para A pequeño y S grande. Esta tendencia se aprecia también en la figura, aunque para valores muy grandes de S (correspondientes a la zona de A muy pequeño), se observa un empeoramiento del solapamiento, tal vez debido a que empiezan a cobrar relevancia términos superiores en el desarrollo en conmutadores del operador de evolución.

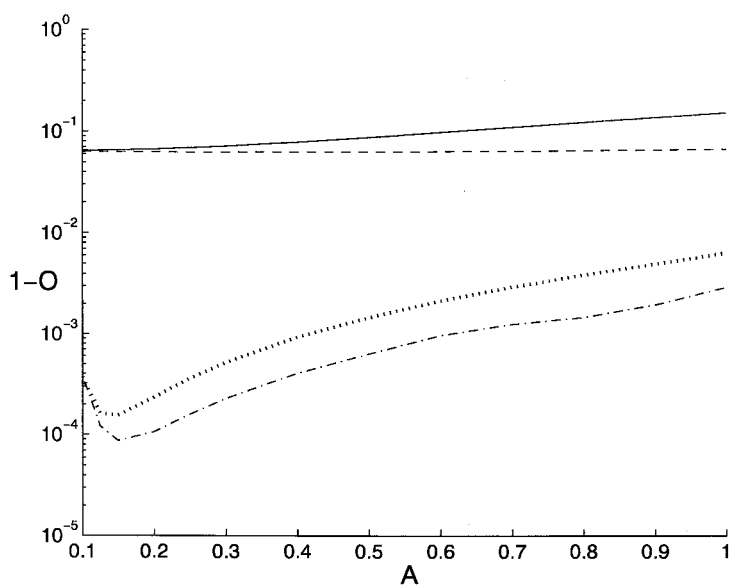


Figura 2.9: Solapamiento de las distintas aproximaciones con el cálculo exacto, para $AS = 2$. El valor $1 - O = 0$ supone un acuerdo total. La línea continua corresponde a la aproximación adiabática, la discontinua a la pseudo-adiabática, la de puntos a la de estados coherentes y la de trazos y puntos a la simetrizada. Obsérvese la mínima discrepancia con el cálculo exacto de las aproximaciones simetrizada y de estados coherentes (del orden de 0,1 %) para un amplio rango de valores de los parámetros.

2.4. Medida del espín

Con los elementos de los que disponemos, propondremos a continuación una descripción del proceso de medida del espín mediante el experimento de Stern–Gerlach. Como habíamos adelantado, resultará más compleja que la presentada en (1.2.2), y estará íntimamente relacionada con el concepto de estados coherentes internos.

Expresado de forma intuitiva, recordamos que el formalismo de los CIS permite asociar destellos en la placa fotográfica con estados internos de espín, mientras que el fenómeno de decoherencia (junto con una determinada interpretación del colapso del vector de estado) es responsable de que el “resultado del experimento” sea precisamente la posición del destello.

2.4.1. Matriz M

Empezaremos por generalizar la definición de la matriz M en (1.24) para poder considerarla en cualquier momento del proceso, y no sólo en tiempos grandes con respecto a la duración de la interacción. Para ello, sustituiremos las amplitudes de dispersión utilizadas en su definición original por las funciones de onda en cualquier instante:

$$M_{ij}(\vec{r}_0) = \sum_k \langle \Phi_0, i | U^\dagger | \vec{r}_0, k \rangle \langle k, \vec{r}_0 | U | \Phi_0, j \rangle, \quad (2.81)$$

donde $|\Phi_0, i\rangle$, $|\Phi_0, j\rangle$ son los estados iniciales con estados de espín i , j respectivamente, y U es el operador de evolución correspondiente al tiempo considerado.

Como ya se mostró en la sección (1.2.3), la densidad de probabilidad de presencia en un punto \vec{r}_0 es

$$P(\vec{r}_0) = \text{Tr}(\rho M(\vec{r}_0)), \quad (2.82)$$

siendo ρ la matriz densidad *inicial* definida en el espacio de estados de espín. Podemos generalizar el concepto CIS¹⁰, definiéndolos como los autovectores de la matriz $M(\vec{r})$, y serán los estados internos revelados por el experimento (véase la sección (1.2.3)). Sin embargo, como también hemos mencionado anteriormente, habrá que tener en cuenta las salvedades siguientes:

- La asociación perfecta de una posición \vec{r}_0 con un autoestado $|n\rangle$ de la matriz M sólo será posible si el único elemento diagonal de $M(\vec{r}_0)$ distinto de cero es el autovalor $\lambda_n(\vec{r}_0)$ correspondiente a dicho autoestado.

En caso contrario, la medida estará “contaminada” por la presencia de

¹⁰Recordamos que los CIS fueron inicialmente definidos diagonalizando la sección eficaz diferencial, por lo que dependen de la dirección Ω de dispersión [40], [39] (véase también la sección (1.2.3)). Nos proponemos aquí considerarlos en cada posición y en todo instante del proceso.

otros autoestados distintos. Podremos por lo tanto definir un *contraste* $C_n(\vec{r}_0)$ que determine el grado de prevalencia del autoestado $|n\rangle$ en la posición \vec{r}_0 :

$$C_n(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_n(\vec{r}_0)}{\text{Tr}(M(\vec{r}_0))}. \quad (2.83)$$

En el caso de partículas de espín $1/2$, el valor de C_n en cada punto oscilará entre 0 y 1. Un valor $C_n(\vec{r}_0) = 0$ indica una asociación perfecta de la posición \vec{r}_0 con el autoestado *ortogonal* a $|n\rangle$. Un valor $C_n(\vec{r}_0) = 1$ indica una asociación perfecta de la posición \vec{r}_0 con el autoestado $|n\rangle$. El valor $C_n(\vec{r}_0) = 0,5$ indica que la matriz M es proporcional a la matriz identidad y no discrimina los distintos estados internos. En este último caso, los estados coherentes internos estarán indeterminados en esa posición.

- Por otro lado, los autoestados de M varían en general de forma continua con la posición, por lo que habrá una incertidumbre en la determinación del estado asociada a la imprecisión en la medida de la posición \vec{r}_0 del destello. Recuérdese además que la discriminación entre estados del puntero por parte del entorno necesitaba de una separación macroscópica entre estos estados (véase la sección (1.1.2)). No será, pues, posible distinguir estados internos del sistema correspondientes a posiciones arbitrariamente próximas.

Veamos la forma que adopta la matriz M en el problema que nos ocupa, a partir de las expresiones analíticas de las que disponemos para las funciones de onda. De esta forma, estudiamos explícitamente las aproximaciones adiabática, pseudo-adiabática y de estados coherentes. La aplicación posterior del operador de evolución libre U_0 (ya sea en el contexto de la aproximación simetrizada o de una deriva libre), será discutida después. Considerando que los índices $i, j, k = \pm 1/2$ se refieren a proyecciones del espín a lo largo del eje z , obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_k \left(G_+^* d_{\frac{1}{2},i}^{1/2} d_{\frac{1}{2},k}^{1/2} + G_-^* d_{-\frac{1}{2},i}^{1/2} d_{-\frac{1}{2},k}^{1/2} \right) \\ &\quad \times \left(G_+ d_{\frac{1}{2},j}^{1/2} d_{\frac{1}{2},k}^{1/2} + G_- d_{-\frac{1}{2},j}^{1/2} d_{-\frac{1}{2},k}^{1/2} \right) \\ &= |G_+|^2 d_{\frac{1}{2},i}^{1/2} d_{\frac{1}{2},j}^{1/2} + |G_-|^2 d_{-\frac{1}{2},i}^{1/2} d_{-\frac{1}{2},j}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

con las definiciones de las amplitudes G_+ y G_- que corresponda a la aproximación considerada (véanse las secciones (2.2.2, 2.2.3, 2.2.4)). Sustituyendo los valores de los elementos de la matriz de rotación, podemos escribir la

matriz M en función de las matrices de Pauli (2.5):

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2}(|G_+|^2 + |G_-|^2) \mathbb{I} + \\
 &\quad (|G_+|^2 - |G_-|^2) (\cos(\beta)I_z - \text{sen}(\beta)I_x) = \\
 &\quad \frac{1}{2}(|G_+|^2 + |G_-|^2) \mathbb{I} + (|G_+|^2 - |G_-|^2) I_B. \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

Esta última expresión refleja con especial claridad el hecho de que los estados coherentes de nuestro problema son los autoestados de I_B , es decir, los estados con proyección definida del espín en la dirección de \vec{B} . Esto es válido además en cualquier instante, ya que la dependencia temporal de M está enteramente contenida en las amplitudes G_+ y G_- que, recordémoslo, son esencialmente gaussianas desfasadas, ensanchadas y desplazadas (véase (2.3.1)). Hay que tener en cuenta sin embargo que, en los puntos en los que $|G_+|^2$ sea igual a $|G_-|^2$, la matriz M será proporcional a la identidad, por lo que los CIS (obtenidos al diagonalizar M) quedarán indeterminados.

Es interesante resaltar que este resultado es válido siempre que U_I sea diagonal en *alguna* base local del espacio de espín, ya que no hemos hecho uso alguno de la estructura concreta del campo \vec{B} . En definitiva, puede afirmarse de forma totalmente general (aunque en el contexto de las aproximaciones que estamos considerando), que los CIS son paralelos al campo magnético para cualquier \vec{B} arbitrario.

Queda claro pues que, de acuerdo con nuestras aproximaciones, los estados medidos en un experimento de Stern–Gerlach son los autoestados de I_B . La precisión con la que se mida un estado $|m_B\rangle$ dependerá, lógicamente, de la resolución angular de los centelleos en la pantalla detectora, pero también del contraste $C_{m_B}(\vec{r})$ asociado a esa posición concreta. De acuerdo con la definición (2.83), éste será:

$$C_{\pm 1/2}(\vec{r}) = \frac{|G_{\pm}|^2(\vec{r})}{|G_+|^2(\vec{r}) + |G_-|^2(\vec{r})}. \quad (2.86)$$

Esta magnitud sí varía sustancialmente con el tiempo, a través del comportamiento de las probabilidades $|G_+|^2$ (asociada a las partículas que se alejan del punto $(0, 0, z_0)$) y $|G_-|^2$ (asociada a las partículas que se acercan al punto $(0, 0, z_0)$). Estas probabilidades son inicialmente idénticas, de manera que $C_{\pm 1/2} = 0,5$ en todos los puntos, indicando que la posición no ofrece información alguna sobre el estado de espín. Esta situación no cambia en el caso de las aproximaciones adiabática y pseudo-adiabática, como consecuencia de que en estos casos despreciamos el desplazamiento de las partículas en el seno del campo magnético. En estas aproximaciones, $|G_+|^2 = |G_-|^2$ en todo momento y los CIS están indeterminados.

Sin embargo, en la aproximación de estados coherentes las probabilidades $|G_+|^2$ y $|G_-|^2$ se van separando, de manera que $C_{\pm 1/2}$ desarrolla valores

distintos de 0.5. Para un tiempo suficientemente grande, $|G_+|^2$ y $|G_-|^2$ se separarán totalmente, de forma que, en cualquier punto *en el que la densidad de probabilidad tenga un valor apreciable*, uno de los $C_{\pm 1/2}$ será igual a 1, mientras que el otro será cero. En esta situación, la correlación entre posición y proyección del espín es completa (véase la figura (2.10)). Queremos resaltar finalmente que, desde el punto de vista de la medida del espín, es necesario que esta correlación sea buena *en regiones del espacio en las que la densidad de presencia sea apreciable*, es decir, donde sea posible detectar algún impacto.

Si las condiciones experimentales son tales que AS sea pequeño, la separación a la que aludimos en el párrafo anterior no se completará durante el tiempo de interacción con el campo magnético. Como sabemos, una deriva libre posterior podrá separar de forma efectiva las distintas polarizaciones siempre que S no sea pequeño. Sin embargo, dado que la evolución libre U_0 no conmuta con I_B , la distribución de espines en la dirección del campo se verá modificada, como consecuencia del desplazamiento angular inducido por el operador p_β . Sabemos además que la evolución exacta en el seno del campo magnético contiene términos del tipo $K_y I_y$, que no conmutan con I_B y que hemos despreciado para derivar nuestras aproximaciones (véase (2.2.1)). Estos hechos se manifiestan a través de la aparición de términos proporcionales a I_T y a I_y en la matriz M , con lo que su componente de traza nula dejará de ser estrictamente proporcional a I_B . Para investigar este hecho, definimos las *asimetrías* $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$, $A_z(\vec{r})$ en cada uno de los ejes cartesianos como la diferencia entre las distribuciones finales de probabilidad en una determinada posición para las dos polarizaciones iniciales a lo largo del eje considerado:

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= |\Psi(\vec{r}; m_x = 1/2)|^2 - |\Psi(\vec{r}; m_x = -1/2)|^2, \\ A_y(\vec{r}) &= |\Psi(\vec{r}; m_y = 1/2)|^2 - |\Psi(\vec{r}; m_y = -1/2)|^2, \\ A_z(\vec{r}) &= |\Psi(\vec{r}; m_z = 1/2)|^2 - |\Psi(\vec{r}; m_z = -1/2)|^2. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Estas cantidades son accesibles experimentalmente, y se relacionan con la matriz M teniendo en cuenta que la matriz densidad correspondiente a la proyección $\pm 1/2$ a lo largo del eje coordenado i es

$$\rho_{\pm i} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm 2I_i), \quad (2.88)$$

siendo I_i la matriz de Pauli correspondiente¹¹. Podemos pues expresar la asimetría A_i correspondiente a la dirección cartesiana i como:

$$A_i(\vec{r}) = \text{Tr}(\rho_{+i} M(\vec{r})) - \text{Tr}(\rho_{-i} M(\vec{r})) = 2\text{Tr}(I_i M(\vec{r})), \quad (2.89)$$

¹¹Recuérdese que nuestras definiciones (2.5) incluyen un factor 1/2, de modo que $\text{Tr}(I_i^2) = 1/2$.

donde hemos tenido en cuenta (2.82). La asimetría en una determinada dirección puede por lo tanto interpretarse como el coeficiente correspondiente de la descomposición de la matriz M en sus componentes cartesianas.

En la figura tal se presentan las asimetrías obtenidas tras un tiempo de deriva $t_d = 3,5$ para el caso $A = 0,5, S = 4$. Se comprueba la existencia de una asimetría A_y distinta de cero que, como acabamos de mencionar, es consecuencia de la no conservación de I_B por parte del hamiltoniano libre h_0 . A pesar de ello, en la figura (2.11) obtenida a la salida del imán se confirma que las predicciones sobre la dirección de los CIS obtenidas a partir de las aproximaciones analíticas son razonablemente buenas, incluso en una situación relativamente poco favorable¹².

Por otro lado, la deriva libre permite la separación espacial de las probabilidades $|G_+|^2$ y $|G_-|^2$ en las aproximaciones adiabática y pseudo-adiabática, con el consiguiente desarrollo de un contraste distinto de 0.5. Esto ilustra la posibilidad de realizar medidas del espín aún en situaciones totalmente adiabáticas, siempre y cuando el tiempo de deriva sea suficiente (véase la sección (2.3.1)).

Como conclusión, podemos cotejar los resultados obtenidos en relación con la medida del espín con los 3 puntos propuestos en la sección (1.2.2):

1. En las aproximaciones analíticas, el observable medido I_B (operador de espín en la dirección local del campo) es conservado por la interacción¹³. Sin embargo, el estudio del spin-flip revela que, en el caso del cálculo exacto, *la interacción no conserva ninguna dirección del espín* (local o no). Se ha comprobado en cualquier caso que la conservación de I_B es una muy buena aproximación.
2. La posibilidad de asociación entre los estados medidos (los CIS) y los estados del aparato (autoestados de la posición) varía con el tiempo, y está caracterizada por el *contraste* de la matriz M . Este contraste aumenta con el tiempo, siendo máximo en las zonas con mayor probabilidad de impacto de la partícula.
3. Sin embargo, los autoestados de la posición, a pesar de ser ortogonales entre sí, no están localizados en posiciones macroscópicamente separadas. Por lo tanto, no serán seleccionados por el entorno, y no podrán por lo tanto ser observados. En la práctica, se observará una mancha en la pantalla, que estará asociada a una *distribución* de estados de espín. En definitiva, *una medida (observación de la mancha en*

¹²Compárese esta figura con la figura (1.1), donde se muestran las direcciones del campo magnético.

¹³En realidad, salvo en el caso de la aproximación adiabática, I_B no conmuta con el hamiltoniano de interacción. Sin embargo, esto es simplemente consecuencia de la exploración, por parte de la función de onda, de zonas del espacio *distintas* que se corresponden con direcciones *distintas* del campo \vec{B} . A pesar de ello, la posición instantánea se asocia siempre con el CIS correspondiente.

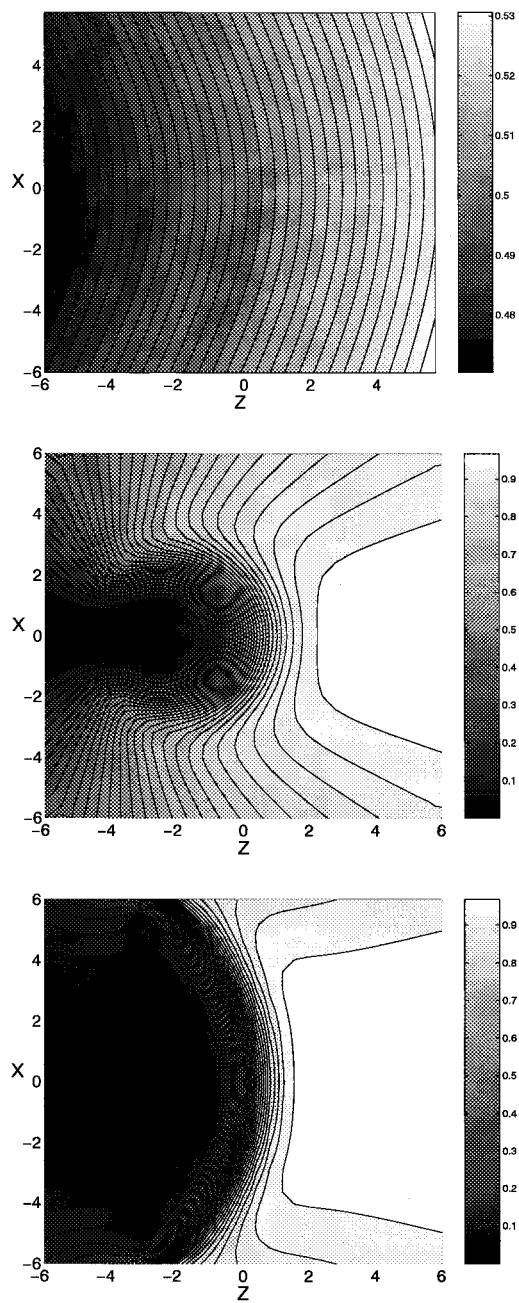


Figura 2.10: Contraste $C_{1/2}$ correspondiente a tres situaciones dinámicas. De arriba a abajo: (i) $A = 0,05$, $S = 0,4$. En esta situación, los paquetes están centrados en $z = \pm 0,005$. (ii) $A = 0,5$, $S = 4$, lo cual corresponde a un tiempo de interacción 10 veces superior al caso anterior. En este caso, los centros están en $z = \pm 0,5$. (iii) Mismos valores de los parámetros que en el caso anterior, pero tras un tiempo de deriva $t_d = 3,5$. Los paquetes están en $z = \pm 4$

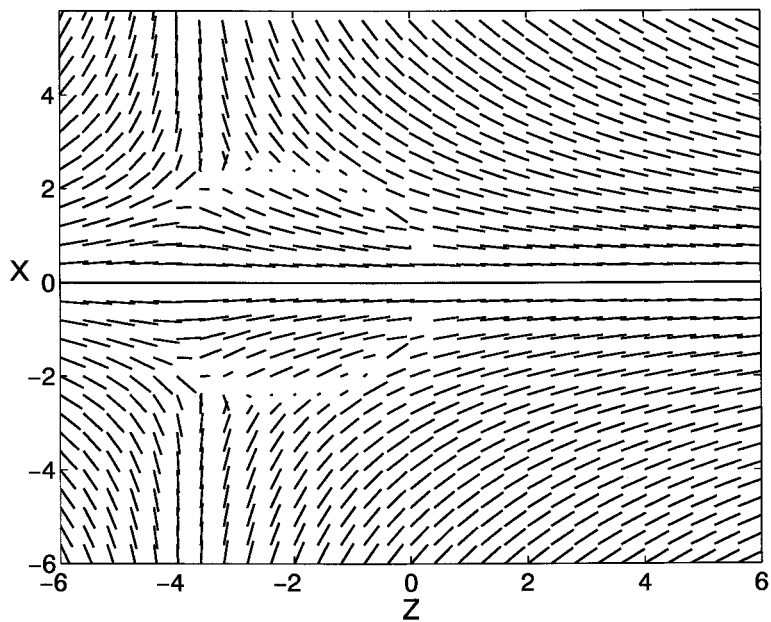


Figura 2.11: En esta figura se aprecian las direcciones de los estados coherentes internos (CIS) en cada punto, para $A = 0,5$ y $S = 4$. Se observa una banda en la cual los estados coherentes no están bien definidos. Esta zona se corresponde con la de contraste $\simeq 0,5$ de la figura anterior para la misma situación dinámica.

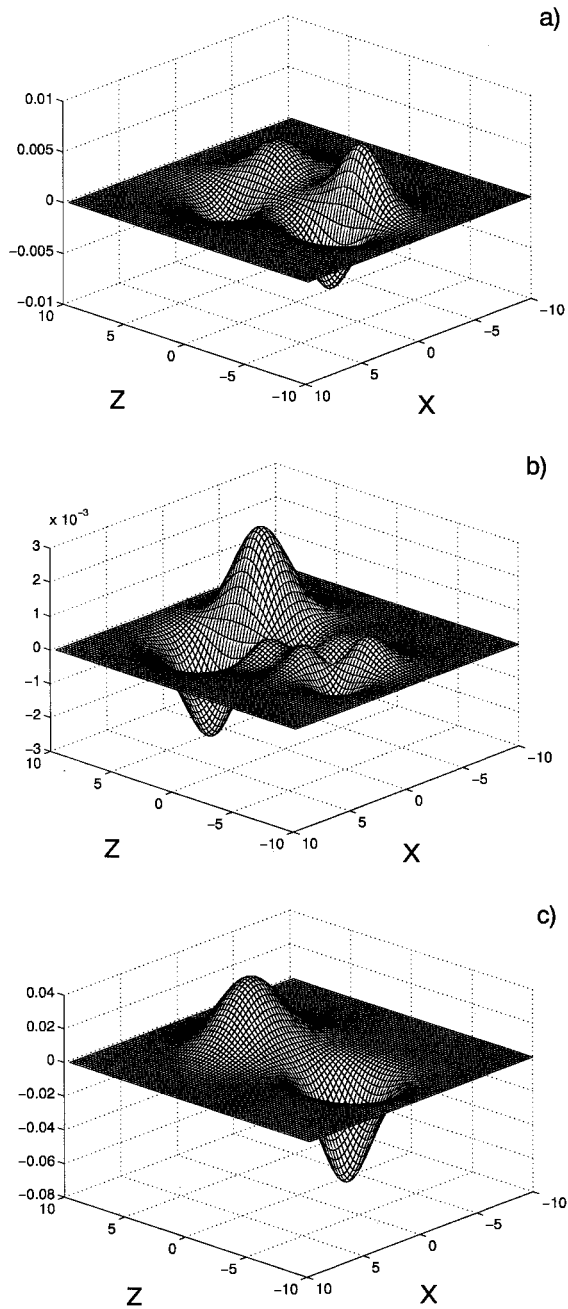


Figura 2.12: Asimetrías correspondientes a los ejes coordenados x (a) y (b) y z (c) tras un tiempo de deriva $t_d = 3,5$ y $A = 0,5, S = 4$. La máxima asimetría se obtiene para partículas polarizadas a lo largo del eje z , pero también se observan valores apreciables en las direcciones x e y .

la pantalla) no selecciona uno de los estados ortogonales del sistema cuántico, invalidando en este caso el esquema de Von Neumann.

En definitiva, hemos de admitir que el experimento de Stern–Gerlach *no* es, ni siquiera en principio, un proceso de medida ideal en el sentido definido en (1.2.2).

2.4.2. Tomografía de espín

Nos centramos ahora en el problema de la determinación experimental de la polarización de un haz de partículas neutras de espín $1/2$ aplicando el formalismo desarrollado. Se trata, por lo tanto, de determinar los 4 elementos de la matriz densidad *inicial*

$$\rho = \rho_0 \mathbb{I} + \rho_1 I_x + \rho_2 I_y + \rho_3 I_z, \quad (2.90)$$

definida en la base de las proyecciones de espín en la dirección del eje z de laboratorio, haciendo pasar el haz por un campo magnético inhomogéneo. De esta forma, se establecerá una correlación entre la posición final de las partículas y su espín. El problema general de la determinación de la matriz densidad de un estado cuántico en el espacio de espín se conoce como *tomografía de spin* [78].

El planteamiento estándar de este problema se basa esencialmente en el modelo simplificado del Stern–Gerlach tal y como se introdujo en la sección (1.2.1). En este contexto, la determinación de la matriz (2.90) no es trivial, y en la literatura se encuentran descritos varios procedimientos experimentales con este fin [109], [110], [78], en general basados en medidas ideales de la proyección del espín en una determinada dirección. En este formalismo simplificado, el problema es que el aparato de medida es teóricamente insensible a diferencias en el estado de polarización perpendicular al eje medido. Dicho de otro modo, una medida tan sólo permite determinar uno de los ρ_i que describen la matriz densidad, por lo que es necesario repetir la medida con distintas orientaciones del aparato de medida para describir totalmente ρ .

Sin embargo, en el formalismo desarrollado aquí, la probabilidad de detectar un impacto en un punto determinado de la pantalla es, en general, sensible a todas las componentes ρ_i de la matriz densidad inicial. En efecto, según hemos visto, la probabilidad de presencia en un punto cualquiera del espacio depende de la polarización inicial del haz a través de la expresión:

$$P(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \text{Tr}(\rho M(\vec{r})) d\vec{r}. \quad (2.91)$$

Tal como se mostró en la sección anterior, la correlación entre la posición final en la pantalla y la polarización inicial mejorará en general si efectuamos la detección en una zona suficientemente alejada del imán (véase también la

figura (2.10)). En estos casos, estaremos tratando un proceso típico de dispersión, para el cual podemos usar la descripción estándar de la probabilidad de detección en función del ángulo sólido:

$$P(\Omega) = |\Psi(\Omega)|^2 d\Omega = \text{Tr}(\rho M(\Omega)) d\Omega. \quad (2.92)$$

En cualquier caso, La matriz \mathbf{M} puede descomponerse en la misma base que ρ :

$$M(\vec{r}) = A_0(\vec{r})\mathbb{I} + A_x(\vec{r})I_x + A_y(\vec{r})I_y + A_z(\vec{r})I_z, \quad (2.93)$$

siendo $A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})$ las asimetrías definidas en (2.89), y $A_0(\vec{r}) = \text{Tr}(M)$. Esto nos permite escribir la expresión (2.92) de la forma:

$$|\Psi(\vec{r})|^2 d\Omega = \sum_i \rho_i A_i(\vec{r}), \quad (2.94)$$

a partir de la cual podemos determinar los ρ_i conociendo $|\Psi(\vec{r})|$ siempre que $A_i \neq 0$.

En general, todas las componentes (asimetrías) de la matriz M serán distintas de cero, aunque la precisión con la que se determine la polarización en una dirección determinada (es decir, la componente ρ_i correspondiente) dependerá de lo grande que sea el valor A_i respecto a las demás componentes de la matriz. En este contexto, el problema del formalismo estándar al que aludimos al principio de esta sección estriba en que en el formalismo simplificado expuesto en (1.2.1) sólo hay una A_i distinta de cero, que es la que corresponde a la “orientación del aparato de medida”. En estos casos, la medida no distingue, por ejemplo, entre una mezcla estadística de estados polarizados paralela y antiparalelamente al eje del aparato y un estado puro polarizado en una dirección perpendicular a dicho eje.

Análogamente, a partir de nuestras descripciones analíticas aproximadas del Stern-Gerlach obtenemos una matriz M con $A_y = 0$, lo cual nos impediría, con una orientación única del imán, determinar el estado de polarización a lo largo del eje y . Sin embargo, sabemos que los cálculos exactos sí evidencian una dependencia de la distribución final del haz en la pantalla con la polarización inicial a lo largo del eje y (véase la figura (2.12)).

Intentaremos ahora considerar condiciones experimentales algo más realistas, en las que en lugar de obtener el valor $|\Psi(\Omega)|^2$ de la distribución de probabilidad en cada punto, tenemos simplemente un número N de impactos en la pantalla en los puntos \vec{r}_i , $i = 1, \dots, N$. Definimos la función $L(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ de verosimilitud del experimento como la probabilidad conjunta de que se hayan producido cada uno de esos impactos en los puntos observados:

$$L(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \prod_{i=1}^N P_i = \prod_{i=1}^N \text{Tr}(\rho M(\vec{r}_i)) = \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^3 \rho_k A_k(\vec{r}_i), \quad (2.95)$$

donde P_i es la densidad de probabilidad de presencia, y $A_1 \equiv A_x, A_2 \equiv A_y, A_3 \equiv A_z$. A partir de esta expresión, podremos determinar el valor de los ρ_k como los que hacen máxima la función de verosimilitud. De esta forma, para cada k tendremos:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \rho_k} = \sum_{i=0}^N \frac{A_k(\vec{r}_i)}{\sum_{j=0}^3 A_j(\vec{r}_i) \rho_j} = 0; \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.96)$$

Tendremos pues que resolver un sistema de 3 (ya que, dado que $\text{Tr}(\rho) = 1, \rho_0 = 1/2$) ecuaciones de grado $N - 1$, que nos permitiría determinar *todas* las componentes de la matriz densidad con un único experimento de Stern-Gerlach. Sin embargo, como ya hemos comentado un poco más arriba, si las asimetrías A_1, A_2, A_3 de la matriz M son muy pequeñas frente a A_0 , la polarización no podrá determinarse con precisión, ya que la función L variará con demasiada suavidad en función de sus variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 . En tal caso, el máximo de L , que determinaría la polarización inicial más verosímil, sería demasiado “plano”. Recordemos que esto ocurre precisamente en las zonas en las que el contraste definido en (2.83) es cercano a 0.5.

Es interesante también observar que, mediante un procedimiento prácticamente idéntico, podemos determinar las componentes A_1, A_2, A_3 de la matriz M si conocemos la polarización inicial del haz. De esta forma obtendríamos los estados coherentes internos correspondientes al campo \vec{B} lo cual, tal como se mostró en la sección (2.4.1), equivale a determinar la estructura del campo magnético en la región de interacción (véase la figura (2.11)). De esta forma, un haz de partículas neutras con polarización conocida podría ser utilizado como sonda para investigar campos magnéticos.

2.5. El Stern–Gerlach en la mecánica Bohmiana

Se ha procurado ilustrar cómo el proceso de la medida del espín de una partícula neutra lleva a asociar de forma natural y en el contexto de la MCO la posición de la partícula con su estado de polarización. Se ha argumentado que esta asociación constituía la esencia misma del proceso de medida, ya que estas posiciones juegan el papel de “puntero del aparato de medida” en el sentido definido en (1.1.2).

Sin embargo, también se ha dedicado cierto esfuerzo para mostrar que dicha asociación no es perfecta, y se ha discutido en qué medida y bajo qué condiciones la posición final de la partícula podía asociarse con la proyección del espín en una dirección determinada. Concretamente, se vio que la bondad teórica de la medida cambia drásticamente con el tiempo, tanto con el de interacción como con el de deriva libre.

En el tratamiento semiclásico del problema (véase (1.2.4)) las partículas tienen un espín bien definido al final de una trayectoria *determinista*, por lo que cabría suponer que su posición está asociada con una proyección definida en todo instante. Sin embargo, sabemos que la compatibilidad con la visión expresada en el párrafo anterior queda restaurada por el hecho de que el espín está indefinido hasta que, *en un instante en gran medida indeterminado*, se asigna *probabilísticamente* a la partícula una proyección del espín en la dirección del CIS correspondiente a su posición.

La situación cambia si abandonamos el formalismo de la MCO y consideramos el planteamiento del problema en el contexto de la mecánica Bohmiana. En este caso, la posición de la partícula evoluciona determinísticamente guiada por la función de onda, moviéndose en el campo de velocidades (1.51), sin asignar en ningún momento de forma explícita una determinada proyección del espín a la partícula. Es, pues, interesante estudiar el proceso en el formalismo de la mecánica Bohmiana, tratando así de verificar, desde este nuevo punto de vista, si aporta alguna novedad a la imagen ofrecida por la MCO, según la cual el espín sólo se va “definiendo” paulatinamente a medida que evoluciona el haz de partículas.

Antes de proseguir, conviene recordar que, en mecánica Bohmiana, la medida no juega ningún papel especial. Las partículas *tienen* simplemente una posición, independientemente de que se diseñe o no un experimento para observarla. En este contexto, el espín está asociado a la *función de onda* de la partícula, y se le podrá adscribir a la partícula en la medida en que su posición pueda asociarse con una determinada función de onda de espín (véase la sección (2.5.2)). En este sentido, el análisis anterior basado en la matriz M (2.4.1) es relevante también en el ámbito de la mecánica Bohmiana.

2.5.1. Análisis del doble paquete libre

Como introducción al caso más complejo que nos ocupa, consideraremos una partícula de masa M solución del siguiente hamiltoniano libre adimensional:

$$\frac{\nabla^2 \Psi(x, t)}{2S} = -i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad (2.97)$$

y con la siguiente función de onda, en la que la variable x y el parámetro $S > 0$ son adimensionales, y están expresados en unidades de la anchura inicial σ del paquete y de su inversa respectivamente:

$$\Psi(x, t) = a e^{iS(x-t/2)} \exp\left(\frac{-(x-t)^2}{2(1+it/S)}\right) + b e^{-iS(x+t/2)} \exp\left(\frac{-(x+t)^2}{2(1+it/S)}\right), \quad (2.98)$$

con:

$$t = T A S; \quad A = \frac{\hbar}{M \sigma^2}. \quad (2.99)$$

Nótese que la variable adimensional t definida a partir de la variable temporal T está medida en unidades del tiempo que tarda el centro del paquete en desplazarse una longitud igual a la anchura σ .

Esta función de onda representa a una superposición de dos paquetes gaussianos libres moviéndose en direcciones opuestas con idéntica velocidad adimensional S (medida en las unidades naturales de tiempo y longitud que acabamos de introducir). Desde el punto de vista de la MCO, la magnitud relevante para el análisis del comportamiento del sistema es el cuadrado $R = |\Psi(x, t)|^2$ de la función de onda, es decir, la densidad de probabilidad de la partícula. Como es bien sabido, R presentará interferencias durante el tiempo en que las dos gaussianas solapen, como corresponde a la superposición coherente de dos funciones de onda con fases distintas. A medida que transcurra el tiempo, y si el ensanchamiento natural es más lento que el desplazamiento de los paquetes gaussianos, éstos se irán separando hasta situarse en regiones disjuntas de la recta real. En este punto, R presentará dos máximos locales moviéndose en direcciones opuestas, siendo la magnitud relativa de estos máximos proporcional al cuadrado del coeficiente a o b que multiplica al paquete correspondiente.

Si quisiéramos situarnos en el contexto de una aproximación semiclásica, no parecería sensato aproximar la evolución del sistema por una trayectoria única. Una posible solución sería asignar al sistema la trayectoria con velocidad S con probabilidad $|a|^2$ y la trayectoria con velocidad $-S$ con probabilidad $|b|^2$. De esta forma, el sistema seguiría la trayectoria del *centro* de uno u otro paquete gaussiano. Repetimos que esta imagen sólo es válida si los dos paquetes llegan a separarse en algún momento, es decir, si la velocidad del centro de los paquetes de onda es mayor que la de ensanchamiento

de las gaussianas. De acuerdo con nuestra definición de los parámetros, esta condición supone:

$$S > 1. \quad (2.100)$$

Esta descripción aproximada omite al menos dos aspectos de la dinámica exacta del sistema, que intentaremos relacionar: (i) claramente, el “movimiento” correspondiente al ensanchamiento natural del paquete gaussiano no queda reflejado. De forma intuitiva (aunque poco rigurosa), podemos relacionar este hecho con el de que la única “partícula” insensible a este ensanchamiento es precisamente la que situaríamos en el centro del paquete. (ii) Por otro lado, también parece claro que el movimiento rectilíneo uniforme del centro del paquete gaussiano es incapaz de recrear la aparición de las franjas de interferencia características de los tiempos en los que ambos paquetes se solapan.

Velocidad de Bohm

El campo de velocidades predicho por la mecánica Bohmiana es, desde luego, absolutamente compatible con la distribución de probabilidades R predicha por la MCO. Por lo tanto, deberá resolver de alguna forma los dos problemas aludidos en el párrafo anterior, aparecidos al tratar de aproximar la evolución del sistema con una trayectoria. Calcularemos pues la velocidad de Bohm correspondiente al doble paquete, y consideraremos la luz que arroja sobre el problema general de la asignación de trayectorias.

Es relativamente sencillo comprobar que la velocidad de Bohm puede descomponerse en 3 términos:

$$V = V_+ + V_- + V_c. \quad (2.101)$$

Estos términos, a los que denominaremos *directos* (V_+ y V_-) y *cruzado* (V_c), quedan definidos de la forma:

$$\begin{aligned} V_+ &= \frac{E_+^2 |a|^2}{R} \left[S + \frac{x-t}{(1+t^2/S^2)} \frac{t}{S} \right] \\ V_- &= \frac{E_-^2 |b|^2}{R} \left[-S + \frac{x+t}{(1+t^2/S^2)} \frac{t}{S} \right] \\ V_c &= \frac{2E_+ E_-}{R(1+t^2/S^2)} \left[t [\text{Im}(ab^*) \cos(\gamma) + \text{Re}(ab^*) \text{sen}(\gamma)] + \right. \\ &\quad \left. \frac{t}{S} [x \text{Re}(ab^*) \cos(\gamma) - x \text{Im}(ab^*) \text{sen}(\gamma)] \right] \end{aligned} \quad (2.102)$$

siendo

$$E_{\pm} = \exp \left(-\frac{(x \mp t)^2}{2(1+t^2/S^2)} \right); \quad \gamma = 2Sx - \frac{2xt^2}{S(1+t^2/S^2)}. \quad (2.103)$$

Si el tiempo de ensanchamiento natural puede despreciarse frente al tiempo considerado (aproximación adiabática), el término proporcional a t/S en las velocidades directas podrá desecharse. En esta situación, los dos términos directos se corresponden con cada una de las dos posibles velocidades introducidas en la sección anterior. Obsérvese que, *cuando los paquetes se encuentren espacialmente separados*, la velocidad V_+ será precisamente la velocidad del centro del paquete que se mueve en el sentido positivo, mientras que V_- es su homólogo negativo. Este resultado es compatible con la imagen semiclásica.

Sin embargo, el término no adiabático despreciado no tiene paralelo semiclásico, y es el responsable del ensanchamiento del paquete gaussiano. Como vimos, el tratamiento semiclásico no contempla esta velocidad, pero, como acabamos de mostrar, si t es del orden de la unidad (de forma que los paquetes hayan tenido tiempo de separarse), podrá despreciarse cuando $S \gg 1$.

El término cruzado V_c es el responsable de la aparición de las franjas de interferencia, y puede apreciarse que el término E_+E_- se anula en cuanto se separan los dos paquetes. Esta velocidad tiene un término cuya amplitud es independiente del parámetro S , y será por lo tanto importante en cualquier situación dinámica (véase la figura (1.2)).

V_c oscilará en el tiempo y en el espacio con una frecuencia esencialmente proporcional a S . Si las oscilaciones son violentas, podría pensarse que será muy difícil predecir la posición de una partícula concreta en el momento de la separación efectiva de los paquetes, y por lo tanto si su trayectoria ulterior estará descrita preferentemente por V_+ o por V_- . Este hecho justificaría la asignación probabilística de las trayectorias en el tratamiento semiclásico, ya que impediría en la práctica aplicar el análisis más fino asociado a la mecánica Bohmiana según el cual cada partícula se moverá hacia la izquierda o hacia la derecha según su posición inicial. Por otro lado, si el parámetro S fuera pequeño las oscilaciones de V_c serían menos violentas, pero entonces los paquetes no llegarían a separarse (véase (2.100)), invalidando así la aproximación semiclásica. Parecería que las mismas condiciones impuestas por la validez de la imagen semiclásica promueven la aparición de oscilaciones violentas de V_c , haciendo casi imposible la asignación *a priori* de una de las dos trayectorias posibles a una partícula situada en una posición concreta.

Estas consideraciones merecen un análisis un poco más cuidadoso, y mostraremos con un argumento sencillo que, a pesar de todo, es fácil decidir la dirección del movimiento final de una partícula a partir de su posición inicial. Para ello, basta con observar que las trayectorias correspondientes a distintas partículas no pueden cruzarse (véase por ejemplo [86]), ya que el campo de velocidades es una función monovaluada de la posición. En nuestro sistema monodimensional, esto implica que cualquier partícula que esté inicialmente a la derecha de otra partícula dada seguirá a su derecha en todo instante posterior. En otras palabras, todas las partículas que se

mueven con V_+ una vez separados los paquetes (es decir, una proporción $|a|^2$ de ellas) se encontraban en el instante inicial a la derecha de las partículas que se mueven con V_- , y existe un punto x_0 que define la frontera inicial entre los dos grupos de partículas. Este punto puede por lo tanto determinarse teniendo en cuenta que, en el instante inicial, la proporción de partículas que están a su derecha es igual a $|a|^2$:

$$\int_{x_0}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |a|^2. \quad (2.104)$$

En definitiva, la mecánica Bohmiana establece claramente la trayectoria que seguirá cada partícula en función de su posición inicial. Por muy fuertes que sean las oscilaciones de V_c , las trayectorias del sistema no serán caóticas [88], [33].

2.5.2. Trayectorias de Bohm en el imán

En la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas para la extrapolación del campo de velocidades (1.51) al caso de una partícula con espín. Independientemente de la expresión concreta que se adopte para la velocidad de la partícula, el espín está tratado de dos formas claramente diferenciadas: como una variable dinámica adicional, cuya evolución temporal estará determinada por la función de onda [82], [102], [101]¹⁴, o como un parámetro que sólo interviene en la descripción de la función de onda, contribuyendo de esta forma a determinar el campo de velocidades que afectará a la única variable dinámica existente¹⁵: la posición de la partícula [70], [11]. Esta última posición será la adoptada aquí, de manera que el espín no será una característica de la partícula, sino de su función de onda, que a su vez determinará su posición en todo instante.

De acuerdo con estas premisas utilizaremos aquí la que es, probablemente, la definición más sencilla de la velocidad de Bohm para una partícula con espín: considerar los productos en (1.51) como productos escalares entre espinores. Centrándonos en el caso de una partícula de espín 1/2 (aunque la generalización a espines mayores es inmediata), la velocidad *adimensional* de una partícula en un estado $|\Phi(\vec{r}, t; m)\rangle = (\phi_+(\vec{r}, t)|+\rangle + \phi_-(\vec{r}, t)|-\rangle)$ es

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\text{Im} \left(\frac{\phi_+(\vec{r}, t)\vec{\nabla}\phi_+^*(\vec{r}, t) + \phi_-(\vec{r}, t)\vec{\nabla}\phi_-^*(\vec{r}, t)}{|\phi_+(\vec{r}, t)|^2 + |\phi_-(\vec{r}, t)|^2} \right), \quad (2.105)$$

¹⁴En la referencia [101] se discute la medida del espín en un experimento de Stern-Gerlach, pero en el modelo simplificado en el cual el campo magnético tiene una dirección constante: $\vec{B} = Bz\hat{e}_z$. En este artículo, los ángulos de Euler que describen la dirección de polarización del espín se tratan como variables dinámicas adicionales, y tienen sus propias velocidades angulares definidas a partir de la función de onda.

¹⁵Aparte de la función de onda.

donde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ constituye una base ortonormal del espacio de espín, y el operador gradiente actúa sobre variables adimensionales.

A partir del conocimiento de las funciones $\phi_+(\vec{r}, t)$ y $\phi_-(\vec{r}, t)$ en todo instante (a través de la integración numérica de la ecuación de Schrödinger, véase (2.1)), podemos obtener el campo de velocidades (2.105). Esto nos permitirá integrar numéricamente las trayectorias de una partícula neutra en un campo magnético inhomogéneo, tal como se muestra en la figura (2.13). Se observa inmediatamente en esta figura que las trayectorias se cruzan, aunque sólo como consecuencia de representar en una proyección bidimensional las trayectorias del sistema definidas mediante las 3 variables (x, z, t) ¹⁶.

Correlación entre espín final y posición inicial

Como anunciamos al principio de esta sección, estamos interesados en analizar esencialmente dos aspectos del comportamiento de las trayectorias de Bohm: su relación con las trayectorias semiclásicas ([40], véase también la sección (1.2.4)), y la nueva visión que aportan sobre la asociación entre espín y posición. El carácter no trivial de estas cuestiones (por otro lado relacionadas) puede apreciarse en los resultados presentados en la figura (2.13), donde los cruces mencionados no permiten aplicar el análisis sencillo presentado en el caso monodimensional del doble paquete. Allí fue no fue difícil establecer (2.104), que define la frontera inicial entre las trayectorias con distintas velocidades finales, pero este resultado no es extrapolable a un sistema bidimensional con la complejidad del que nos ocupa¹⁷. Por lo tanto, nos encontramos de nuevo ante el problema planteado en el estudio del doble paquete monodimensional: ¿hasta qué punto podemos predecir la trayectoria futura (y, por ende, el estado de espín) de una partícula a partir de su posición inicial? Podría ocurrir que, dada la complejidad de las trayectorias esto fuera prácticamente imposible. En tal caso, la asignación probabilística de trayectorias del tratamiento semiclásico estaría justificada por la dinámica caótica de las trayectorias, y tendríamos un primer punto de encuentro entre los dos tipos de trayectorias: el carácter aleatorio (estricto en el caso de las trayectorias semiclásicas) de la asociación entre espín y posición inicial.

La respuesta a estas cuestiones puede obtenerse integrando las trayectorias de Bohm y clasificando las posiciones iniciales según la posición final, estableciendo así el mapa que relaciona la posición inicial con el espín final. Presentamos estos resultados gráficamente en las figuras (2.14) y (2.15). En

¹⁶Obsérvese que, en 2 o más dimensiones, dos partículas pueden intercambiar sus posiciones sin necesidad de que sus trayectorias se crucen. Evidentemente, el carácter monovaluado del campo de velocidades prohíbe la coincidencia simultánea de las variables (x, z, t) de dos o más trayectorias.

¹⁷Véase la nota anterior.

la figura (2.14) mostramos la evolución temporal de la coordenada z sobre el plano $x = 0$ para dos polarizaciones iniciales distintas. Puede apreciarse cómo se establece una frontera entre las posiciones iniciales de las partículas que se desplazan hacia arriba y las que se desplazan hacia abajo, aunque este resultado, obtenido para partículas situadas inicialmente en el eje z , no es en absoluto extrapolable al caso general¹⁸. En este sentido, la figura (2.15) es aún más reveladora: representamos las posiciones iniciales de un conjunto de 2500 partículas inicialmente distribuidas en un cuadrado de lado 2 centrado en el origen, distinguiéndolas según el desplazamiento posterior sufrido. Se comprueba que sigue existiendo una frontera que divide el plano xz inicial en dos zonas perfectamente separadas.

Llegamos por lo tanto a la conclusión de que las trayectorias de Bohm permiten asignar de forma consistente una proyección del espín a cada posición inicial dentro del haz incidente¹⁹. Este estado de espín será una de las dos proyecciones respecto del CIS correspondiente a la posición final, dependiendo del *sentido* de su trayectoria: las partículas que parten de una posición marcada en blanco (negro) en la figura (2.15) se asocian con la proyección negativa (positiva) del espín en la dirección del campo magnético. En definitiva, no encontramos rastro de caos en estas trayectorias, a pesar de la complejidad del problema bidimensional tratado. Más concretamente, se pone en evidencia la ausencia de la propiedad de mezcla en la dinámica de las trayectorias, propiedad que será definida en el siguiente capítulo y que será esencial para articular los argumentos que serán presentados en él.

Por el contrario, el tratamiento semiclásico asigna la trayectoria de cada partícula con una probabilidad determinada en cualquier punto por la polarización del haz, y será por lo tanto independiente de la posición inicial. La relación entre los dos tipos de trayectorias queda ilustrada en la figura (2.14), donde pueden verse superpuestas. En la figura de la izquierda se observa como, en el formalismo de la Mecánica Bohmiana, el número de partículas que sigue una trayectoria ascendente (descendente) es esencialmente proporcional al coeficiente $|a|^2$ ($|b|^2$)²⁰. La aproximación semiclásica asignará, con las probabilidades mencionadas, una de las dos trayectorias marcadas en la figura. También se aprecia una diferencia de pendiente entre los dos tipos de trayectorias, cuyo origen estudiaremos más adelante, cuando interpretemos los resultados.

Ante estas consideraciones, podría inferirse que las trayectorias de Bohm

¹⁸De hecho, la observación de la figura (2.13) sugiere un comportamiento más complejo.

¹⁹Obviamente, esta asociación dependerá de la estructura concreta del campo magnético, lo cual ilustra los teoremas de Gleason [38] y de Kochen–Specker [89], que establecen la imposibilidad (en general) de asignar un valor determinado a un observable independientemente de las medidas que se realicen sobre el sistema.

²⁰Estos valores se refieren a las probabilidades predichas por el modelo simplificado (1.2.1). Como sabemos, en un cálculo más riguroso estarán modificados por las probabilidades de spin–flip (2.3.2).

“colapsan” en las semiclásicas cuando la anchura inicial σ de la función de onda gaussiana es pequeña frente a la resolución de los puntos detectados en la pantalla. Sin embargo, la disminución de σ supone un aumento del parámetro A y, por lo tanto, de los efectos adiabáticos (recuérdense las definiciones (2.12)) que, como veremos más adelante, incrementan la diferencia entre los dos tipos de trayectorias. Además, la disminución de σ empeorará la estimación de la probabilidad de spin-flip²¹ por parte de la aproximación semiclásica (véase la tabla (2.16)).

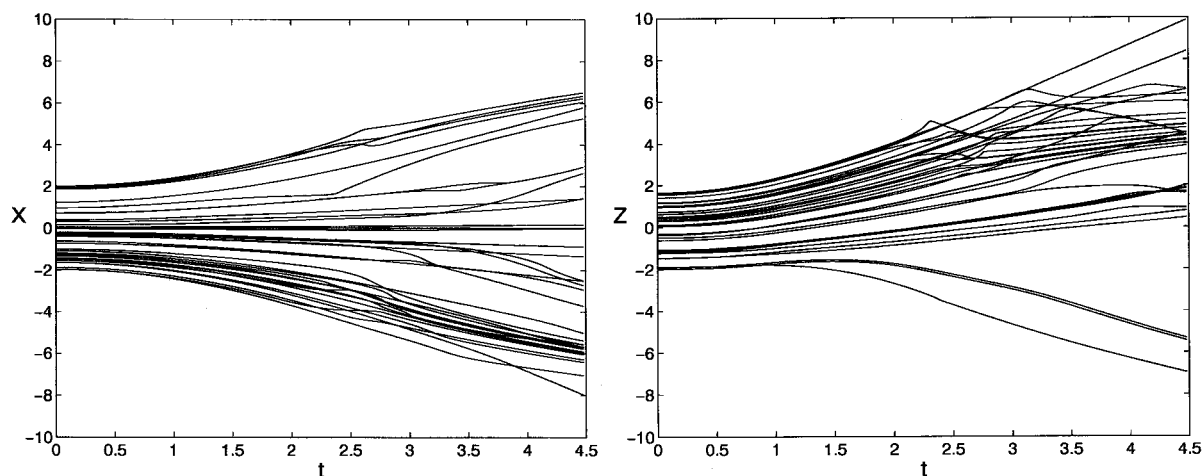


Figura 2.13: Evolución temporal de la coordenada x (izquierda) y de la coordenada z (derecha) en unidades de la anchura inicial de la gaussiana, con $A = 0,5$, $S = 4$. La polarización inicial es $a = 1, b = 0$. El tiempo se expresa en unidades del tiempo de interacción, de forma que a partir de $t = 1$ el movimiento es de deriva libre. La simulación se ha realizado para 36 partículas, situándolas inicialmente en posiciones aleatorias dentro de un cuadrado de lado 2 centrado en el origen.

Interpretación de los resultados

El estudio del doble paquete nos sugiere que los resultados pueden ser más fáciles de interpretar si logramos identificar estados con una velocidad definida. Estrictamente hablando, esto no tiene sentido en el formalismo de la MCO, pero el tratamiento semiclásico presentado en más arriba (1.2.4) (así como, en cierta medida, los resultados cuánticos posteriores) parece indicar que los mejores candidatos son los autoestados de I_B (es decir, los CIS del problema). Cabe esperar que, al ser calculada en esta base, aparezcan

²¹Esta probabilidad constituye la diferencia con respecto a las probabilidades predichas por el modelo simplificado (1.2.1).

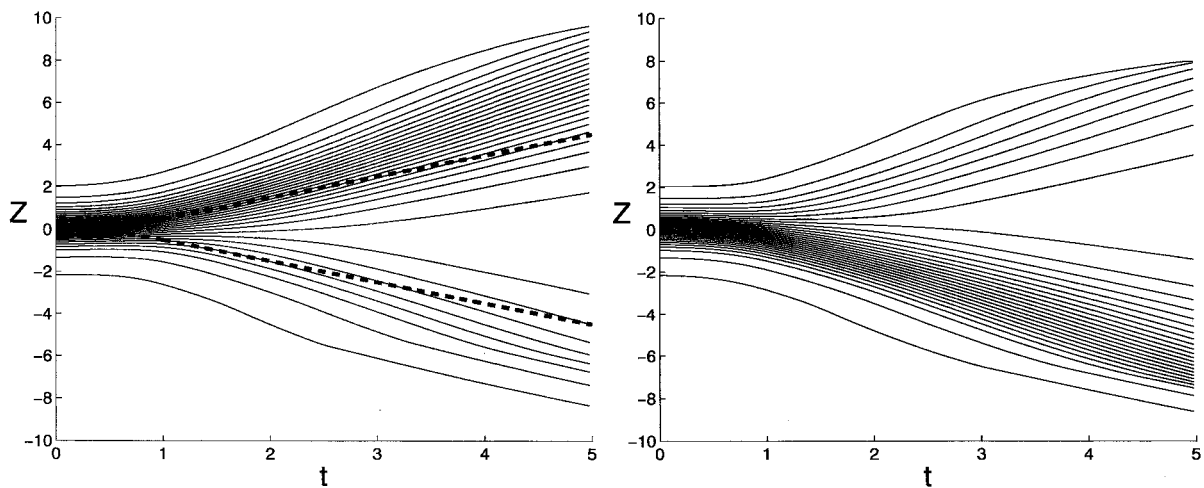


Figura 2.14: Evolución de la coordenada z (en unidades de la anchura inicial de la gaussiana) en función del tiempo con $A = 0,5$, $S = 4$. El cálculo se muestra para dos polarizaciones iniciales: $a = 0,87$, $b = 0,5$ (izquierda) y $a = 0,5$, $b = 0,87$. El tiempo se expresa en unidades del tiempo de interacción, de forma que a partir de $t = 1$ el movimiento es de deriva libre. En la figura de la izquierda pueden verse, en trazo grueso discontinuo, las dos posibles trayectorias semiclásicas que parten de $z = 0$.

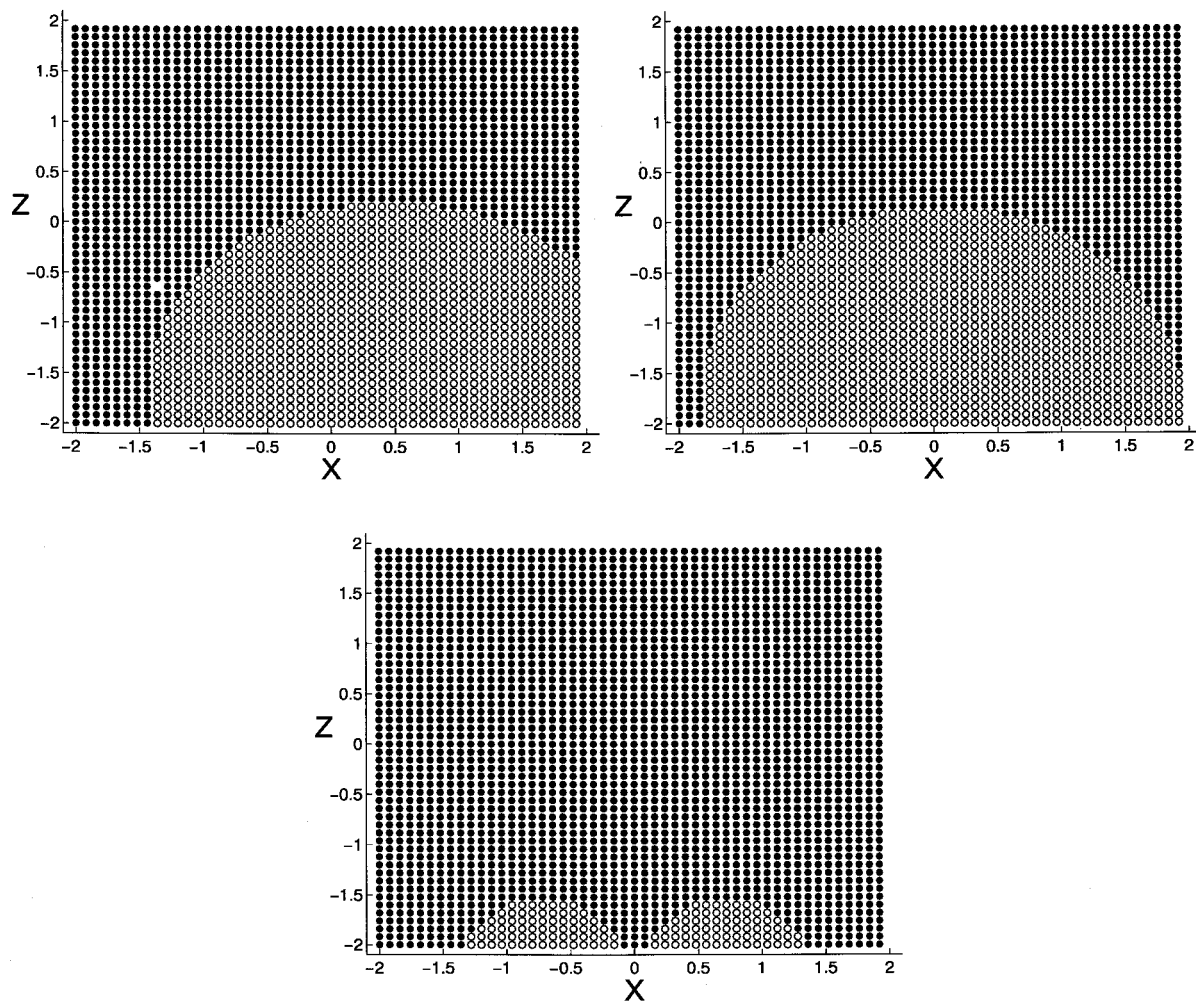


Figura 2.15: Posiciones iniciales de las partículas con trayectoria ascendente (puntos negros) y descendentes (puntos blancos), para tres polarizaciones iniciales (de arriba a abajo y de izquierda a derecha): $\vec{s} = (1, 0, 0)$, $\vec{s} = (0, 1, 0)$ y $\vec{s} = (0, 0, 1)$. Puede apreciarse que las zonas de las que parten cada uno de los dos tipos de partículas están separadas por una frontera bien delimitada. Las distancias están expresadas en unidades de la anchura inicial de la gaussiana.

σ	P_s	P_q	Acuerdo
1	$1,63 \cdot 10^{-4}$	$8,04 \cdot 10^{-4}$	20 %
2	$6,27 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	50 %
3	$1,406 \cdot 10^{-3}$	$1,474 \cdot 10^{-3}$	95 %

Figura 2.16: Probabilidad de spin-flip para distintos valores de la anchura inicial σ (en unidades arbitrarias). P_s designa los resultados semiclásicos, mientras que P_q se refiere a los resultados cuánticos. Se indica también, en cada caso, el porcentaje de acuerdo entre ambos cálculos.

en la expresión de la velocidad términos equivalentes a los presentados en el estudio del doble paquete, asociados a una velocidad *directa* y *cruzada*.

Vamos a comprobarlo calculando la expresión (2.105) en función de las amplitudes G_{m_B} definidas a partir de las proyecciones del espín en la dirección del campo magnético. La expresión general de la velocidad será:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -\text{Im} \left(\frac{1}{R} \sum_{m_z} \phi_{m_z} \vec{\nabla} \phi_{m_z}^* \right) \\
&= -\text{Im} \left(\frac{1}{R} \sum_{m_z} \sum_{m_B, m'_B} d_{m_z, m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B} d_{m_B, m_0}^{1/2}(\beta) \right. \\
&\quad \left. \times \vec{\nabla} d_{m_z, m'_B}^{1/2}(-\beta) G_{m'_B}^* d_{m'_B, m_0}^{1/2}(\beta) \right). \tag{2.106}
\end{aligned}$$

El gradiente puede descomponerse en dos términos:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -\text{Im} \left(\frac{1}{R} \sum_{m_z} \sum_{m_B, m'_B} d_{m_z, m_B}^{1/2}(-\beta) G_{m_B} d_{m_B, m_0}^{1/2}(\beta) \right. \\
&\quad \times d_{m_z, m'_B}^{1/2}(-\beta) d_{m'_B, m_0}^{1/2}(\beta) \vec{\nabla} G_{m'_B}^* \\
&\quad \left. + G_{m'_B}^* \vec{\nabla} d_{m_z, m'_B}^{1/2}(-\beta) d_{m'_B, m_0}^{1/2}(\beta) \right). \tag{2.107}
\end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en despreciar la variación de las matrices de rotación frente al gradiente de las amplitudes G_{m_B} . Como veremos enseguida, los términos despreciados harían aparecer términos cruzados del tipo $G_{m_B} \vec{\nabla} G_{m'_B}$ con $m_B \neq m'_B$. Como mencionamos en el análisis del doble paquete, esto equivaldría a considerar términos de interferencia entre componentes con distinta proyección del espín en la dirección local del campo magnético. Estos términos serían pues del mismo orden que los que fueron desechados por no conservar el operador I_B en la sección (2.2.1)²². Todos

²²Por otro lado, la derivada angular de las amplitudes G_{m_B} es del orden del parámetro z_0 , y será por lo tanto grande frente a las derivadas de las matrices de rotación.

los resultados obtenidos hasta ahora sugieren que ésta es una buena aproximación, incluidas las trayectorias de Bohm para la partícula en el imán, en las que no se aprecian indicios de oscilaciones violentas (véanse las figuras (2.13, 2.15 y 2.14)). Veremos pues si los resultados obtenidos son interpretables prescindiendo de estos términos, en cuyo caso su inclusión constituiría una complicación innecesaria.

El término restante puede simplificarse teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \sum_{m_z} d_{m_z, m_B}^{1/2}(-\beta) d_{m_z, m'_B}^{1/2}(-\beta) &= \sum_{m_z} d_{m_B, m_z}^{1/2}(\beta) d_{m_z, m'_B}^{1/2}(-\beta) \\ &= [R(\beta)R^{-1}(\beta)]_{m_B, m'_B} = \delta_{m_B, m'_B}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

siendo $R(\beta)$ la matriz de rotación en el espacio de los espines. Obtenemos finalmente:

$$\vec{v} = -\text{Im} \left(\frac{1}{R} \sum_{m_B} (d_{m_B, m_0}^{1/2}(\beta))^2 G_{m_B} \vec{\nabla} G_{m_B}^* \right). \quad (2.109)$$

Como anunciamos, sólo existirán términos directos de la velocidad:

$$\vec{V}_{\pm}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{R} (d_{\pm\frac{1}{2}, m_0}^{1/2}(\beta))^2 \text{Im} \left(G_{\pm}(\rho, \beta, t) \vec{\nabla} G_{\pm}^*(\rho, \beta, t) \right), \quad (2.110)$$

y la interpretación de esta expresión es inmediata: la velocidad en cada punto $\vec{r} \equiv (\rho, \beta)$ es una media de las velocidades correspondientes a los estados con proyección definida en la dirección del campo magnético, ponderada por los coeficientes de la proyección del espín m_0 sobre la dirección local del campo²³. Al contrario de lo que ocurre en el caso del doble paquete no se observan términos de interferencia (que podrían introducir elementos caóticos en las trayectorias), como consecuencia de que los términos con distinta proyección del espín en la dirección de \vec{B} no se mezclan. La posibilidad de dividir el plano xz inicial en las dos zonas que se aprecian en la figura (2.15) es pues en gran medida consecuencia de la conservación del espín en la dirección del campo magnético.

Velocidad radial

Calcularemos explícitamente la velocidad (2.110) con la definición de la base local $\{|+\rangle_B, |-\rangle_B\}$ dada en (2.43), que corresponde a los CIS del problema del Stern–Gerlach. La geometría del campo \vec{B} aconseja calcular la velocidad en coordenadas polares, utilizando para ello la expresión habitual del gradiente:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} \vec{e}_{\beta}. \quad (2.111)$$

²³Estos coeficientes son los cuadrados de las matrices de rotación $(d_{\pm\frac{1}{2}, m_0}^{1/2}(\beta))^2$.

Podemos obtener una expresión concreta de V_ρ si sustituimos las amplitudes G_\pm por las expresiones analíticas obtenidas a partir de alguna de las derivadas en secciones anteriores. Si partimos por ejemplo de la aproximación de estados coherentes (véase (2.57)), se obtiene tras algo de cálculo:

$$\begin{aligned}
V_\rho = & (d_{\frac{1}{2},m_0}^{1/2}(\beta))^2 |G_+|^2 - (d_{-\frac{1}{2},m_0}^{1/2}(\beta))^2 |G_-|^2 \frac{St}{2R} - \\
& \frac{At}{R} \left[(d_{\frac{1}{2},m_0}^{1/2}(\beta))^2 |G_+|^2 \left(\frac{\rho_{\frac{1}{2}} - z_0 \cos(\beta)}{1 + A^2 t^2} \right) + \right. \\
& \left. (d_{-\frac{1}{2},m_0}^{1/2}(\beta))^2 |G_-|^2 \left(\frac{\rho_{-\frac{1}{2}} - z_0 \cos(\beta)}{1 + A^2 t^2} \right) \right], \quad (2.112)
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso monodimensional del doble paquete, comprobamos que la velocidad directa se compone de dos términos: uno proporcional al parámetro S que será dominante en situaciones adiabáticas, y otro proporcional al parámetro A , que da cuenta del ensanchamiento libre y es despreciable en el caso adiabático. El término adiabático es proporcional a la velocidad semiclásica $St/2$, de manera que, como cabía esperar, la máxima similitud entre estos dos tipos de trayectorias se obtendrá cuando el término no adiabático sea despreciable frente al adiabático, es decir, cuando $S \gg A$. En la figura (2.14), se muestra una situación intermedia ya que, en la zona libre de campo, el término adiabático es proporcional a $S/2 = 2$ (la velocidad a la salida del imán)²⁴, mientras que el término no adiabático crece hasta alcanzar el valor $4A = 2$.

Velocidad angular

La velocidad en dirección de \vec{e}_β se calcula de forma similar, y podemos ofrecer una expresión analítica a partir de la aproximación de estados coherentes para las amplitudes G_{m_B} (2.57):

$$\begin{aligned}
V_\beta = & -2 \frac{At}{R} \left[(d_{\frac{1}{2},m_0}^{1/2}(\beta))^2 \left(|G_+|^2 \frac{\rho_{\frac{1}{2}} z_0 \sin(\beta)}{\rho(1 + A^2 t^2)} \right) \right. \\
& \left. + (d_{-\frac{1}{2},m_0}^{1/2}(\beta))^2 \left(|G_-|^2 \frac{\rho_{-\frac{1}{2}} z_0 \sin(\beta)}{\rho(1 + A^2 t^2)} \right) \right] \quad (2.113)
\end{aligned}$$

Comprobamos que los términos directos de esta componente de la velocidad son no adiabáticos (proporcionales al parámetro A), y describen el ensan-

²⁴Téngase sin embargo en cuenta que no se dispone de una expresión analítica para la evolución libre. Por lo tanto, considerar la expresión (2.112) sustituyendo St por S como válida para la velocidad fuera del imán no es más que una interpretación plausible. Por otro lado, está en buen acuerdo con los resultados obtenidos mediante la integración numérica del campo de velocidades obtenido mediante la evolución libre exacta de la función de onda (2.14).

chamiento natural angular de la función de onda. Este efecto no es contemplado por la aproximación semiclásica, y la ausencia de términos adiabáticos en la velocidad angular es compatible con el hecho de que la velocidad semiclásica es radial.

Además de no incluir el ensanchamiento natural, la trayectoria semiclásica de cada partícula adopta uno de los dos valores extremos $\pm St/2$ de la velocidad, mientras que la velocidad de Bohm es una media ponderada entre estas dos velocidades, y su valor se encontrará entre esos extremos dependiendo de su posición y de la polarización inicial. Este hecho puede comprobarse observando cuidadosamente la imagen de la derecha en la figura (2.13). En los primeros instantes *todas* las partículas se mueven hacia arriba, incluso aquellas que acaban adoptando una trayectoria descendente (véase también la figura (2.17)). Esto es consecuencia de que en el instante inicial $|G_+|^2 = |G_-|^2$, y la polarización inicial $a = 1, b = 0$ favorece, en todos los puntos en los que la probabilidad de presencia es apreciable, la velocidad en el sentido ascendente. Sólo cuando $|G_+|^2$ y $|G_-|^2$ empiezan a separarse, las partículas que se encuentran “bajo la influencia” de la gaussiana descendente G_- empezarán también a bajar. Este comportamiento explica la ausencia de caos en las trayectorias: un pequeño desplazamiento angular originado por el término no adiabático de V_β supondrá un cambio suave y continuo en la velocidad radial, no observándose alternancias violentas entre los dos valores extremos de la velocidad semiclásica.

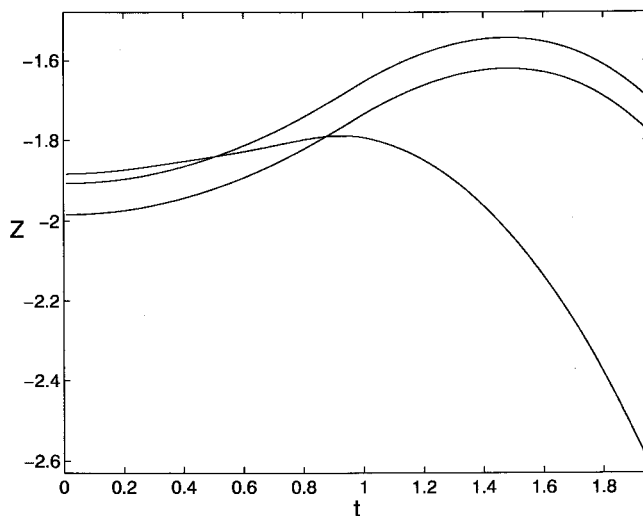


Figura 2.17: Ampliación de la parte derecha de la figura (2.13). Fijamos nuestra atención en las partículas cuya trayectoria final es descendente.

Capítulo 3

Estabilidad de $|\Psi|^2$ en la mecánica Bohmiana

Abordaremos ahora el problema de la necesidad de postular la distribución inicial de partículas $P(\vec{x}, t_0) = |\psi(\vec{x}, t_0)|^2$, donde $\psi(\vec{x}, t_0)$ es la función de onda en el instante inicial. Trataremos de mostrar cómo podría ser evitado este postulado, y para ello debemos empezar por ocuparnos de la forma de obtener información acerca del sistema. Nuestro objetivo es poner de manifiesto cómo el mero *conocimiento* de la función de onda de un sistema supone la aparición, en algún momento de la historia del sistema, de términos incontrolables en el desarrollo de su función de onda.

Este hecho estará de nuevo estrechamente relacionado con la interacción del sistema con un entorno. Por otro lado, trataremos primero de justificar que esta interacción es esencial para explicar la observación misma del comportamiento *clásico* de los sistemas.

En el contexto de la mecánica Bohmiana, la información completa sobre el sistema consiste idealmente en conocer las posiciones $\vec{X}(t)$ de las partículas y su función de onda $\psi(t)$. Teniendo en cuenta que la función de onda no juega ningún papel en Mecánica Clásica, el límite clásico de la mecánica Bohmiana habrá de ser establecido a partir del comportamiento de las trayectorias. De esta forma, la comparación entre las dos teorías puede hacerse directamente en términos de las mismas variables comunes, pero habrá que tener en cuenta algunas sutilezas.

3.1. Sistemas cerrados

Empezaremos por presentar una derivación alternativa de las ecuaciones de la mecánica Bohmiana para una partícula ([23], [24], [49], [51]). Escribiremos primero la función de onda en forma polar a partir de las dos funciones

reales $R(\vec{x}, t)$ y $S(\vec{x}, t)$:

$$\psi(\vec{x}, t) = R(\vec{x}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)}. \quad (3.1)$$

La ecuación de Schrödinger se desdobra ahora en sendas ecuaciones para las nuevas funciones:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{\nabla} \cdot (R^2 \vec{\nabla} S) = 0. \quad (3.3)$$

Veremos que, bajo esta forma, las ecuaciones pueden relacionarse fácilmente con las de la Mecánica Clásica. Efectivamente, si identificamos la función S con la función de acción de la partícula, la expresión (3.2) es totalmente equivalente a la ecuación de Hamilton–Jacobi de una partícula *clásica* en presencia de un potencial clásico V y del potencial cuántico Q definido de la forma:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (3.4)$$

Análogamente, (3.3) se identifica inmediatamente con (1.54), ya que es fácil comprobar que $R^2 \equiv |\psi|^2$ y que las definiciones de la velocidad dadas por (1.51) y por

$$\vec{v} = \frac{\vec{\nabla} S}{m} \quad (3.5)$$

son totalmente equivalentes.

En definitiva, las ecuaciones (3.2) y (3.3) muestran con especial claridad que la dinámica descrita por la mecánica Bohmiana coincide con la Mecánica Clásica en el caso de que pueda despreciarse el potencial cuántico Q frente a la energía clásica $p^2/2m + V$. Esto sucederá, típicamente, para una partícula de masa m grande cuya función de onda sea un paquete de anchura σ no demasiado pequeña. En efecto, teniendo en cuenta que ∇S es la cantidad de movimiento de la partícula, la condición de que el potencial cuántico pueda despreciarse frente a la energía cinética es $p^2 \gg \hbar^2 \nabla^2 R/R \rightarrow \lambda^2 \ll \sigma^2$, siendo λ la longitud de onda característica de la partícula, y donde hemos considerado que la variación espacial de R es del orden de la anchura¹ σ . Este límite supone esencialmente que la fase S/\hbar de la función de onda varía mucho más rápidamente que su módulo R , situación análoga al límite de la óptica geométrica respecto a la óptica ondulatoria, y que constituye una de las exposiciones tradicionales del límite clásico [60]. Por otro lado, esta condición se cumple extraordinariamente bien en muchos casos típicos. Como ejemplo, consideremos una mota de polvo de masa $M = 10^{-9}$ g que se mueve a una velocidad $v = 10^{-4}$ m/s, localizada con una precisión $\sigma = 10^{-6}$ m. La

¹Es decir, $\nabla^2 R/R \sim 1/\sigma^2$.

longitud de onda media de esta mota sería $\lambda \approx 10^{-19}$ m, muchísimo menor que σ .

El límite de masa grande no es, desde luego, el único relevante a la hora de determinar el límite clásico. Por ejemplo, Appleby [4] considera el límite de números cuánticos grandes, concretamente estados con una energía media determinada por un autoestado $|\bar{n}\rangle$ muy excitado del hamiltoniano:

$$|\psi\rangle = \sum_{r=-\Delta n/2}^{\Delta n/2} c_r |\bar{n} + r\rangle; \quad \bar{n} \gg 1, \quad (3.6)$$

donde $|n\rangle$ representa al autoestado número n del hamiltoniano. Tomando $\Delta n \ll \bar{n}$ los estados definidos de esta forma son aproximadamente autoestados del hamiltoniano con niveles de excitación muy altos. El resultado presentado en este trabajo es que, para estados del tipo (3.6) que cumplen con la condición adicional de estar bien localizados, la probabilidad de que la velocidad Bohmiana difiera significativamente de la velocidad instantánea clásica es despreciable.

En cualquier caso, es necesario admitir que las trayectorias Bohmianas de un sistema *aislado* no coinciden, en general, con las trayectorias clásicas [49], [51]. En algunas situaciones especialmente patológicas, las trayectorias de Bohm han sido incluso consideradas “surrealistas” [104].

Por otro lado, el caso analizado por Appleby [4] pone además de manifiesto la necesidad de considerar *combinaciones* de autoestados del hamiltoniano, ya que la velocidad de Bohm asociada a un autoestado es cero (ver más adelante). En este contexto, veremos a continuación la relevancia de la inclusión en un *entorno* del sistema medido.

3.2. Sistemas abiertos

La observación de un sistema microscópico requerirá de algún mecanismo de amplificación macroscópico que ejerza el papel de intermediario entre las posiciones microscópicas inobservables y el sistema nervioso del observador. Una de las consecuencias de este hecho será el dar entrada de nuevo al fenómeno de decoherencia, lo cual, según algunos autores, permitirá establecer el límite clásico de forma natural [71], [3], [6], (ver también la réplica [22] a [104]).

Téngase en cuenta que, en este contexto, el término “macroscópico” califica simplemente a una partícula (o partículas) cuya interacción con nuestro sistema nervioso sea suficientemente intensa como para producir en el cerebro una impresión discernible (como, por ejemplo, el centro de masa de una bola de billar, de un puntero, o de una masa de aire que forme parte de una onda sonora). Así pues, un sistema macroscópico será, típicamente, un sistema formado por un número N grande de partículas (a menudo de orden $N \sim 10^{23}$).

De esta forma, desaparece la frontera abrupta entre el mundo microscópico y el macroscópico, y la transición puede describirse en términos de la variación continua de un parámetro. Este parámetro sería la constante de acoplamiento que determina la intensidad de la interacción entre el sistema y el observador. Evidentemente, aplicar explícitamente esta descripción a un caso concreto está fuera de nuestro alcance, entre otras cosas por la inmensa complejidad que tendría el hamiltoniano correspondiente. Pero lo importante es que la mecánica Bohmiana permite describir el proceso de observación, al menos en teoría, como una interacción más entre dos sistemas físicos.

Por tanto, para reconciliar con nuestra experiencia sensible los resultados de la mecánica Bohmiana, sólo tendremos que preocuparnos de las trayectorias de los sistemas macroscópicos. Si consideramos los casos mencionados más arriba, es decir, sistemas de muchas partículas, podemos hacer las siguientes consideraciones generales:

- Será útil en general dividir la descripción del sistema en un conjunto reducido de coordenadas colectivas que serán directamente observadas (como, por ejemplo, el centro de masa) y el resto de coordenadas, que determinan la configuración exacta de todas las partículas y que, normalmente, no podremos observar. Podremos considerar estas últimas como parte de la descripción de lo que, en el contexto de la teoría de la decoherencia, hemos llamado *entorno*.
- La masa característica asociada a las “partículas” descritas por las coordenadas colectivas será del orden de la suma de las masas de las partículas individuales que componen el sistema, por lo que tendrá un valor “macroscópico”. Por lo tanto, en las ecuaciones (3.2) y (3.3) que determinan sus trayectorias podrá despreciarse la contribución del potencial cuántico frente a la del potencial clásico V . El movimiento de estas partículas será, por lo tanto, prácticamente clásico.
- Evidentemente, subsiste la posibilidad de que existan superposiciones de los estados asociados a las partículas macroscópicas. Sin embargo, la teoría de la decoherencia nos indica que estas superposiciones estarán formadas por una *mezcla de estados localizados en regiones disjuntas del espacio*. Por lo tanto, la partícula seleccionará, en una especie de colapso efectivo, el paquete de onda localizado en las inmediaciones de su posición, y su trayectoria no se verá afectada por términos de interferencia originados por funciones de onda localizadas en regiones distintas del espacio. Es interesante notar que, en el proceso de observación de un sistema macroscópico, las propias coordenadas individuales de las partículas que forman el sistema pueden ser responsables de la localización de las partículas “colectivas”.

Queremos resaltar que este análisis es muy esquemático y general. No es nuestra intención profundizar en la teoría de la medida y en el límite clásico

en el contexto de la mecánica Bohmiana, temas que encierran mucha más complejidad de la que aquí trasluce. Sin embargo, se han obtenido resultados similares a los que aquí enunciamos de forma más rigurosa, aunque siguiendo argumentaciones ligeramente diferentes [71], [3], [47].

3.2.1. Función de onda de un sistema abierto

Hemos visto que el estudio de una partícula microscópica debe realizarse, inevitablemente, a través de su interacción con un sistema macroscópico. En este sentido, la mecánica Bohmiana retoma en gran medida el esquema de Von Neumann del proceso de la medida descrito anteriormente.

Consideremos por lo tanto una partícula microscópica de coordenadas \vec{x} que interactúa con una partícula macroscópica de coordenadas \vec{y} . Este sistema estará descrito por una función de onda total $\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t)$ cuya evolución estará gobernada por el hamiltoniano total:

$$H(\vec{x}, \vec{y}) = H_x(\vec{x}) + H_y(\vec{y}) + V_{xy}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (3.7)$$

Si conocemos en todo momento la posición concreta $\vec{y}_\alpha(t)$ de la partícula macroscópica², podremos hablar de la *función de onda condicional* [68], [70] de la partícula microscópica :

$$\psi(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}, \vec{y}_\alpha(t), t). \quad (3.8)$$

Es inmediato ver que $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ representa la densidad de probabilidad *condicional* de presencia de la partícula x sabiendo que la partícula y se encuentra en la posición $\vec{y}_\alpha(t)$. Sin embargo, esta función de onda condicional no tiene con respecto del sistema x la función dinámica que desempeña una función de onda “genuina”, ya que, en general, su evolución no está determinada por un hamiltoniano que dependa únicamente de la variable x . Supongamos, sin embargo, que el potencial V_{xy} se anula, es decir, que la interacción entre las dos partículas es despreciable. Supongamos además que la función de onda total es del tipo:

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t) = \psi(\vec{x}, t)\phi(\vec{y}, t) + \Psi^\perp(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad (3.9)$$

siendo ϕ y Ψ^\perp funciones macroscópicamente separadas en la variable y . En tal caso, si \vec{y}_α pertenece al soporte de ϕ , podremos afirmar con propiedad que la función ψ definida por (3.8) es la auténtica *función de onda* del sistema x , ya que su evolución está exclusivamente determinada por el hamiltoniano $H_x(\vec{x})$ del modo habitual [68], [70]:

$$\psi(\vec{x}, t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_x(t-t_0)\right]\psi(\vec{x}, t_0). \quad (3.10)$$

²Recordamos que en el contexto de la Mecánica Bohmiana este conocimiento no supone ningún problema conceptual. Asimismo, el carácter macroscópico del sistema y no es esencial en nuestros argumentos, ni implica una forma especial de los términos H_y y V_{xy} .

En definitiva, el valor \vec{y}_α habrá seleccionado la función $\psi(\vec{x}, t)$ del sistema microscópico. Es importante observar que no siempre puede definirse la función de onda de un sistema cuántico. Este hecho se corresponde simplemente con que, en general, un sistema está definido por una matriz densidad y no por un estado puro.

3.2.2. Preparación de un estado cuántico

Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos definir un procedimiento operativo para determinar la función de onda del sistema, poniendo de paso de manifiesto su crucial relación con las variables macroscópicas que observamos. Este procedimiento es muy similar al que presentamos anteriormente con relación a la medida de un observable en el apartado sobre decoherencia, aunque ahora, en vez de vectores genéricos de estado, trataremos con funciones de onda. Por otro lado, distinguiremos claramente entre coordenadas no observadas, cuyo valor exacto desconocemos y de las que sólo podremos inferir una cierta distribución de probabilidad, y coordenadas conocidas (observadas), cuyo valor concreto designaremos mediante un subíndice griego. Estas últimas jugarán el papel de una cantidad conocida en la definición de una probabilidad condicional.

Como ya es habitual, dividiremos el sistema total en los subsistemas siguientes: (i) la partícula microscópica bajo estudio, de coordenadas $\vec{x}(t)$, cuya función de onda (a priori desconocida) escribiremos en función de una base ortogonal $\{\psi_n\}$ (ii) el aparato de medida, es decir, un sistema macroscópico de coordenadas $\vec{y}(t)$ cuyo valor concreto en todo instante $\vec{y}_\alpha(t)$ podemos observar directamente, y (iii) las N partículas del entorno, con coordenadas $\vec{Z} \equiv (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_N)$. El procedimiento a seguir para determinar la función de onda del sistema x (lo cual, en el contexto de la MCO suele denominarse *preparación* de un estado) es ya conocido:

1. Diseñamos una interacción V_{xy} entre los sistemas x e y que permita una evolución del tipo:

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{Z}, t_0) \longrightarrow \Psi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{Z}, t_1) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{x}, t_1) \phi_{\alpha}(\vec{y}, t_1) \chi_{\alpha}(\vec{Z}, t_1), \quad (3.11)$$

de forma que las funciones $\phi_{\alpha}(\vec{y}, t_1)$ del aparato de medida que se acoplan con cada función ψ_{α} estén macroscópicamente separados para valores distintos de α . Como ya hemos visto, la teoría de la decoherencia nos indica que, a medida que las funciones ϕ_{α} se van separando en el espacio, las funciones de onda del entorno χ_{α} se van haciendo rápidamente ortogonales³. En este punto, estaremos en la situación

³La ortogonalidad de las funciones de onda del entorno juega además un papel esencial en la teoría de la medida, tal y como se discutió en (1.1.2). En este contexto, este hecho prohíbe la aparición subsiguiente de términos de interferencia en el campo de velocidades

mencionada en (3.9), y podremos determinar la función de onda del sistema total a partir del valor $\vec{y}_\alpha(t_1)$ de la coordenada del aparato de medida:

$$\psi(\vec{x}, t_1; \{\vec{Z}(t_1)\}) = \psi_\alpha(\vec{x}, t_1) \phi_\alpha(\vec{y}_\alpha(t_1)) \chi_\alpha(\vec{Z}(t_1)), \quad (3.12)$$

2. A partir de este momento, desacoplamos los sistemas x e y , es decir, “apagamos” la interacción V_{xy} . Sólo entonces podremos hablar con propiedad de la función de onda del sistema x , que, de acuerdo con (3.12), vendrá dada por⁴

$$\psi(\vec{x}, t_1) = \psi_\alpha(\vec{x}, t_1), \quad (3.13)$$

dando así por concluido el proceso de preparación del sistema en un estado cuántico.

La parte central de nuestro argumento consiste en observar que la pérdida de solapamiento entre las distintas $\phi_\alpha(\vec{y}, t)$ descrita esquemáticamente en (3.11) constituye un proceso continuo y paulatino. Para tiempos $t_0 < t < t_1$, estas distintas $\phi_\alpha(\vec{y}, t)$ solaparán entre sí, y un valor cualquiera de la coordenada $y_\alpha(t)$ no podrá discriminarlas. En estos instantes, el sistema cuántico estará inevitablemente descrito por un desarrollo del tipo:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_\alpha(\vec{x}, t) + \sum_{\alpha' \neq \alpha} \left[C_{\alpha'}(\vec{y}_\alpha(t), \vec{Z}(t)) \right] \psi_{\alpha'}(\vec{x}, t), \quad (3.14)$$

con $C_{\alpha'} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Así pues, incluso suponiendo que el sistema microscópico que pretendemos estudiar está perfectamente cerrado (es decir, no interactúa con su entorno), el hecho mismo de que conozcamos su función de onda supone que, al menos en el pasado, ha interactuado con algún sistema macroscópico. Como hemos mencionado, no hemos hecho sino recrear el proceso de *preparación* de un estado cuántico, concepto bastante habitual en MCO.

Por otro lado, incluso si partimos de un conocimiento exhaustivo de las coordenadas $y_\alpha(t)$ y de la interacción V_{xy} , es de vital importancia para entender el contenido del resto de esta tesis tener en cuenta que el desarrollo (3.14) es esencialmente *aleatorio*, ya que depende de las variables \vec{Z} , que están fuera de nuestro control.

Este es, en definitiva, el resultado al que pretendíamos llegar: todo sistema cuántico realista preparado en un determinado estado cuántico ψ_α está inevitablemente contaminado por un desarrollo (idealmente pequeño) aleatorio de estados $\psi_{\alpha'}$ con $\alpha' \neq \alpha$.

de la partícula, a pesar de que ϕ_α y ϕ'_α puedan ser obligadas a volver a solapar.

⁴Salvo una constante de normalización.

3.3. Ruido aleatorio

Hemos visto en la sección (1.5.2) que las posiciones iniciales de las partículas podían ser arbitrarias si se modificaba el campo de velocidades bohmiano mediante un término estocástico. A la vista de ello, parece natural preguntarse por la posibilidad de obtener resultados similares (es decir, obtener la distribución cuántica como una distribución asintótica de equilibrio) a partir de un término aleatorio más general que el que lleva a postular un proceso de difusión en un medio subcuántico. Hablaremos por lo tanto de *ruido aleatorio* para referirnos a términos de este tipo, por oposición a procesos estocásticos mucho más especiales como el introducido por Nelson en [29].

A pesar de que la inclusión de un ruido aleatorio se ha propuesto en contextos muy distintos, creemos que puede identificarse cuál es la dificultad general que subyace a todos estos intentos.

Supondremos en el contexto de esta sección que la densidad de probabilidad $P(\vec{X}, t)$ del sistema no es necesariamente la distribución cuántica, sino que podemos definir (según un procedimiento bastante estándar [25], [94]) un factor $f(\vec{X}, t)$ que las distingue:

$$P(\vec{X}, t) = f(\vec{X}, t) |\psi(\vec{X}, t)|^2, \quad (3.15)$$

donde $\psi(\vec{X}, t)$ es la función de onda del sistema.

Si el movimiento de la (o las) coordenada(s) \vec{X} está determinado por el campo de velocidades bohmiano $\vec{v}_B(\vec{X}, t) = \vec{\nabla}S(\vec{X}, t)/m$, la aplicación de la ecuación de continuidad (3.3) para la densidad de probabilidad (3.15) proporciona una ecuación para $f(\vec{X}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_B \cdot \vec{\nabla} f = 0 \longrightarrow \frac{df}{dt} = 0, \quad (3.16)$$

donde la derivada *total* hace referencia a la variación a lo largo de una trayectoria definida por el campo de velocidades. Por lo tanto, esta ecuación expresa el hecho de que, *dada la equivariancia de $|\psi|^2$* (véase la sección (1.4.1)), el factor f asociado a una partícula concreta no varía con el tiempo.

En un sentido estricto, esta propiedad implica que, si una distribución es distinta de $|\psi|^2$ en un instante determinado, lo seguirá siendo (lo era) en cualquier instante posterior (anterior). Sin embargo, consideremos la posibilidad de que el movimiento de las partículas tenga la propiedad de *mezcla* (mixing) siguiente: las partículas confinadas inicialmente en una región arbitrariamente pequeña (aunque de dimensión no nula) del espacio evolucionan, tras un determinado tiempo t , a puntos repartidos de manera prácticamente uniforme por todo el espacio de configuración accesible. En tales condiciones, cualquier función $g(\vec{X}, t)$ razonable asociada a las partículas en su

movimiento⁵ adquiere un valor prácticamente constante en todo el espacio de configuración accesible *al ser promediada sobre una región arbitrariamente pequeña* (de nuevo de dimensión no nula). En estas condiciones, el factor f promediado sobre esta pequeña región llegará a ser constante (igual a 1 si la densidad de probabilidad está normalizada) en todo el espacio de configuración, igualándose así la distribución *promediada* del sistema con $|\psi|^2$.

Es fácil comprobar que la mecánica Bohmiana no posee, *en general*, esta propiedad, con la cual no se plantearía el problema que estamos tratando. Un ejemplo particularmente ilustrativo lo constituye precisamente el sistema estudiado en el capítulo anterior: una partícula neutra de espín $1/2$ en un campo magnético inhomogéneo. A pesar de la complejidad de este problema bidimensional, es inmediato comprobar, a partir de los resultados obtenidos en (2.5), que sus trayectorias no se mezclan. Considérese para ello la función $g(\vec{X}, t)$ consistente en asignar a cada partícula el valor $g = 1$ si su espín a lo largo de la dirección de \vec{B} en el momento de su detección en la pantalla es positivo, y el valor $g = -1$ en caso contrario. Como se mostró en el capítulo anterior, la función g definida de esta forma define dos regiones del plano xz claramente diferenciadas⁶. En una de ellas adopta el valor constante $g = 1$ (correspondiente a la región con círculos negros en la figura (2.15)) mientras que en la otra es siempre $g = -1$ (zona de círculos blancos). Obviamente, el valor promediado de esta función no es constante en todo el espacio, a menos que el promedio abarque una región suficientemente amplia como para incluir las dos zonas que acabamos de definir. Por otro lado, este ejemplo ilustra la relación de la propiedad de mezcla con la posibilidad de que una distribución arbitraria de partículas evolucione hacia la distribución cuántica. En efecto, si suponemos que las partículas están inicialmente distribuidas únicamente en la zona de círculos blancos, la distribución final obtenida en la pantalla correspondería exclusivamente a la “mancha” inferior, lo cual estaría en flagrante desacuerdo con la distribución cuántica obtenida mediante el módulo al cuadrado de la función de onda.

Debe mencionarse sin embargo que la condición de mezcla sobre la dinámica *no es suficiente* (más abajo se verá por qué) para alcanzar la distribución cuántica. En cualquier caso, veremos que todos los intentos de describir la evolución de una distribución P hacia la distribución de equilibrio $|\psi|^2$ se apoyan en última medida en esta propiedad. Antes de proseguir, queremos resaltar algunos puntos importantes:

- La *mezcla* como propiedad característica de un determinado sistema

⁵Es decir, tal que $dg/dt = 0$, donde la derivada total con respecto al tiempo está definida del mismo modo que en (3.16).

⁶Por otro lado, esta función es trivialmente constante para cada partícula a lo largo de su movimiento, es decir, $dg/dt = 0$. Este hecho está garantizado por la continuidad de las trayectorias de Bohm, de manera que si seleccionamos las partículas en función de su posición final, esta selección se mantiene a lo largo de toda su trayectoria.

dinámico es extraordinariamente difícil de demostrar de forma general y rigurosa. De hecho, es una condición más fuerte que la de *ergodicidad* (con la que está relacionada), que, ya de por sí, presenta grandes dificultades para ser probada. Por tanto, habrá que ser especialmente cautelosos cuando se pretenda *suponer* que se cumple en algún caso concreto.

- La inclusión de un ruido aleatorio en el campo de velocidades $\vec{v}(\vec{X}, t) \neq \vec{v}_B(\vec{X}, t)$ que genera el movimiento supone que ya no es válido afirmar que la densidad de probabilidad $P(\vec{X}, t)$ obedezca una ecuación de continuidad del tipo (1.53). La evolución de $P(\vec{X}, t)$ estará determinada, en estos casos, por una ecuación de Fokker–Planck. En particular, la ecuación (3.16) *no es aplicable* a menos que el campo de velocidades sea el bohmiano. De forma más general, cualquier inclusión de un campo \vec{v} que contenga un ruido aleatorio en una ecuación diferencial debe hacerse con sumo cuidado, ya que un proceso estocástico (por ejemplo, del tipo (1.60)) no es, en general, diferenciable.
- Finalmente, debemos recordar que la *mezcla* de las trayectorias no es, por sí sola, una condición *suficiente* para nuestros propósitos. Como es obvio, tendremos que exigir además que, para la dinámica resultante, $|\psi|^2$ sea *equivariante* (por lo menos aproximadamente: para ser más concretos, exigiremos que $|\psi|^2$ sea *estable*, es decir, que sea suficientemente bien preservada por la dinámica). Queremos resaltar que esta propiedad sólo está estrictamente garantizada cuando el campo de velocidades es el bohmiano.

En definitiva, creemos que el problema puede plantearse de la siguiente forma: se trata de modificar el campo de velocidades bohmiano de manera que la dinámica resultante tenga (i) la propiedad de mezcla y (ii) se estabilice alrededor de $|\psi|^2$. La principal dificultad estriba en conciliar estas dos premisas, ya que son, en cierto sentido, antagónicas: la adopción de $\vec{v} \neq \vec{v}_B$ para garantizar la mezcla supone la pérdida de la equivariancia estricta de $|\psi|^2$. De acuerdo con estas consideraciones, revisaremos críticamente los intentos anteriores de resolver este problema.

3.3.1. Demostración de Bohm

Bohm fue consciente desde el principio del problema de las posiciones iniciales. En sus artículos originales de 1952 [23], [24], ya avanzó que el postulado de las condiciones iniciales podría ser abandonado incluyendo de alguna manera un ruido aleatorio en la definición del campo de velocidades. Por otro lado, este aspecto de su teoría recibió críticas muy tempranas [52], [79], lo cual le llevó a proponer en 1953 [25] una demostración de que la densidad de probabilidad tiende a $|\psi|^2$.

En este artículo, Bohm considera el movimiento de una molécula de hidrógeno, de función de onda conocida, sometida a una serie de colisiones con otras partículas. Estas colisiones, de naturaleza aleatoria, estarán caracterizadas por una determinada distribución de los parámetros de impacto \mathbf{h} y las velocidades iniciales \mathbf{u} (según la notación del artículo) de las partículas incidentes. Bohm define a partir de estos parámetros un potencial de interacción entre la molécula y el proyectil (tratado semiclásicamente) cuyo efecto neto es el de una modificación aleatoria de la función de onda. Estos cambios en la función de onda originan modificaciones en el campo de velocidades, que suponen variaciones aleatorias en las trayectorias de las moléculas, que, a su vez, están caracterizadas por una determinada *probabilidad de transición* entre una posición \mathbf{x} y otra \mathbf{x}' .

Intentaremos mostrar que algunos de los argumentos presentados en el artículo no están debidamente justificados, lo cual creemos que invalida la demostración. Por otro lado, esta discusión permitirá ilustrar la sección anterior, presentando de nuevo los puntos clave que tendremos que abordar más adelante⁷.

Empezamos por considerar la utilización de una ecuación de continuidad del tipo (1.53) para la distribución de probabilidad [B,3]. Si el autor hubiera tenido en mente la consideración de un campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *estocástico* distinto del bohmiano \mathbf{v}_B para la posición \mathbf{x} de la partícula, tendría que haber usado en su lugar una ecuación de Fokker-Planck. Parece más bien que el autor considera la velocidad bohmiana $\mathbf{v}_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ generada por la función de onda *conjunta* $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, siendo \mathbf{y} el conjunto de coordenadas que definen la posición de las partículas *incidentes*. En este último caso, es la equivariancia de $|\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2$ la que está garantizada por la ecuación de conservación

$$\frac{\partial |\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{\partial t} + \vec{\nabla} (|\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \mathbf{v}_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0, \quad (3.17)$$

no así la de la función de onda $\psi(\mathbf{x})$ correspondiente al subsistema estudiado. En cualquiera de los dos casos, la ecuación de continuidad [B,4] *para la función de onda $\psi(\mathbf{x})$ de la partícula \mathbf{x}* no estaría justificada. Esto invalidaría las expresiones [B,6] y [B,7]⁸ que expresan la invariancia a lo largo de una trayectoria de la cantidad $f(\mathbf{x}, t)$ definida en [B,5]. En definitiva, ponemos en cuestión que pueda establecerse de esta forma la equivariancia⁹ de la distribución $|\psi(\mathbf{x})|^2$, utilizada explícitamente en [B,27] para completar la demostración.

Creemos que la hipótesis encubierta realizada en este artículo por Bohm es la de considerar que el campo de velocidades realiza pequeñas fluctuaciones alrededor del valor bohmiano, de forma que el valor medio coincida

⁷en lo que sigue, haremos referencia a la ecuación número n del artículo [25] de Bohm como [B, n].

⁸Estas expresiones son equivalentes a las que hemos derivado (correctamente) en (3.16).

⁹Para ninguno de los dos campos de velocidades $\mathbf{v}_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

con él: $\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_B$, y podamos escribir simultáneamente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\langle \vec{v} \rangle P) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\langle \vec{v} \rangle |\psi|^2) = 0. \quad (3.19)$$

Ahora bien, estas propiedades no las posee trivialmente *cualquier* campo de velocidades con un término aleatorio. Un ejemplo de campo en el que sí se cumplen estas condiciones es precisamente el tratado en la sección (1.5.2) que, como vimos, era muy especial (en el sentido de que era necesario definir cuidadosamente la velocidad osmótica y la intensidad del término aleatorio a través del coeficiente de difusión).

Hasta ahora hemos tratado la cuestión de la estabilidad de $|\psi(\mathbf{x})|^2$, por lo que quedaría por estudiar la propiedad de mezcla de las trayectorias. Recordamos que esta es una propiedad nada trivial de la dinámica, y que debe ser cuidadosamente establecida. Sin embargo, Bohm justifica su uso en la demostración de forma algo vaga, aludiendo a una distribución aleatoria continua de los parámetros que gobiernan las colisiones. De esta forma, llega a establecer [B,31], donde supone que los valores máximos y mínimos de la función $f(\mathbf{x}, t)$ se van “disolviendo” a lo largo del tiempo hasta hacerse constante en todo el espacio. En cualquier caso, aunque admitamos esta propuesta, sería necesario apelar a la estabilidad de $|\psi(\mathbf{x})|^2$ para poder establecer su condición de distribución asintótica de equilibrio.

De esta forma, Bohm llega a una sorprendente conclusión: la densidad de probabilidad de las moléculas de hidrógeno tiende a $|\psi(\mathbf{x})|^2$ *cualquiera que sea la intensidad de la interacción con las partículas colisionantes*. Creemos que esto es consecuencia de la afirmación injustificada de la estabilidad de $|\psi(\mathbf{x})|^2$. De hecho, se mostrará explícitamente más adelante (en la sección (3.5)) cómo un ruido estocástico de intensidad moderada aleja la distribución de partículas de su valor cuántico $|\psi(\mathbf{x})|^2$.

Efecto de la medida

Mencionaremos brevemente otro “generador de ruido aleatorio” que también ha sido considerado en este contexto.

Hemos tratado anteriormente con cierto detalle el proceso de la medida en el marco de la mecánica Bohmiana, quedando clara la importancia de la interacción del sistema cuántico con el aparato de medida para describir la forma en la que se obtiene un resultado concreto. Sabemos también que la evolución (determinista) de la partícula durante la medida de su posición es, en general, extremadamente complicada. De hecho, varios autores han demostrado [67] que las trayectorias de este tipo de sistemas se tornan caóticas precisamente por la perturbación introducida durante la medida, en casos en los que el sistema cerrado no exhibe ningún comportamiento caótico en

sus trayectorias. Concretamente, este comportamiento aparece en varios casos monodimensionales, para los que las trayectorias del sistema cerrado son periódicas.

Este hecho ha sido invocado como un posible mecanismo de evolución hacia el equilibrio cuántico de una distribución arbitraria de posiciones. El argumento seguido es el siguiente [48]:

1. Las trayectorias, al ser caóticas, son necesariamente ergódicas, y, por lo tanto, tienen la propiedad de *mezcla*.
2. De la propiedad de mezcla y de (3.16) se sigue $f = 1$.
3. Siendo $f = 1$, tenemos $P = |\psi|^2$, situación que se mantiene indefinidamente gracias a la propiedad de equivariancia de $|\psi|^2$.

Creemos que todos los puntos del argumento son discutibles. El primero es, quizá, el menos grave, ya que, aunque la condición ergodicidad no implica la de mezcla, no deja de ser un supuesto plausible. Pero el segundo punto estaría invalidado por motivos similares a los expuestos en la sección anterior, así como el tercero. Volvemos a resaltar que $|\psi|^2$ *sólo es estrictamente equivariante en un campo de velocidades bohmiano* lo cual, claramente, no es aquí el caso.

3.4. El Teorema H de Valentini

El tratamiento propuesto por Valentini [94], [96], [95] para explicar la transición $P \rightarrow |\psi|^2$ es muy similar al seguido en mecánica estadística. Clásicamente, puede definirse la función H_{cl} :

$$H_{cl} = \int \rho(\vec{x}, \vec{p}) \ln(\rho(\vec{x}, \vec{p})) d\Omega, \quad (3.20)$$

donde $\rho(\vec{x}, \vec{p})$ y $d\Omega$ son la densidad de probabilidad y el elemento de volumen en el espacio de las fases respectivamente. A pesar de que H_{cl} es constante en el tiempo (ya que, según el teorema de Liouville, $d\rho/dt = 0$ a lo largo de las trayectorias), puede demostrarse que el valor \bar{H}_{cl} definido a partir de la densidad $\bar{\rho}(\vec{x}, \vec{p})$ promediada sobre pequeños elementos de volumen

$$\bar{H}_{cl} = \int \bar{\rho}(\vec{x}, \vec{p}) \ln(\bar{\rho}(\vec{x}, \vec{p})) d\Omega, \quad (3.21)$$

decrece con el tiempo, lo cual constituye el *teorema H clásico*:

$$\frac{d\bar{H}_{cl}}{dt} \leq 0. \quad (3.22)$$

Este comportamiento caracteriza la evolución del sistema hacia el macroestado (caracterizado aquí por el valor promediado $\bar{\rho}$) de mayor entropía.

Del mismo modo, Valentini introduce la función H cuántica con la intención de probar un *teorema H subcuántico* (según la terminología del autor) que caracterice la evolución hacia el equilibrio de la densidad de probabilidad en el contexto de la mecánica Bohmiana. La función propuesta es:

$$H = \int d\Sigma |\psi|^2 f \ln f, \quad (3.23)$$

donde $d\Sigma$ es el elemento de volumen en el espacio de configuración, ψ la función de onda del sistema y f la función definida por (3.15). Para seguir con la analogía, podemos definir la cantidad \bar{H} aplicando la expresión anterior a las cantidades promediadas sobre un pequeño elemento de volumen δV del espacio de configuración:

$$\bar{H} = \int d\Sigma \overline{|\psi|^2} \bar{f} \ln \bar{f}, \quad (3.24)$$

con:

$$\bar{P} = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} d\Sigma P, \quad (3.25)$$

$$\overline{|\psi|^2} = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} d\Sigma |\psi|^2, \quad (3.26)$$

y $\bar{f} = \bar{P}/\overline{|\psi|^2}$. Admitiendo la ausencia de estructura fina de las distribuciones iniciales (en el tiempo $t = 0$):

$$\overline{|\psi|^2}(0) = |\psi|^2(0) \quad ; \quad \bar{P}(0) = P(0), \quad (3.27)$$

el autor obtiene el siguiente resultado:

$$\bar{H}(0) - \bar{H} \leq 0, \quad (3.28)$$

que establece que la función H alcanza su máximo en el instante inicial¹⁰. Al igual que en el caso clásico, puede mostrarse que \bar{H} es una cantidad positiva, por lo que nunca podrá disminuir por debajo de su valor mínimo $\bar{H} = 0$. Puede comprobarse fácilmente que este valor se alcanza si y sólo si $\bar{f} = 1$, $\bar{P} = \overline{|\psi|^2}$.

En cuanto a la aplicabilidad del teorema a un sistema genérico, nos parece relevante mencionar los siguientes puntos:

1. No es demasiado complicado hallar ejemplos concretos cuyos campos de velocidades no conducen al estado de equilibrio. El caso monodimensional, por ejemplo, está descartado (al menos para una superposición finita de autoestados del hamiltoniano). Uno de los motivos

¹⁰ en el artículo original, Valentini afirmaba que $d\bar{H}/dt \leq 0$, sin que comprendamos muy bien por qué. Sin embargo, en versiones posteriores de su teorema, se limita a proponer (3.28)

es que las posiciones de las partículas tienen la misma periodicidad que la distribución cuántica, con lo cual la distribución inicial se reproduce periódicamente ([88], [33]). Otro ejemplo lo constituye cualquier función de onda con simetría bien definida (como $\psi(x, y, t) = \psi(-x, y, t)$, siendo x e y las coordenadas cartesianas habituales), ya que da lugar a un campo de velocidades simétrico que impide el paso de trayectorias entre dos zonas bien delimitadas (en el ejemplo anterior, $v_x(x, y, t) = -v_x(-x, y, t) \rightarrow v_x(0, y, t) = 0$, lo cual impide que las partículas crucen la línea $x = 0$). En este último caso, una distribución cuyo soporte esté contenido en una de las zonas nunca se desarrollará en la otra zona, ni siquiera en un sentido promediado. También conocemos ya el ejemplo de la partícula neutra en un campo magnético inhomogéneo, mencionado al principio de este capítulo y estudiado en detalle en el capítulo anterior. mencionamos al principio de este capítulo, otro ejemplo o

2. En definitiva, la cuestión de la evolución de \bar{H} hacia su valor de equilibrio $\bar{H} = 0$ es totalmente equivalente a la de determinar si la dinámica del sistema tiene la propiedad de *mezcla*. Esto queda especialmente claro si tenemos en cuenta que la condición necesaria y suficiente para que \bar{H} alcance su valor de equilibrio es $\bar{f} \rightarrow 1$, que no es más que una expresión concreta de esta propiedad. Como ya hemos mencionado, esta pregunta es muy difícil de contestar para un caso general, aunque acabamos de mencionar ejemplos particulares en los que la respuesta es, claramente, *no*. Por otro lado, Valentini y Westman [111] proponen un ejemplo donde sí parece observarse $\bar{P} \rightarrow |\psi|^2$, concretamente la superposición de los 16 primeros modos de vibración de un pozo cuadrado bidimensional.

Por lo tanto, el resultado (3.28) nos parece demasiado débil, en cualquier caso, para considerarlo una explicación general de la evolución hacia el equilibrio, ya que a partir de él no puede deducirse que \bar{H} alcance alguna vez su valor mínimo. En realidad, ni siquiera impide que \bar{H} *auge* eventualmente, aunque siempre por debajo de su valor máximo inicial. Esta opinión también ha sido expresada por el propio Valentini, consciente de estas limitaciones, que, sin embargo, considera que la evolución de \bar{H} puede servir para *caracterizar* la evolución del sistema hacia la situación de equilibrio $P = |\psi|^2$ en un caso más general. En este punto estamos plenamente de acuerdo con el autor, a pesar de que, como veremos más adelante, hayamos utilizado una función diferente para cuantificar la diferencia entre la distribución del sistema y la cuántica.

3.5. La distribución cuántica como distribución asintótica de equilibrio

Hemos intentado, en los capítulos anteriores, identificar las características de la mecánica Bohmiana relevantes en lo que concierne la evolución hacia el equilibrio de una distribución arbitraria de probabilidades. Como parece dejarlo especialmente claro el trabajo de Valentini [96] [94] [95], la clave parece ser la propiedad de mezcla de las trayectorias. Por otro lado, como queda patente en los trabajos de Frisk [33] y Goldstein [88], este tipo de comportamiento está excluido en el caso de sistemas monodimensionales. En sistemas de dimensión $D \geq 2$, es posible, en principio, que las trayectorias recorran todo el espacio de configuración permitiendo la relajación hacia el equilibrio, como ha sido mostrado explícitamente en un ejemplo concreto. Sin embargo, esto no es así en general: como hemos visto, algunas simetrías en la función de onda restringen drásticamente la región susceptible de ser “visitada” por una trayectoria.

Muy recientemente, Colijn y Vrscay [103] han calculado explícitamente las trayectorias tridimensionales correspondientes a una combinación de autoestados del átomo de hidrógeno, y han encontrado que su movimiento está contenido en una serie de superficies invariantes. Esto hace imposible la relajación hacia el equilibrio de estos sistemas, incluso en casos distintos del ejemplo trivial (por ser la velocidad de Bohm nula) de los estados estacionarios. Precisamente, los estados estacionarios constituyen ejemplos para los cuales la relajación hacia el equilibrio según el esquema de Valentini [94] (es decir, para una distribución *promediada* y sin considerar ningún tipo de modificación de la dinámica de mecánica Bohmiana) es imposible sea cual sea la dimensión del espacio de configuración.

Parece, pues, imprescindible modificar de algún modo la dinámica si pretendemos describir la evolución hacia el equilibrio de una distribución arbitraria de posiciones iniciales para *cualquier* sistema físico. Esta modificación puede llevarse a cabo mediante la propuesta de una teoría de onda piloto distinta a la mecánica Bohmiana, postulando, por ejemplo, un medio subcuántico en el seno del cual las partículas del sistema experimentan un proceso de difusión. También ha habido intentos de integrar estas modificaciones en el contexto de la mecánica Bohmiana, considerando el efecto de perturbaciones aleatorias ejercidas sobre el sistema.

Ya hemos descrito los problemas que creemos que plantea la consideración de un ruido aleatorio de intensidad arbitrariamente grande para describir la evolución hacia el equilibrio. Por otro lado, también hemos mencionado como, en el contexto de la preparación de un estado cuántico, éste se ve inevitablemente afectado por un término espurio, que puede describirse por una combinación aleatoria de los demás niveles del sistema. Esta perturbación será, en principio, pequeña, en la medida en que queramos preparar

el sistema en un estado lo más puro posible.

A continuación presentamos los resultados del estudio de la evolución de la densidad de probabilidad en el espacio de configuración, aplicando las ideas expuestas en el párrafo anterior. Consideraremos, por lo tanto, la influencia de un ruido aleatorio de intensidad arbitrariamente pequeña en las trayectorias de las partículas, y mostraremos cómo, para algunos sencillos sistemas monodimensionales, se observa una clara relajación hacia $|\psi|^2$ de la distribución de probabilidad [99].

Ya hemos visto que el mero hecho de poder asignar una función de onda a un sistema cuántico supone tener que considerar perturbaciones aleatorias en la función de onda, que, lógicamente, repercutirán en el campo de velocidades. Sin embargo, el ruido aleatorio puede tener distintos orígenes, a pesar de lo cual mantenemos la tesis de que casi siempre puede ser descrito fenomenológicamente de manera similar.

Para ilustrar este aspecto, consideramos a continuación el efecto de colisiones aleatorias sobre los electrones de una serie de moléculas, en el espíritu del artículo original de Bohm. Veremos que la función de onda electrónica resultante puede ser descrita por un desarrollo formalmente idéntico al correspondiente a la expresión (3.14).

Supongamos que los electrones de un determinado colectivo estadístico de moléculas se encuentran inicialmente descritos por la función de onda del estado fundamental, $\psi_a(x_1, t)$, y por una distribución inicial de partículas, no necesariamente igual a $|\psi|^2$. Supongamos además que, durante algún tiempo, estas moléculas interactúan con otro conjunto incontrolado de moléculas, descritas por la función de onda $\phi_b(x_2, t)$.

Inicialmente ($t \rightarrow -\infty$), la función de onda de las dos moléculas que colisionan es

$$\Psi_0(x_1, x_2, \mathbf{r}_{12}; t) = \psi_a(x_1; t)\phi_b(x_2; t)d_0(\mathbf{r}_{12}; t), \quad (3.29)$$

mientras que durante la colisión la función de onda debe escribirse como una combinación lineal más general:

$$\Psi(x_1, x_2, \mathbf{r}_{12}; t) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma} \Psi_{\alpha, \beta, \gamma}(x_1; \{x_2, \mathbf{r}_{12}; t\}), \quad (3.30)$$

con

$$\Psi_{\alpha, \beta, \gamma}(x_1, x_2, \mathbf{r}_{12}; t) = \psi_\alpha(x_1; t)\phi_\beta(x_2; t)d_\gamma(\mathbf{r}_{12}; t), \quad (3.31)$$

donde $\psi_\alpha(x_1; t)$ representa un estado estacionario de la molécula-1, $\phi_\beta(x_2; t)$ representa un estado estacionario de la molécula-2, y $d_\gamma(\mathbf{r}_{12}; t)$ representa un estado del movimiento relativo del centro de masa de las moléculas que colisionan (típicamente un paquete de onda). La evolución lineal de Schrödinger determinará, a partir del estado inicial concreto $\Psi_0(x_1, x_2, \mathbf{r}_{12}; t)$, las amplitudes $\mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma}$ del desarrollo completo (3.30).

Para calcular la velocidad del electrón-1, es interesante escribir la función de onda (3.30) como una combinación lineal de estados estacionarios de la molécula-1:

$$\Psi(x_1, t) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(x_2(t), \mathbf{r}_{12}(t); t) \psi_{\alpha}(x_1; t), \quad (3.32)$$

donde los coeficientes $\chi_{\alpha}(x_2(t), \mathbf{r}_{12}(t); t)$ contienen la toda la dependencia en x_2 y \mathbf{r}_{12} , así como la suma sobre los índices β y γ . El campo de velocidades correspondiente al electrón-1 se obtiene a través de esta función de onda aplicando (1.51), por lo que será sensible a todas las posiciones iniciales, incluyendo las de la molécula-2 y la que caracteriza el movimiento relativo. Desde luego, podríamos derivar expresiones similares para las velocidades asociadas a x_2 y \mathbf{r}_{12} si estuviéramos interesados. Resaltamos la similitud de este desarrollo con (??), obtenido en el contexto de la preparación de un estado cuántico.

Después de la colisión (para $t \rightarrow \infty$), el desarrollo (3.30) podrá simplificarse considerando, por ejemplo, que el choque ha sido elástico, en cuyo caso la molécula-1 permanecerá en el estado estacionario inicial ($\alpha = \beta = a$). A pesar de ello, es de esperar que la colisión haya perturbado la distribución inicial de partículas, intentaremos por lo tanto a continuación determinar la naturaleza de estas modificaciones.

Estudiaremos pues la evolución de la distribución de posiciones de la partícula-1, sustituyendo la descripción detallada de las demás coordenadas durante la colisión por la acción de un ruido aleatorio. Podremos pues considerar esta perturbación estocástica como la consecuencia de la desviación de los grados de libertad incontrolados (en este caso, x_2 y \mathbf{r}_{12}) de sus valores medios.

Nuestro tratamiento del problema consistirá en resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento, estudiando las distribuciones de partículas resultantes. Tendremos como objetivo mostrar explícitamente cómo una distribución inicial arbitraria tiende a la distribución cuántica $|\psi|^2$, estabilizándose alrededor de este valor.

Empezaremos por estudiar algunas propiedades de la evolución temporal de una distribución de partículas gobernada por la mecánica Bohmiana, en relación con su respuesta a perturbación estocástica. Concretamente, consideraremos los efectos de un ruido aleatorio sobre una combinación lineal de estados estacionarios en sistemas monodimensionales no degenerados (recordemos que las propiedades dinámicas de las trayectorias de Bohm en sistemas monodimensionales son especialmente poco propicias para mostrar una relajación hacia la distribución de equilibrio). Partiendo de distribuciones iniciales arbitrarias, mostraremos que tienden a la distribución cuántica.

En un cálculo realista, la intensidad del ruido debería estar determinada por los coeficientes de la combinación lineal (3.32) o (??), y debería, por lo tanto, depender del tiempo. Sería de esperar que, durante la colisión, el ruido

alcanzara un valor máximo coincidiendo con el momento en que r_{12} alcanzara su valor mínimo, para después tender a cero a medida que $t \rightarrow \pm\infty$. Nosotros nos limitaremos a considerar una descripción muy simplificada, de forma que las ecuaciones del movimiento que tendremos que resolver serán:

$$\dot{x}_i = \frac{\nabla S(x_i, t)}{m} + C\eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.33)$$

donde el índice i se refiere a cada uno de los N sistemas monoparticulares que conforman el colectivo estadístico, distribuidos inicialmente de acuerdo con una distribución dada $\rho_0(x) \equiv \rho(x, t = 0)$, y sujetos a la acción de un ruido blanco $\eta_i(t)$, cuya intensidad está controlada por el parámetro C (de aquí en adelante, C se expresará en centésimas de la velocidad de la luz, lo cual constituye una escala natural para los sistemas estudiados). Para evitar una completa difusión en todo el espacio (como consecuencia de que, en nuestro modelo, el ruido es independiente de x), confinaremos nuestro sistema en un pozo de paredes infinitas perfectamente reflectantes.

Estudiaremos numéricamente el caso de un colectivo estadístico de $N = 5000$ sistemas monodimensionales, representando cada uno de ellos a un electrón confinado en una caja de longitud $L = 2 \text{ \AA}$ y con la función de onda

$$\Psi(x, t) = a_1\phi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + a_2\phi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}, \quad (3.34)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los dos primeros estados estacionarios del pozo. La contribución de cada uno de ellos está determinada por las amplitudes a_1 y a_2 , que, en un caso más general, representan los valores típicos durante el proceso de colisión (ver (3.32)). Por simplicidad, tomaremos los valores constantes $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2}$. La ecuación diferencial estocástica (3.33) ha sido resuelta utilizando el algoritmo de Heun [93] de integración numérica.

Compararemos los resultados obtenidos con dos distribuciones iniciales distintas, la distribución uniforme $\rho_0(x) = \rho_{un} \equiv 1/L$, y la que coincide, en $t = 0$, con la distribución cuántica habitual $\rho_0(x) = \rho_q \equiv |\Psi(x, 0)|^2$. Mostramos en la Figura (3.1) la evolución temporal de $\rho_0(x, t)$ partiendo de $\rho_{un}(x)$ para el caso $C = 0.1$, lo cual constituye una intensidad del ruido más bien grande (del orden del 2% de la velocidad media del electrón). Vemos que el acercamiento a $|\Psi(x, t)|^2$ ya es significativo tras una sola oscilación de la distribución.

Como ya hemos comentado, la función \bar{H} de Valentini es una medida de la diferencia entre una distribución arbitraria y la distribución cuántica, pero nosotros usaremos aquí la siguiente definición alternativa de la distancia entre estas dos distribuciones:

$$\chi_{\rho_0}^2(t) = \int |\rho(x, t) - |\Psi(x, t)|^2| dx. \quad (3.35)$$

En la Figura (3.2) presentamos los resultados para tres valores distintos de C , mostrando la evolución temporal de χ^2 para cada uno de ellos. Las

dos distribuciones iniciales consideradas ($\rho_{un}(x)$ y $\rho_q(x)$) evolucionan bajo la influencia del ruido aleatorio, motivo por el cual, incluso partiendo de $\rho_q(x)$, χ^2 es, en general, distinta de cero. Se han obtenido resultados similares con diferentes medidas de la diferencia entre distribuciones, en particular con la entropía relativa \bar{H} definida por Valentini ([96], [94], [95]).

Puede verse que $\chi_{\rho_{un}}^2$ decrece hasta alcanzar un valor mínimo, alrededor del cual se estabiliza. Este valor coincide (salvo fluctuaciones estadísticas originadas por el número finito de partículas en el colectivo) con el alcanzado por $\chi_{\rho_q}^2$. Este comportamiento se manifiesta en cada uno de los tres casos presentados, aunque el tiempo necesario para la estabilización de χ^2 es tanto más largo ($\tau = 60, 600$ y 6000 periodos) cuanto menor es el valor de C ($C = 0.01, 0.001, 0.00001$). También es importante observar que el valor asintótico de χ^2 disminuye a medida que lo hace el valor de C , lo cual indica que la distribución final de partículas se aproxima tanto más a $|\Psi(x, t)|^2$ cuanto menor es C . Este hecho se ilustra con las distribuciones mostradas en la parte derecha de la Fig.2. Puede verse que, al disminuir el ruido, χ^2 tiende a un valor asintótico distinto de cero, lo cual es principalmente (en un 90 %) debido al carácter finito del muestreo (5000 sistemas distribuidos en 200 subintervalos de la posición x), y, en mucha menor medida, a inevitables errores numéricos en la integración numérica de las ecuaciones de movimiento (realizada con un paso de tiempo $\Delta t = 1/500$ de periodo). De hecho, hemos verificado que para C igual cero el valor asintótico es igual a 0.20, muy próximo al valor obtenido para $C = 0.0001$. Procuraremos a continuación indagar en los motivos por los que observamos este tipo de comportamiento, para lo cual reescribimos la ecuación Bohmiana de movimiento como una ecuación Newtoniana de segundo orden para la aceleración [23]:

$$m\ddot{x}_i = -\nabla U_{cl} - \nabla U_{qu}, \quad (3.36)$$

donde U_{cl} es el potencial clásico y

$$U_{qu} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (3.37)$$

el potencial cuántico, definido del mismo modo que lo hicimos anteriormente.

En el caso de una partícula en un pozo de potencial, $U_{cl} = 0$, por lo que, aparte de por el ruido estocástico, el movimiento de las partículas está determinado por U_{qu} . Este potencial depende explícitamente del tiempo y diverge en los puntos nodales ($R = 0$), mientras que, en los puntos donde R es máxima, es prácticamente plano. En la ausencia de ruido, las trayectorias Bohmianas son las de una partícula clásica sometida al potencial dependiente del tiempo U_{qu} , con la condición adicional de que las velocidades iniciales (necesarias para la integración de (3.36)), sean las que determine la función de onda a través de (3.5).

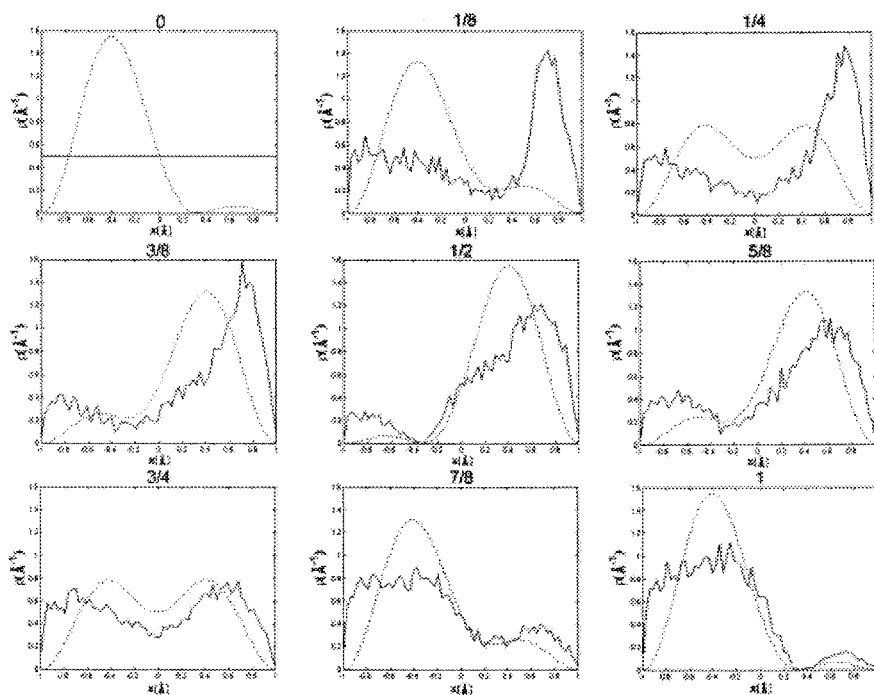


Figura 3.1: Evolución de la distribución de partículas durante la primera oscilación, para una distribución inicial uniforme sujeta a un ruido de intensidad $C = 0,1$ (línea continua) y la $|\psi(x)|^2$ correspondiente (línea discontinua). En la parte superior de cada recuadro se indica la fracción de periodo representada

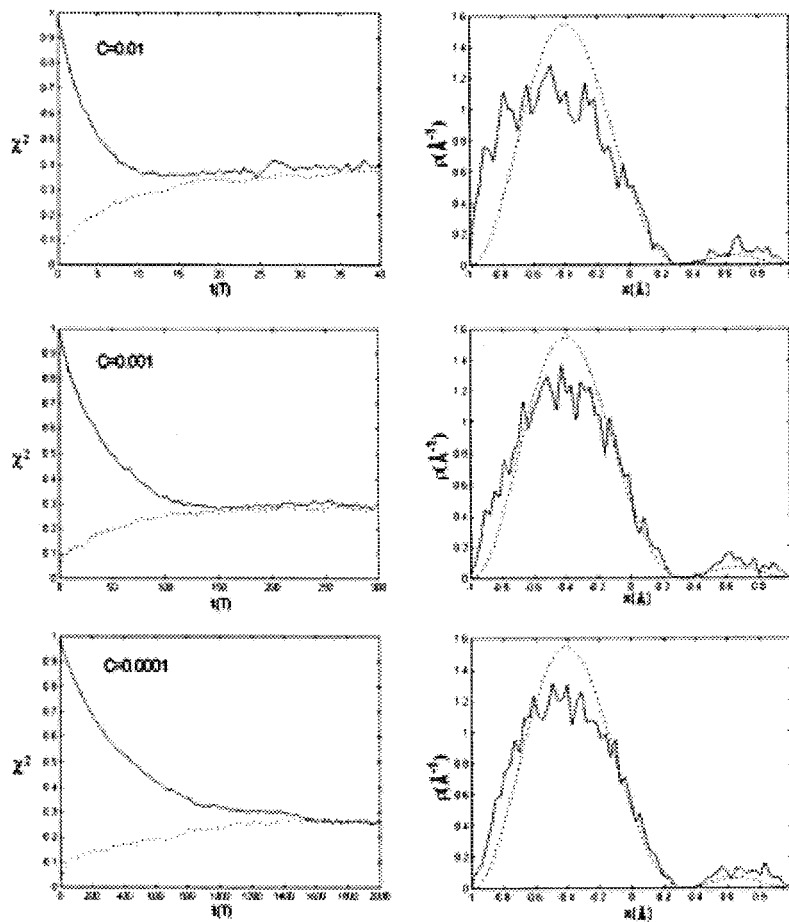


Figura 3.2: A la izquierda de esta figura, mostramos la evolución de $\chi_{\rho_{un}}(t)^2$ (línea continua) y de $\chi_{\rho_q}(t)^2$ (línea discontinua) para tres valores de C (0.01, 0.001, 0.0001). A la derecha, la distribución $\rho(x, \tau)$ habiendo partido de ρ_{un} (línea continua) para los tres valores de C en un instante determinado ($\tau = 60, 600, \text{ y } 6000$ respectivamente) es comparada con $|\psi(x, \tau)|^2$ (línea discontinua).

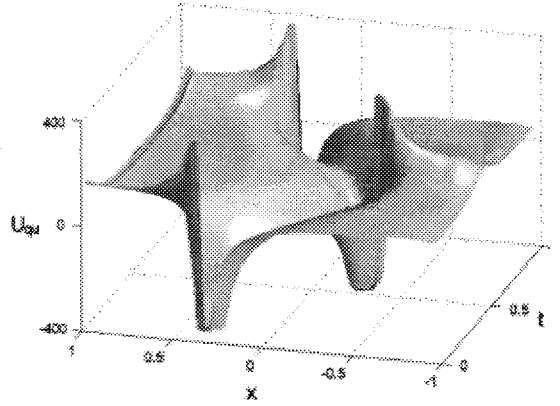


Figura 3.3: Mostramos el potencial periódico dependiente del tiempo $U_{qu}(x, t)$ (en eV) representado en función de x (en \AA). Obsérvense los picos en los nodos de la distribución cuántica.

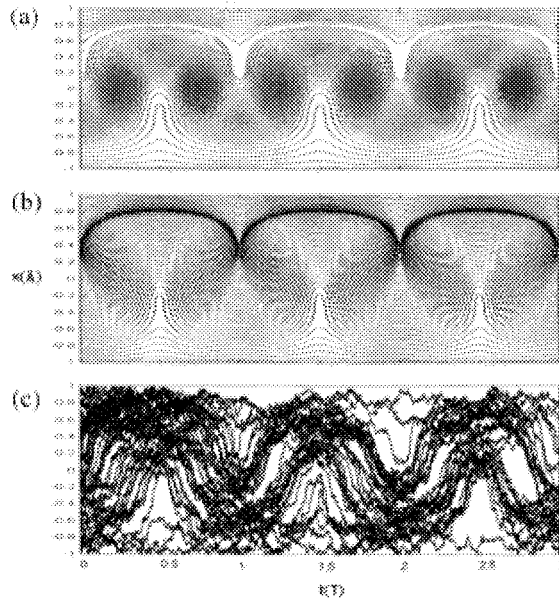


Figura 3.4: a): trayectorias de un conjunto de partículas inicialmente distribuidas según $|\Psi(x, t = 0)|^2$, sin la acción de ruido. b): trayectorias de un conjunto de partículas inicialmente uniformemente distribuidas $\rho_0 = \rho_{un} \equiv 1/L$, sin la acción de ruido. c): igual que en el caso anterior pero con la acción de un ruido estocástico (en este caso, $C = 1$).

En nuestro caso, en el que la combinación lineal que define Ψ contiene sólo dos autoestados (ver (3.34)), la densidad oscila en el tiempo con el periodo de Bohr $T = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$, por lo que tanto el potencial $U_{qu}(x, t)$ como las trayectorias son también periódicas (ver la figura (3.3) y la figura (3.4). En cuanto al comportamiento general de las trayectorias en sistemas monodimensionales, véase ([88], [33])). Las trayectorias que se encuentran próximas a un nodo son comprimidas y expandidas periódicamente por la rápida variación del potencial cuántico en estos puntos. Sin embargo, este fenómeno de compresión–expansión es muy suave para las trayectorias cercanas al máximo de R debido a que R aparece en el denominador de (3.37).

El efecto del ruido estocástico es el de romper el patrón periódico de las trayectorias (ver figura (3.4)) de forma muy efectiva, ya que cualquier pequeña perturbación en la coordenada durante la fase de compresión origina un cambio dramático en la posición en la fase sucesiva de expansión. El efecto neto de todos estos cambios en la trayectoria es un mayor tiempo de residencia alrededor de los máximos de R , produciendo una distribución de partículas parecida a $|\Psi|^2$ fuera cual fuese la distribución inicial. Vemos pues por qué la distribución $|\Psi|^2$ exhibe la estabilidad ante perturbaciones aleatorias que acabamos de mostrar (véase la Figura (3.2)).

Hemos comprobado que nuestros resultados no obedecen a una elección determinada del potencial o de la función de onda del sistema. Para ello, hemos efectuando los cálculos con distintos potenciales entre las paredes del pozo y con distintas combinaciones de autoestados, obteniendo siempre un comportamiento similar de la distribución de densidad. En el caso de un potencial parabólico, hemos analizado también la región clásicamente prohibida, es decir, la zona en la que el potencial clásico es mayor que la energía cinética media de la función de onda considerada, encontrando de nuevo que la distribución de densidad se aproxima a $|\Psi|^2$ a medida que disminuye la intensidad del ruido.

Se ha mostrado explícitamente la evolución hacia la distribución cuántica $|\Psi|^2$ de un sistema con una distribución inicial arbitraria, en el contexto de la mecánica Bohmiana. Se argumentó que este resultado no podía *en general* obtenerse a partir de la estricta aplicación del campo de velocidades Bohmiano, por lo que se ha recurrido a la inclusión de un término de ruido aleatorio en la expresión de la velocidad.

Por otro lado, hemos pretendido justificar que la consideración misma de la función de onda de un sistema supone la aparición ineludible de un ruido aleatorio, aparecido, cuando menos, en el proceso de la preparación del estado (3.2). Creemos pues que este ruido puede jugar el papel de mecanismo universal responsable de la evolución hacia $|\Psi|^2$ de cualquier sistema físico. Un control cuidadoso de las condiciones experimentales, destinado a determinar con precisión el estado del sistema, tan sólo podría contribuir a hacer pequeño el ruido, lo cual, como hemos visto, mejora la convergencia hacia la distribución de equilibrio.

Además, se ha establecido la *estabilidad* de $|\Psi|^2$ ante la aplicación del ruido, lo que parece en cualquier caso esencial para mantener la compatibilidad con la MCO si nos permitimos relajar, aunque sea mínimamente, la condición $\rho_0 = |\Psi|^2$ (por ejemplo, en el esquema de Valentini [111]). Sin embargo, queda también claro que la aplicación de un ruido de intensidad arbitrariamente grande no sólo no promueve la evolución de ρ hacia $|\Psi|^2$ sino que desvía de esta distribución a un sistema inicialmente distribuido según $|\Psi_0|^2$. Esto último parece contradecir el resultado obtenido por Bohm en su demostración, en la que recordamos que la convergencia se establecía para cualquier intensidad de la perturbación sobre el sistema.

Es cierto que los resultados presentados aquí se han establecido para un sistema muy concreto (una partícula monodimensional en un pozo). Desde luego, no es trivial generalizar estos resultados a sistemas más complejos, a pesar de que, como se menciona más arriba, se han comprobado también explícitamente para otros potenciales. Sin embargo, recordamos que el sistema elegido para establecer la convergencia hacia $|\Psi|^2$ no es precisamente el más favorable: como establecen los trabajos de Frisk [33] y Goldstein [88], esta convergencia es *imposible* para un sistema monodimensional sometido al campo de velocidades Bohmiano. De hecho, ya se mencionó que Valentini y Westman [111] pudieron establecer una relajación hacia la distribución cuántica de equilibrio, bajo la estricta guía del campo de velocidades Bohmiano, de un sistema bidimensional relativamente sencillo.

En definitiva, nos parece plausible que la distribución de probabilidad de un sistema cuántico *genérico* sometido al campo de velocidades Bohmiano modificado por un débil ruido estocástico derive hacia la distribución cuántica $|\Psi|^2$ independientemente de su configuración inicial. Este hecho, unido a la ubicuidad del ruido estocástico, permitiría abandonar el postulado de las condiciones iniciales en la mecánica Bohmiana. En el contexto general de la teoría cuántica, podríamos afirmar que la mecánica Bohmiana permite *derivar* la regla de Born (la interpretación probabilística del módulo de la función de onda), en lugar de postularla, como ocurre con otras interpretaciones.

En cualquier caso, resaltamos que hay que considerar esta hipótesis con la debida reserva, y que sería interesante establecer un resultado más general. En esta línea, puede investigarse la cuestión genérica de las soluciones no triviales de la ecuación de Fokker-Planck *sin velocidad de arrastre*:

$$\frac{\partial P(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_B P(\vec{x}, t)) = \frac{D}{2} \nabla^2 P(\vec{x}, t), \quad (3.38)$$

donde \vec{v}_B es el campo de velocidades de Bohm y D es un coeficiente de difusión *arbitrario* (aunque pequeño). Estas soluciones establecerían el comportamiento de distribuciones genéricas de probabilidad en un campo de velocidades Bohmiano con un ruido estocástico arbitrario, sin recurrir a una forma predeterminada de la velocidad de arrastre y del coeficiente de di-

fusión. De hecho, el resultado presentado en la sección anterior puede interpretarse precisamente como una integración numérica de la ecuación (3.38) para un caso particular.

Capítulo 4

Resumen y conclusiones

- Se ha abordado en esta tesis el proceso de medida de un sistema cuántico, centrándonos en dos aspectos bien diferenciados: (i) el establecimiento de la correlación necesaria entre el sistema medido y el aparato de medida, y (ii) la singularización de un único resultado. Como caso paradigmático, se ha emprendido el estudio del movimiento de una partícula neutra en un campo magnético inhomogéneo (experimento de Stern–Gerlach). En este contexto, el “sistema cuántico” S medido lo constituye el espín de la partícula, mientras que su posición A hace las veces de “puntero del aparato de medida”, de acuerdo con las anteriores consideraciones. El dispositivo experimental que eventualmente permitirá establecer una correlación entre estos sistemas lo constituye el campo magnético \vec{B} .
- Se ha integrado numéricamente la ecuación de Schrödinger exacta con un campo magnético realista, y se han descrito de esta forma fenómenos ausentes de la descripción que de este proceso se da en los libros de texto, tales como la focalización y el spin–flip. Estos efectos se han analizado desarrollando varias aproximaciones analíticas a la función de onda, haciendo uso del concepto de estados coherentes internos (CIS) [39], [40]. La bondad de cada una de estas aproximaciones ha sido explícitamente estudiada, comparándolas con el resultado numérico exacto.
- A partir del formalismo de la matriz M y de los CIS se ha descrito de forma compacta y continua el proceso dinámico de correlación entre los CIS (proyecciones del espín en la dirección local del campo) y la posición en el contexto de la MCO. Se ha mostrado que esta correlación se establece de forma paulatina, a partir de un estado inicial para el que, *desde el punto de vista de la MCO*, no existe relación alguna entre espín y posición. Se ha propuesto a partir de estas consideraciones un esquema de tomografía de espín que permite determinar, con una sola

orientación del campo magnético, la polarización del haz de partículas. Se muestra también cómo un haz de polarización conocida puede utilizarse para determinar la estructura de un campo magnético.

- Se han obtenido las trayectorias de Bohm correspondientes al problema de la partícula en el campo magnético, comparándolas con las trayectorias semiclásicas. Se muestra que estas trayectorias no presentan rasgos de comportamiento caótico, pudiéndosele asignar de forma consistente un espín a cada partícula según su posición inicial.
- Se ha investigado la convergencia a la distribución cuántica $|\Psi|^2$ de una distribución arbitraria de probabilidad en el marco de la Mecánica Bohmiana. Se argumenta que la propiedad de mezcla es esencial para conseguir dicha convergencia, mostrando algunas deficiencias de intentos anteriores en este sentido.
- Se ha propuesto un mecanismo universal de introducción de ruido estocástico en la expresión de las velocidades de Bohm. Se ha mostrado explícitamente cómo de esta forma se obtiene la convergencia de una distribución uniforme de partículas a la distribución cuántica $|\Psi|^2$ en un sistema sencillo pero especialmente conflictivo.

Apéndice A

Efectos de borde

La relevancia de los efectos de borde en el experimento de Stern–Gerlach ha sido estudiada por Bohm en [14], donde considera que estos efectos suponen tener en cuenta que el hamiltoniano varía a medida que el haz va penetrando (o saliendo) del imán, por lo cual el problema planteado es el de resolver la ecuación de Schrödinger para un hamiltoniano dependiente del tiempo [14]:

$$H(t) = \frac{p^2}{2M} + V(\vec{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

La dependencia de V con el tiempo describe el paso del haz de la zona donde el campo magnético es nulo (fuera del imán) al interior del imán, donde el campo se ha estabilizado hasta alcanzar su estructura definitiva.

Podemos definir los autoestados *instantáneos* del hamiltoniano para un tiempo t' determinado:

$$H(t')\phi_n(\vec{r}, t') = E_n(t')\phi_n(\vec{r}, t'), \quad (\text{A.2})$$

y expresar la función de onda en términos de esta base:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n C_n(t)\phi_n(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t) dt}. \quad (\text{A.3})$$

La ecuación de Schrödinger para $\Psi(\vec{r}, t)$ es:

$$\sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t) dt} \left(\dot{C}_n \phi_n + C_n \dot{\phi}_n - \frac{i}{\hbar} E_n C_n \phi_n \right) = \sum_n E_n C_n \phi_n e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t) dt}. \quad (\text{A.4})$$

Si proyectamos sobre la base de los ϕ_n , obtenemos la ecuación diferencial para la variación de los coeficientes C_n [14]:

$$\dot{C}_n = \sum_k C_k \langle \phi_k | \dot{\phi}_n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_n(t) - E_k(t)) dt}. \quad (\text{A.5})$$

Ahora bien, derivando la ecuación (A.2), obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle + H|\dot{\phi}_n\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial t}|\phi_n\rangle + E_n|\dot{\phi}_n\rangle, \quad (\text{A.6})$$

y, proyectando sobre $|\phi_k\rangle$:

$$\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle + \langle\phi_k|H|\dot{\phi}_n\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial t}\delta_{kn} + E_n\langle\phi_k|\dot{\phi}_n\rangle. \quad (\text{A.7})$$

En definitiva, para $n \neq k$:

$$\langle\phi_k|\dot{\phi}_n\rangle = \frac{\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle}{E_n - E_k}. \quad (\text{A.8})$$

Si suponemos las condiciones iniciales $C_k(0) = \delta_{nk}$ y que la variación temporal del hamiltoniano es pequeña (esto se justificará más adelante), podemos estimar a partir de (A.5) el orden de magnitud de la amplitud correspondiente a un autoestado $k \neq n$ [14]:

$$C_k \approx -i\hbar \frac{\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle}{(E_n - E_k)^2}. \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, si $\hbar\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle \ll (E_n - E_k)^2$, los autoestados instantáneos del hamiltoniano no se mezclan, y la consideración del efecto de borde supone simplemente tener en cuenta la fase “acumulada” $\exp(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t) dt)$ durante el paso por los extremos del imán. Esta relación supone que el tiempo característico de variación del hamiltoniano sea mucho mayor que el periodo $\hbar/(E_n - E_k)$ de la transición entre los estados n y k . Veamos que, efectivamente, se cumple esta condición. Estimamos primero la magnitud del término $\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle$ como la relación entre la magnitud de la energía potencial una vez estabilizado el campo y el tiempo que tarda el haz en cruzar la zona en la que el efecto de borde es apreciable. Para ello es necesario introducir la velocidad v_y del movimiento del haz en la dirección del eje del imán, que hasta ahora no había jugado ningún papel en la descripción del experimento. En cuanto a la dimensión Δy del “borde” del imán, puede tomarse del orden de la longitud característica de la inhomogeneidad del campo magnético: $\Delta y \approx B_0/B_1$. Así pues:

$$\hbar\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle \approx \frac{\hbar\mu_0 B_0 v_y}{\Delta y} \approx \hbar\mu_0 B_1 v_y. \quad (\text{A.10})$$

En el caso que nos ocupa, la diferencia de energía $(E_n - E_k)$ entre los dos estados de espín es del orden de $\mu_0 B_0$, por lo que la condición de validez de nuestro análisis será:

$$\hbar \frac{\langle\phi_k|\frac{\partial H}{\partial t}|\phi_n\rangle}{(E_n - E_k)^2} \approx \frac{\hbar B_1 v_y}{\mu_0 B_0^2} \ll 1. \quad (\text{A.11})$$

Si consideramos las condiciones experimentales descritas en [59], obtenemos:

$$\frac{\hbar B_1 v_y}{\mu_0 B_0^2} \approx 10^{-4}. \quad (\text{A.12})$$

A la vista de este resultado, parece justificado despreciar los efectos de borde.

Apéndice B

Evolución libre

En general, estaremos interesados en el estado de las partículas del haz después de un tiempo de deriva t_d . Veremos pues en esta sección cómo resolver analíticamente la evolución libre de una función de onda expresada en términos de las autofunciones del oscilador armónico. Consideremos primero el caso monodimensional, por lo que partimos de una función de onda inicial:

$$\Psi_0(x) = \sum_n a_n \phi_n(x),$$

siendo $\phi_n(x)$ la autofunción del orden n del oscilador armónico. Pasamos ahora a la representación de momentos, para lo cual tenemos en cuenta la sencilla relación existente entre las autofunciones del oscilador armónico en las representaciones de posición y momentos:

$$\tilde{\phi}_n(p) = (i^n) \phi_n(p), \quad (\text{B.1})$$

de manera que:

$$\tilde{\Psi}_0(p) = \sum_n a_n (i^n) \phi_n(p).$$

En esta representación, el operador de evolución libre es simplemente:

$$\mathbf{U}_0 = \exp\left(-i \frac{Ap^2 t}{2}\right),$$

con lo cual, tras un tiempo t , la función de onda es:

$$\tilde{\Psi}(p, t) = \sum_n a_n (i^n) \phi_n(p) \exp\left(-i \frac{Ap^2 t}{2}\right). \quad (\text{B.2})$$

Necesitamos ahora volver al espacio de posiciones. Para ello, reescribimos la función de onda a partir de la expresión de $\phi_n(p)$ en función de los polinomios de Hermite $H_n(p)$:

$$\phi_n(p) = K_n \exp(-p^2/2) H_n(p), \quad (\text{B.3})$$

con

$$K_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}}. \quad (\text{B.4})$$

A partir de (B.3), la función de onda (B.2) queda:

$$\tilde{\Psi}(p, t) = \sum_n a_n(i^n) K_n H_n\left(\frac{p}{\eta}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2\eta^2}\right), \quad (\text{B.5})$$

donde hemos definido una anchura en momentos dependiente del tiempo:

$$\eta^2 = \frac{1}{1 + iAt}.$$

Para expresar (B.5) como una combinación de funciones de oscilador, queda conocer la expresión de $H_n\left(\frac{p}{\eta}\right)$ en función de los $H_n(p/\eta)$ o, de forma más general, cómo se reescalan los polinomios de Hermite $H_n(\lambda x)$ en función de los $H_n(x)$. Para ello, partimos de la función generatriz de los polinomios de Hermite:

$$\exp(-s^2 + 2sx) = \sum_m \frac{s^m}{m!} H_m(x). \quad (\text{B.6})$$

Efectuando en la expresión anterior las sustituciones:

$$s \longrightarrow s/\lambda, \quad x \longrightarrow \lambda x,$$

obtenemos:

$$\exp\left(-\frac{s^2}{\lambda^2} + 2sx\right) = \sum_n \frac{(s/\lambda)^n}{n!} H_n(\lambda x). \quad (\text{B.7})$$

Dividiendo (B.7) entre (B.6) :

$$\exp(s^2(1 - 1/\lambda^2)) \sum_m \frac{s^m}{m!} H_m(x) = \sum_n \frac{(s/\lambda)^n}{n!} H_n(\lambda x).$$

Desarrollamos la exponencial en serie de potencias de Taylor:

$$\sum_k \frac{s^{2k} (1 - 1/\lambda^2)^k}{k!} \sum_m \frac{s^m}{m!} H_m(x) = \sum_n \frac{(s/\lambda)^n}{n!} H_n(\lambda x). \quad (\text{B.8})$$

El resultado deseado se obtiene igualando, en la expresión anterior, los coeficientes de las distintas potencias de s :

$$H_n(\lambda x) = \lambda^n \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{m!(n-2m)!} (1 - 1/\lambda^2)^m H_{n-2m}(x), \quad (\text{B.9})$$

donde la expresión $[n/2]$ designa la parte entera de $n/2$. En nuestro caso, $\lambda = \eta$ y $x = \frac{p}{\eta}$. Si sustituimos (B.9) en (B.5), obtenemos el desarrollo buscado de la función de onda en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(p, t) &= \sum_n a_n (i^n) K_n \eta^n \\
&\quad \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n!}{m!(n-2m)!} (1 - \eta^{-2})^m H_{n-2m}(p/\eta) \exp\left(-\frac{p^2}{2\eta^2}\right) \\
&= \sum_n a_n (i^n) K_n \eta^n \\
&\quad \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n!}{K_{n-2m} m!(n-2m)!} (1 - \eta^{-2})^m \phi_{n-2m}(p/\eta). \quad (B.10)
\end{aligned}$$

A partir de (B.1), podemos escribir (B.10) en el espacio de posición:

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= \sum_n a_n K_n \eta^n \\
&\quad \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n!}{K_{n-2m} m!(n-2m)!} (1 - \eta^{-2})^m \phi_{n-2m}(x\eta). \quad (B.11)
\end{aligned}$$

El caso bidimensional se trata de forma totalmente análoga teniendo en cuenta que, según (2.17), hemos de considerar un producto de funciones de oscilador monodimensionales. Presentamos el resultado a continuación, donde se han sustituido las constantes de normalización K_n por sus valores dados en (B.4) y hemos definido la anchura dependiente del tiempo:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\eta^2} = 1 + iAt. \quad (B.12)$$

En definitiva, la expresión final del desarrollo en autofunciones de oscilador de la función de onda libre es:

$$\begin{aligned}
\Psi(x, z, t) &= \sum_{nm} a_{nm} \sqrt{n!m!} \tilde{\sigma}^{-n-m-1} \\
&\quad \sum_{p=0}^{[n/2]} i^{2p} \sqrt{\frac{1}{2^{2p}(n-2p)!}} \frac{(1 - \tilde{\sigma}^2)^p}{p!} \phi_{n-2p}(x/\tilde{\sigma}) \\
&\quad \sum_{q=0}^{[m/2]} i^{2q} \sqrt{\frac{1}{2^{2q}(m-2q)!}} \frac{(1 - \tilde{\sigma}^2)^q}{q!} \phi_{m-2q}(z/\tilde{\sigma}). \quad (B.13)
\end{aligned}$$

De este modo, dados los coeficientes $a_{nm}(t)$, $b_{nm}(t)$ del desarrollo del espinor a la salida del imán (ya sea como resultado de haber aplicado el

algoritmo numérico de cálculo o de haber descompuesto alguna de las expresiones analíticas aproximadas en términos de la base de oscilador); la expresión (B.13) representa el espinor después de haber derivado un tiempo cualquiera en la zona libre de campo.

Apéndice C

Conservación de I_B

El tratamiento clásico del experimento de Stern–Gerlach en los libros de texto se basa esencialmente en considerar que la proyección del espín a lo largo del eje z fijo es una constante del movimiento. Para justificar este hecho, algunos textos consideran simplemente que el campo magnético tiene precisamente esa dirección, lo cual es incompatible con la existencia de una inhomogeneidad a lo largo de ese mismo eje. Otros textos argumentan que el efecto de una pequeña componente x transversal inhomogénea en el campo magnético será hacer que el espín preceda alrededor del eje z dominante, de manera que la proyección a lo largo del eje x se anulará al promediar sobre muchas oscilaciones.

Nosotros hemos presentado aquí un argumento similar para justificar la conservación del espín en la dirección de \vec{B} . De acuerdo con esta hipótesis, si $A \ll 1$ y $S \gg 1$ despreciamos los operadores de traza nula que no conmutaran con I_B en las expresiones aproximadas del operador de evolución. Nos proponemos ahora justificar esta práctica de forma más rigurosa.

Seguiremos la estrategia de incluir la acción de los términos del operador de evolución que no conmuten con I_B en la forma de una integral a lo largo del tiempo de interacción. A continuación comprobaremos que estos términos producen contribuciones rápidamente oscilantes del integrando, de manera que podrán despreciarse en las condiciones consideradas.

Empezaremos por demostrar la siguiente relación genérica válida para dos operadores A y B que no conmutan:

$$e^{A+B} = e^B \left[\int_0^1 g(x) e^{-Bx} e^{1/2[A,B]} e^{Bx} dx \right] e^A, \quad (\text{C.1})$$

o, equivalentemente:

$$e^{-B} e^{A+B} e^{-A} \approx \int_0^1 g(x) e^{-Bx} e^{1/2[A,B]} e^{Bx} dx, \quad (\text{C.2})$$

siendo $g(x)$ una función por determinar y $[A, B]$ el conmutador de los dos

operadores. Tanto en la expresión anterior como en el resto de este apéndice, el signo \approx significará estrictamente “igual hasta el primer orden en A ”.

C.1. Desarrollo de las exponenciales

Desarrollamos en serie de potencias la parte izquierda de (C.2):

$$\begin{aligned}
 e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \approx \\
 &\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k B^{k-m} A B^m \right) \\
 e^{-B} e^{A+B} &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{B^{n+k}}{k!} + \right. \\
 &\left. \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k B^{n+k-m} A B^m \right) \\
 e^{-B} e^{A+B} e^{-A} &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{B^{n+k}(1-A)}{k!} + \right. \\
 &\left. \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k B^{n+k-m} A B^m \right). \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

La última expresión puede simplificarse considerando la relación siguiente, válida para cualquier función $f(n+k)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! k!} f(n+k) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f(p)}{p!} \sum_{n=0}^p \frac{p!}{n!(p-n)!} (-1)^n 1^{p-n},$$

donde hemos tomado $p = n+k$. El último sumatorio es el desarrollo del binomio de Newton para $(1-1)^p = \delta(p)$, con lo cual:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! k!} f(n+k) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f(p)}{p!} \delta(p) = f(0). \tag{C.4}$$

Este resultado nos permite reescribir el primer término de (C.3), de forma que nos queda:

$$e^{-B} e^{A+B} e^{-A} \approx 1 - A + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(k+1)!} \sum_{m=0}^k B^{n+k-m} A B^m. \tag{C.5}$$

Nos será útil relacionar los desarrollos en potencias de *operadores* con desarrollos en potencias de *conmutadores*, para lo cual disponemos de la

relación:

$$[B_N, A] = \sum_{n=0}^N (-1)^{N-n} \binom{N}{n} B^n A B^{N-n}, \quad (\text{C.6})$$

donde hemos introducido la siguiente notación para los conmutadores múltiples:

$$[B_N, A] \equiv \underbrace{[B, [B \cdots, [B, A] \cdots]]}_N. \quad (\text{C.7})$$

Con el objetivo de obtener la relación con los conmutadores múltiples, reescribimos la suma en (C.5) tomando $N = n + k$:

$$e^{-B} e^{A+B} e^{-A} \approx 1 - A + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{N-m} \frac{(-1)^n}{n!(N-n+1)!} B^{N-m} A B^m. \quad (\text{C.8})$$

Necesitamos a continuación realizar la suma en n , para lo cual demostraremos a continuación que

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{N-m} \frac{(-1)^n}{n!(N-n+1)!}}_{P_m} = \underbrace{\frac{1}{N+1} \frac{(-1)^{N-m}}{m!(N-m)!}}_{Q_m}. \quad (\text{C.9})$$

Veamos primero que $P_0 = Q_0$:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{(-1)^N}{(N+1)!} \\ P_0 &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!(N-n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{N+1} \frac{(-1)^n}{n!(N-n+1)!} - \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\sum_{n=0}^{N+1} \frac{(-1)^n}{n!(N-n+1)!} = \frac{1}{(N+1)!} (1-1)^{N+1} = 0, \quad (\text{C.10})$$

de manera que, finalmente:

$$P_0 = -\frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{(-1)^N}{(N+1)!} = Q_0. \quad (\text{C.11})$$

La demostración de (C.9) se completa mostrando que la regla inductiva que genera los P_m y los Q_m es idéntica, es decir,

$$P_{m+1} - P_m = Q_{m+1} - Q_m; \quad \forall m.$$

En efecto, un cálculo sencillo muestra que

$$P_{m+1} - P_m = \frac{(-1)^{N-m-1}}{(m+1)!(N-m)!} = Q_{m+1} - Q_m,$$

Con lo que queda demostrado el resultado (C.9), y podemos reescribir (C.8):

$$\begin{aligned} e^{-B} e^{A+B} e^{-A} &\approx \\ 1 - A + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{1}{N+1} \frac{(-1)^{N-m}}{m!(N-m)!} B^{N-m} A B^m &= \\ 1 - A + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{(-1)^{N-m}}{(N+1)!} \binom{N}{m} B^{N-m} A B^m. &\quad (C.12) \end{aligned}$$

Comparando con (C.6), tenemos finalmente:

$$e^{-B} e^{A+B} e^{-A} \approx 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N+1)!} [B_N, A] \quad (C.13)$$

C.2. Desarrollo del integrando

A continuación desarrollaremos el integrando de (C.2) para compararlo con la expresión (C.13) que acabamos de obtener, demostrando así la igualdad (C.2) obteniendo explícitamente la función $g(x)$.

Como hasta ahora, seguimos considerando las expresiones hasta el primer orden en A , de manera que las exponenciales del integrando quedan:

$$\begin{aligned} e^{-Bx} e^{1/2[A,B]} e^{Bx} &\approx \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{2}[A, B] \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} x^{n+k} &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!k!} \left(B^{n+k} + \frac{1}{2} B^n [A, B] B^k \right) x^{n+k}. &\quad (C.14) \end{aligned}$$

El resultado (C.4) puede utilizarse para simplificar el primer término, mientras que el segundo término puede reescribirse en función de $N = n + k$:

$$\begin{aligned} e^{-Bx} e^{1/2[A,B]} e^{Bx} &\approx \\ 1 + \frac{1}{2} \sum_{N=0}^{\infty} x^N \sum_{n=0}^N \frac{1}{N!} \binom{N}{n} (-1)^n B^n [A, B] B^{N-n}. &\quad (C.15) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (C.6), podemos relacionar esta expresión con el conmutador múltiple $[B_N, [A, B]] = -[B_{N+1}, A]$, obteniendo al fin:

$$\begin{aligned} e^{-Bx} e^{1/2[A,B]} e^{Bx} &\approx \\ 1 + \frac{1}{2} \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N [B_N, A] x^{N-1}. &\quad (C.16) \end{aligned}$$

Sólo queda determinar la función $g(x)$, comparando (C.16) con (C.13) a través de (C.2) e igualando los coeficientes de los conmutadores $[B_N, A]$. No es difícil comprobar que

$$g(x) = 2(1 - x),$$

y el resultado definitivo es:

$$e^{A+B} \approx 2e^B \left[\int_0^1 (1-x) e^{-Bx} e^{1/2[A,B]} e^{Bx} dx \right] e^A. \quad (\text{C.17})$$

Esta expresión es válida hasta primer orden en A y a todos los órdenes en B . Además, es exacta si A y B conmutan.

C.3. Aplicación al Stern–Gerlach

Nos interesaremos aquí por el caso concreto en el cual los operadores A y B de la expresión (C.17) sean el término cinético y potencial respectivamente del hamiltoniano del problema del Stern–Gerlach, es decir, $A \equiv -i\hbar_0$ y $B \equiv -iv$. En definitiva, podemos aproximar el operador de evolución de nuestro problema *hasta el primer orden en la energía cinética* (es decir, en el primer orden en el parámetro adiabático A) por la expresión:

$$e^{-i(h_0+v)} \approx e^{-iv} \left[1 + \int_0^1 (1-t) e^{ivt} [h_0, v] e^{-ivt} dt \right] e^{-ih_0}. \quad (\text{C.18})$$

Sabemos que el conmutador $[h_0, v]$ puede separarse en un término que conmuta con I_B y, por lo tanto, conserva el espín en la dirección de \vec{B} , y otro término que intercambia los espines en la dirección del campo (véase (2.35)). A partir de su expresión explícita y tras un poco de cálculo, podemos escribir:

$$e^{-i(h_0+v)} \approx e^{-iv} \left(1 + i \frac{AS}{2} p_\rho I_B + i \frac{AS^2}{24} - i \frac{AS}{2\rho} \int_0^1 (1-t) e^{ivt} C e^{-ivt} dt \right) e^{-ih_0}, \quad (\text{C.19})$$

donde hemos llamado C al anticonmutador $\{p_\beta, I_T\}$, que constituye el término de intercambio de espines al que hemos hecho mención. De hecho, puede comprobarse fácilmente el efecto de la acción de este operador sobre una función de onda $\phi(\rho, \beta)|m_B\rangle$ con una proyección definida del espín en la dirección de \vec{B} :

$$C\phi(\rho, \beta)|m_B\rangle = \frac{\partial \phi(\rho, \beta)}{\partial \beta} | -m_B \rangle. \quad (\text{C.20})$$

No es difícil reconocer en (C.19), desarrollados hasta el primer orden en el parámetro A , los términos correspondientes a los desarrollos analíticos del

operador de evolución que hemos presentado en esta trabajo. Encontramos el término proporcional a p_ρ asociado al desplazamiento de la función de onda, así como la misma fase global constante. Sin embargo, el término que incluye el operador C no se encuentra en aquellos desarrollos, ya que representa precisamente la contribución que despreciamos explícitamente (véase (2.2.1)). Queremos por lo tanto comprobar las condiciones en las que esta contribución es pequeña.

Para ello basta recordar que el operador e^{-ivt} actuando sobre un estado con proyección m_B del espín en la dirección de \vec{B} supone la multiplicación por un factor de fase $e^{im_B\rho St}$. Por lo tanto si, tras la acción de este operador, actuamos sucesivamente con el operador C tal como se indica en (C.20) y de nuevo con e^{ivt} , el integrando contará con el factor oscilante $e^{2im_B\rho St}$. Si estas oscilaciones son muy rápidas, el integrando se hará despreciable y podremos prescindir de él, justificando así el tratamiento hecho en (2.2.1).

A la vista de estos resultados, parece estar justificado prescindir en el operador de evolución de los términos que no conservan el espín en la dirección del campo en las situaciones siguientes (y siempre que el parámetro A sea pequeño): (i) Cuando el parámetro S es grande, es decir, cuando el impulso ejercido por el campo magnético es mucho mayor que la anchura inicial en momentos de la función de onda (recordemos que esta condición es necesaria si queremos que las distintas proyecciones del espín se separen espacialmente). (ii) Si la función de onda se encuentra inicialmente muy alejada del punto $(0, 0, z_0)$ en el que se anula el campo. En este caso, la variable ρ será típicamente grande, y también lo será la fase del integrando de (C.19). En este límite, la situación se acerca a la imagen simplificada en la que el campo magnético es paralelo a una dirección fija en la región del espacio subtendida por la función de onda.

Bibliografía

- [1] The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics (N. Graham and B. DeWitt, eds.), Princeton University Press, 1973.
- [2] Quantum Theory without Reduction (M. Cini y J.-M. Lévy-Leblond, ed.), Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [3] V. Allori, *Decoherence and the Classical Limit of Quantum Mechanics*, Ph.D. thesis, University of Genova, 2001.
- [4] D.M. Appleby, *Generic Bohmian trajectories of an isolated particle*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9905003. (1999).
- [5] L. Hackermüller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger y M. Arndt, *Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation*, Nature **427** (2004), 711–714.
- [6] F.Borondo A.S.Sanz, *A Bohmian view on quantum decoherence*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0310096. (2003).
- [7] G. Auletta, *Foundations and interpretation of quantum mechanics in the light of a critical-historical analysis of the problems and of a synthesis of the results*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [8] B. d’Espagnat, *Veiled Reality*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1995.
- [9] G. Bacciagaluppi, *Nelsonian Mechanics Revisited*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9811040 (1998).
- [10] J.M. Lévy-Leblond y F. Balibar, *Quantics*, North Holland, 1990.
- [11] J. S. Bell, *On the impossible pilot wave*, Foundations of Physics **12** (1982), 989–999, reproducido en [13].
- [12] ———, *Sixty-two years of uncertainty*, New York, 1990.
- [13] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1987.

- [14] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1951.
- [15] N. H. D. Bohr, *Essays 1958-1962 on Atomic physics and human knowledge*, Vintage, New York, 1966.
- [16] M. Born, *My Life: Recollections of a Nobel Laureate*, Scribner, New York, 1978.
- [17] D.M. Brink, *Semi-Classical Methods for Nucleus-Nucleus Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [18] J. Bub, *Interpreting the quantum world*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [19] Adán Cabello, *Bibliographic Guide to the Foundations of Quantum Mechanics and Quantum Information*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov quant-ph/0012089.
- [20] G. Potel, F. Barranco, S. Cruz Barrios y J. Gómez Camacho, *Quantum mechanical description of Stern-Gerlach experiments*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0409206 (2005), Aceptado en Physical Review A.
- [21] R. Clifton, Symposium on the Foundations of Modern Physics 1994 70 Years of Matter Waves (K. V. L. et al., ed.), Éditions Frontières, Paris, 1995, pp. 45–60.
- [22] M.O.Terra Cunha, *What is surrealist about Bohm trajectories?*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9809006. (1998).
- [23] D.Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*, Physical Review **85** (1952), no. 2, 166.
- [24] ———, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II*, Physical Review **85** (1952), no. 2, 180.
- [25] ———, *Proof that probability density approaches $|\psi|^2$ in causal interpretation of the quantum theory*, Phys. Rev. **89** (1953), no. 2, 458.
- [26] J.P.Vigier D.Bohm, *Model of causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations*, Physical Review **96** (1954), no. 1, 208.
- [27] L. de Broglie, *La nouvelle dynamique des quanta, Electrons et Photons: Rapports et Discussions du Cinquième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 24 au 29 octobre 1927 sous les Auspices de l'Institut International de Physique Solvay*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

- [28] B. DeWitt, *The many-universes interpretation of quantum mechanics*, in Graham and DeWitt [1].
- [29] E. Nelson, *Physical Review* **150** (1966), 1079.
- [30] H. Everett, *Review of Modern Physics* **29** (1957), no. 3, 454, reproducido en [1].
- [31] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F.Laloë, *Mécanique Quantique*, Hermann, Paris, 1997.
- [32] M. Frasca, *Stern-gerlach experiment and bohm limit*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0402072 (2004).
- [33] H. Frisk, *Properties of the trajectories in bohmian mechanics*, *Physics Letters A* **227** (1997), 139–142.
- [34] A. Bassi y G.C. Ghirardi, *A general argument against the universal validity of the superposition principle*, *Physics Letters A* **275** (2000), 373–381.
- [35] E. Deotto y G. C. Ghirardi, *Bohmian Mechanics Revisited*, *Foundations of Physics* **28** (1998), 1.
- [36] L. Fonda y G. C. Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, M. Dekker, New York, 1970.
- [37] S. Banerjee y R. Ghosh, *Quantum Theory of a Stern-Gerlach System in Contact with a Linearly Dissipative Environment*, *Physical Review A* **62** (2000).
- [38] A. M. Gleason, *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*, *J. Math. Mech.* **6** (1957), 885.
- [39] S. Cruz-Barrios y J. Gómez-Camacho, *Semiclassical description of scattering with internal degrees of freedom*, *Nuclear Physics A* (1998), 70–84.
- [40] ———, *Semiclassical description of Stern-Gerlach experiments*, *Physical Review A* **63** (2000), 012101.
- [41] N. Graham, *The measurement of relative frequency*, in Graham and DeWitt [1].
- [42] R. B. Griffiths, *Journal of Statistical Physics* **36** (1984), 219.
- [43] ———, *Foundations of Physics* **23** (1993), no. 12, 1601.
- [44] ———, *Physical Review A* **54** (1996), no. 4, 2759.

- [45] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond y S. Haroche, *Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement*, Physical Review Letters **77** (1996), no. 24, 4887–4890.
- [46] H.D.Zeh, *Why Bohm’s quantum theory?*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9812059. (1999).
- [47] Ch.Helm H.Geiger.G.Obermair, *Classical behavior of many-body systems in Bohmian quantum mechanics*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9906082. (1999).
- [48] _____, *Quantum mechanics without statistical postulates*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9905068. (1999).
- [49] D. Bohm y B. J. Hiley, *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory*, Routledge & Kegan Paul, London, 1993.
- [50] H.M.Wiseman, *Bohmian analisis of momentum transfer in welcher weg measurements*, Physical Review A **58** (1998), no. 3, 1740.
- [51] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [52] J.B.Keller, *Bohm’s interpretation of the quantum theory in terms of the “hidden” variables*, Physical Review **89** (1953), no. 5, 1040.
- [53] E. Joos, *Elements of environmental decoherence*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9908008. (1999).
- [54] A. Kent, *Remarks on Consistent Histories and Bohmian Mechanics*, Bohmian Mechanics and Quantum Theory: An Appraisal (J. Cushing, A. Fine y S. Goldstein, ed.), Kluwer Academic Press, 1996.
- [55] _____, *Against Many-Worlds Interpretations*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9703089. (1997).
- [56] F. Dowker y A. Kent, *Properties of Consistent Histories*, Physical Review Letters **75** (1995), 3038–3041.
- [57] _____, *On the Consistent Histories Approach to Quantum Mechanics*, Journal of Statistical Physics **82** (1996), 1575–1646.
- [58] F. Laloë, *Do we really understand quantum mechanics? strange correlations, paradoxes, and theorems*, American Journal of Physics **69** (2001), no. 6, 655–701.

- [59] J. Porter, R. F. Pettifer y D. R. Leadley, *Direct demonstration of the transverse sterngerlach effect*, American Journal of Physics **71** (2003), no. 11, 1103–1108.
- [60] L. D. Landau y E.M. Lifschitz, *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*, 3 ed., Pergamon Press, New York, 1977.
- [61] J. Hartle M. Gell-mann, *Complexity, Entropy, and the Physics of Information* (Redwood City) (W. H. Zurek, ed.), Addison-Wesley, 1991, pp. 425–458.
- [62] ———, Physical Review D **47** (1993), no. 8, 3345.
- [63] M. Gell mann y J. Hartle, *Proceedings of the 3rd International Symposium on the Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology* (Tokio) (S. Kobayashi, H. Ezawa, S. Nomuray Y. Murayama, ed.), Physical Society of Japan, 1990, pp. 321–343.
- [64] ———, *Proceedings of the 25th International Conference on High Energy Physics* (Singapore) (Y. Yamaguchi K. K. Phua, ed.), World Scientific, 1991, pp. 1303–1310.
- [65] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, 1998.
- [66] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris, 1965.
- [67] D. Dürr, S. Goldstein y N. Zanghì, *Quantum Chaos, Classical Randomness and Bohmian Mechanics*, Journal of Statistical Physics **68** (1992), 259270.
- [68] D. Dürr, S. Goldstein, y N. Zanghì, *Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty*, Journal of Statistical Physics **67** (1992), 843–907.
- [69] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein, G. Peruzzi y N. Zanghì, *Existence of Trajectories for Bohmian Mechanics*, International Journal of Theoretical Physics **32** (1993), 2245–2251.
- [70] K. Berndl, M. Daumer, D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì, *A survey of Bohmian mechanics*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9504010. (1995).
- [71] V. Allori, D. Dürr, S. Goldstein, y N. Zanghì, *Seven Steps Towards the Classical World*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0112005 (2001).
- [72] J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University, 1955, Traducción del original de 1932.

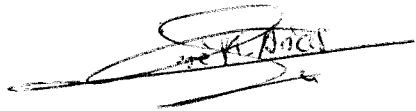
- [73] R. Omnès, *Journal of Statistical Physics* **53** (1988), no. 3-4, 893.
- [74] ———, *Journal of Statistical Physics* **53** (1988), no. 3-4, 933.
- [75] ———, *Journal of Statistical Physics* **53** (1988), no. 3-4, 957.
- [76] ———, *A Consistent Interpretation of Quantum Mechanics*, in Lévy-Leblond [2], pp. 27–48.
- [77] D. Home y P. N. Kaloyerou, *J. Phys. A* **22** (1989), 3253.
- [78] G. M. DAriano, L. Maccone y M. Painsi, *Spin tomography*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0210105 (2002).
- [79] W. Pauli, Louis de Broglie, *Physicien et Penseur* (A. George, ed.), Albin-Michel, Paris, 1953, p. 33.
- [80] P. Pearle, *Collapse Models*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9901077 (1999).
- [81] P. Pechukas, *Physical Review* **181** (1969), 174.
- [82] P. Holland y C. Philippidis, *Implications of Lorentz covariance for the guidance equation in two-slit quantum interference*, *Physical Review A* **67** (2003), no. 062105.
- [83] G. Potvin, *Dualist interpretation of quantum mechanics*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9908019 (1999).
- [84] H. R. Bachman, H. Reichenberg (ed.), *Walther Gerlach: Eine Auswahl aus seinen Schriften und Briefen*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [85] R. Eisberg y R. Resnick, *Quantum Physics*, Wiley, 1974.
- [86] D. A. Rice, *A geometric approach to nonlocality in the bohm model of quantum mechanics*, *American Journal of Physics* **65** (1997), 144.
- [87] M. Schlosshauer, *Decoherence, the Measurement Problem, and Interpretations of Quantum Mechanics*, *Review of Modern Physics* **76** (2004).
- [88] S. Goldstein, *Absence of chaos in Bohmian dynamics*, *Physical Review E* **60** (1999), no. 6, 7578.
- [89] S. Kochen y E. P. Specker, *J. Math. and Mech.* **17** (1967).
- [90] E. J. Squires, *An Attempt to Understand the Many-worlds of Quantum Theory Interpretation*, in Lévy-Leblond [2], pp. 151–160.
- [91] B. M. Garraway y S. Stenholm, *Observing the spin of a free electron*, *Physical Review A* **60** (1999), no. 1, 63–79.

- [92] W. Gerlach y O. Stern, *Das magnetische Moment des Silberatoms*, Zeitschrift für Physik **9** (1922), 353–355.
- [93] A. Greiner, J. Honerkamp y W. Struttmatter, Journal of Statistical Physics **51** (1988), 95.
- [94] A. Valentini, *Signal-locality, uncertainty, and the subquantum h-theorem.I*, Physics Letters A **156** (1991), 5.
- [95] ———, *On the Pilot-Wave Theory of Classical, Quantum and Sub-quantum Physics*, Ph.D. thesis, International School for Advanced Studies, Trieste, 1992.
- [96] ———, Chance in Physics: Foundations and Perspectives (J. Bricmont et al., ed.), Springer, Berlin, 2001, (quant-ph/0104067).
- [97] M. A. Vandyck, J. Phys. A **27** (1994), 1743.
- [98] A. Venugopalan, Physical Review A **56** (1997), 4307.
- [99] G. Potel, M. Muñoz-Aleñar, F. Barranco y E. Vigezzi, *Stability properties of $|\psi|^2$ in Bohmian dynamics*, Physics Letters A **299** (2002), 125.
- [100] C. Dewdney, A. Kyprianidis y J. P. Vigiér, J. Phys. A **17** (1984).
- [101] C. Dewdney, P. R. Holland, A. Kyprianidis y J. P. Vigiér, *Spin and non-locality in quantum mechanics*, Nature **336** (1988), no. 8.
- [102] C. Colijn y E. R. Vrsçay, *Spin-dependent Bohm trajectories associated with an electronic transition in hydrogen*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0304203 (2003).
- [103] C. Colijn y E.R. Vrsçay, *Quantum relaxation in hydrogen eigenstates and two-state transitions*, Physics Letters A **327** (2004), 113122.
- [104] B.-G. Englert, M.O. Scully, G. Süßmann y H. Walther, *Surrealistic Bohm Trajectories*, Z. Naturforsch. **47a** (1992), 1175.
- [105] H. M. França, T. W. Marshall, E. Santos y E.J. Watson, Physical Review A **46** (1992), 2265–2270.
- [106] G. C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber, Physical Review D **34** (1986), 470.
- [107] ———, Physical Review D **36** (1987), 3287.
- [108] ———, Foundations of Physics **18** (1988), 1.


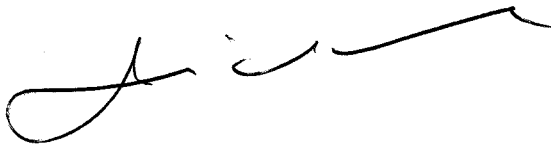
- [109] J. P. Amiet y S. Weigert, *Reconstructing the density matrix of a spin s through Stern–Gerlach measurements: I*, Journal of Physics A **32** (1999), no. 15, 2777–2784.
- [110] ———, *Reconstructing the density matrix of a spin s through Stern–Gerlach measurements: II*, Journal of Physics A **32** (1999), no. 25.
- [111] A. Valentini y H. Westman, *Dynamical Origin of Quantum Probabilities*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/0403034 (2004).
- [112] E. Joos y H. D. Zeh, *The emergence of classical properties through interaction with the environment*, Z. Phys. B **59** (1985), 223.
- [113] H. D. Zeh, Foundations of Physics **1** (1970), 69.
- [114] ———, *The Meaning of Decoherence*, Los Alamos e-print, xxx.lanl.gov, quant-ph/9905004 (1999).
- [115] O. Kübler y H. D. Zeh, Annals of Physics **76** (1973), 405.
- [116] J. A. Wheeler y W. H. Zurek (ed.), *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.
- [117] W. H. Zurek, Physical Review D **24** (1981), no. 6, 1516.
- [118] ———, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Reviews of Modern Physics **75** (2003), no. 3, 715.

Grégory Potel Aguilar
"da medida en mecánica cuántica: movimiento
de partículas en campos magnéticos inhomogéneos
y estabilidad de las trayectorias de Bohm"
sobresaliente cum laude

por unanimidad 11 mayo



El Presidente,



Adán Cabello

2005



Grégory Potel