LA DESIGUALDAD DE VON NEUMANN Y LA TEORÍA DE DILATACIÓN

CARLOS CONSTANTINO OITAVÉN

Trabajo dirigido por
Miguel Lacruz Martín y Luis Rodríguez-Piazza

Universidad de Sevilla

Key words and phrases. Banach algebras theory, bounded linear operators, dilation theory, ergodic theorem, functional calculus, operator theory, spectral theory, von Neumann inequality

Schopenhauer escribió que los sueños y la vigilia eran hojas de un mismo libro y que leerlas en orden era vivir, y hojearlas, soñar.

J. L. Borges.

ABSTRACT. A famous inequality by von Neumann states that if T is a contraction on a Hilbert space and p is a polynomial, then

$$\|p(T)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}.$$

As time went on, this inequality has given rise to a large variety of results estimulating this question. The natural way to generalize this inequality concerns contractions $T_1, \ldots, T_n$ that commute on a common Hilbert space. Is it true that, for any polynomial $p(z_1, \ldots, z_n)$ in n variables,

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup\{|p(z_1, \ldots, z_n)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}?$$

The answer is partial. The major steps in answering this question are due to T. Ando and N. Varopoulos, as much in positive and negative cases, respectively.

The aim of this work is to present an elegant proof using dilation theory, whose main forefather is Sz. Nagy, of the original von Neumann's inequality, as well as describing its generalization for two commuting contractions, and some counterexamples on a finite-dimensional Hilbert space, emphasizing the M. J. Crabb, A. M. Davie and J. A. Holbrook counterexamples.

Índice general

Introducción 3

Capítulo 1. Preliminares 5

1. Álgebras de Banach 5
2. Operadores lineales y continuos en espacios de Hilbert. Operadores de multiplicación 7
3. El teorema de Riesz 12
4. El teorema de Weierstraß a partir del teorema de Fejér 20

Capítulo 2. El teorema espectral. Cálculo funcional para operadores 23

1. Presentación y demostración del resultado 23
2. Cálculo funcional para operadores normales 27

Capítulo 3. Teoría de dilatación 37

1. Dilataciones unitarias 37
2. Dilataciones por potencias 41
3. El teorema ergódico 44
4. La desigualdad de von Neumann 46

Capítulo 4. Generalizaciones y contraejemplos de la desigualdad de von Neumann 49

1. La generalización de T. Ando 49
2. El contraejemplo de M. J. Crabb y A. M. Davie 57
3. El contraejemplo de J. A. Holbrook 60
4. Contraejemplos minimales 62

Agradecimientos 63

Bibliografía 67

Introducción

La célebre desigualdad de von Neumann [**vN51**] afirma que si T es una contracción en un espacio de Hilbert y p es un polinomio entonces

$$\|p(T)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}. \tag{0.1}$$

Con el paso del tiempo esta desigualdad ha dado lugar a un gran variedad de resultados relacionados estimulando esta cuestión. El epicentro de este trabajo es mostrar las posibles generalizaciones y contraejemplos de esta desigualdad, describiendo el camino con detalles y proporcionando la teoría necesaria para abordar los resultados que se irán demostrando.

Esta desigualdad puede reducirse fácilmente al caso finito-dimensional, donde uno puede pensar que T es una matriz. Muchas pruebas se han realizado en tal caso, e.g., G. Pisier y E. Nelson señalaron que basta demostrar el caso en el que T es unitario, debido al principio del módulo máximo. Por otro lado, una forma elegante de probar (0.1) es mediante teoría de dilatación, cuyo principal precursor es Sz. Nagy [**SN53**], aportando la idea crucial para los consecuentes desarrollos de (0.1), y en particular sus versiones más generales. Los conceptos de dilatación y compresión de Sz. Nagy son una generalización de los conceptos de extensión y restricción, y resulta que toda contracción posee una clase muy especial de dilataciones.

La generalización natural de (0.1) concierne a contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan en un espacio de Hilbert común. La cuestión es, ¿es cierto que, para cualquier polinomio $p \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ en n variables, se verifica que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup\{|p(z_1, \ldots, z_n)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}? \tag{0.2}$$

Quienes han proporcionado mayores avances respondiendo a esta cuestión han sido T. Ando y N. Varopoulos.

En 1963, T. Ando [**And63**] mostró, generalizando la idea de Sz. Nagy de dilataciones unitarias, que (0.2) es cierta para $n = 2$.

En 1973, Varopoulos [**Var73**] encontró que (0.2) falla en general. Él prueba la existencia de contraejemplos mediante un argumento probabilístico. También se conocen contraejemplos explícitos para el caso $n = 3$ en espacios de Hilbert de dimensión 4 y 8, como son propuestos por J. A. Holbrook [**Hol01**], S. Kaijer-Varopoulos [**Var74**], M. J. Crabb y A. M. Davie [**CD75**].

Antes de comenzar con la breve descripción del contenido de cada capítulo, quizá sería interesante nombrar una curiosidad que posee la desigualdad de von Neumann, y es su exclusividad para los espacios de Hilbert. Esto es, dado un espacio de Banach X, si la desigualdad de von Neumann es cierta para toda contracción actuando sobre X, existe un resultado, que no se mencionará a lo largo del trabajo, que permite la definición de un producto interno y por consiguiente X sería un espacio de Hilbert.

En el primer capítulo se presenta una gran miscelánea de resultados a modo de introducción, que servirán para una mejor comprensión de los capítulos posteriores. El orden del capítulo es el siguiente: Se comenzará con una breve introducción a la teoría de álgebras de Banach, haciendo énfasis en los resultados que serán utilizados en el resto del trabajo. Posteriormente, se recordarán algunos conceptos básicos acerca de operadores lineales y continuos en espacios de Hilbert, y el caso especial de los operadores de multiplicación. Las dos últimas secciones están dedidadas a dos grandes resultados, a saber, el teorema de Riesz acerca de la descripción del dual del espacio de las funciones continuas y el teorema clásico de aproximación de Weierstraß, para el que se mostrará una demostración original a partir del resultado de aproximación de Fejér.

En el segundo capítulo se mostrarán las piezas fundamentales para el desarrollo de los dos capítulos posteriores. La primera sección del mismo presentará el teorema espectral para operadores hermíticos, adjuntando además una demostración basada en tres resultados fundamentales que estarán recogidos en el primer capítulo. A su vez, en la segunda y última sección, se construirá un cálculo funcional para una cantidad finita de operadores normales que conmutan, esto es, dar sentido a expresiones de la forma $f(T_1, \ldots, T_n)$ cuando f es una función continua definida en cierto subconjunto compacto de $\mathbf{C}^n$.

El tercer capítulo está enteramente destinado a la teoría de dilatación. Las dos primeras secciones contienen uno de los resultados más importantes de este trabajo: el teorema de Sz. Nagy, que afirma que toda contracción posee una dilatación por potencias unitaria. En las dos últimas secciones se muestran dos aplicaciones del resultado de Sz. Nagy: la primera es el teorema ergódico, que da respuesta a la pregunta de si la sucesión de medias ariméticas dada por

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k \right\}_{n \in \mathbf{N}}$$

tiene límite en la topología fuerte de operadores cuando $\|T\| \leq 1$; la segunda, la bien conocida desigualdad de von Neumann (0.1).

El inicio del último capítulo alberga el gran resultado por parte de T. Ando sobre la generalización del resultado de Sz. Nagy, y por consiguiente la generalización de la desigualdad de von Neumann en el caso de dos contracciones que conmutan. El mismo finaliza con la exposición de dos contrajemplos para el caso de tres contracciones que conmutan en un espacio de Hilbert de dimensión finita.

Capítulo 1

Preliminares

El capítulo que se presenta recoge una miscelánea de resultados de análisis. Será, por tanto, de vital importancia el manejo y entendimiento de los mismos para una futura comprensión de los capítulos posteriores. Se comenzará con una introducción a la teoría de álgebras de Banach. Posteriormente, se presentarán los operadores de multiplicación, que jugarán un papel relevante en este trabajo. Finalmente, las secciones dedicadas al teorema de Riesz y de Weierstraß son esenciales para proporcionar una prueba del teorema espectral para operadores hermíticos, un bello camino que Halmos desvela en [**Hal63**].

1. Álgebras de Banach

Se comienza con una serie de definiciones y resultados que conciernen a una introducción a la teoría de álgebras de Banach. Estos resultados pueden encontrarse, con una mayor profundidad en el contenido, en [**CO17, Rud87, Rud91**]. No obstante, con objeto de establecer una notación y de facilitar la lectura de este trabajo, se ha decidido incluir un breve resumen con algunos resultados interesantes que involucran a dicho concepto.

DEFINICIÓN 1.1. Un *álgebra compleja* es un espacio vectorial A sobre $\mathbf{C}$ en el que hay definido un producto que verifica, para todos $x, y, z \in A$, y $\alpha \in \mathbf{C}$, las propiedades:

I. (Asociatividad) $(xy)z = x(yz)$;
II. (Distributividad respecto de la suma) $x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx$;
III. $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$.

Si existe una norma definida en A que la convierte en un espacio normado y se satisface la desigualdad

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{1.1}$$

para cualesquiera $x, y \in A$, entonces se dice que A es un *álgebra compleja normada*. Si, además, A es un espacio de Banach, se convendrá en decir que A es un *álgebra de Banach*.

La desigualdad (1.1) convierte a la multiplicación en una operación continua. Esto es, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $x_n y_n \to xy$; la cual se sigue de (1.1) y de la identidad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \\ &\leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

puesto que al ser $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión convergente, existe una constante $M > 0$ tal que $\|y_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Observación 1.2. Nótese que no se ha requerido la conmutatividad de A, y se prescindirá de ella siempre y cuando no sea previamente establecido explícitamente.

En lo que sigue, se asumirá que A posee *elemento unidad*. Esto es, existe un elemento $e \in A$ tal que

$$xe = ex = x,$$

para todo $x \in A$. A partir de su definición es fácil ver que éste es único ($e' = e'e = e$) y que $\|e\| \geq 1$, por (1.1). Además, se asumirá que

$$\|e\| = 1.$$

Definición 1.3. En las condiciones precedentes, se dirá que un elemento $x \in A$ es *invertible* si x tiene un *inverso* en A, i.e., si existe un elemento $x^{-1} \in A$ tal que

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

Cabe destacar que los elementos invertibles poseen estructura de grupo respecto a la operación de multiplicación. Si fuera necesario, se denotará por $G(A)$ al conjunto de elementos invertibles de A.

Definición 1.4. Sea A un álgebra de Banach con unidad e, y sea $x \in A$. El *espectro* de x, denotado por $\sigma(x)$, es el conjunto de los números complejos λ tales que $x - \lambda e$ no es invertible. Esto es,

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbf{C} : x - \lambda e \text{ no es invertible}\}.$$

Definición 1.5. Sea A un álgebra de Banach. Para $x \in A$, se define su *radio espectral*, $\rho(x)$, como el radio del menor disco cerrado centrado en el origen que contiene a $\sigma(x)$, i.e.,

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Teorema 1.6. *Sea A un álgebra de Banach. Para cada $x \in A$, se verifica:*

i. *Si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $|\lambda| \leq \|x\|$. Esto es, se satisface la inclusión*

$$\sigma(x) \subseteq \overline{D}(0, \|x\|).$$

ii. *El conjunto $\sigma(x)$ es compacto.*

El siguiente resultado es la fórmula de Gelfand, que asegura la igualdad entre dos cantidades enteramente distintas: una algebraica y otra topológica.

Teorema 1.7 (Fórmula del radio espectral de Gelfand). *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Para cada $x \in A$, se verifica que*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

DEFINICIÓN 1.8. Sea A un álgebra compleja. Un *homomorfismo complejo* en A es una aplicación $\Lambda\colon A \to \mathbf{C}$ lineal que verifica

$$\Lambda(xy) = \Lambda(x)\Lambda(y)$$

para todos $x, y \in A$. El conjunto de todos los homomorfismos no nulos definidos en A se denota por $\Delta(A)$.

TEOREMA 1.9. *Sea A un álgebra de Banach. Si A tiene unidad e, y $\Lambda \in \Delta(A)$, entonces:*

I. $\Lambda \in A^*$ *y* $\|\Lambda\| \leq 1$*;*
II. $\Lambda(e) = 1$*;*
III. *si* $x \in G(A)$*, entonces* $\Lambda(x) \neq 0$.

PROPOSICIÓN 1.10. *Sea A un álgebra de Banach. Si A tiene unidad, entonces $\Delta(A)$ es compacto para la topología $*-$débil de A^*.*

DEFINICIÓN 1.11 (Transformada de Gelfand). Sea A un álgebra de Banach. Para cada $x \in A$, se define $\hat{x}$ como la función

$$\begin{aligned} \hat{x}\colon \Delta(A) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \Lambda &\longmapsto \hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x). \end{aligned}$$

Si en $\Delta(A)$ se considera la topología inducida por la topología $*-$débil de A^*, entonces la aplicación $x \mapsto \hat{x}$ es un homomorfismo de álgebras entre A y $C(\Delta(A))$ que se denomina *transformada de Gelfand*.

Se cierra la sección con un resultado acerca de las propiedades de la transformada de Gelfand.

TEOREMA 1.12 (Propiedades de la transformada de Gelfand). *Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, y $x \in A$. Se tienen:*

I. x *es invertible en* A *si y sólo si* $\Lambda(x) \neq 0$*, para todo* $\Lambda \in \Delta(A)$*;*
II. $\sigma(x) = \{\Lambda(x) : \Lambda \in \Delta(A)\}$*;*
III. $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$.

Estas propiedades serán especialmente útiles en la construcción de un cálculo funcional para una cantidad finita de operadores normales que conmutan.

$* * *$

2. Operadores lineales y continuos en espacios de Hilbert. Operadores de multiplicación

2.1. Operadores lineales y continuos en espacios de Hilbert. Si X es un espacio de Banach sobre el cuerpo complejo, es conocido que el espacio $\mathcal{B}(X)$ de operadores lineales y acotados de X en X es un espacio de Banach con la norma

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Una manera alternativa y equivalente de expresar esta norma es

$$\|T\| = \text{mín}\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

El espacio $\mathcal{B}(X)$ posee estructura de *álgebra de Banach*. Por tanto, todos los resultados acerca de álgebras de Banach son válidos para el espacio de operadores lineales y acotados de un espacio de Banach en sí mismo. En lo que sigue, se considerarán operadores definidos entre espacios de Hilbert.

Sea H espacio de Hilbert, y $T \in \mathcal{B}(H)$. El operador *adjunto de* T, denotado por T^*, es el único operador lineal y continuo $T^*\colon H \to H$ que satisface

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle,$$

para todos $x, y \in H$. Si ocurre que $TT^* = T^*T$, se dice que el operador T es *normal*; se dice que T es *hermítico* o *autoadjunto* si $T^* = T$. Las propiedades elementales de estos operadores se resumen en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.13. *Sea H un espacio de Hilbert. Considérense $T, S \in \mathcal{B}(H)$, y $\alpha \in \mathbf{C}$. Se satisfacen:*

I. $(\alpha T + S)^* = \overline{\alpha}T^* + S^*$;
II. $(TS)^* = S^*T^*$;
III. $\|T\| = \|T^*\|$.

Prueba. Las dos primeras asunciones son una mera comprobación. Para la última,

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle x, TT^*x\rangle \leq \|T^*\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|^2,$$

para todo $x \in H$. Luego $\|T^*\| \leq \|T\|$. Análogamente,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*T\rangle \leq \|T^*\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|^2,$$

para todo $x \in H$. Esto proporciona $\|T\| \leq \|T^*\|$, y queda probado el resultado. □

Aparece ahora el primer resultado que se usará para probar el teorema espectral para operadores hermíticos.

TEOREMA 1.14. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es hermítico, entonces $\rho(T) = \|T\|$.*

Prueba. La igualdad $\rho(T) \leq \|T\|$ no depende del carácter hermítico del operador; una demostración original, usando el teorema del punto fijo de Banach para aplicaciones contractivas, puede encontrarse en [**CO17**].

En primer lugar, nótese que

$$\|T\|^2 = \|T^*T\|.$$

En efecto, se tiene que

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$$

y

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|x\|^2 \cdot \|T^*T\|,$$

para cada x.

Dado que T es hermítico,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \left\langle x, T^2 x\right\rangle \leq \left\|T^2\right\| \cdot \|x\|^2$$

para cada x, y entonces $\|T^2\| = \|T\|^2$. Un argumento inductivo prueba que $\left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}$. Finalmente, la fórmula del radio espectral de Gelfand concluye que

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|T\|,$$

y esto prueba el resultado. □

Uno puede extender el resultado anterior para operadores normales.

Corolario 1.15. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador normal, entonces $\rho(T) = \|T\|$.*

Prueba. Para probar la afirmación, recúerdese que ya se había probado que $\|T\|^2 = \|T^*T\|$; además, se verifica que

$$\|T\|^4 = \|T^*T\|^2 = \|T^*TTT^*\| = \left\|(T^*T)^2\right\|.$$

En general,

$$\|T\|^{2^n} = \left\|(T^*T)^{2^{n-1}}\right\| = \left\|T^{2^{n-1}}\right\|^2$$

para cada n natural. En consecuencia, se obtiene que $\|T\|^{2^{n-1}} = \left\|T^{2^{n-1}}\right\|$ para todo n. De nuevo, la fórmula de Gelfand asegura la igualdad

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Lo que prueba la igualdad entre en radio espectral y la norma de un operador normal. □

2.2. Operadores de multiplicación. El objetivo de este apartado es presentar los operadores de multiplicación inducidos por una función definida en un espacio de medida. Para ello, es necesario comenzar con las definiciones de los espacios $L^2(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$ inducidos por un espacio de medida (X, Σ, μ), que se considerará $\sigma-$finito. Posteriormente, se dará la definición de operador de multiplicación, para finalizar con algunas propiedades de dichos operadores.

Definición 1.16. Se define el espacio

$$\mathcal{L}^2(\mu) = \left\{ f\colon X \to \mathbf{C} : f \text{ es medible}, \int_X |f|^2 \, d\mu < \infty \right\}.$$

Así,

$$L^2(\mu) = \mathcal{L}^2(\mu)/\sim,$$

donde $f \sim g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ en casi todo $x \in X$. Este espacio es de Hilbert con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu.$$

De manera análoga, se definen

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{ f\colon X \to \mathbf{C} : f \text{ es medible}, \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ en casi todo } x \in X\}$$

y

$$L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\sim .$$

Usualmente, a las funciones que pertenecen a $L^\infty(\mu)$ se las denomina funciones *esencialmente acotadas*. Este espacio es de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \text{mín}\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ en casi todo } x \in X\}.$$

Este valor se conoce como el *supremo esencial* de f.

Observación 1.17 (Abuso de notación). En lo que sigue, un elemento $f \in L^2(\mu)$ representa a la clase de todas las funciones de $\mathcal{L}^2(\mu)$ que son iguales a f en casi todo punto. De la misma manera pasa con los elementos del espacio $L^\infty(\mu)$.

Definición 1.18. Sea $\varphi \in L^\infty(\mu)$. Un operador M_φ definido en el espacio de Hilbert $L^2(\mu)$ por

$$M_\varphi f = \varphi \cdot f$$

se denomina la *multiplicación inducida por* φ.

Teorema 1.19. *Si M_φ es el operador inducido por una función $\varphi \in L^\infty(\mu)$, entonces*

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty. \tag{1.2}$$

Prueba. La prueba va a realizarse constructivamente, de tal modo que se verá hasta dónde puede llegarse sin asumir la $\sigma-$finitud de la medida μ. Esto probará que esta asunción es inevitable. Se tiene,

$$\|M_\varphi f\|^2 = \int_X |\varphi \cdot f|^2 \, d\mu \leq \|\varphi\|_\infty^2 \cdot \int_X |f|^2 \, d\mu = \|\varphi\|_\infty^2 \cdot \|f\|^2,$$

de donde se sigue que $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. La prueba de la desigualdad contraria es la que posee más dificultad.

Una manera sensible de comenzar la prueba es notar que, dado $\epsilon > 0$, entonces

$$|\varphi(x)| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon$$

en un conjunto, póngase M, de medida positiva. Si, e.g., $f = \chi_M$, entonces

$$\|f\|^2 = \int_M 1 \, d\mu = \mu(M),$$

y

$$\|M_\varphi f\|^2 = \int_M |\varphi|^2 \, d\mu \geq (\|\varphi\|_\infty - \epsilon)^2 \mu(M) = (\|\varphi\|_\infty - \epsilon)^2 \|f\|^2.$$

Así, se deduce que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty - \epsilon$; y dado que esto es cierto para todo ϵ, se sigue que

$$\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty.$$

La prueba está acabada, pero es errónea.

El problema es que el conjunto M puede ser de medida infinita. La objección no parece muy fuerte. Despúes de todo, incluso si el conjunto

$$\{x \in X : |\varphi(x)| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon\}$$

tiene medida infinita, el razonamiento anterior funciona perfectamente si M es tomado como un subconjunto de medida positiva y finita de éste. Esto es cierto. La dificultad, sin embargo, es que el espacio puede ser lo suficientemente patológico como para que los conjuntos medibles de medida positiva (de hecho de medida infinita) tengan la propiedad de que cada uno de sus subconjuntos medibles tenga medida 0 ó ∞.

Sea $X = \{x_1, x_2\}$ con $\mu(\{x_1\}) = 1$ y $\mu(\{x_2\}) = \infty$. Entonces, $L^2(\mu)$ es el espacio $1-$dimensional de las funciones definidas en X que son nulas en x_2. Si φ es la función característica del conjunto $\{x_2\}$, entonces $\|\varphi\|_\infty = 1$, pero

$$\|M_\varphi f\|^2 = \int_{\{x_2\}} |f|^2 \, d\mu = \int_{\{x_2\}} |f(x_2)|^2 \, d\mu = 0.$$

Por tanto, $\|M_\varphi\| = 0$.

Conclusión: si la medida es *localmente finita*, i.e., todo conjunto medible de medida positiva tiene un subconjunto de medida positiva finita, entonces, la norma de cada operador multiplicativo es el supremo esencial de la función que lo induce. Todo espacio de medida $\sigma-$finito es localmente finito, ya que en tal caso existe una colección $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con $\mu(A_i) < \infty$, para todo natural i, tal que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n.$$

Luego, dado $B \subset X$ medible con $\mu(B) > 0$, existe al menos A_{i_0} tal que $A_{i_0} \cap B \neq \emptyset$ y $\mu(A_{i_0} \cap B) < \infty$.

Así, la manera más práctica de eliminar tales dificultades es asumir que la medida es $\sigma-$finita. Si esto es asumido, el razonamiento anterior prueba (1.2). $\square$

Hay una gran relación entre las propiedades que hereda M_φ del carácter de φ, un estudio se revela en [**Hal82**]. La siguiente proposición resume alguna de sus propiedades.

PROPOSICIÓN 1.20. *Sean M_φ y M_ψ dos operadores de multiplicación asociados a dos funciones φ y ψ de $L^\infty(\mu)$. Se verifica:*

I. $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$,

II. $M_{\varphi\cdot\psi} = M_\varphi M_\psi$,

III. *M_φ es hermítico si y sólo si φ es real.*

Prueba. Para el primer apartado, el operador M_φ^* es único operador que verifica

$$\langle M_\varphi f, g\rangle = \langle f, M_\varphi^* g\rangle,$$

para todo $f, g \in L^2(\mu)$. Esto ocurre si y sólo si

$$\int_X \varphi \, f \, \overline{g} \, dx = \int_X f \, \overline{M_\varphi^* g} \, dx,$$

para todo $f, g \in L^2(\mu)$. Así, forzosamente

$$\overline{M_\varphi^* g} = \varphi \cdot \overline{g}$$

en casi todo punto, lo que desemboca en que

$$M_\varphi^* g = \overline{\varphi} \cdot g,$$

para toda $g \in L^2(\mu)$.

Para el segundo apartado, sea $f \in L^2(\mu)$. Se tiene,

$$M_{\varphi\cdot\psi} f = \varphi \cdot \psi \cdot f = M_\varphi(\psi \cdot f) = M_\varphi M_\psi f.$$

Para el último apartado, gracias a la identidad del primer apartado, M_φ es hermítico si y sólo si $M_\varphi = M_{\overline{\varphi}}$, esto es, $\varphi = \overline{\varphi}$. □

COROLARIO 1.21. *Los operadores de multiplicación son normales.*

Prueba. Es inmediato dedida a la segunda propiedad de la Proposición 1.20. □

* * *

3. El teorema de Riesz

El siguiente resultado que se necesita para la prueba que describe Halmos [**Hal63**] es conocido como el teorema de representación de Riesz Riesz-Markov-Kakutani [**Rud87**] para los conjuntos compactos en la recta real. Éste afirma que todo funcional lineal y positivo[1] en $C[a,b]$ se puede representar como una integral con respecto a una medida positiva y finita, i.e., la aplicación

$$\Upsilon \colon \mu \longmapsto \Upsilon(\mu)(f) = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

es biyectiva entre las medidas positivas y los funcionales positivos.

En este trabajo se dispone a desarrollar una versión más general, apta para funciones definidas en cualquier espacio de Hausdorff localmente compacto. A propósito de este fin, recuérdense ahora algunas definiciones de índole topológica.

DEFINICIÓN 1.22. Se conviene en decir que X es *de Hausdorff* si dados dos elementos cualesquiera x e y de X con $x \neq y$, existen dos entornos U y V de x e y, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Cualquier espacio métrico es de Hausdorff.

DEFINICIÓN 1.23. Un espacio X de Hausdorff es *localmente compacto* si todo elemento $x \in X$ posee un entorno cuya clausura es compacta. Por ejemplo, gracias al teorema de Heine-Borel, los espacios $\mathbf{C}^n$ son localmente compactos; y, obviamente, cualquier espacio compacto es localmente compacto.

Una discusión más detallada de estos conceptos se revela en [**Rud87**]. Por último, es necesario un lema previo al resultado central de la sección.

LEMA 1.24 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Dado $K \subset X$ compacto y $V \subset X$ abierto con $K \subset V$, existe una función continua de soporte compacto ($f \in C_c(X)$) tal que*

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, && \textit{si } x \in K, \\ f(x) &\in [0,1], && \textit{si } x \in X, \\ f(x) &= 0, && \textit{si } x \in X \setminus V, \end{aligned}$$

dicho de otro modo,

$$\chi_K \leq f \leq \chi_V.$$

[1] Un funcional se dice que es positivo si $\Lambda f \geq 0$ siempre que $f \geq 0$.

Observación 1.25. En el caso de espacios métricos, este resultado posee una demostración muy sencilla. Si (X, d) es un espacio métrico y $C_1, C_2 \subseteq X$ dos subconjuntos cerrados y disjuntos, entonces la función continua

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{d(x, C_1)}{d(x, C_1) + d(x, C_2)} \end{aligned}$$

satisface que $f_{|C_1} \equiv 0$, $f_{|C_2} \equiv 1$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.26 (Representación de Riesz). *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbf{R}$ un operador positivo y lineal. Entonces existe una $\sigma-$álgebra Σ en X que contiene a todos los conjuntos de Borel de X, y existe una única medida positiva μ en Σ que representa a Λ, es decir,*

$$\Lambda f = \int_X f \, d\mu \tag{1.3}$$

para toda función $f \in C_c(X)$. Además, verifica las siguientes propiedades:

I. *Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces $\mu(K) < \infty$.*

II. *Para todo $A \in \Sigma$, se tiene*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(V) : A \subset V, V \text{ es abierto}\}.$$

III. *Se verifica la igualdad*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ es compacto}\}$$

para todo conjunto abierto A, y para todo $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \infty$.

IV. *Si $B \in \Sigma$, $A \subset B$, y $\mu(B) = 0$; entonces $A \in \Sigma$. Esto es, el espacio de medida (X, Σ, μ) es completo.*

La igualdad (1.3) es la más interesante. Tras definir Σ y μ, las propiedades quedarán probadas si se demuestra que Σ es una $\sigma-$álgebra y que μ es numerablemente aditiva.

Prueba. En lo que sigue, K denotará un conjunto compacto de X, y V un conjunto abierto en X.

Se comienza por probar la unicidad de μ. Si μ satisface las propiedades II. y III., es claro que μ queda determinada en Σ por sus valores en conjuntos compactos de X. Por ello, es suficiente probar que si μ_1 y μ_2 son dos medidas que verifican las hipótesis del teorema, entonces

$$\mu_1(K) = \mu_2(K),$$

para todo conjunto compacto $K \subset X$. Fíjese $K \subset X$ un conjunto compacto y $\epsilon > 0$. Por II. y III., existe $V \supset K$ con

$$\mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon.$$

El lema de Urysohn afirma la existencia de una función $f \in C_c(X)$ tal que $\chi_K \leq f \leq \chi_V$. Entonces,

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K \, d\mu_1 \leq \int_X f \, d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f \, d\mu_2 \leq \int_X \chi_V \, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon.$$

Por tanto, $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. Intercambiendo ahora μ_1 por μ_2 se prueba la desigualdad contraria, y por tanto la unicidad de μ queda demostrada.

Construcción de μ y Σ

Para cada abierto V en X, defínase

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \mathrm{sop}(f) \subset V\}. \tag{1.4}$$

A menudo se usará la notación $f \prec V$ para indicar que V es abierto, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ y $\mathrm{sop}(f) \subset V$. También se hará uso de la notación $K \prec f$ para indicar que K es compacto, que $f \in C_c(X)$, que $0 \leq f \leq 1$ y que $f(x) = 1$ siempre que $x \in K$. Así, la definición anterior resultaría

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\}.$$

Si $V_1 \subset V_2$, entonces (1.4) implica que $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Por ello,

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(V) : A \subset V, V \text{ abierto}\} \tag{1.5}$$

siempre que A sea un conjunto abierto, y es consistente con (1.4) definir $\mu(A)$ por (1.5) para cualquier $A \subset X$.

A pesar de haber definido $\mu(A)$ para cualquier $A \subset X$, la numerabilidad aditiva de μ sólo se probará en una $\sigma-$álgebra particular Σ de X.

Sea Σ_F el conjunto de todos los subconjuntos $A \subset X$ que verifican dos condiciones: $\mu(A) < \infty$ y

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}. \tag{1.6}$$

Finalmente, sea

$$\Sigma = \{A \subset X : A \cap K \in \Sigma_F \text{ para todo } K \text{ compacto}\}.$$

Prueba de que μ y Σ satisfacen dichas propiedades

Es claro que μ es monótona, i.e., si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además, si $\mu(A) = 0$ entonces $A \in \Sigma_F$ y por ende $A \in \Sigma$. Por tanto, IV. se satisface y también II., por definición.

Con objeto de probar cada una de las afirmaciones restantes, es conveniente dividir la prueba en algunos pasos.

Obsérvese que la positividad de Λ implica que Λ es monótona, esto es, si $f \leq g$ entonces $\Lambda f \leq \Lambda g$. Esta propiedad se usará en los pasos 2 y 10.

Paso 1. Si $A_1, A_2, \ldots$ son subconjuntos arbitrarios de X, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.7}$$

Prueba. Se prueba primero que

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2) \tag{1.8}$$

si V_1 y V_2 son abiertos. Elíjase $g \in C_c(X)$ tal que $0 \leq g \leq 1$ y $\mathrm{sop}(g) \subset V_1 \cup V_2$. Por el Teorema 2.13 en [**Rud87**], existen unas funciones $h_i \prec V_i$ tales que

$$h_1(x) + h_2(x) = 1$$

siempre que $x \in \operatorname{sop}(g)$. De ahí, se deduce $h_i g \prec V_i$. Por consiguiente, puede escribirse $g = h_1 g + h_2 g$ y así

$$\Lambda g = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Como la igualdad anterior es válida para toda $g \prec V_1 \cup V_2$, tomando el supremo queda probada (1.8).

En el caso de que $\mu(A_i) = \infty$ para algún i, entonces (1.7) es trivialmente cierta. Supóngase entonces que $\mu(A_i) < \infty$ para todo i. Fíjese $\epsilon > 0$. Por (1.5), existen unos conjuntos abiertos $V_i \supset A_i$ tales que

$$\mu(V_i) < \mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$$

para $i \geq 1$. Sea

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad y \quad f \prec V.$$

Dado que f tiene soporte compacto, debe ocurrir que $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$ para algún n, ya que de todo recubrimiento por abiertos puede extraerse un subrecubrimiento. Mediante argumentos por inducción sobre (1.8), se obtiene que

$$\Lambda f \leq \mu(V_1 \cup \cdots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon.$$

Dado que esto ocurre para toda $f \prec V$, y

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset V,$$

se sigue que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon,$$

lo que prueba (1.7), ya que ϵ era arbitrario. □

El siguiente paso prueba la primera propiedad.

Paso 2. Σ_F contiene a todos los conjuntos compactos.

Prueba. Si $K \prec f$, sea

$$V = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{1}{2} \right\}$$

Entonces $K \subset V$, ya que $f(x) = 1$ cuando $x \in K$. Además, $g \leq 2f$ para toda $g \prec V$. Por tanto,

$$\mu(K) \leq \mu(V) = \sup\{\Lambda g : g \prec V\} \leq \Lambda(2f) < \infty.$$

Dado que K claramente satisface (1.6), $K \in \Sigma_F$, ya que verifica las dos propiedades requeridas. □

Paso 3. Cada conjunto abierto satisface (1.6). En consecuencia, Σ_F contiene cada conjunto abierto V con $\mu(V) < \infty$.

Prueba. Se puede asumir que $\mu(V) > 0$. Sea α un número real tal que $\alpha < \mu(V)$. Entonces, por definición, existe una $f \prec V$ con $\alpha < \Lambda f$. Si W es cualquier abierto que contenga al soporte de f, denotado por K, entonces $f \prec W$, y por ello $\Lambda f \leq \mu(W)$. Tomando ínfimos se obtiene que $\Lambda f \leq \mu(K)$. Esto muestra un conjunto compacto $K \subset V$ con $\alpha < \mu(K)$, y por ende que se satisface (1.6) para V. Esto prueba el resultado. $\square$

Paso 4. Supóngase

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

donde cada $A_i \in \Sigma_F$ y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.9}$$

Si, además, $\mu(A) < \infty$, entonces $A \in \Sigma_F$.

Prueba. Se comienza mostrando que si K_1 y K_2 son dos conjuntos compactos y disjuntos, entonces

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{1.10}$$

El Teorema 2.7 en [**Rud87**] (con K_1 en lugar de K y K_2^c en lugar de U) asegura que existen unos conjuntos abiertos y disjuntos entre sí V_1 y V_2 tales que $K_i \subset V_i$ para $i = 1, 2$.
Ahora bien, el Paso 2 implica la existencia de un conjunto abierto $W \supset K_1 \cup K_2$ tal que $\mu(W) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon$, y existen unas funciones $f_i \prec W \cap V_i$ (puesto que $W \cap V_i$ es abierto) tales que

$$\Lambda f_i > \mu(W \cap V_i) - \epsilon, \quad i = 1, 2.$$

Por otra parte, es claro que $K_i \subset W \cap V_i$, puesto que $W \supset K_1 \cup K_2$ y $V_i \supset K_i$. También, de manera no tan clara, se tiene que $f_1 + f_2 \prec W$. En efecto, $f_1 + f_2 \in C_c(X), 0 \leq f_1 + f_2 \leq 1$, y

$$\begin{aligned}
\operatorname{sop}(f_1 + f_2) &= \overline{\{x \in X : f_1(x) + f_2(x) \neq 0\}} \\
&= \operatorname{sop}(f_1) \cup \operatorname{sop}(f_2) \\
&\subset (W \cap V_1) \cup (W \cap V_2) \subset W,
\end{aligned}$$

gracias a que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Entonces, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\mu(K_1) + \mu(K_2) &\leq \mu(W \cap V_1) + \mu(W \cap V_2) \\
&< \Lambda f_1 + \Lambda f_2 + 2\epsilon \\
&= \Lambda(f_1 + f_2) + 2\epsilon \\
&\leq \mu(W) + 2\epsilon \\
&< \mu(K_1 \cup K_2) + 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ era arbitrario, (1.10) se obtiene junto a la desigualdad probada en el Paso 1.

Nótese que si $\mu(A) = \infty$, entonces el Paso 1 prueba (1.9). Asúmase por tanto que $\mu(A) < \infty$, y fíjese $\epsilon > 0$. Gracias a que $A_i \in \Sigma_F$, existen unos conjuntos compactos $H_i \subset A_i$ con

$$\mu(H_i) > \mu(A_i) - \frac{\epsilon}{2^i}$$

para $i \geq 1$. Entonces, si se escribe

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i,$$

mediante un argumento de inducción sobre la igualdad (1.10) se obtiene

$$\mu(A) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \epsilon. \tag{1.11}$$

Dado que la expresión anterior es válida para todo n y todo ϵ, se obtiene que

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

que junto al Paso 1 prueba la igualdad (1.9).

Finalmente, sólo resta probar que si $\mu(A) < \infty$ entonces $A \in \Sigma_F$. Para abordarla, fíjese $\epsilon > 0$ y nótese que (1.9) implica que

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) + \epsilon$$

para algún natural N. Entonces, (1.11) muestra que como

$$\mu(K_N) > \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) - \epsilon,$$

entonces $\mu(A) \leq \mu(K_N) + 2\epsilon$, y esto prueba que A satisface las dos condiciones para pertecer a Σ_F. □

Paso 5. Si $A \in \Sigma_F$ y $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto K y uno abierto V tales que $K \subset A \subset V$ y $\mu(V \setminus K) < \epsilon$.

Prueba. Las definiciones dadas afirman la existencia de unos conjuntos K y V tales que

$$\mu(V) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(A) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que $V \setminus K$ es abierto, $V \setminus K \in \Sigma_F$, por el Paso 3. Como K y $V \setminus K$ son disjuntos, el Paso 4 implica que

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon,$$

de donde se deduce que $\mu(V \setminus K) < \epsilon$. □

Paso 6. Si $A \in \Sigma_F$ y $B \in \Sigma_F$, entonces $A \setminus B, A \cup B$ y $A \cap B$ pertenecen a Σ_F.

Prueba. Si $\epsilon > 0$, el paso anterior garantiza la existencia de unos conjuntos K_i y V_i tales que $K_1 \subset A \subset V_1, K_2 \subset B \subset V_2$, y además

$$\mu(V_i \setminus K_i) < \epsilon, \quad i = 1, 2.$$

Dado que

$$A \setminus B \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2),$$

el Paso 1, junto a la monotonía de la medida, muestran que

$$\mu(A \setminus B) \leq \epsilon + \mu(K_1 \setminus V_2) + \epsilon. \tag{1.12}$$

Ahora bien, como $K_1 \setminus V_2$ es un subconjunto compacto de $A \setminus B$, (1.12) implica que $A \setminus B$ satisface (1.6), y por tanto $A \setminus B \in \Sigma_F$.

Para probar el resto de casos, basta notar que

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \quad \text{y} \quad A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

prueba que $A \cup B$ y $A \cap B$ pertenecen a Σ_F. $\square$

Paso 7. Σ es una $\sigma-$álgebra en X que contiene todos los conjuntos de Borel.

Prueba. Sea K un conjunto compacto arbitrario en X. Se comienza por comprobar que Σ es una $\sigma-$álgebra, esto es, debe verificar que:

- El espacio total pertenezca al $\sigma-$álgebra.
- Si $A \in \Sigma$ entonces $A^c \in \Sigma$. En efecto, si $A \in \Sigma$, entonces $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$, luego $A^c \cap K$ es la diferencia de los elementos pertenecientes a Σ_F. Por tanto, $A^c \cap K \in \Sigma_F$ y se concluye: $A \in \Sigma$ implica $A^c \in \Sigma$.
- $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ siempre que $A_i \in \Sigma$ para todo i. En efecto, supóngase

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in \Sigma.$$

Sea $B_1 = A_1 \cap K$, y

$$B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$$

para $n \geq 2$. Entonces $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos disjuntos de Σ_F, por el Paso 6, y

$$A \cap K = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n.$$

Del Paso 4 se sigue que $A \cap K \in \Sigma_F$. Por tanto, $A \in \Sigma$.

Finalmente, si C es cerrado, entonces $C \cap K$ es compacto, y por tanto $C \cap K \in \Sigma_F$, y así $C \in \Sigma$. En particular, $X \in \Sigma$.

Acaba de probarse que Σ es una $\sigma-$álgebra en X que contiene a todos los subconjuntos cerrados de X. Por tanto, Σ contiene a todos los subconjuntos de Borel en X. $\square$

El siguiente paso prueba la tercera propiedad.

Paso 8. Σ_F consiste en todos los conjuntos $A \in \Sigma$ tales que $\mu(A) < \infty$.

Prueba. Si $A \in \Sigma_F$, los pasos 2 y 6 implican que $A \cap K \in \Sigma_F$ para todo compacto K, y por ende $A \in \Sigma$.

Recíprocamente, supóngase $A \in \Sigma_F$ y $\mu(A) < \infty$, y fíjese $\epsilon > 0$. Existe un conjunto abierto $V \supset A$ tal que $\mu(V) < \infty$; y por los pasos 3 y 4, existe un conjunto compacto K con $\mu(V \setminus K) < \epsilon$. Como $A \cap K \in \Sigma_F$, existe un conjunto compacto $H \subset A \cap K$ con

$$\mu(A \cap K) < \mu(H) + \epsilon.$$

Dado que $A \subset (A \cap K) \cup (V \setminus K)$, se tiene que

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\epsilon,$$

lo que implica que $A \in \Sigma_F$. □

Paso 9. μ es una medida en Σ.

Prueba. La numerabilidad aditiva de μ en Σ se desprende inmediatamente de los pasos 3 y 7. Por tanto, este paso ya está demostrado. □

Paso 10. Para toda $f \in C_c(X)$ se tiene que

$$\Lambda f = \int_X f \, d\mu.$$

Prueba. Para probar (1.3), es suficiente probar la desigualdad

$$\Lambda f \leq \int_X f \, d\mu \tag{1.13}$$

para toda $f \in C_c(X)$. Una vez establecido (1.13), la linealidad de Λ muestra que

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_X (-f) \, d\mu = -\int_X f \, d\mu,$$

con lo cual, junto a (1.13), prueba la igualdad.

Sea K el soporte de una función $f \in C_c(X)$, i.e., el conjunto

$$K = \mathrm{sop}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Sea, además, un intervalo $[a, b]$ que contiene a la imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$, que es un conjunto compacto al ser la imagen de un conjunto compacto por una función continua. Elíjase $\epsilon > 0$, y unos puntos y_i's para $i = 0, 1, \dots, n$ tales que $y_i - y_{i-1} < \epsilon$ y

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b.$$

Defínase ahora

$$A_i = \{x \in X : y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$$

para $i = 1, \dots, n$. Ahora bien, dado que f es continua, f es medible Borel, y los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjuntos disjuntos de Borel cuya unión es K. Además, existen conjuntos abiertos $V_i \supset A_i$ tales que

$$\mu(V_i) < \mu(A_i) + \frac{\epsilon}{n}$$

para $i = 1, \dots, n$, y tales que $f(x) < y_i + \epsilon$ para todo $x \in V_i$. Un resultado (ver Teorema 2.13 en [**Rud87**]) asegura la existencia de unas funciones $h_i \in C_c(X)$ para $i = 1, \dots, n$ tales que

$$0 \leq h_i(x) \leq 1 \quad y \quad \mathrm{sop}(h_i) \subset V_i$$

para $i = 1, \dots, n$ y para todo $x \in X$. Además, verifica

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$$

siempre que $x \in K$. Por tanto, puede escribirse

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i f.$$

Nótese entonces que $h_i f \leq (y_i + \epsilon)h_i$. Además, $y_i - \epsilon < f(x)$ en A_i. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \sum_{i=1}^{n} \Lambda(h_i f) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon)\Lambda h_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon)\mu(V_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon)\mu(A_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon)\frac{\epsilon}{n} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - \epsilon)\mu(A_i) + \sum_{i=1}^{n} 2\epsilon\mu(A_i) + n(b+\epsilon)\frac{\epsilon}{n} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - \epsilon)\mu(A_i) + 2\epsilon\mu(K) + (b+\epsilon)\epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f\,d\mu + \epsilon[2\mu(K) + b + \epsilon] \\
&= \int_X f\,d\mu + \epsilon[2\mu(K) + b + \epsilon].
\end{aligned}$$

Como ϵ era arbitrario, la desigualdad (1.13) queda probada. □

La demostración de todos los pasos implica la del resultado. □

* * *

4. El teorema de Weierstraß a partir del teorema de Fejér

Otro resultado que se necesitará en la prueba del teorema espectral para operadores hermíticos es el conocido teorema de aproximación de Weierstraß, pero antes es necesario recordar un resultado notable en análisis de Fourier.

El teorema de Fejér asegura que si $f \in C[-\pi, \pi]$ con $f(-\pi) = f(\pi)$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$$

uniformemente en $\mathbf{R}$, donde

$$\sigma_N f(a) = \frac{s_0 f(a) + s_1 f(a) + \cdots + s_N f(a)}{N+1}$$

y

$$s_N f(a) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

Se procede a enunciar y probar en el caso real y unidimensional, ya que, en este caso, puede entenderse como una consecuencia del teorema de Fejér. Esta idea se encuentra expuesta en [**KF82**], y se desarrollará a continuación.

TEOREMA 1.27 (Aproximación de Weierstraß). *Toda función continua definida en un compacto de la recta real es límite uniforme de polinomios.*

Prueba. Sea $f = f(x)$ una función continua definida en el segmento $[a, b]$. Se desea aproximar f uniformemente mediante polinomios algebraicos. Si se realiza un cambio de variable

$$x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a,$$

se obtiene una función continua

$$\phi(t) = f\left(\frac{t(b-a)}{\pi} + a\right)$$

definida en el intervalo $[0, \pi]$. Entonces, prolónguese al segmento $[-\pi, \pi]$ definiendo

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ \phi(-t) & \text{si} \quad -\pi \leq t \leq 0, \end{cases}$$

y, por periodicidad, a toda la recta real. Ahora, dado que $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$, el teorema de Fejér proporciona un polinomio trigonométrico $\sigma_N\phi = \sigma_N\phi(t)$ tal que

$$|\phi(t) - \sigma_N\phi(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo t. Además, todo polinomio trigonométrico puede ser desarrollado en serie de Taylor que converja en cualquier intervalo finito. Sea $P_m = P_m(t)$ la suma parcial m-ésima de la serie de Taylor de $\sigma_N\phi$ tal que

$$|\sigma_N\phi(t) - P_m(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $0 \leq t \leq \pi$. Entonces,

$$|\phi(t) - P_m(t)| \leq |\phi(t) - \sigma_N\phi(t)| + |\sigma_N\phi(t) - P_m(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

para todo $0 \leq t \leq \pi$. Efectuando el cambio

$$t = \frac{x-a}{b-a}\pi$$

se obtiene un polinomio

$$Q_m(x) = P_m\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right),$$

que satisface la condición

$$|f(x) - Q_m(x)| < \epsilon$$

para $a \leq x \leq b$. □

Dado K un compacto de la recta real, los polinomios son densos en el espacio de las funciones continuas definidas en K. Esta extensión se puede realizar aplicando algún teorema de extensión, como se verá en el capítulo siguiente. No obstante, en este caso la generalización es especialmente sencilla.

Supóngase $K \subset [a, b]$, y $f \in C(K)$. Se tiene que

$$[a, b] \setminus K = \bigsqcup_j I_j,$$

donde $I_j = (a_j, b_j)$. Ahora basta definir f en cada I_j de manera lineal. La aplicación del resultado anterior implica que f es límite uniforme de polinomios en todo $[a, b]$, y en particular, en K.

Capítulo 2

El teorema espectral. Cálculo funcional para operadores

El teorema espectral para operadores hermíticos afirma que todo operador T hermítico definido en un espacio de Hilbert *separable* es esencialmente un operador de multiplicación definido en $L^2(\mu)$ con una medida μ determinada. Este resultado abrirá la puerta a un cálculo funcional para este tipo de operadores, y será determinante a la hora de probar la desigualdad de von Neumann (0.1) y el teorema ergódico. Como generalización, con la ayuda de la teoría de álgebras de Banach descrita en el capítulo anterior, se construirá un cálculo funcional para una cantidad finita de operadores normales que conmutan en un espacio de Hilbert común.

1. Presentación y demostración del resultado

TEOREMA 2.1 (Teorema espectral para operadores hermíticos). *Todo operador hermítico es unitariamente equivalente a un operador multiplicativo.*

En detalle, el teorema afirma que si T es un operador hermítico, i.e. tal que $T^* = T$, definido en un espacio de Hilbert *separable* H, entonces existe una función φ esencialmente acotada definida en un espacio de medida (X, Σ, μ), y existe una isometría $U \colon L^2(\mu) \to H$, tales que

$$\left(U^{-1}TUf\right)(x) = (M_\varphi f)(x)$$

para todo $x \in X$, y para cada $f \in L^2(\mu)$. Este hecho también es válido para operadores normales, pero al contrario de la prueba que va a realizarse aquí, no puede ser demostrado mediante resultados elementales.

DEFINICIÓN 2.2. Sea T un operador hermítico en un espacio de Hilbert H. Un elemento $\xi \in H$ es un *vector cíclico* para T si el conjunto formando por todos los elementos de la forma $p(T)\xi$, donde p es un polinomio con coeficientes *complejos*, es denso en H.

Los vectores cíclicos pueden no existir, pero se conoce un argumento que asegura que H es siempre suma directa de familias de subespacios tales que cada restricción de T a cada uno de ellas posea al menos un vector cíclico. Así, probado el resultado en cada subespacio, se sigue para H. Se procede a probar tal afirmación.

Sea $T \colon H \to H$ un operador hermítico, se desea una descomposición de H tal que

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i$$

y verifique las dos condiciones siguientes:

I. $T(H_i) \subseteq H_i$ para todo $i \in I$.

II. Para cada $i \in I$ existe un elemento $f_i \in H_i$ tal que

$$\operatorname{span}\{T^n f_i : n \geq 0\} \tag{2.1}$$

es denso en H_i y además $H_i \perp H_j$ si $i \neq j$.

En primer lugar, obsérvese que, para cada $f \in H$, el espacio definido por (2.1)

$$M = \operatorname{span}\{T^n f : n \geq 0\}$$

reduce a T, es decir, $T(M) \subseteq M$ y $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$. En efecto, es claro que $T(M) \subseteq M$; ahora, si $h \in M^{\perp}$ y $g \in M$, entonces

$$\langle Th, g\rangle = \langle h, Tg\rangle = 0$$

ya que $Tg \in M$. Por tanto, $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$. Cuando esto ocurre se dice que el subespacio M *reduce a* T.

Se procede a construir tal descomposición. Tómese $f \in H \setminus \{0\}$, y escríbase

$$H_f = \overline{\operatorname{span}}\{T^n f : n \geq 0\}.$$

Como H es separable, existe un conjunto $D = \{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ denso en H; y, sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $f_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Sea entonces $H_1 = H_{f_1}$ y $K_1 = H_1^{\perp}$. Si $K_1 = \{0\}$ la descomposición queda completada, pues $H_1 = H$. En otro caso, tómese

$$y_m = P_{K_1} f_m, \quad m \geq 2.$$

Entonces, existe un primer m_0 tal que $y_{m_0} \neq 0$. Cuando esto ocurre, $f_{m_0} \notin H_1$, y

$$f_1, f_2, \ldots, f_{m_0-1} \in H_1.$$

Defínase entonces

$$H_2 = H_{y_{m_0}} = \overline{\operatorname{span}}\{T^n P_{K_1} f_{m_0} : n \geq 0\}.$$

Así, $f_{m_0} \in H_1 \oplus H_2$. Ahora bien, tómese $K_2 = H_2^{\perp}$, y repítase el proceso. Si $K_2 = \{0\}$, la descomposición queda completada. Este método me genera una sucesión de espacios $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que

$$D \subseteq H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots,$$

y por densidad,

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H_n.$$

Además, un ejercicio permite comprobar que las propiedades requeridas de la descomposición. El hecho de que sea una cantidad a lo sumo numerable es por construcción, pero de hecho se desprende de la separabilidad del espacio de Hilbert H. El siguiente lema prueba tal afirmación.

LEMA 2.3. *Sea H un espacio de Hilbert separable, y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de H tales que*

I. *$M_i \perp M_j$ para todo $i, j \in I$ con $i \neq j$.*
II. *$M_i \neq \{0\}$ para todo $i \in I$.*

Entonces, I es finito o numerable.

Prueba. Sea $e_i \in M_i$ con $\|e_i\| = 1$. Dados e_i y e_j, se verifica que

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{\|e_i\|^2 + \|e_j\|^2} = \sqrt{2},$$

siempre que $i \neq j$. Considérese, gracias a la hipótesis de separabilidad de H, un subespacio denso y numerable D en H. Por ello, para todo $i \in I$ existe un elemento $d_i \in D$ tal que

$$\|d_i - e_i\| < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Así, dados d_i y d_j se verifica que

$$\|d_i - d_j\| > \frac{\sqrt{2}}{3}, \tag{2.2}$$

y entonces forzosamente $i \neq j$. Por tanto, se ha construido una aplicación

$$\begin{aligned} \Xi\colon \{e_i\}_{i\in I} &\longrightarrow D \\ e_i &\longmapsto \Xi(e_i) = d_i \end{aligned}$$

que es inyectiva, en virtud de (2.2); lo que finalmente asegura que

$$\operatorname{card}(I) \leq \aleph_0,$$

lo que concluye la demostración. □

Por tanto, sin pérdida de generalidad, supóngase que $x \in H$ es un vector cíclico de T.

Prueba. [Teorema espectral para operadores hermíticos]
Para cada polinomio $p \in \mathbf{R}[z]$, escríbase

$$Lp = \langle p(T)x, x \rangle .$$

Es claro que L es un operador lineal y continuo, ya que

$$\begin{aligned} |Lp| &\leq \|p(T)\| \cdot \|x\|^2 \\ &= \rho(p(T)) \cdot \|x\|^2 \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(T))\} \cdot \|x\|^2 \\ &= \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\} \cdot \|x\|^2, \end{aligned}$$

es decir, está acotado para polinomios. Aquí se ha usado la relación

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T)). \tag{2.3}$$

Para ver la prueba de este hecho uno puede dirigirse a [**Hal51**]. Se concluye por tanto que, por el teorema de aproximación de Weierstraß, L tiene una extensión acotada, que se denotará por L nuevamente, en el espacio de las funciones continuas reales definidas en $\sigma(T)$.

Para probar que L es positivo, obsérvese que si $p \in \mathbf{R}[z]$, entonces

$$\left\langle (p(T))^2 x, x \right\rangle = \langle p(T)x, p(T)x \rangle = \|p(T)x\|^2 \geq 0.$$

Si $f \in C(\sigma(T))$ es no negativa, entonces aproxímese $\sqrt{f}$ uniformemente por polinomios reales; por ello, esto prueba que $Lf \geq 0$, pues f es límite uniforme de los cuadrados de polinomios reales. El teorema de Riesz asegura que existe una única medida finita μ definida en los conjuntos de Borel de $\sigma(T)$ tal que

$$Lp = \langle p(T)x, x\rangle = \int_{\sigma(T)} p\, d\mu$$

definida para todo $p \in \mathbf{R}[z]$.

Para cada $q \in \mathbf{C}[z]$ escríbase

$$Uq = q(T)x.$$

Dado el carácter hermítico de T,

$$(q(T))^* = \overline{q}(T)$$

es un polinomio en T, y también

$$(q(T))^* \cdot q(T) = |q|^2(T).$$

Se tiene así que

$$\int_{\sigma(T)} |q|^2\, d\mu = \langle \overline{q}(T)q(T)x, x\rangle = \langle (q(T))^* q(T)x, x\rangle = \|q(T)x\|^2 = \|Uq\|^2.$$

Esto significa que el operador

$$U \colon \mathbf{C}[z] \subset L^2(\mu) \to H$$

es una isometría. Además, dado que los polinomios son densos en $L^2(\mu)$, entonces existe una única extensión isométrica de $L^2(\mu)$ en H. La asunción de que x sea un vector cíclico implica que la imagen de U es densa, y por tanto igual, al espacio H.

Sólo resta probar que la transformación de T por U es efectivamente una multiplicación. Escríbase $\mathrm{id}(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$. Dado un polinomio $q \in \mathbf{C}[z]$, defínase

$$\hat{q}(\lambda) = \lambda q(\lambda) = \mathrm{id}(\lambda) q(\lambda).$$

Entonces,

$$U^{-1}TUq = U^{-1}Tq(T)x = U^{-1}\hat{q}(T)x = U^{-1}U\hat{q} = \hat{q} = \mathrm{id} \cdot q.$$

Por tanto, $U^{-1}TU$ coincide con el operador de multiplicación M_{id} sobre el espacio de polinomios con coeficientes complejos, y un argumento de densidad permite concluir que $U^{-1}TU$ es igual a una multiplicación.

Se ha probado que el resultado es cierto en cada subespacio H_n de H que contiene a un vector cíclico, i.e., que H_n es isométricamente isomorfo a $L^2(\mu_n)$, donde (X_n, Σ_n, μ_n) es un espacio de medida finito. Para validar este resultado en el espacio total H, basta notar que

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H_n$$

es isométricamente isomorfo a $L^2(\mu)$. Aquí (X, Σ, μ) es un espacio de medida (no necesariamente finito, pero sí $\sigma-$finito), formado por

$$X = \bigsqcup_{n\in\mathbf{N}} X_n,$$

Σ una $\sigma-$álgebra de X, y μ una medida que está definida como μ_n en cada H_n. □

* * *

2. Cálculo funcional para operadores normales

2.1. Cálculo funcional de operadores hermíticos. Una consecuencia del teorema espectral es la posiblidad de definir un cálculo funcional para operadores hermíticos.

Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ diagonalizable con $A = PDP^{-1}$, donde P es una matriz invertible cuyos vectores columna son vectores propios de A, y D es una matriz diagonal formada por los valores propios de A. Considérese también $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua. Uno puede definir

$$f(A) = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Esto inspira la generalización de esta noción a otros espacios más generales.

Si T es un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert H, y $p \in \mathbf{C}[x]$ es un polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tiene sentido el operador $p(T)$, definido de manera natural por

$$p(T)x = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k x,$$

para cada $x \in H$. La descomposición de un operador hermítico permite dar un paso más. Si además T es hermítico, ya se conoce que existe $\varphi \in L^\infty(\mu)$ y una isometría $U\colon L^2(\mu) \to H$ tal que

$$T = UM_\varphi U^*.$$

Si f es una función medible y acotada, uno puede definir

$$f(T) = UM_{f\circ\varphi}U^*.$$

Cabe destacar que la función $f \circ \varphi \in L^\infty(\mu)$, y por tanto el operador multiplicativo $M_{f\circ\varphi}$ tiene sentido.

2.2. El teorema de Weierstraß en compactos de $\mathbf{R}^N$. Lo más sorprendente de los resultados de aproximación por polinomios de Weierstraß son su enorme utilidad y el gran número de pruebas que se han ido aportando a lo largo de los años. A partir del resultado clásico en una variable real (véase el Teorema 1.27) se puede probar, usando el teorema de extensión de Tietze, dicha generalización para cualquier compacto de $\mathbf{R}^N$, y en general, de $\mathbf{C}^N$.

Teorema 2.4 (Teorema de Weierstraß en compactos de $\mathbf{R}^N$). *Toda función continua definida en un compacto de $\mathbf{R}^N$ es límite uniforme de polinomios con coeficientes complejos.*

Primeramente, se trata de ver que es válido para $C[0,1]^2$. Esto séra suficiente para probar el resultado general, ya que bastará aplicar el resultado de Tietze y un argumento inductivo. En lo que sigue, dadas $f, g \in C[0,1]$, se denotará por $f \otimes g$ a la función de $C[0,1]^2$ dada por

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y) \in C[0,1]^2.$$

TEOREMA 2.5. *Si* $E = \{f \otimes g : f, g \in C[0,1]\}$, *entonces*

$$\overline{\operatorname{span}}(E) = C[0,1]^2.$$

Prueba. Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínanse las funciones $f_{n,k} \in C[0,1]$, para $k \in \{0, \ldots, n\}$, como especifica la siguiente figura:

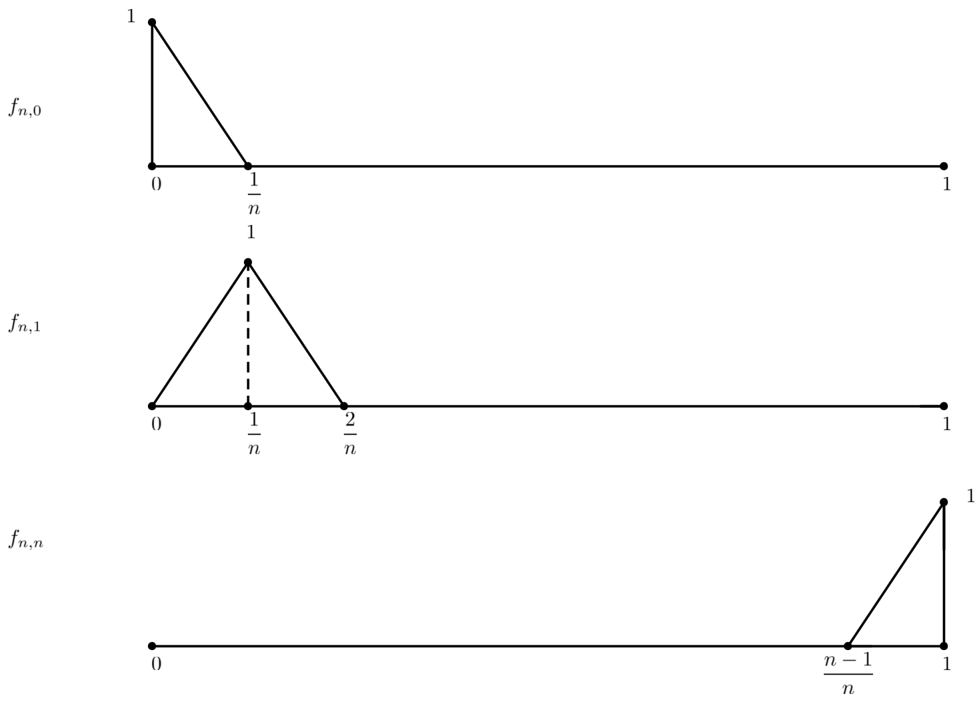

FIGURA 1. Las funciones $f_{n,k}$, para $k \in \{0, \ldots, n\}$

Se tiene que $0 \leq f_{n,k} \leq 1$ y $f_{n,k}\left(\frac{k}{n}\right) = 1$, para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$. Además,

$$\sum_{k=0}^{n} f_{n,k}(x) = 1,$$

para todo $x \in [0,1]$. Por último, $f_{n,k}(x) = 0$ siempre que

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \frac{1}{n}.$$

Dada $G \in C[0,1]^2$, sea

$$F_n = \sum_{j,k=0}^{n} G\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right) f_{n,k} \otimes f_{n,j} \in \operatorname{span}(E).$$

Se procede a probar que $F_n \to G$ en $C[0,1]^2$. Previo a ello, recuérdese el teorema de Heine, que asegura la continuidad uniforme en cada variable. Esto es, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ y $|y - y'| < \delta$ entonces

$$|G(x,y) - G(x',y')| < \epsilon.$$

Sea $n \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
|F_n(x,y) - G(x,y)| &= \left| \sum_{j,k} G\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right) f_{n,k}(x) f_{n,j}(y) - G(x,y) \right| \\
&\leq \sum_{j,k} \left| G\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right) - G(x,y) \right| f_{n,k}(x) f_{n,j}(y) \leq \epsilon,
\end{aligned}
$$

pues

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \frac{1}{n} < \delta,$$

en caso contrario $f_{n,k}(x) = 0$; y análogamente,

$$\left| \frac{j}{n} - y \right| < \frac{1}{n} < \delta,$$

en caso contrario $f_{n,j}(y) = 0$. Es decir, se acaba de probar que

$$\|F_n - G\|_{C[0,1]^2} \leq \epsilon$$

para un $n \in \mathbf{N}$ suficientemente grande. □

Esto prueba el teorema de Weierstraß en el cuadrado. En general, mediante un razonamiento inductivo, uno puede generalizar el resultado a $[0,1]^N$. También, sin mucho esfuerzo, se puede adaptar la prueba para conjuntos de la forma $[-M, M]^N$, siendo $M > 0$ y $N \geq 1$. A continuación se presenta el teorema de extensión de Tietze. Gracias a él se podrá probar el resultado central de este apartado.

Teorema 2.6 (Teorema de extensión de Tietze). *Sea (X,d) un espacio métrico, sea $C \subset X$ cerrado, y sea $f\colon C \to \mathbf{R}$ una función real, continua y acotada. Entonces, existe una función continua y acotada $F\colon X \to \mathbf{R}$ tal que $F_C = f$ y $\|F\|_X = \|f\|_C$.*

Prueba. Sea $f\colon C \to \mathbf{R}$ continua tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in C$. Entonces, $\hat{f} := f/M$ satisface que $|\hat{f}(x)| \leq 1$ para todo $x \in C$. Mediante este procedimiento, uno puede suponer sin pérdida de generalidad que desde un principio $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in C$. Defínanse los conjuntos

$$C_1 = \{x \in C : f(x) \leq -1/3\} \quad y \quad C_2 = \{x \in C : f(x) \geq 1/3\}.$$

Es obvio notar que son conjuntos $C_1, C_2 \subseteq X$ son cerrados y disjuntos. El lema de Urysohn (véase Lema 1.24) afirma que existe una función continua $f_1\colon X \to [-1/3, 1/3]$ tal que

$$f_{1|C_1} = -\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad f_{1|C_2} = \frac{1}{3}.$$

Por construcción, se verifica que

$$|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$$

para todo $x \in C$. Aplicando el mismo procedimiento a la función $f - f_1$, se obtiene una función continua $f_2\colon X \to [-2/3^2, 2/3^2]$ tal que

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Iterando este proceso, se consigue una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ continuas en X y tales que

$$|f_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad \text{y} \quad \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{2.4}$$

para todo $x \in C$. El criterio de mayoración de Weierstraß afirma que la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente hacia una función continua $F\colon X \to \mathbf{R}$, por la primera cota de (2.4), y además $F_{|C} = f$, por la segunda cota de (2.4). Finalmente,

$$\|F\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 = \|f\|_C.$$

Esto prueba el resultado. □

Sea $K \subset \mathbf{R}^N$ compacto. Sea $M > 0$ tal que $K \subseteq [-M, M]^N$. El teorema de Tietze garantiza que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} C[-M,M]^N & \longrightarrow & C(K) \\ f & \longmapsto & f_{|K} \end{array}$$

es sobreyectiva. Dado que en $C[-M, M]^N$ el resultado es válido, también será cierto en $C(K)$, debido a la sobreyectividad de la aplicación anterior, ya que cualquier función $f \in C(K)$ puede extenderse hasta $C[-M, M]^N$ manteniendo su norma.

2.3. Cálculo funcional para operadores normales. El objetivo de este apartado es proporcionar un cálculo funcional para una cantidad finita de operadores normales que conmuten. Más precisamente, dar sentido a expresiones del tipo $f(T_1, \ldots, T_n)$, donde f es una función definida en un subconjunto del plano complejo $\mathbf{C}^n$ que satisface determinadas condiciones.

Considérese H un espacio de Hilbert, y $T_1, \ldots, T_n$ una cantidad finita de operadores tales que:

- I. (Lineales y continuos) $T_i \in \mathcal{B}(H)$;
- II. (Normales) T_i es normal;
- III. (Conmutan) $T_i T_j = T_j T_i$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$.

Defínase A como cierre, en la topología inducida por la norma, del álgebra engendrada por la cantidad finita de operadores $T_1, T_1^*, \ldots, T_n, T_n^*$, i.e.,

$$A = \overline{\operatorname{alg}}\{T_1, T_1^*, \ldots, T_n, T_n^*\}. \tag{2.5}$$

Dicho de otro modo, A está constituida por el cierre de todas las combinaciones necesarias para que A sea un álgebra, de acuerdo con la Definición 1.1. Una definición equivalente es

$$A = \overline{\{p(T_1, T_1^*, \ldots, T_n, T_n^*) : p \in \mathbf{C}[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}}.$$

La definición de A tiene sentido pues $T_i T_j^* = T_j^* T_i$, consecuencia del resultado que se presenta a continuación, conocido como el teorema de Fuglede, cuya demostración será omitida.

LEMA 2.7 (Teorema de Fuglede). *Sea H un espacio de Hilbert. Sean $T, N \in \mathcal{B}(H)$ con N normal. Si $TN = NT$, entonces $TN^* = N^*T$.*

Observación 2.8. En realidad el resultado anterior se verifica en condiciones más generales, tal extensión es conocido como el teorema de Calvin-Richard-Putnam (véase [**Rud91**]). Éste afirma, que si $M, N, S \in \mathcal{B}(H)$, y M, N son normales; entonces, $MS = SN$ implica que $M^*S = SN^*$.

PROPOSICIÓN 2.9. *A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad.*

Prueba. A es un álgebra es por definición; además, al ser cerrada, es también de Banach, por serlo $\mathcal{B}(H)$. También tiene unidad I, pues corresponde al polinomio idénticamente uno. Por tanto, sólo es necesario ver que es conmutativa.

Dado que todos los T_i's conmutan entre sí, sólo es necesario comprobar lo siguiente: Si dos operadores normales conmutan, entonces su producto es normal.

Sean $T, S \in \mathcal{B}(H)$ normales tales que $TS = ST$. El teorema de Fuglede (Lema 2.7) afirma que $ST^* = T^*S$. Entonces,

$$TS(TS)^* = TSS^*T^* = (TS^*)(ST^*) = (S^*T)(ST^*) = S^*(TT^*)S = S^*T^*TS = (TS)^*TS.$$

Esto prueba que en efecto A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad. □

Defínase la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \Phi\colon \Delta(A) &\longrightarrow \mathbf{C}^n \\ \Lambda &\longmapsto \Phi(\Lambda) = (\Lambda(T_1), \dots, \Lambda(T_n)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se equipa a $\Delta(A)$ con la topología $*-$débil de A^*; de este modo, gracias a la Proposición 1.10, $\Delta(A)$ es un espacio compacto. La topología considerada en $\mathbf{C}^n$ es la usual. El objetivo es comprobar que esta aplicación es un homeomorfismo sobre su imagen.

Primeramente, es necesario ver que Φ está bien definida. En efecto, si $\Lambda \in \Delta(A)$, es claro que

$$(\Lambda(T_1), \dots, \Lambda(T_n)) \in \mathbf{C}^n,$$

pues $\Lambda \in A^*$ y cada $T_i \in A$. De hecho, se verifica el siguiente resultado:

TEOREMA 2.10. *La aplicación Φ definida en* (2.6) *es continua y inyectiva. Más precisamente, esta aplicación establece un homeomorfismo entre $\Delta(A)$ y su imagen $\Phi(\Delta(A))$.*

Prueba. Para cada $T \in A$, se tiene que la aplicación

$$\Lambda \longmapsto \Lambda(T)$$

es continua en $\Delta(A)$, por definición de la topología $*-$débil. Es inmediato entonces que Φ sea continua.

Pruébese ahora que Φ es inyectiva. Para cada $T \in A$, es válida la igualdad

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\frac{T - T^*}{2i}.$$

Si se denota por

$$T_{\Re} = \frac{T+T^*}{2} \quad \text{y} \quad T_{\Im} = \frac{T-T^*}{2i},$$

entonces

$$T = T_{\Re} + iT_{\Im} \quad \text{y} \quad T^* = T_{\Re} - iT_{\Im},$$

pues $T_{\Re}$ y $T_{\Im}$ son hermíticos. La actuación de Λ permite obtener

$$\Lambda(T^*) = \Lambda(T_{\Re}) - i\Lambda(T_{\Im}) = \overline{\Lambda(T_{\Re}) + i\Lambda(T_{\Im})} = \overline{\Lambda(T)}.$$

Por tanto, lo que se deduce de este razonamiento es que una vez conocido $\Lambda(T_1), \ldots, \Lambda(T_n)$ es posible conocer el valor de cualquier polinomio $p(T_1, T_1^*, T_2, T_2^*, \ldots, T_n, T_n^*)$, y por densidad, cualquier elemento de A. Así, si $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, entonces

$$(\Lambda_1(T_1), \ldots, \Lambda_1(T_n)) \neq (\Lambda_2(T_1), \ldots, \Lambda_2(T_n))\,.$$

Esto prueba la inyectividad de Φ. $\square$

Observación 2.11. Dado que $\Delta(A)$ es compacto en la topología $*-$débil de A, el conjunto

$$\tilde{\Delta}(A) = \Phi(\Delta(A))$$

es también compacto, por ser la imagen de un compacto a través de una aplicación continua.

Defínase otra aplicación lineal

$$\begin{aligned} \Upsilon\colon A &\longrightarrow C(\tilde{\Delta}(A)) \\ T &\longmapsto \Upsilon(T)(z_1, \ldots, z_n) = \langle \Phi^{-1}(z_1, \ldots, z_n), T \rangle\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Se dota a A de la norma de $\mathcal{B}(H)$ y a $C(\tilde{\Delta}(A))$ de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Aquí $\langle \Phi^{-1}(z_1, \ldots, z_n), T\rangle$ representa la acción de $\Phi^{-1}(z_1, \ldots, z_n) \in A^*$ sobre $T \in A$. La aplicación Υ está bien definida debido a las magníficas propiedades de las que goza Φ.

Teorema 2.12. *La aplicación Υ definida en (2.7) es una isometría sobreyectiva.*

Prueba. El hecho de que Υ sea una isometría se deduce inmediatamente del Teorema 1.12 y de que Φ es un homeomorfismo, pues si $T \in A$,

$$\|\Upsilon(T)\|_\infty = \sup_{(z_1,\ldots,z_n)\in\tilde{\Delta}(A)} \left|\left\langle \Phi^{-1}(z_1, \ldots, z_n), T\right\rangle\right| = \sup_{\Lambda\in\Delta(A)} |\Lambda(T)| = \rho(T) = \|T\|.$$

Para la sobreyectividad, se usará el teorema de Weierstraß para compactos de $\mathbf{R}^{2n}$, que es isomorfo a $\mathbf{C}^n$. Para ello, el primer paso consiste en ver que $\Upsilon(A)$ contiene a los polinomios. Posteriormente un argumento de densidad finalizará la prueba.

Considérese $p \in \mathbf{C}[x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n]$, i.e., un polinomio de $2n-$variables reales y con coeficientes complejos. Aquí

$$x_i = \frac{z_i + \overline{z_i}}{2} = \operatorname{Re}(z_i) \quad \text{y} \quad y_i = \frac{z_i - \overline{z_i}}{2} = \operatorname{Im}(z_i)$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nótese que entonces $p(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ puede escribirse como

$$\hat{p}(z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_n, \overline{z_n}).$$

Sea

$$T = \hat{p}(T_1, T_1^*, \ldots, T_n, T_n^*) \in \operatorname{alg}\{T_1, T_1^*, \ldots, T_n, T_n^*\} \subseteq A.$$

La cuestión se centra en ver si

$$\left\langle \Phi^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n), T \right\rangle = \hat{p}(a_1, \overline{a_1}, \ldots, a_n, \overline{a_n}), \tag{2.8}$$

para todo $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \tilde{\Delta}(A)$. Por formalismo, en lo que sigue

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \hat{p}(a_1, \overline{a_1}, \ldots, a_n, \overline{a_n}).$$

Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \tilde{\Delta}(A)$, entonces existe $\Lambda = \Phi^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Delta(A)$ tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= \Lambda(T_1), \\ a_2 &= \Lambda(T_2), \\ &\vdots \\ a_n &= \Lambda(T_n). \end{aligned}$$

Entonces, debido a las propiedades de los elementos de $\Delta(A)$,

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{p}(T_1, T_1^*, \ldots, T_n, T_n^*)) &= \hat{p}(\Lambda(T_1), \Lambda(T_1^*), \ldots, \Lambda(T_n), \Lambda(T_n^*)) \\ &= \hat{p}(a_1, \overline{a_1}, \ldots, a_n, \overline{a_n}) \\ &= f(a_1, a_2, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad (2.8). Así, se ha conseguido probar que $\Upsilon(A)$ contiene a los polinomios. Ahora bien, dado que A es un álgebra de Banach (en particular completo) y Υ una isometría, entonces $\Upsilon(A)$ es un subespacio completo en $C(\tilde{\Delta}(A))$; además, es cerrado por ser $C(\tilde{\Delta}(A))$ de Banach. La aplicación del teorema de Weierstraß implica que necesariamente

$$\Upsilon(A) = C(\tilde{\Delta}(A)).$$

Esto concluye la prueba. □

El resultado anterior permite asegurar la existencia de Υ^{-1}, y con ello, surge la posibilidad de dar un sentido a la expresión $f(T_1, \ldots, T_n)$ cuando $f \in C(\tilde{\Delta}(A))$.

Definición 2.13. En las condiciones precedentes, se define

$$f(T_1, \ldots, T_n) = \Upsilon^{-1}(f).$$

En el caso de un solo operador, $\tilde{\Delta}(A)$ no es más que $\sigma_A(T)$, debido al Teorema 1.12. Nótese que en general es difícil dar un sentido a expresiones del tipo $f(T_1, \ldots, T_n)$, ya que hay varias maneras de definir el *joint spectrum* de una cantidad finita de operadores que conmutan; este concepto no se tratará en este trabajo. En general,

$$\tilde{\Delta}(A) \subseteq \sigma_A(T_1) \times \sigma_A(T_2) \times \cdots \times \sigma_A(T_n). \tag{2.9}$$

Ejemplo 2.14. Considérese $\overline{D}(0,1) \subseteq \mathbf{R}^2$, y $H = L^2\left(\overline{D}(0,1), m_2\right)$, donde m_2 denota la medida de Lebesgue bidimensional. Defínanse los operadores

$$\begin{aligned} T_1 \colon L^2\left(\overline{D}(0,1), m_2\right) &\longrightarrow L^2\left(\overline{D}(0,1), m_2\right) \\ f = f(x_1, x_2) &\longmapsto T_1 f(x_1, x_2) = x_1 \cdot f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_2\colon L^2\left(\overline{D}(0,1), m_2\right) &\longrightarrow L^2\left(\overline{D}(0,1), m_2\right) \\ f = f(x_1, x_2) &\longmapsto T_2 f(x_1, x_2) = x_2 \cdot f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Dicho de otro modo, cada T_i es el operador de multiplicación inducido por la función $\varphi_i(x_1, x_2) = x_i$. En este caso

$$A = \overline{\{p(T_1, T_2) : p \in \mathbf{C}[x_1, x_2]\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}}.$$

Se procede a probar que si $(\alpha, \beta) \notin \overline{D}(0,1)$ entonces $(\alpha, \beta) \notin \tilde{\Delta}(A)$. Esto implicaría en particular que $\tilde{\Delta}(A) \subseteq \overline{D}(0,1)$, y una vez conocido el espectro de cada T_i, sería un ejemplo de la inclusión estricta de (2.9).

Por reducción al absurdo, supóngase que $(\alpha, \beta) \in \tilde{\Delta}(A)$. Entonces, debe existir $\Lambda \in \Delta(A)$ tal que

$$\Lambda(T_1) = \alpha,$$
$$\Lambda(T_2) = \beta.$$

Así, el operador

$$S = (T_1 - \alpha I)(T_1 - \alpha I) + (T_2 - \beta I)(T_2 - \beta I)$$

es invertible. Esto es cierto pues S no es más que el operador de multiplicación inducido por la función

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2,$$

que es una función continua e invertible pues $\varphi(x_1, x_2) \geq \delta > 0$ para algún $\delta > 0$, y para todo $(x_1, x_2) \in \overline{D}(0,1)$. Por tanto, mediante un argumento de densidad, S es invertible en A. Más precisamente, S^{-1} es el operador de multiplicación inducido por la función $1/\varphi$. Esto es una contradicción, pues si S es invertible en A no puede existir $\Lambda \in \Delta(A)$ tal que

$$\Lambda(S) = \Lambda(T_1 - \alpha I)\Lambda(T_1 - \alpha I) + \Lambda(T_2 - \beta I)\Lambda(T_2 - \beta I) = 0.$$

Se ha probado que $\tilde{\Delta}(A) \subseteq \overline{D}(0,1)$. Un ejercicio permite comprobar que $\sigma(T_i) = [-1, 1]$, para $i = 1, 2$. Así, esto muestra un ejemplo de (2.9). Además, se acompaña una imagen que ilustra una situación análoga (véase la Figura 2).

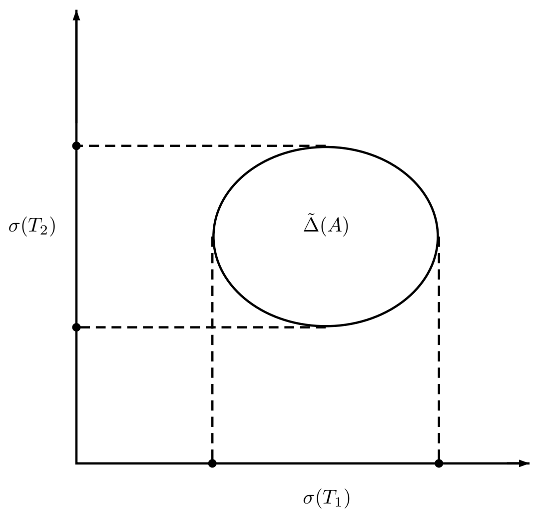

Figura 2. $\tilde{\Delta}(A) \subseteq \overline{D} \subsetneq \sigma_A(T_1) \times \sigma_A(T_2)$

Con la definición de un cálculo funcional para operadores normales se cierra este capítulo. Este arma, en el caso de dos operadores normales que conmutan, será de gran relevancia en la prueba de algunos resultados más interesantes de este trabajo, e.g., para probar la desigualdad de von Neumann para dos contracciones que conmutan.

Capítulo 3

Teoría de dilatación

1. Dilataciones unitarias

Supóngase que H es un subespacio de Hilbert de un espacio de Hilbert K, y sea P la proyección ortogonal de K sobre H. Cada operador S definido en K induce, de manera natural, un operador T en H definido por

$$Tf = PSf, \tag{3.1}$$

para cada $f \in H$. El siguiente diagrama conmutativo clarifica la situación:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{S} & K \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ H & \xrightarrow{T} & H \end{array}$$

La relación entre T y S también puede ser expresada por

$$TP = PSP.$$

La definición geométrica anterior de compresión-dilatación puede ser contrastada con el concepto de restricción-extensión. De hecho, si H es invariante por S, i.e. $SH \subseteq H$, entonces

$$P_{|H} = I,$$

por lo que no es necesario proyectar S sobre H, porque ya está en H. Así, T es la restricción de S a H y S es la extensión de T a K. En consecuencia, el concepto de restricción-extensión es un caso particular de compresión-dilatación, que ocurre cuando el operador definido en el espacio marco deja invariante al subespacio de éste.

Hay caminos algebraicos que llevan a las compresiones y dilataciones, del mismo modo que el geométrico lo hace. Uno de estos caminos son las formas cuadráticas. Tiene sentido considerar la forma cuadrática asociada a S y considerarla únicamente para los elementos de H, i.e., restringida a H. Esta restricción es una forma cuadrática en H, y por tanto, es inducida por un operador en H; tal operador es la compresión T. Dicho de otro modo, la compresión y dilatación de operadores no son sólo análogas a (y generalizaciones de) restriciones y extensiones, sino que en el marco de las formas cuadráticas, *son* una restricción y extensión: la forma cuadrática T es la restricción de la forma cuadrática S a H y la forma cuadrática de S es la extensión de la forma cuadrática de T a K.

Otra manifestación de compresiones y dilataciones en la teoría de espacios de Hilbert es su conexión con los operadores matriciales. Si K se descompone en H y $H^{\perp}$, y, correspondientemente, los operadores en K están escritos en términos matriciales, entonces una condición necesaria y suficiente para que S sea una dilatación de T es que la matriz de S tenga la forma

$$\begin{pmatrix} T & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.1. *Si $\|T\| \leq 1$, entonces T tiene una dilatación unitaria.*

Observación 3.2.

i. Nótese que la asunción sobre T es claramente necesaria. Si T tiene una dilatación S que es unitaria, entonces

$$\|Tf\| \leq \|PSf\| \leq \|Sf\| \leq \|f\|,$$

para cada $f \in H$.

ii. Usualmente, un operador T lineal y acotado con $\|T\| \leq 1$ se denomina *contracción*.

El siguiente ejemplo ilustra el Teorema 3.1 en un caso muy particular. Se decide incluir anterior a la prueba ya que ésta será una imitación directa de la técnica expuesta a continuación.

Ejemplo 3.3. Considérese $H = \mathbf{R}$, y $K = \mathbf{R}^2$. En este caso, la contracción T se reduce a multiplicar por un escalar $\alpha \in \mathbf{R}$ con $|\alpha| \leq 1$, esto es, $T = M_{x \mapsto \alpha x}$. La siguiente imagen trata descrifrar la situación.

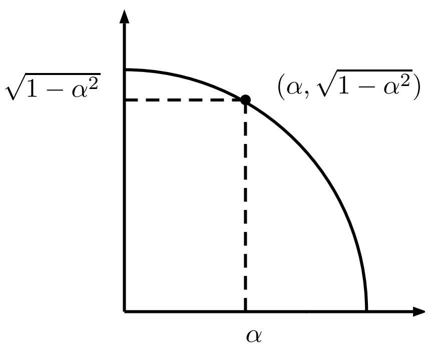

Figura 1. Idea de cómo construir la matriz de rotación

En términos geométricos, la afirmación es que la multiplicación $M_{x \mapsto \alpha x}$ en la recta puede ser lograda mediante una rotación en el plano, y posteriormente una proyección para volver a la recta real. La matriz de esta rotación es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{1-\alpha^2} \\ \sqrt{1-\alpha^2} & -\alpha \end{pmatrix}$$

Uno puede comprobar que $AA^* = A^*A = I$, y, de hecho, que $A^2 = I$ y $A^* = A$.

Prueba. La prueba consiste en extender la idea expuesta en el ejemplo anterior, pero se necesitan algunas comprobaciones. Entre ellas, se necesita ver qué papel se desempeña en lugar de α^2, ya que podría ser validado por T^2, TT^*, o T^*T. El resultado se describe tal y como sigue.

Dado H, escríbase $K = H \oplus H$, e identifíquese H con el primer sumando. Así, cada operador en K es una matriz de dos filas de operadores en H. En particular, la proyección P sobre H se describe tal que

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado T, el operador $I - TT^*$ es hermítico. En efecto,

$$(I - TT^*)^* = I^* - (TT^*)^* = I - TT^*. \tag{3.2}$$

Además, es no negativo ya que

$$\langle (I - TT^*)\, f, f\rangle = \langle f, f\rangle - \langle TT^* f, f\rangle = \|f\|^2 - \|T^* f\|^2 \geq \|f\|^2 - \|f\|^2 \geq 0, \tag{3.3}$$

para cada $f \in H$, donde se ha usado que $\|T^*\| = \|T\|$.
Ahora, debido a lo expuesto en la Subsección 2.1 del Capítulo 2, tiene sentido definir el operador

$$S = \sqrt{I - TT^*}.$$

Del mismo modo, debido a que $I - T^*T$ es hermítico, tiene sentido definir

$$R = \sqrt{I - T^*T}.$$

La dilatación U puede ser definida por

$$U = \begin{pmatrix} T & S \\ R & -T^* \end{pmatrix}.$$

El hecho de que U dilate a T es claro. Dado que R y S son hermíticos,

$$U^* = \begin{pmatrix} T^* & R \\ S & -T \end{pmatrix},$$

un cálculo directo permite escribir

$$U^*U = \begin{pmatrix} T^*T + R^2 & T^*S - RT^* \\ ST - TR & S^2 + TT^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & ST - TR \\ ST - TR & I \end{pmatrix},$$

y

$$UU^* = \begin{pmatrix} TT^* + S^2 & TR - ST \\ RT^* - T^*S & R^2 + T^*T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & TR - ST \\ RT^* - T^*S & I \end{pmatrix}.$$

Sólo resta probar, en el primer caso, que $TR = ST$. Primeramente, nótese que $TR^2 = S^2T$, pues se deduce inmediatamente de la definición de S y R. Un argumento de inducción permite probar fácilmente que

$$TR^{2n} = S^{2n}T,$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. En efecto, para $n = 1$ es cierto, se supone cierto para n y para $n + 1$ se verifica que

$$TR^{2(n+1)} = TR^{2n}R^2 = S^{2n}TR^2 = S^{2n}S^2T = S^{2(n+1)}T.$$

Ahora, la linealidad permite asegurar que

$$Tp(R^2) = p(S^2)T,$$

para todo $p \in \mathbf{C}[z]$. Esto implica que

$$TR = ST.$$

Razónese con $p(R^2)$. El miembro derecho es análogo.

Dado que R^2 es hermítico, ya se ha probado que

$$R^2 = UM_\varphi U^*,$$

luego

$$p(R^2) = \sum_{k=0}^{n} a_k R^{2n} = \sum_{k=0}^{n} a_k UM_{\varphi^k} U^* = \sum_{k=0}^{n} UM_{a_k\varphi^k} U^* = UM_{p(\varphi)} U^*.$$

Así, existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de polinomios reales tal que $p_n(x) \to \sqrt{x}$ uniformemente, y en consecuencia $p_n(R^2) \to R$. Nótese que esta sucesión es la misma que verifica que $p_n(S^2) \to S$.

Segundamente, $RT^* = T^*S$. En efecto, se tiene,

$$R^2T^* = (I - T^*T)T^* = T^* - T^*TT^* = T^*(T - T^*) = T^*S^2. \tag{3.4}$$

Repitiendo el argumento anterior, para $n = 1$ es cierto que

$$R^{2n}T^* = T^*S^{2n},$$

debido a la igualdad (3.4). Si se supone cierto para n, para $n + 1$ se satisface

$$R^{2(n+1)}T^* = R^{2n}R^2T^* = R^{2n}T^*S^2 = T^*S^{2n}S^2 = T^*S^{2(n+1)}.$$

Finalmente, gracias a la linealidad se verifica

$$p(R^2)T^* = T^*p(S^2),$$

para cualquier $p \in \mathbf{C}[z]$. El mismo argumento que en el primer caso permite asegurar que $RT^* = T^*S$, y esto concluye la demostración. □

Corolario 3.4. *Todo operador posee una dilatación normal.*

Prueba. Supóngase $T \in \mathcal{B}(H)$. La tarea consiste en crear la dilatación $S \in \mathcal{B}(K)$, i.e., definir S de manera que

$$Tf = PSf,$$

para todo $f \in K$. Para ello, la clave está en componer T con λI, donde I es la identidad en $\mathcal{B}(H)$, y $\lambda \in \mathbf{C}$ es tal que $|\lambda| \leq 1/\|T\|$. Así, se consigue

$$\|\lambda T\| = \|T\lambda I\| \leq \|T\| \cdot \|\lambda I\| = \|T\| \cdot |\lambda| \leq 1.$$

Entonces, dado que $\lambda T \in \mathcal{B}(H)$ es una contracción, el resultado anterior garantiza la existencia de un operador unitario S tal que

$$P\lambda T = \lambda PT = S.$$

Por tanto, el operador

$$\widetilde{S} = \lambda^{-1}S \in \mathcal{B}(K)$$

dilata a T, y además

$$\widetilde{S}\widetilde{S}^* = (\lambda^{-1}S)(\lambda^{-1}S)^* = |\lambda|^{-2}SS^* = |\lambda|^{-2}S^*S = (\lambda^{-1}S)^*(\lambda^{-1}S) = \widetilde{S}^*\widetilde{S}.$$

Esto concluye la prueba. □

* * *

2. Dilataciones por potencias

El objetivo de esta sección es mostrar el resultado de Sz. Nagy, que será la pieza fundamental de la demostración de la desigualdad de von Neumann. Un concepto esencial es una definición más fuerte de dilatación, el concepto de *dilatación por potencias*.

Definición 3.5. Sea H es un subespacio de Hilbert de un espacio de Hilbert K, y sea P la proyección ortogonal de K sobre H. Sea dice que T posee una *dilatación por potencias* si existe un operador $S \in \mathcal{B}(K)$ tal que

$$T^n f = PS^n f,$$

para cada $f \in H$, y para todo n natural. En tal caso se dice que S es una dilatación por potencias de T.

La contracción más sencilla es 0, y como el Teorema 3.1 exhibe, una de ellas es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero esta construcción no posee ninguna propiedad algebraica interesante. Por ejemplo, no es cierto que el cuadrado de una dilatación sea la dilatación del cuadrado; de hecho, un contraejemplo es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mientras que el cuadrado del operador nulo es el operador nulo. Pero, ¿hay alguna dilatación unitaria de 0 que se “preserve” con los cuadrados? La respuesta es que sí:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es un ejemplo. El cuadrado de esta dilatación es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es una dilatación del cuadrado de 0. Desafortunadamente, sin embargo, su cubo es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual es no una dilatación del cubo de 0. Esto puede ser remediado con

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pero la cuarta potencia vuelve a causar problemas. No hay fin en este proceso inductivo. En términos matriciales, una propiedad que debe poseer una dilatación por potencias unitaria del operador nulo es que sea una matriz unitaria con la propiedad de que una de sus entradas diagonales sea 0 y que, además, la correspondiente entrada en todas sus potencias sea también 0. El siguiente resultado proporciona la construcción adecuada.

TEOREMA 3.6 (Sz. Nagy, [**SN53**]). *Toda contracción posee una dilatación por potencias unitaria.*

Prueba. La prueba es constructiva. Dado H un espacio de Hilbert, defínase

$$K = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H.$$

Entonces, cada operador definido en K es una matriz infinita de operadores, en particular, la proyección de K sobre H es

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \iddots \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & (I) & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ \iddots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Aquí (I) indica que en la posición $(0,0)$ de la matriz es el operador identidad.

Dado T, defínase

$$S = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \iddots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \sqrt{I-TT^*} & (T) & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & -T^* & \sqrt{I-T^*T} & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \\ \iddots & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dado que S es triangular superior, sus potencias también poseerán esta propiedad, y los elementos diagonales de las potencias corresponden a las potencias de los elementos diagonales de S. Nuevamente, un simple cálculo permite demostrar estas afirmaciones. Se tiene que

$$S^* = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \iddots \\ & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \sqrt{I-TT^*} & -T & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & (T^*) & \sqrt{I-T^*T} & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \iddots & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

La única comprobación es que el operador

$$\sqrt{I-TT^*}$$

es autoadjunto. Esto es debido a que $I - TT^*$ es un operador hermítico y no negativo, por (3.2) y (3.3), por tanto el teorema espectral asegura que es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación inducido por una función compleja esencialmente acotada. De hecho, al ser hermítico, dicha función, póngase φ, debe ser real (véase la Proposición 1.20 del Capítulo 1). Por tanto, debido a la definición del operador $\sqrt{I-TT^*}$ dada en la Subsección 2.1, es un operador hermítico. De manera análoga, este argumento funciona para

$$\sqrt{I-T^*T}.$$

Esto concluye que $U^*U = U^*U = I$. $\square$

Esta demostración no es la más reveladora del resultado, pero sí es la más corta; se debe a [**Sch55**]. Este resultado fue probado por primera vez por Nagy [**SN53**]. El tema ha recibido bastante atención desde entonces, unos buenos resúmenes de resultados en torno a la teoría de dilatación y demás se encuentran en [**SN60**] y [**Mla65**].

Un aspecto interesante esta teoría concierne a las dilataciones unitarias por potencias minimales.

DEFINICIÓN 3.7. Se dice que S (sobre K) es una dilatación por potencias *minimal* de T (sobre H) si es una dilatación por potencias de T y además no hay ningún subespacio de K que reduzca a S entre H y K, i.e., si M reduce a S (tanto M como $M^{\perp}$ son invariantes por S) y $H \subset M$, entonces $M = K$.

Un hecho curioso es que conocer la dilatación unitaria por potencias minimal de un operador no es tan útil como uno puede pensar. Schreiber [**Sch56**] probó que todas las contracciones estrictas (véase Problema 153 en [**Hal82**]) en los espacios de Hilbert separables tienen la misma dilatación por potencias unitaria minimal, denominada como el desplazamiento bilateral (*bilateral shift* en inglés). Posteriormente, Nagy [**SN57**] extendió el resultado hacia los espacios de Hilbert no separables.

Observación 3.8. Una propiedad interesante, en el sentido algebraico, que sí que poseen todas las dilataciones, es que si S es una dilatación de T, entonces S^* es una dilatación de T^*. Una manera rápida de probar este hecho es notar que si

$$\langle Tf, f\rangle = \langle Sf, f\rangle$$

para cada f en el dominio de T, entonces,

$$\langle T^*f, f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \overline{\langle Tf, f\rangle} = \overline{\langle Sf, f\rangle} = \langle f, S\rangle = \langle S^*f, f\rangle$$

para cada f en el dominio de T. Por tanto, una consecuencia de esto es que si S es una dilatación por potencias de T, entonces S^* es una dilatación por potencias de T^*.

* * *

3. El teorema ergódico

Sea z un número complejo con $|z| = 1$. La sucesión de medias

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z^k$$

es una sucesión convergente. Esto es un resultado conocido del análisis clásico, cuya generalización es extensamente aplicable. Con objeto de probar el resultado, considérense separadamente los casos $z = 1$ y $z \neq 1$. Si $z = 1$, la media es igual a 1, y su límite es, trivialmente, también 1. Fijado $z \neq 1$, entonces

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z^k - 0\right| = \left|\frac{1-z^n}{(n+1)(1-z)}\right| \leq \frac{2}{(n+1)|1-z|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

La generalización más esperable de este resultado es el clásico *teorema ergódico*, pero antes es necesario recordar la definición de la noción de convergencia de la topología fuerte de operadores.

Definición 3.9. Sea H un espacio de Hilbert. Considérense $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y S operadores lineales y continuos definidos en H. Se dice que $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a S en *la topología fuerte de operadores* si

$$\|S_n x - Sx\| \longrightarrow 0$$

para cada $x \in H$.

Teorema 3.10 (Teorema ergódico). *Si T es un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert H tal que $\|T\| \leq 1$, entonces la sucesión de medias aritméticas*

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k\right\}_{n\in\mathbf{N}} \tag{3.5}$$

converge en la topología fuerte de operadores.

Prueba. Si U es un operador unitario en H, entonces el teorema espectral permite justificar la afirmación de que $H = L^2(\mu)$ para alguna medida μ, en algún espacio de medidad adecuado, en el cual U es la multiplicación inducida por una función medible $\varphi \in L^\infty(\mu)$ con $|\varphi| = 1$. Esto se debe a que si $U = M_\varphi$ es unitario, entonces se satisface

$$M_\varphi M_{\overline{\varphi}} = M_{\overline{\varphi}} M_\varphi = I$$

si y sólo si $|\varphi| = 1$. Si $f \in H$, entonces

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^k f = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi^k\right) f.$$

Dado que $|\varphi| = 1$, se sigue que

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi^k\right| \leq 1. \tag{3.6}$$

Se trata de verificar las hipótesis del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. La primera se deduce de que las medias

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi^k$$

forman una sucesión convergente cuyo límite es $\chi_{\{\varphi=1\}}$, gracias al argumento expuesto al comienzo de la sección, debido a la asunción de que $|\varphi| = 1$. Para la siguiente, basta notar que

$$\left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi^k\right) f\right| \leq |f|$$

y $|f| \in L^2(\mu)$, gracias a (3.6).

Si T es una contracción en H, entonces sea U una dilatación unitaria por potencias de T en un espacio de Hilbert K, y sea P la proyección de K sobre H; gracias al Teorema 3.6. Esto significa que si $f \in H$ y $n \geq 0$,

$$T^n f = PU^n f.$$

Se sigue de ahí que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k f = P\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^k f\right).$$

Anteriormente se ha probado que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^k f$$

tiene límite cuando $n \to \infty$, para cada $f \in H$; y puesto que P es continuo, se sigue que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k f$$

tiene límite a medida que $n \to \infty$, para cada $f \in H$. □

Observación 3.11. El caso especial cuando T es un operador unitario también se debe a von Neumann. En tal caso, el límite de la sucesión (3.5) es la proyección ortogonal sobre el subespacio $\{f \in H : Tf = f\}$. En efecto, si $T\colon H \to H$ es unitario, es conocido que existe una isometría $S\colon H \to L^2(X, \Sigma, \mu)$ y una función esencialmente acotada $g\colon X \to \mathbf{T}$ tal que $T = S^{-1}M_g S$. Sean ahora

$$h_n = \frac{1 + g + \cdots + g^n}{n+1}$$

y $P = M_{\chi_A}$, donde $A = \{g = 1\} \subseteq X$. Entonces, dada $f \in L^2(\mu)$,

$$\|M_{h_n} f - Pf\|_{L^2}^2 = \int_X |h_n - \chi_A|^2 \cdot |f|^2 \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

pues puede aplicarse el teorema de la convergencia dominada debido a que

$$|h_n - \chi_A|^2 \cdot |f|^2 \in L^1(\mu)$$

y

$$|h_n - \chi_A|^2 \cdot |f|^2 \leq 4|f|^2 \in L^1(\mu).$$

Esto prueba la afirmación.

En la siguiente sección se procede a probar la esperada desigualdad de von Neumann, otra consecuencia del resultado de Sz. Nagy.

* * *

4. La desigualdad de von Neumann

Una consecuencia directa de la teoría de Sz. Nagy es la desigualdad de von Neumann.

Teorema 3.12 (Desigualdad de von Neumann, [**vN51**]). *Si T es una contracción, i.e. $\|T\| \leq 1$, se verifica que*

$$\|p(T)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\} \tag{3.7}$$

para todo polinomio $p \in \mathbf{C}[z]$.

Prueba. Supóngase que T es una contracción en un espacio de Hilbert H. El teorema de Sz. Nagy (Teorema 3.6) asegura la existencia de un espacio de Hilbert K y un operador unitario U definido en K tal que

$$T^n = PU^n$$

para $n \geq 0$, siendo P la proyección de K sobre H. Por esta definición, y la linealidad de P, si $p \in \mathbf{C}[z]$ es tal que

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

entonces

$$p(T) = Pp(U).$$

Dado que U es unitario (en particular es normal), el teorema espectral afirma que existe un espacio de medida (X, Σ, μ), una función compleja $\varphi \in L^{\infty}(\mu)$ y un operador unitario $V \colon K \to L^2(\mu)$ tales que

$$U = V^* M_{\varphi} V.$$

Nótese que el hecho de que $UU^* = U^*U = I$ implica que $|\varphi| = 1$, pues debe darse que $\overline{\varphi} = \varphi^{-1}$. Esto será de utilidad a la hora de obtener la estimación final. Además, como

$$U^n = (V^* M_{\varphi} V)(V^* M_{\varphi} V) \overbrace{\cdots}^{n \text{ veces}} (V^* M_{\varphi} V) = V^* M_{\varphi^n} V,$$

se deduce de la linealidad que

$$p(U) = p(V^* M_{\varphi} V) = \sum_{k=0}^{n} a_k V^* M_{\varphi} V = V^* \left(\sum_{k=0}^{n} a_k M_{\varphi^k} \right) V = V^* M_{p(\varphi)} V.$$

Entonces,

$$\|p(U)\| = \|V^* M_{p(\varphi)} V\| \leq \|M_{p(\varphi)}\| = \|p \circ \varphi\|_{\infty} \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}.$$

Por tanto,

$$\|p(T)\| = \|Pp(U)\| \leq \|p(U)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\},$$

lo que prueba la desigualdad (3.7). □

Observación 3.13. Es interesante notar que la desigualdad de von Neumann puede demostrarse a partir de un resultado elemental en teoría de operadores, como es la igualdad (2.3). No obstante, el camino vía teoría de dilatación no sólo es elegante, sino que además impone la idea para el desarrollo de su generalización. La demostración alternativa es la siguiente:

Se tiene que $p(T) = Pp(U)$, y por ello $\|p(T)\| \leq \|p(U)\|$. Además, como $p(U)$ es normal (al ser U unitario), entonces,

$$\|p(T)\| \leq \|p(U)\| = \rho(p(U)) = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(U)\} \leq \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq 1\}.$$

Aquí se ha usado, en orden: la igualdad (2.3) y el Corolario 1.15.

Capítulo 4

Generalizaciones y contraejemplos de la desigualdad de von Neumann

El éxito de la prueba en una variable puede desembocar en intentar extender la desigualdad (3.7) para varios operadores. ¿Es cierto que si $\|T_i\| \leq 1, i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup\{|p(z_1, \ldots, z_n)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\} \tag{4.1}$$

para todo polinomio p de n variables? En primer lugar, hay que interpretar la cuestión. Por ejemplo, no es posible definir $p(T_1, \ldots, T_n)$ en general. Sin embargo, si los T_i's conmutan dos a dos, entonces $p(T_1, \ldots, T_n)$ adquiere una definición unívoca. Un modo natural de comenzar a buscar la respuesta es pensar en una posible generalización de la teoría de dilatación. Para el caso $n = 2$ tal generalización es posible; a ello está dedicada la primera sección de este capítulo: probar la desigualdad (4.1) para el caso $n = 2$, un argumento que se debe a T. Ando [**And63**].

En 1973, Varopoulos [**Var73**] demostró que la desigualdad de von Neumann no se extiende a $n \geq 3$ contracciones que conmutan, para un n arbitrario. De hecho, él probó que dado $K > 0$, uno puede encontrar un natural n, unas contracciones que conmutan $T_1, \ldots, T_n$ y un polinomio $p \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ de grado n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| > K \sup\{|p(z_1, \ldots, z_n)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}. \tag{4.2}$$

En las secciones 2 y 3 se muestran algunos contraejemplos de la desigualdad (4.1). Más precisamente, en la Sección 2 se comprueba detalladamente que para $K = 1$ la desigualdad (4.2) se satisface para $n = 3$ en un espacio de Hilbert de dimensión 8; en la Sección 3, se reduce el espacio de Hilbert hasta dimensión 4.

1. La generalización de T. Ando

Hay un resultado análogo al teorema de Sz. Nagy de dilataciones unitarias por portencias, debido a T. Ando, para un par de contracciones que conmutan en un espacio de Hilbert. Entre las aplicaciones de este resultado reside una analogía de la desigualdad de von Neumann. Primeramente, se introducen los conceptos básicos y notaciones.

1.1. Sistemas de dilataciones isométricas. El primer objetivo de este apartado es probar un resultado de dilatación para sistemas conmutativos constituidos por isometrías. Esto puede encontrarse en [**SNF70**] (Cap 1, §6).

Un operador U lineal y continuo definido en un espacio de Hilbert H es una *isometría* si

$$\|Ux\| = \|x\|$$

para cada $x \in H$. Una definición equivalente es que se verifique que $U^*U = I$.

Nótese que no todas las isometrías son sobreyectivas; cuando una isometría es sobreyectiva se dice que U es *unitario*. En tal caso se verifica

$$U^*U = UU^* = I.$$

Definición 4.1 (Sistema de dilataciones). Sean H y K dos espacios de Hilbert y Θ con conjunto arbitrario de índices. Sean $\mathcal{T} = \{T_\theta\}_{\theta\in\Theta} \subseteq \mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S} = \{S_\theta\}_{\theta\in\Theta} \subseteq \mathcal{B}(K)$ dos familias de operadores lineales y acotados. Se conviene en decir que $\mathcal{S}$ es un *sistema de dilataciones de* $\mathcal{T}$ si

i. $H \subseteq K$ es un subespacio de Hilbert;
ii. para todo subconjunto finito de índices $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r \in \Theta$, y naturales $n_1, \ldots, n_r \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$T_{\theta_1}^{n_1} T_{\theta_2}^{n_2} \cdots T_{\theta_r}^{n_r} = P_H S_{\theta_1}^{n_1} S_{\theta_2}^{n_2} \cdots S_{\theta_r}^{n_r}.$$

La familia de dilataciones $\mathcal{S}$ se dirá que es isométrica (unitaria, normal, etc...) cuando todos los operadores S_θ sean del tipo en cuestión.

Además, un *sistema conmutativo* $\mathcal{T} = \{T_\theta\}_{\theta\in\Theta} \subseteq \mathcal{B}(H)$ es una familia donde $T_\theta T_\sigma = T_\sigma T_\theta$ para cualquier elección $\theta, \sigma \in \Theta$.

Teorema 4.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Sea $\{V\} \cup \{V_\theta : \theta \in \Theta\}$ un sistema conmutativo de isometrías definidas sobre H. Entonces, existe un sistema conmutativo de isometrías $\{U\} \cup \{U_\theta : \theta \in \Theta\}$ definidas en un espacio de Hilbert $K \supseteq H$ tales que*

i. *$V = PU_{|H}$ y $V_\theta = PU_{\theta|H}$, para todo $\theta \in \Theta$,*
ii. *U es unitario, y U_θ es unitario para cada $\theta \in \Theta$ para el cual V_θ sea unitario.*

Prueba. Primeramente, en virtud del resultado de Sz. Nagy (Teorema 3.6), uno puede dilatar la isometría V a un operador U unitario definido en un espacio de Hilbert $K \supseteq H$, tal que $V = PU_{|H}$. Es más, esta dilatación puede ser construida para que sea minimal, en el sentido de que

$$K = \overline{\operatorname{span}}\left\{\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} U^n H\right\} = \overline{\left\{\sum_{-N}^{N} U^n x_n : N \in \mathbf{N}, x_n \in H \text{ para todo } |n| \leq N\right\}}.$$

Defínase, para cada $\theta \in \Theta$, el operador lineal

$$\begin{aligned} U_\theta \colon \operatorname{span}\left\{\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} U^n H\right\} &\longrightarrow \operatorname{span}\left\{\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} U^n H\right\} \\ \sum_{-N}^{N} U^n x_n &\longmapsto U_\theta\left(\sum_{-N}^{N} U^n x_n\right) = \sum_{-N}^{N} U^n V_\theta x_n. \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que U_θ es una isometría. En efecto, teniendo en cuenta que $U^n x = V^n x$ para cada $x \in H$, y que $VV_\theta = V_\theta V$ para todo $\theta \in \Theta$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{-N}^{N} U^n V_\theta x_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{-N}^{N} U^j V_\theta x_j, \sum_{-N}^{N} U^k V_\theta x_k \right\rangle \\
&= \sum_j \sum_k \left\langle U^j V_\theta x_j, U^k V_\theta x_k \right\rangle \\
&= \sum_{j \geq k} \left\langle U^j V_\theta x_j, U^k V_\theta x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle U^j V_\theta x_j, U^k V_\theta x_k \right\rangle \\
\text{(adjuntos)} &= \sum_{j \geq k} \left\langle U^{j-k} V_\theta x_j, V_\theta x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle V_\theta x_j, U^{k-j} V_\theta x_k \right\rangle \\
(U^n_{|H} = V^n) &= \sum_{j \geq k} \left\langle V^{j-k} V_\theta x_j, V_\theta x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle V_\theta x_j, V^{k-j} V_\theta x_k \right\rangle \\
(V_\theta \text{ y } V \text{ conmutan}) &= \sum_{j \geq k} \left\langle V_\theta V^{j-k} x_j, V_\theta x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle V_\theta x_j, V_\theta V^{k-j} x_k \right\rangle \\
(V_\theta \text{ isometría}) &= \sum_{j \geq k} \left\langle V^{j-k} x_j, x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle x_j, V^{k-j} x_k \right\rangle \\
(U^n_{|H} = V^n) &= \sum_{j \geq k} \left\langle U^{j-k} x_j, x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle x_j, U^{k-j} x_k \right\rangle \\
&= \sum_{j \geq k} \left\langle U^j x_j, U^k x_k \right\rangle + \sum_{j<k} \left\langle U^j x_j, U^k x_k \right\rangle \\
&= \sum_j \sum_k \left\langle U^j x_j, U^k x_k \right\rangle = \left\| \sum_{-N}^{N} U^n x_n \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Esto prueba que U_θ está bien definido, es decir, que no depende de la representación de un elemento del espacio de partida. Esto se traduce en que si dos elementos poseen la misma representación, debe ocurrir que la imagen vía U_θ ha de ser la misma. Por tanto, está bien definida, es lineal e isometría.

Se puede extender U_θ, por continuidad, a todo el espacio K. Es claro que

$$PU_{\theta|H} = V_\theta, \quad \text{para cada } \theta \in \Theta.$$

Para la segunda parte, si ocurre que para algún $\theta \in \Theta$, el operador V_θ es sobreyectivo (y por tanto V_θ es unitario), entonces, por definición, U_θ es un operador isométrico cuya imagen es el conjunto denso

$$\operatorname{span} \left\{ \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} U^n H \right\} \subseteq K.$$

Por tanto, su extensión es un operador isométrico y sobreyectivo definido de K en K, donde K es un espacio de Hilbert; dicho de otro modo, el operador $U_\theta \in \mathcal{B}(K)$ es unitario.

La última tarea es mostrar que el sistema $\{U\} \cup \{U_\theta : \theta \in \Theta\}$ es conmutativo. Para tal fin, fíjese $n \in \mathbf{Z}$ y $\theta \in \Theta$. Entonces, para cualquier $x \in H$,

$$\begin{aligned} UU_\theta(U^n x) &= U(U^n V_\theta x) = U^{n+1}(V_\theta x) = U^n(UV_\theta x) \\ &= U^n(VV_\theta x) = U^n(V_\theta V x) = U^n(V_\theta U x) \\ &= U_\theta(U^n U x) = U_\theta(U^{n+1} x) = U_\theta U(U^n x). \end{aligned}$$

Esto implica, debido a la linealidad de los operadores que han intervenido, que $UU_\theta = U_\theta U$ en

$$\operatorname{span}\left\{\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} U^n H\right\} \subseteq K,$$

y por continuidad, son iguales en K. Finalmente, si $\theta, \sigma \in \Theta$, entonces,

$$U_\theta U_\sigma(U^n x) = U_\theta(U^n V_\sigma x) = U^n V_\theta V_\sigma x = U^n V_\sigma V_\theta x = U_\sigma(U^n V_\theta x) = U_\sigma U_\theta(U^n x).$$

El mismo razonamiento conduce a que $U_\theta U_\sigma = U_\sigma U_\theta$ en K. Finaliza aquí la prueba. ☐

Observación 4.3. Durante el proceso anterior se están disminuyendo el número de isometrías no unitarias del sistema inicial. Por ello, en el caso especial en el que el sistema inicial esté formado por una cantidad finita de isometrías que conmutan, se puede repetir este procedimiento una cantidad finita de veces para obtener con un sistema conmutativo de dilataciones unitarias. El siguiente resultado puede verse en [**Itô58**].

Corolario 4.4. *Sea $\{V_1, \ldots, V_m\}$ un sistema conmutativo de isometrías definidas en un espacio de Hilbert H. Entonces, existe un sistema conmutativo de dilataciones unitarias $\{U_1, \ldots, U_m\}$ definidas en un espacio de Hilbert $K \supseteq H$.*

Prueba. Se probará el caso especial en el que $m = 2$. El caso general es aplicar un razonamiento inductivo. Aplicando el Teorema 4.2 al sistema $\{V_1, V_2\}$, se puede obtener un sistema conmutativo $\{U_1', V_2'\}$ definido en $K_1 \supseteq K$ donde U_1' es una dilatación unitaria de V_1, y la isometría V_2' dilata a V_2. Una nueva aplicación del Teorema 4.2, esta vez aplicado al sistema $\{V_2', U_1'\}$, permite obtener un sistema conmutativo de dilataciones unitarias $\{U_2, U_1\}$ definido en K_2, donde $U_{2|K_1} = V_2'$ y $U_{1|K_1} = U_1'$. Entonces,

$$\{U_1, U_2\} \subseteq \mathcal{B}(K) = \mathcal{B}(K_2)$$

es el sistema conmutativo de dilataciones unitarias deseado. ☐

Corolario 4.5. *Sea $\{V_1, \ldots, V_m\}$ un sistema conmutativo de isometrías definidas en un espacio de Hilbert H, y sea $p \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_m]$. Entonces,*

$$\|p(V_1, \ldots, V_m)\| \leq \sup\{|p(z_1, \ldots, z_m)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, m\}. \tag{4.3}$$

Este corolario, junto con el cálculo funcional ya definido, permitirá deducir la validez de la desigualdad de von Neumann para el caso de n isometrías que conmutan.

Prueba. Sea $\{U_1, \ldots, U_m\}$ un sistema conmutativo de dilataciones unitarias definidas en $K \supseteq H$. Dado que

$$V_1^{n_1} V_2^{n_2} \cdots V_m^{n_m} = P_H U_1^{n_1} U_2^{n_2} \cdots U_m^{n_m}$$

para cualquier elección de $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbf{N}$, entonces para cualquier polinomio $p \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_m]$ se verifica que

$$p(V_1, \ldots, V_m) = P_H p(U_1, \ldots, U_m).$$

Dado que $\|P_H\| \leq 1$,

$$\|p(V_1, \ldots, V_m)\| \leq \|p(U_1, \ldots, U_m)\|.$$

Ahora bien, se necesita invocar al cálculo funcional descrito en la Subsección 2.3 del capítulo anterior para afirmar que

$$\begin{aligned} \|p(U_1, \ldots, U_m)\| &= \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \tilde{\Delta}(A)} |p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)| \\ &\leq \sup\{|p(z_1, \ldots, z_m)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, m\}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

dado que

$$\tilde{\Delta}(A) \subseteq \sigma_A(U_1) \times \sigma_A(U_2) \times \cdots \times \sigma_A(U_m) \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \overbrace{\cdots}^{m \text{ veces}} \times \mathbf{T}.$$

Esto prueba el resultado. $\square$

Una consecuencia de la construcción del Corolario 4.4 es la desigualdad de von Neumann para m isometrías que conmutan. Pero al comienzo del capítulo se ha desvelado que en general la respuesta es negativa; entonces, ¿qué ocurre?¿qué hace que la desigualdad de von Neumann falle en el caso general? Se podría decir que la respuesta es que el camino que conduce hasta la desigualdad de von Neumann para el caso de m operadores se divide en dos trayectos: el primero, consiste en constuir un sistema conmutativo de dilataciones isométricas a partir de un sistema conmutativo de contracciones. El segundo, a partir del sistema conmutativo de isometrías constuir el sistema conmutativo de dilataciones unitarias. Lo que se ha probado en esta subsección es que el primer trayecto no será siempre posible de realizar.

1.2. La desigualdad de von Neumann generalizada. Como anticipaba el final del apartado anterior, la desigualdad de von Neumann, en el caso general, es exclusivamente cierta para dos contracciones que conmutan en un espacio de Hilbert. Ese es el resultado de T. Ando, que se presenta a continuación y puede encontrarse en [**SNF70**].

Teorema 4.6 (T. Ando). *Sean T_1 y T_2 contracciones que conmutan en un espacio de Hilbert H.*

I. *Entonces existen dos isometrías V_1 y V_2 definidas en un espacio de Hilbert K, que contiene a H, tales que*

$$T_1^{n_1}T_2^{n_2} = P_H V_1^{n_1}V_2^{n_2}$$

para cualquier elección de $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$. Esto es, $\mathcal{T} = \{T_1, T_2\}$ admite un sistema conmutativo de dilataciones isométricas $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$.

II. *$\mathcal{T} = \{T_1, T_2\}$ admite un sistema conmutativo de dilataciones unitarias $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$.*

Prueba. La construcción es una modificación del argumento de Schaffer [**Sch55**] que se usó en la demostración del resultado de Sz. Nagy (Teorema 3.6).

Sea

$$K = \ell^2(H) = \left\{(x_1, x_2, \dots) : x_n \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\right\}$$

con la inmersión natural $H \hookrightarrow K$ dada por

$$H \ni x \mapsto (x, 0, 0, \dots) \in K.$$

En lo que sigue se denotará por $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ al operador *defecto de T*. Se definen $W_1, W_2 \in \mathcal{B}(K)$ mediante

$$W_1(x_1, x_2, \dots) = (T_1x_1, D_{T_1}x_1, 0, x_2, x_3, \dots)$$

y

$$W_2(x_1, x_2, \dots) = (T_2x_1, D_{T_2}x_1, 0, x_2, x_3, \dots).$$

De hecho, los operadores $W_i(x_1, x_2, \dots)$ son isométricos. Esto se debe a que

$$\|x\|^2 = \|T_jx\|^2 + \|D_{T_j}x\|^2,$$

para $x \in H$, $j = 1, 2$. En efecto,

$$\|T_jx\|^2 + \|D_{T_j}x\|^2 = \langle T_jx, T_jx\rangle + \langle (I - T_j^*T_j)x, x\rangle = \langle T_j^*T_jx, x\rangle + \langle x, x\rangle - \langle T_j^*T_jx, x\rangle = \|x\|^2.$$

Nótese que esto ha sido posible gracias a que los operadores D_{T_j} son hermíticos. Esto prueba que W_i son isométricos, pero en general estos no conmutan. Para ello será necesario un refinamiento en su definición, i.e., componer con algún operador para obtener la conmutatividad.

Considérese el espacio de Hilbert $L = H^4$ y la identificación natural

$$K = H \oplus L \oplus L \oplus \cdots$$

dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, (x_2, x_3, x_4, x_5), (x_6, x_7, x_8, x_9), \dots)$$

Supóngase que G es un operador unitario definido en L, aún por determinar. Defínase U en K mediante

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, G(x_2, x_3, x_4, x_5), G(x_6, x_7, x_8, x_9), \dots),$$

y nótese que $U \in \mathcal{B}(K)$ es unitario. En efecto,

- $U \in \mathcal{B}(K)$, pues
$$\begin{aligned}\|Ux\|^2 &= \|x_1\|^2 + \|G(x_2,x_3,x_4,x_5)\|^2 + \cdots \\ &\leq \|x_1\|^2 + M\|(x_2,x_3,x_4,x_5)\|^2 + \cdots \\ &= \|x_1\|^2 + M\|x_2\|^2 + M\|x_3\|^2 + M\|x_4\|^2 + M\|x_5\|^2 + \cdots \leq \tilde{M}\|x\|^2.\end{aligned}$$
- U es unitario con $U^{-1}x = (x_1, G^{-1}(x_2,x_3,x_4,x_5), G^{-1}(x_6,x_7,x_8,x_9), \dots)$. Esto se tiene, pues si $x = (x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) \in K$, entonces
$$U^{-1}U = UU^{-1} = I$$
si y sólo si
$$U^{-1}x = (x_1, G^{-1}(x_2,x_3,x_4,x_5), G^{-1}(x_6,x_7,x_8,x_9), \dots).$$

Entonces, los operadores $V_1 = UW_1$ y $V_2 = W_2U^{-1}$ son isometrías en K. Esto se debe a que si $x \in K$,
$$\|V_1x\| = \|UW_1x\| = \|W_1x\| = \|x\|$$
y
$$\|V_2x\| = \|W_2U^{-1}x\| = \|U^{-1}x\| = \|x\|.$$
Se desea hallar el operador G de manera que V_1 y V_2 conmuten. En tal caso, ya se tendría el sistema (formado por dos operadores) conmutativo de dilataciones isométricas, y así quedaría probada la primera parte. Pero no es tan fácil; para ello, el primer paso es calcular V_1V_2 y V_2V_1 y comparar los resultados.
$$\begin{aligned}V_1V_2(x_1,x_2,x_3,\dots) &= UW_1W_2U^{-1}(x_1,x_2,x_3,\dots) \\ &= UW_1W_2(x_1, G^{-1}(x_2,x_3,x_4,x_5), G^{-1}(x_6,x_7,x_8,x_9),\dots) \\ &= UW_1(T_2x_1, D_{T_2}x_1, 0, G^{-1}(x_2,x_3,x_4,x_5), G^{-1}(x_6,x_7,x_8,x_9),\dots) \\ &= U(T_1T_2x_1, D_{T_1}T_2x_1, 0, D_{T_2}x_1, 0, G^{-1}(x_2,x_3,x_4,x_5), G^{-1}(x_6,x_7,x_8,x_9),\dots) \\ &= (T_1T_2x_1, G(D_{T_1}T_2x_1, 0, D_{T_2}x_1, 0), x_2,x_3,x_4,x_5,\dots).\end{aligned}$$
El cálculo restante es menos tedioso,
$$\begin{aligned}V_2V_1(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) &= W_2U^{-1}UW_1(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) \\ &= W_2W_1(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) \\ &= W_2(T_1x_1, D_{T_1}x_1, 0, x_2,x_3,x_4,\dots) \\ &= (T_2T_1x_1, D_{T_2}T_1x_1, 0, D_{T_1}x_1, 0, x_2,x_3,x_4,\dots).\end{aligned}$$
Dado que T_1 y T_2 conmutan por hipótesis, V_1 y V_2 conmutarán si y sólo si el operador G satisface
$$G(D_{T_1}T_2x, 0, D_{T_2}x, 0) = (D_{T_2}T_1x, 0, D_{T_1}x, 0), \tag{4.5}$$
para todo $x \in H$. El objetivo es construir tal operador.

Sea $X \subseteq L$ y $Y \subseteq L$ los subespacios vectoriales
$$X = \{(D_{T_1}T_2x, 0, D_{T_2}x, 0) : x \in H\} \subseteq L$$
y
$$Y = \{(D_{T_2}T_1x, 0, D_{T_1}x, 0) : x \in H\} \subseteq L.$$

Defínase G_0 la aplicación definida de X en Y de acuerdo con (4.5), esto es,

$$G_0(D_{T_1}T_2x, 0, D_{T_2}x, 0) = (D_{T_2}T_1x, 0, D_{T_1}x, 0),$$

para cada $x \in H$. Ahora bien, usando las propiedades de conmutatividad de T_1 con T_2, es fácil ver G_0 es una isometría. En efecto, si $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|(D_{T_1}T_2x, 0, D_{T_2}x, 0)\|_L^2 &= \|D_{T_1}T_2x\|^2 + \|D_{T_2}x\|^2 \\ &= \|T_2x\|^2 - \|T_1T_2x\|^2 + \|x\|^2 - \|T_2x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|T_1T_2x\|^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|(D_{T_2}T_1x, 0, D_{T_1}x, 0)\|_L^2 &= \|D_{T_2}T_1x\|^2 + \|D_{T_1}x\|^2 \\ &= \|T_1x\|^2 - \|T_2T_1x\|^2 + \|x\|^2 - \|T_1x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|T_2T_1x\|^2. \end{aligned}$$

Luego, G_0 es un operador lineal, isométrico y sobreyectivo definido de X en Y. Extendendiendo G_0 por continuidad hasta el cierre, se obtiene un operador unitario $G_1 \colon \overline{X} \to \overline{Y}$. Resta probar que G_1 puede extenderse a un operador unitario $G \colon L \to L$. Para ello, es suficiente ver que los complementos ortogonales $\overline{X}^{\perp}$ e $\overline{Y}^{\perp}$ tienen la misma dimensión[1]. Pues en tal caso, $\overline{X}^{\perp}$ e $\overline{Y}^{\perp}$ son isométricamente isomorfos (esto sólo ocurre entre espacios de Hilbert). En tal caso, bastaría definir la extensión de este operador $G \colon L \to L$ mediante $G = G_1 \oplus \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J}$ es la isometría entre $\overline{X}^{\perp}$ e $\overline{Y}^{\perp}$ que establece el isomorfismo. Se distinguen dos casos:

I. Si $\dim H < \infty$, se tiene que $\dim L < \infty$, y por tanto se tiene

$$\dim \overline{X}^{\perp} = \dim L - \dim \overline{X} = \dim L - \dim \overline{Y} = \dim \overline{Y}^{\perp}.$$

II. Si $\dim H = \infty$, entonces $\dim H = \dim G$. Además, si se considera el subespacio

$$J = 0 \oplus H \oplus 0 \oplus 0 \subseteq \overline{X}^{\perp},$$

que tiene la misma dimensión que H, se tiene que

$$\dim H = \dim L \geq \dim \overline{X}^{\perp} \geq \dim J = \dim H.$$

Similarmente,

$$\dim H = \dim L \geq \dim \overline{Y}^{\perp} \geq \dim J = \dim H.$$

Por tanto, $\dim \overline{X}^{\perp} = \dim \overline{Y}^{\perp}$. Se tiene entonces el operador unitario $G \in \mathcal{B}(L)$ que satisface la condición (4.5), y en consecuencia V_1 y V_2 conmutan.

Finalmente, para cualquier elección $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, las deficiones de V_1 y V_2 proporcionan

$$T_1^{n_1}T_2^{n_2}x_1 = P_H V_1^{n_1}V_2^{n_2}(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots),$$

para cualquier $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \in H \oplus L \oplus L \oplus \cdots = K$.

La segunda parte del teorema es fácil, pues basta aplicar el Corolario (4.4) para pasar de tener un sistema conmutativo de dilataciones isométricas $\{V_1, V_2\}$ a un sistema conmutativo de dilataciones unitarias. $\square$

[1]Hay varias definiciones de dimensión de un espacio. En el contexto de espacios de Hilbert, se refiere al cardinal de cualquiera de sus bases ortonormales.

Teorema 4.7 (Desigualdad de von Neumann bidimensional). *Sea T_1 y T_2 dos contracciones que conmutan en un espacio de Hilbert H. Si $p \in \mathbf{C}[z_1, z_2]$, entonces*

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup\{|p(z_1, z_2)| : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| \leq 1, i = 1, 2\}. \tag{4.6}$$

Prueba. Se deduce del resultado de T. Ando (Teorema 4.6) y de la desigualdad (4.4). □

Las secciones restantes están dedicadas a los casos desfavorables de la desigualdad de von Neumann.

* * *

2. El contraejemplo de M. J. Crabb y A. M. Davie

Se procede a desarrollar aquí la idea que desarrollaron Crabb y Davie [**CD75**]. Esto es, probar que para $K = 1$ la desigualdad (4.2) es cierta para $n = 3$.

Sea H un espacio de Hilbert 8−dimensional con base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$. Se definen los operadores T_1, T_2 y T_3 como sigue:

$$\begin{array}{lll} T_1e_1 = e_2, & T_2e_1 = e_3, & T_3e_1 = e_4, \\ T_1e_2 = -e_5, & T_2e_2 = e_7, & T_3e_2 = e_6, \\ T_1e_3 = e_7, & T_2e_3 = -e_6, & T_3e_3 = e_5, \\ T_1e_4 = e_6, & T_2e_4 = e_5, & T_3e_4 = -e_7, \\ T_1e_5 = e_8, & T_2e_6 = e_8, & T_3e_7 = e_8, \\ T_1e_i = 0, \quad i = 6,7,8; & T_2e_i = 0, \quad i = 5,7,8; & T_3e_i = 0, \quad i = 5,6,8. \end{array} \tag{4.7}$$

Éstos disponen de una descripción en términos matriciales

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una mera comprobación rutinaria exhibe que T_1, T_2 y T_3 conmutan. El siguiente paso es comprobar que son contracciones.

LEMA 4.8. *Los operadores T_1, T_2 y T_3 definidos anteriormente son contracciones.*

Prueba. En primer, concéntrese en el operador T_1; el resto se deduce de manera análoga.

Un leve cálculo matricial permite afirmar que $T_1^* T_1$ es la proyección del espacio H sobre $\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Así, si $f = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$ entonces

$$\|T_1 f\|^2 = \langle T_1 f, T_1 f\rangle = \langle f, T_1^* T_1 f\rangle = \sum_{i=1}^{5} |\alpha_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{8} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2.$$

Por tanto, $\|T_1\| \leq 1$. □

El siguiente lema declara cuál es el polinomio $p \in \mathbf{C}[z_1, z_2, z_3]$ que va a elegirse para el contraejemplo de Crabb y Davie.

LEMA 4.9. *Sea $p \in \mathbf{C}[z_1, z_2, z_3]$ definido por*

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3.$$

Se verifica que

$$\sup\{|p(z_1, z_2, z_3)| : |z_i| \leq 1, i = 1, 2, 3\} < 4. \tag{4.8}$$

Prueba. Primeramente, nótese que, en virtud del principio del módulo máximo, es suficiente probar que

$$\sup\{|p(z_1, z_2, z_3)| : |z_i| = 1, i = 1, 2, 3\} < 4.$$

Se procede a actuar por reducción al absurdo. Supóngase que $\|p\|_\infty = 4$.

El polinomio p es homogéneo de grado 3, esto es,

$$p(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3) = \lambda^3 p(z_1, z_2, z_3),$$

para todo $\lambda \in \mathbf{C}$. Esto implica que debe existir $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{T}^3$ tal que $p(z_1, z_2, z_3) = 4$. En efecto, si $\|p\|_\infty = 4$, entonces

$$p(z_1, z_2, z_3) = 4w,$$

con $|w| = 1$. La homogeneidad de p implica que

$$p\left(\frac{z_1}{w^{1/3}}, \frac{z_2}{w^{1/3}}, \frac{z_3}{w^{1/3}}\right) = 4.$$

Escríbase $z_j = e^{i\theta_j}$, donde $\theta_j \in (-\pi, \pi]$; para $j = 1, 2, 3$. Entonces,

$$\left|p(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3})\right| = \left|e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} - e^{i3\theta_1} - e^{i3\theta_2} - e^{i3\theta_3}\right|. \tag{4.9}$$

Ahora bien, por (4.9), tal valor debe alcanzarse en

$$z_1 z_2 z_3 = 1, \quad \text{y} \quad -z_j^3 = 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Dicho de otro modo, debe ocurrir que

$$\theta_j \in \left\{-\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{3}\right\}, \quad j = 1, 2, 3;$$

y en consecuencia $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ es un múltiplo impar de $\pi/3$. Esto es imposible, pues en tal caso $e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \neq 1$. Esto prueba (4.8). □

Teorema 4.10 (Crabb y Davie). *La desigualdad de von Neumann no es cierta para tres contracciones que conmutan, i.e., existen tres contracciones T_1, T_2 y T_3 que conmutan y un polinomio $p \in \mathbf{C}[z_1, z_2, z_3]$ tales que*

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| > \sup\{|p(z_1, z_2, z_3)| : |z_i| \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Prueba. Elíjanse las contracciones T_1, T_2 y T_3 como se han definido previamente, debido al Lema 1.1. Por el Lema 1.2, el polinomio

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3$$

satisface que

$$\sup\{|p(z_1, z_2, z_3)| : |z_i| \leq 1, i = 1, 2, 3\} < 4.$$

Por otro lado, gracias a (4.7), uno puede comprobar que

$$p(T_1, T_2, T_3)e_1 = T_1 T_2 T_3 e_1 - T_1^3 e_1 - T^3 e_1 - T^3 e_1 = e_8 - (-e_8) - (-e_8) - (-e_8) = 4e_8.$$

Por tanto,

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|p(T_1, T_2, T_3)f\| \geq \|p(T_1, T_2, T_3)e_1\| = 4.$$

Esto proporciona el contrajemplo deseado. □

* * *

3. El contraejemplo de J. A. Holbrook

Los contraejemplos de Kaijser-Varopoulos [**Var74**] hacen uso del polinomio cuadrático

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1). \tag{4.10}$$

En este caso, el espacio de Hilbert es donde están definidos los operadores es de dimensión 4, lo que simplifica el contraejemplo de J. Crabb y A. M. Davie (véase Sección 2). Holbrook en [**Hol01**] mejora aún más el contraejemplo de Kaijser-Varopoulos, en el sentido de que la norma del operador es un 20 % mayor que la del polinomio, mientras que en [**Var74**] no llega al 4 %. Además, el tratamiento de ese punto en [**Var74**] es elusivo; como alternativa, en [**Hol01**] se presenta esta proposición.

Proposición 4.11. *Si p es el polinomio de* (4.10)*, entonces* $\|p\|_\infty = 5$.

Prueba. Por el principio del módulo máximo, se puede asumir que $|z_k| = 1$. Definiendo $s_k = \sqrt{z_k}$ como una raíz cuadrada, se tiene que

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 \left(\left[\frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} - \frac{z_3}{s_1 s_2} \right]^2 - 4 \right).$$

Así, con esta modificación, el cálculo se reduce a

$$\|p\|_\infty = \max \left\{ \left| z^2 - 4 \right| : z = t - w, t \in [-2, 2], |w| = 1 \right\},$$

donde

$$t = \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} = s_1 \overline{s}_2 + s_2 \overline{s}_1 = 2 \operatorname{Re}(s_1 \overline{s}_2) \in [-2, 2].$$

La región dónde debe analizarse el valor de p la indica la siguiente figura.

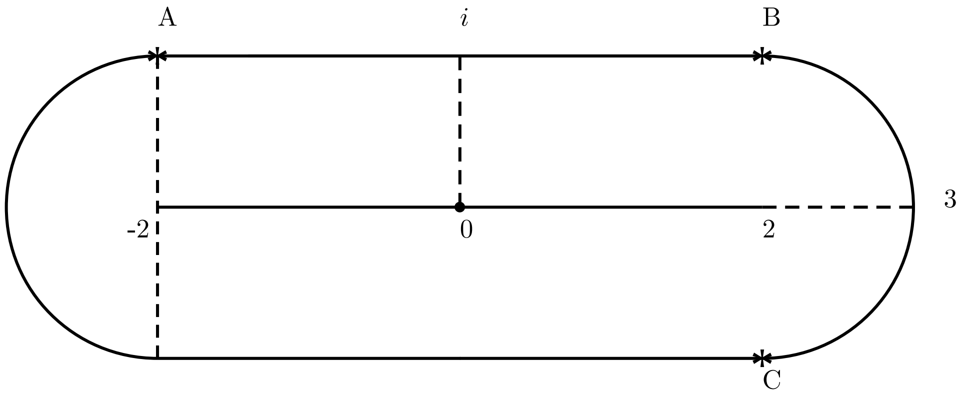

Figura 1. Región baciloforme

Nuevamente, por el principio del módulo máximo, sólo es necesario estudiar la frontera de esta región. Además, por simetría, es suficiente estudiar la parte de la frontera que abarca desde el punto A hasta el punto C, pasando por B.

En el caso del segmento que va desde A hasta B, los puntos son de la forma $i + t$ con $t \in [-2, 2]$. Entonces, se tiene que

$$|(i + t)^2 - 4|^2 = (t^2 - 5)^2 + 4t^2 \leq 25,$$

para todo $t \in [-2, 2]$. Luego $|(i + t)^2 - 4| \leq 5$. De hecho, se alcanza la igualdad para $t = 0$.

En el caso de la semicircunferencia que va desde B hasta C, los puntos son de la forma $2+e^{it}$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Entonces, se tiene que

$$|(2+e^{it})^2 - 4| = |4e^{it} + e^{2it}| = |4 + e^{it}| \leq 5.$$

La igualdad en este caso se alcanza también en $t = 0$. $\square$

Se pasa ahora a definir los operadores. Considérese un espacio de Hilbert de dimensión 4 generado por

$$H = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

donde $\|e_i\| = 1$, e_1 y e_5 son ortonormales. Considérese F de dimensión 2 dado por

$$F = (\operatorname{span}\{e_1, e_5\})^{\perp},$$

y e_2, e_3, e_4 que verifican

$$e_k \cdot e_j = -\frac{1}{2}, \quad k \neq j. \tag{4.11}$$

Esta condición, de algún modo, quiere decir que los tres elementos forman un triángulo equilátero. Nótese que esta elección es posible. En efecto, si $\{f_1, f_2\}$ es una base ortonormal de F, una elección posible de los e_k's es

$$e_k = \cos\theta_k f_1 + \operatorname{sen}\theta_k f_2,$$

para $k \in \{2, 3, 4\}$, donde

$$\theta_2 = 0, \quad \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{y} \quad \theta_4 = \frac{4\pi}{3}.$$

Para cualquier elemento v en el espacio H ($4-$dimensional) se define

$$T_k v = \langle v, e_1\rangle e_{k+1} + \langle v, e_{k+1}\rangle e_5,$$

para $k = 1, 2, 3$. Éstos admiten una descripción de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll}
T_1e_1 = e_2, & T_2e_1 = e_3, & T_3e_1 = e_4, \\
T_1e_2 = e_5, & T_2e_2 = -\dfrac{e_5}{2}, & T_3e_2 = -\dfrac{e_5}{2}, \\
T_1e_3 = -\dfrac{e_5}{2}, & T_2e_3 = e_5, & T_3e_3 = -\dfrac{e_5}{2}, \\
T_1e_4 = -\dfrac{e_5}{2}, & T_2e_4 = -\dfrac{e_5}{2}, & T_3e_4 = e_5, \\
T_1e_5 = 0, & T_2e_5 = 0, & T_3e_5 = 0.
\end{array} \tag{4.12}$$

Una mera comprobación exhibe que estos operadores conmutan. En efecto, si $v \in H$, se tiene

$$T_kT_jv = T_k\left(\langle v, e_1\rangle e_{j+1} + \langle v, e_{j+1}\rangle e_5\right) = -\frac{\langle v, e_1\rangle}{2} e_5,$$

para $j, k = 1, 2, 3$. Además,

$$\begin{aligned}
\|p(T_1, T_2, T_3)\| &\geq \|p(T_1, T_2, T_3)e_1\| \\
&= \|T_1^2e_1 + T_2^2e_1 + T_3^2e_1 - 2T_1T_2e_1 - 2T_2T_3e_1 - 2T_1T_3e_1\| \\
&= \|6e_5\| = 6.
\end{aligned}$$

Para probar que son contracciones, nótese que $\|T_k v\| = \|P_k v\|$, donde P_k es la proyección ortogonal sobre el espacio $\operatorname{span}\{e_1, e_{k+1}\}$. Por tanto, cada T_k es una contracción. Finalmente, se ha probado el siguiente resultado:

TEOREMA 4.12. *Existen tres contracciones que conmutan T_1, T_2 y T_3 en un espacio de Hilbert de dimensión 4 tales que*

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| \geq \frac{6}{5}\|p\|_\infty.$$

En [**Hol01**] también se analizan una clase de matrices que engloban a los ejemplos de Kaijser-Varopoulos, y se realiza un análisis en términos de normas de Schur y factorizaciones de Haagerup.

* * *

4. Contraejemplos minimales

A lo largo de este trabajo la palabra *minimal* no ha sido utilizada como calificativo de los contraejemplos desarrollados, y esto se debe a que el caso de matrices 3×3 no está aún resuelto. La evidencia sugiere que la desigualdad (4.1) es cierta cuando las contracciones que conmutan son 3×3. Hoolbrook y otros lo tiene claro, han comprobado una gran variedad de casos especiales. Además, gracias a experimentos computacionales, no se han hallado contraejemplos para el caso 3×3. Además, en [**Hol92**] plantea una cuestión acerca de matrices 2×2 la cual, si se hallara la respuesta, conllevaría a contraejemplos 4×4 de (4.1) o verificaría (4.1) en el caso 3×3.

Choi y Zhong han encontrado una clase de contraejemplos que generan una gran distinción entre los casos 2×2 y 3×3. Ellos prueban que cualquier familia finita de contracciones 2×2 que conmuten puede ser expresada en términos de funciones contractivas (analíticas) de una sola contracción, se dice entonces que la familia es *dilatable*; por tanto sería una manera de validar (4.1). En contraste, los mismos autores han encontrado ejemplos de cuatro contracciones 3×3 que conmutan que no son dilatables. Si una familia finita de contracciones puede ser representada mediante funciones contractivas de dos contracciones fijas que conmutan, entonces el teorema de dilatación de Ando (Teorema 4.6) permitiría probar (4.1). Estos ejemplos muestran que esa representación no es siempre posible en el caso 3×3, pese a que (4.1) sea cierta, y cualquier subconjunto de tres contracciones sea dilatable.

* * *

Agradecimientos

En estas pocas líneas quiero expresar mi gratitud a los directores de este trabajo, Luis y Miguel. Gracias a su dedicación y profesionalidad, este trabajo ha sido dirigido de manera ejemplar. Les doy las gracias también por su apoyo y compañía. Además de ser magníficos profesionales son excelentes personas.

Bibliografía

[And63] T. Andô. On a pair of commutative contractions. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 24:88–90, 1963.

[CD75] M. J. Crabb and A. M. Davie. von Neumann's inequality for Hilbert space operators. *Bull. London Math. Soc.*, 7:49–50, 1975.

[CO17] Carlos Constantino Oitavén. *Una introducción a la teoría de los subespacios invariantes.* 2017.

[Hal51] P. R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space and the theory of Spectral Multiplicity.* Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1951.

[Hal63] P. R. Halmos. What does the spectral theorem say? *Amer. Math. Monthly*, 70:241–247, 1963.

[Hal82] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982.

[Hol92] John A. Holbrook. Inequalities of von Neumann type for small matrices. In *Function spaces (Edwardsville, IL, 1990)*, volume 136 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 189–193. Dekker, New York, 1992.

[Hol01] John A. Holbrook. Schur norms and the multivariate von Neumann inequality. In *Recent advances in operator theory and related topics (Szeged, 1999)*, volume 127 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 375–386. Birkhäuser, Basel, 2001.

[Itô58] Takasi Itô. On the commutative family of subnormal operators. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, 14:1–15, 1958.

[KF82] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* "Mir", Moscow, 1982. Traducido del ruso por Carlos Vega.

[Mla65] W. Mlak. Unitary dilations of contraction operators. *Rozprawy Mat.*, 46:91, 1965.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

[Sch55] J. J. Schäffer. On unitary dilations of contractions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:322, 1955.

[Sch56] M. Schreiber. Unitary dilations of operators. *Duke Math. J.*, 23:579–594, 1956.

[SN53] Béla Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, 15:87–92, 1953.

[SN57] Béla Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II. *Acta Sci. Math. Szeged*, 18:1–14, 1957.

[SN60] Béla Sz.-Nagy. *Extensions of linear transformations in Hilbert space which extend beyond this space (Appendix to Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy, "Functional analysis").* Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1960.

[SNF70] Béla Sz.-Nagy and Ciprian Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* NH, 1970.

[Var73] Nicholas Th. Varopoulos. Sur une inégalité de von Neumann. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 277:A19–A22, 1973.

[Var74] N. Th. Varopoulos. On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory. *J. Functional Analysis*, 16:83–100, 1974.

[vN51] Johann von Neumann. Eine spektraltheorie für allgemeine operatoren eines unitären raumes. *Math. Nachr.*, 4:258–281, 1951.