



Homología de Khovanov

Ana Alicia Rivera Bustos



Homología de Khovanov

Ana Alicia Rivera Bustos

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Juan González-Meneses López

Índice general

English Abstract	1
1. Introducción	3
1.1. Teoría de nudos	4
1.1.1. Reidemeister	5
1.1.2. Enlaces	6
1.1.3. Invariantes	8
1.1.4. Polinomio de Jones	9
1.2. Homología clásica	13
2. Estados	17
2.1. Estado	17
2.2. Categorización y cambio de variable.	18
2.3. Estado mejorado.	19
3. Homología de Khovanov	21
3.1. Cadenas	21
3.2. Adyacencia	22

II HOMOLOGÍA DE KHOVANOV

3.3. Diferencial	24
3.4. Homología	30
4. Invarianza	37
4.1. Invariante por el primer movimiento	37
4.2. Polinomio de Jones	40

English Abstract

Knot theory is quite younger compare to other theories in mathematics. Even so, it is an important mathematic theory in the topology field. Besides, it seems to have relation with other fields of knowledge like biology or physics [1]. In this dissertation, we walk through some concepts such as knots, invariants, Jones polynomial, states and homology.

Khovanov homology is an invariant of knots and it is a more accurate invariant than Jones polynomial. In this dissertation, we are going to prove that it is an invariant, partialy at least, to give an example of how to calculate it and to compare briefly with Jones polynomial.

1 | Introducción

Los nudos son objetos topológicos, los cuales se empezaron a estudiar hace más de 100 años. Uno de los motivos por los que se estudió esta teoría era porque se creía que podía tener relación con los elementos químicos y que diferenciar nudos ayudaría a diferenciar elementos, pero más adelante se consolidó como una teoría matemática importante en el ámbito de la Topología. [1]

Aquellas herramientas que nos ayudan a diferenciar nudos son los invariantes. Algunos de los principales invariantes de nudos son el crossing number, el polinomio de HOMFLYPT, el polinomio de Jones. Aun en la actualidad el polinomio de Jones es un área activa de investigación, y es una conjetura abierta si este diferencia el nudo trivial del resto.

En [2], Khovanov introdujo el concepto de homología de un nudo, que es un invariante más fino que el polinomio de Jones. En este trabajo definiremos la homología de Khovanov y desarrollaremos toda la teoría necesaria para ello. Además incluiremos el cálculo en un caso concreto. Demostraremos su invarianza por el movimiento de Reidemeister de tipo I, y veremos por qué es más fino que el polinomio de Jones.

Primero, en este capítulo, trataremos algunos conceptos de nudos y homología necesarios para el tema que nos atañe, tomados entre [3], [1] y [4]. Más adelante desarrollaremos los conceptos de estados, adyacencia y diferencial, donde nos basamos sobre todo en [3], además de poner un ejemplo para una mejor comprensión de lo expuesto.

1.1 Teoría de nudos

Definición 1.1. Un **nudo** es una aplicación diferenciable e inyectiva φ de S^1 a S^3 , salvo isotopía (ambiente). Se identificará φ con su imagen $K = \varphi(S^1)$.

Aunque los nudos de los que hablaremos están en S^3 , nosotros trabajaremos con sus diagramas en el plano.

Definición 1.2. Un **diagrama** D de un nudo K será la proyección de éste sobre un plano donde los puntos del plano que tengan más de una preimagen en K , se denominarán **cruces**, y serán puntos dobles con direcciones transversas. Como K está definido salvo isotopía, siempre se puede conseguir una proyección con estas propiedades.

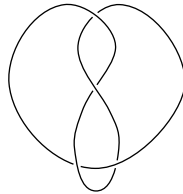


Diagrama del nudo ocho

El ejemplo de nudo más sencillo que podemos encontrar con cruces es el trébol, aunque el nudo más sencillo es el nudo trivial que no tiene ningún cruce.

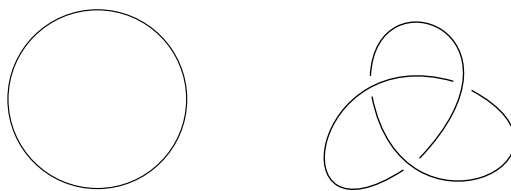
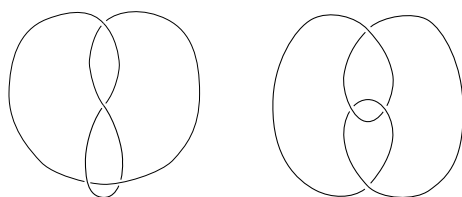


Diagrama del nudo trivial y el trébol respectivamente

En la siguiente imagen podemos ver distintos diagramas del mismo nudo. Mediante una isotopía de S^3 se pueden conseguir diagramas de un mismo nudo que parecen representar nudos distintos a simple vista.



Dos diagramas distintos del nudo ocho.

Por último damos una definición necesaria para aclarar el vocabulario usado en esta introducción.

Definición 1.3. Se entiende por **segmento** de un diagrama a toda línea ininterrumpida de éste que se observa en el dibujo del diagrama, es decir, toda línea que empieza debajo de un cruce y termina cuando vuelve a estar debajo de otro cruce.

1.1.1 Reidemeister

Por la definición de nudo, dos nudos aparentemente diferentes pueden ser el mismo mediante una isotopía. Trabajando con los diagramas, podemos describir los movimientos de Reidemeister, que transforman una parte de un diagrama, de forma que el diagrama resultante representa al mismo nudo que el diagrama original.

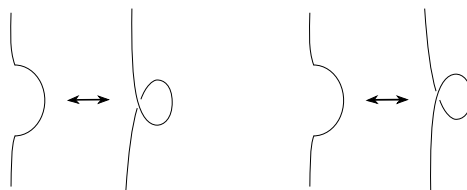
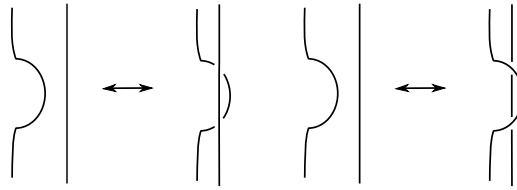


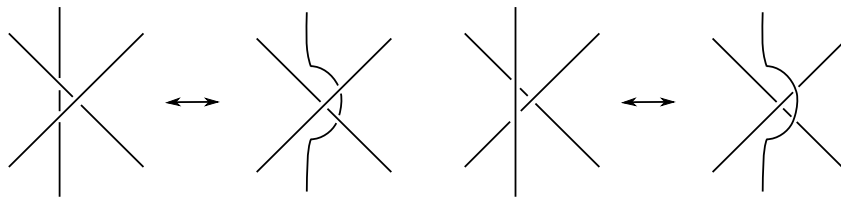
Figura 1.1: Movimiento de Reidemeister de tipo I.

En estas imágenes vemos el movimiento de Reidemeister de tipo I. Este consiste en una modificación local de una parte del diagrama, como la Figura 1.1, dejando el resto del diagrama invariante.



Movimiento de Reidemeister de tipo II.

Este es el movimiento de Reidemeister de tipo II. Con él podemos añadir un par de cruces al diagrama o bien deshacerlos pasando un segmento sobre otro de cualquiera de las dos formas que se ven en la imagen.



Movimiento de Reidemeister de tipo III.

Éste es el movimiento de Reidemeister de tipo III. Éste nos permite pasar parte de la curva proyectada en el diagrama de un lado del cruce al otro lado.

Todos estos movimientos nos ayudan a modificar el diagrama de un nudo y nos ayudan a comparar los distintos diagramas.

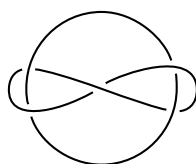
| Teorema 1.1. *Dos diagramas representan el mismo nudo si y sólo si se puede pasar del primero al segundo mediante una sucesión de movimientos de Reidemeister. [2]*

Hasta ahora hemos estado hablando de una sola curva anudada. También existe el objeto que consta de varias curvas enredadas entre si.

1.1.2 Enlaces

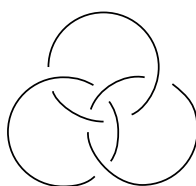
| Definición 1.4. *Un **enlace** es una aplicación diferenciable e inyectiva φ de $S^1 \times \dots \times S^1$ a S^3 , salvo isotopía (ambiente). Se identificara φ con su imagen $L = \varphi(S^1 \times \dots \times S^1)$.*

Aquí podemos ver uno de los enlaces más sencillos conocido como el enlace Whitehead.



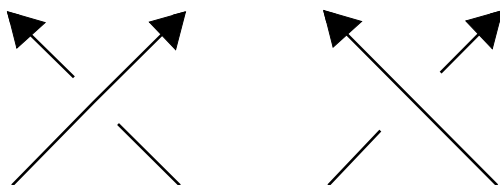
Definición 1.5. *A las curvas de un enlace se las denomina **componentes** del mismo.*

El enlace de la imagen anterior tiene dos componentes. Por supuesto, hay enlaces con distinto número de componentes, como por ejemplo los anillos de Borromeo. Es un enlace de tres componentes algo especial ya que si quitamos cualquiera de sus componentes lo que nos queda siempre es el enlace trivial de dos componentes.



Definición 1.6. *Se dice que un enlace está **orientado** cuando a cada una de las componentes de un enlace se les da un sentido en el que recorrer la curva.*

Una vez que tenemos el enlace orientado podemos calcular el writhe number. Para ello debemos darle un valor numérico a cada cruce del enlace. Como nuestro enlace es orientado, nuestros cruces pueden ser de dos maneras:



Cruce con valor positivo +1 y valor negativo -1 respectivamente para el writhe number.

Definición 1.7. *El **writhe number** de un diagrama de un enlace es la suma de todos los valores dados a los cruces con el método anterior.*

Otro concepto relacionado es el linking number.

Definición 1.8. *El **linking number** de un diagrama de un enlace es la mitad de la suma de todos los valores de aquellos cruces que provengan de dos componentes distintas.*

Como es obvio el linking number de un nudo es cero, ya que es un enlace de una sola componente.

Proposición 1.1. Mientras que el writhe number no es un invariante de un enlace, el linking number sí lo es puesto que es invariante por movimientos de Reidemeister. Pero, aunque el writhe number no es un invariante, sí que lo es para los movimientos de Reidemeister de tipo II y III.

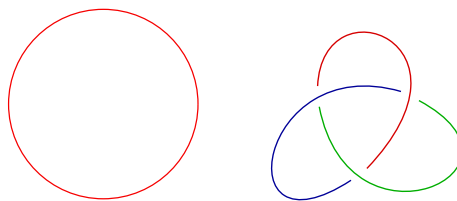
1.1.3 Invariantes

Definición 1.9. Un *invariante* es una característica del enlace. O una característica de la inmersión de S^1 sobre S^3 , que no cambia por isotopía. O una característica del diagrama, que no cambia por movimientos de Reidemeister.

Este concepto es bastante importante ya que nos ayuda a distinguir cuándo dos diagramas no corresponden al mismo enlace. Un ejemplo sencillo de invariante es la tricoloreabilidad.

Para comprobar la tricoloreabilidad se le dará color a cada uno de los segmentos que componen el diagrama del enlace y se utilizarán hasta tres colores. Para que un enlace sea tricoloreable, en cada cruce, cada uno de los tres segmentos implicados deben estar coloreados o con tres colores o con uno sólo. Además en la coloración se tienen que utilizar como mínimo dos colores.

Se comprueba fácilmente que la cualidad de ser tricoloreable se preserva por movimientos de Reidemeister y por tanto es un invariante. Con la tricoloración podemos probar por ejemplo que el nudo trivial y el trébol son distintos.



Como se puede ver, el nudo trivial no es tricoloreable mientras que el trébol sí lo es.

En la siguiente sección explicaremos un invariante de enlaces que tiene mucha más relevancia: el polinomio de Jones.

1.1.4 Polinomio de Jones

| Definición 1.10. Sea D un diagrama de un enlace. Se define el **corchete de Kauffman** de D , denotado $\langle D \rangle$, como el polinomio de Laurent con coeficientes enteros y variable A , que cumple las siguientes propiedades:

1. Normalización. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. Estabilización. $\langle D \amalg \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$
3. Relación madeja. $\langle \times \rangle = A\langle \smile \rangle + A^{-1}\langle \frown \rangle$

Donde $D \amalg \bigcirc$ es la unión disjunta de un diagrama y un nudo trivial y donde \times , \smile y \frown representan tres diagramas iguales en los que sólo ilustramos una zona local del diagrama, que es donde se diferencian. [5]

Para el cálculo del corchete de Kauffman de un diagrama nos ayudaremos de sus propiedades. Primero, utilizando la relación madeja para que nuestro polinomio vaya dependiendo a cada paso de diagramas con menos cruces y, luego, utilizando estabilización y normalización para terminar el cálculo.

Este polinomio, como vamos a ver en las siguientes ecuaciones, es invariante ante el segundo y tercer movimiento de Reidemeister pero no ante el primero.

En efecto, si aplicamos los movimientos de Reidemeister a un diagrama, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \langle \check{\times} \rangle &= A\langle \check{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \check{\frown} \rangle \\
 &= A(A\langle \check{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \check{\times} \rangle) + A^{-1}(A\langle \check{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \check{\frown} \rangle) \\
 &= A(A\langle \smile \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})\langle \smile \rangle) + A^{-1}(A\langle \smile \rangle + A^{-1}\langle \frown \rangle) \\
 &= (A^2 + AA^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-2})\langle \smile \rangle + A^{-1}A\langle \smile \rangle + A^{-2}\langle \frown \rangle = \langle \smile \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \check{\times} \rangle &= A\langle \check{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \check{\frown} \rangle \\
 &= A\langle \smile \rangle + A^{-1}\langle \frown \rangle = \langle \times \rangle
 \end{aligned}$$

(En esta última ecuación podemos igualar lo marcado en rojo ya que hemos demostrado previamente que este polinomio es invariante para el segundo movimiento de Reidemeister.)

$$\begin{aligned} \langle \overbrace{\text{---}} \rangle &= A \langle \underbrace{\text{---}} \rangle + A^{-1} \langle \overbrace{\text{---}} \rangle \\ &= A \langle \text{---} \rangle + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{---} \rangle \\ &= (A - A - A^{-3}) \langle \text{---} \rangle = -A^{-3} \langle \text{---} \rangle \end{aligned}$$

Como hemos comprobado, el polinomio es invariante ante los movimientos segundo y tercero pero no ante el primero. Tenemos que encontrar una forma de que nuestro polinomio sea invariante para el primer movimiento también. Aquí es donde entra el writhe number. Nótese que el primer movimiento siempre cambia el writhe number en ± 1 .

Definamos ahora el polinomio X que será un polinomio de enlaces orientados que se calcula de la siguiente forma.

$$X(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

Como tanto el corchete de Kauffman como el writhe number son invariantes ante el segundo y tercer movimiento, el polinomio X también lo es. Veamos qué ocurre con nuestro polinomio X cuando realizamos el primer movimiento de Reidemeister a un enlace. Sea D el diagrama de un enlace orientado y D' el diagrama del enlace resultante de aplicar el primer movimiento de Reidemeister a D de forma que el writhe number aumenta en uno. Para el pliegue en el sentido contrario la demostración es análoga.



Veamos que el polinomio X es el mismo para ambos diagramas.

$$\begin{aligned}
X(D') &= (-A^3)^{-w(D')} \langle D' \rangle \\
&= (-A^3)^{-(w(D)+1)} \langle D' \rangle \\
&= (-A^3)^{-(w(D)+1)} (-A^3 \langle D \rangle) \\
&= (-A^3)^{-(w(D)+1)+1} \langle D \rangle \\
&= (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle = X(D)
\end{aligned}$$

Entonces, como hemos visto, el polinomio X es un invariante de enlaces.

Definición 1.11. Dado D diagrama de un enlace, el **polinomio de Jones**, $V_D(t)$ es igual a $X(D)$, después de aplicar el cambio de variable

$$A = t^{-1/4} \quad (1.1)$$

de forma que tenemos la siguiente expresión del polinomio de Jones.

$$V_D(t) = V_D(A^{-4}) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \quad (1.2)$$

Además, por su relación con el corchete de Kauffman, el polinomio de Jones tiene las siguientes propiedades similares al corchete de Kauffman.

1. Normalización. $V_{\bigcirc} = 1$
2. Estabilización. $V_{D \amalg \bigcirc} = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V_D$
3. Relación madeja. $t^{-1}V_{\nearrow \searrow} - tV_{\searrow \nearrow} = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{\nearrow \nearrow}$

Donde $D \amalg \bigcirc$ es la unión disjunta de un diagrama y un nudo trivial y donde $\nearrow \searrow$, $\searrow \nearrow$ y $\nearrow \nearrow$ representan tres diagramas iguales en los que sólo ilustramos una zona local del diagrama, que es donde se diferencian.

Las dos primeras propiedades se deducen trivialmente de las propiedades equivalentes del corchete de Kauffman. La tercera tampoco tiene mucha complejidad, como veremos a continuación.

Sea w_0 el writhe number del diagrama $\nearrow \searrow$, y sean w_+ , w_- los writhe numbers de $\searrow \nearrow$, $\nearrow \nearrow$ respectivamente. De esta forma tenemos las igualdades $w_+ = w_0 + 1$ y $w_- = w_0 - 1$ que podemos utilizar para demostrar la relación madeja del polinomio de Jones:

$$\begin{aligned}
 t^{-1}V_{\nearrow\searrow} - tV_{\searrow\nearrow} &= \\
 A^4((-A)^{-3w_+}\langle \nearrow\searrow \rangle) - A^{-4}((-A)^{-3w_-}\langle \searrow\nearrow \rangle) &= \\
 A^4((-A)^{-3w_0-3}(A\langle \triangleright \triangleleft \rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle)) - A^{-4}((-A)^{-3w_0+3}(A\langle \asymp \rangle + A^{-1}\langle \triangleright \triangleleft \rangle)) &= \\
 (-A)^{-3w_0}((-A^2 + A^{-2})\langle \triangleright \triangleleft \rangle + (-1 + 1)\langle \asymp \rangle) &= \\
 (A^{-2} - A^2)((-A)^{-3w_0}\langle \triangleright \triangleleft \rangle) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{\triangleright\triangleleft}
 \end{aligned}$$

Aunque teniendo unas propiedades parecidas, como el polinomio de Jones viene de la transformación hecha sobre el corchete de Kauffman hacia el polinomio X , tenemos que el polinomio de Jones sí es un invariante de enlaces.

Más adelante veremos la relación entre el polinomio de Jones y la homología de Khovanov. Para ello, necesitaremos el valor de V_{\emptyset} , donde \emptyset es el enlace con cero componentes (correspondiente al conjunto vacío).

Aplicando las definiciones, el corchete de Kauffman y el polinomio de Jones para el enlace vacío son

$$V_{\emptyset} = \frac{1}{-t^{1/2} - t^{-1/2}} \quad \text{y} \quad \langle \emptyset \rangle = \frac{1}{-A^2 - A^{-2}}$$

Para evitar que aparezcan funciones racionales definiremos a continuación el corchete de Kauffman y el polinomio de Jones aumentados. Estos consisten en cambiar la propiedad de Normalización de la siguiente manera:

$$\tilde{V}_{\circlearrowleft} = -t^{1/2} - t^{-1/2} \quad \text{y} \quad \langle \widetilde{\circlearrowleft} \rangle = -A^2 - A^{-2}$$

Veamos un ejemplo del cálculo del polinomio de Jones aumentado con el nudo trébol.

Primero calcularemos el corchete de Kauffman aumentado del trébol para luego, utilizando (1.2), calcular el polinomio de Jones aumentado.

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \text{trebol} \rangle} &= A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle} \\
&= A(A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle}) + A^{-1}(A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle}) \\
&= A^2(A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle}) + (A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle}) \\
&\quad + (A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle}) + A^{-2}(A\overline{\langle \text{trebol} \rangle} + A^{-1}\overline{\langle \text{trebol} \rangle}) \\
&= 3A(-A^2 - A^{-2}) + (A^3 + 3A^{-1})(-A^2 - A^{-2})^2 + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^3 \\
&= A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}
\end{aligned}$$

Utilizando que $w(\text{trebol}) = 3$ en la segunda igualdad de (1.2) y el cambio de variable (1.1), tenemos:

$$\tilde{V}_{\otimes}(A^{-4}) = -A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18} \quad (1.3)$$

$$\tilde{V}_{\otimes}(t) = -t^{1/2} - t^{3/2} - t^{5/2} + t^{9/2} \quad (1.4)$$

Así hemos obtenido el polinomio de Jones aumentado del trébol.

1.2 Homología clásica

En esta sección, como hemos mencionado anteriormente, hablaremos de algunos conceptos necesarios sobre homología lo cuales hemos recogido de [4].

| Definición 1.12. Sea R un anillo conmutativo con elemento unidad. Una **sucesión exacta** de R -módulos es una sucesión de homomorfismos de R -módulos de la forma

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

donde $\text{Im}(f_{i-1}) = \text{Ker}(f_i)$ para todo i .

| Definición 1.13. Cuando tenemos una sucesión exacta del tipo

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \rightarrow 0$$

se denomina **sucesión exacta corta**

| **Definición 1.14.** Un **complejo de cadenas** C es un diagrama del tipo

$$\cdots \rightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \rightarrow \quad (n \in \mathbb{Z})$$

donde cada C_n es un R -módulo y $d_n d_{n-1} = 0$. Es decir, $\text{Im}(f_{i-1}) \subseteq \text{Ker}(f_i)$

Como podemos observar, la relación que tienen la imagen y el núcleo en un complejo de cadenas es más débil que la que tienen en una sucesión exacta. Aún así, esta contención es la que se necesita para definir la homología.

| **Definición 1.15.** Sea $C = \{C_n, d_n\}$ un complejo de cadenas, se define el **n -ésimo módulo de homología** de C como el cociente $H_n(C) = \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n-1})$

| **Definición 1.16.** Sea $C = \{C_n, d_n\}$ un complejo de cadenas. Para cada entero n sea $C'_n \subseteq C_n$ un submódulo tal que $d_n(C'_n) \subseteq C'_{n+1}$. Entonces, a la familia $C' = \{C'_n, d_n|_{C'_n}\}$ se le denomina **subcomplejo** de C .

| **Definición 1.17.** Si C y C' son complejos de cadenas, la **suma directa** $C \oplus C'$ es el complejo de cadenas definido por los homomorfismos $d_n \oplus d'_n : C_n \oplus C'_n \rightarrow C_{n+1} \oplus C'_{n+1}$.

| **Definición 1.18.** Dados dos complejos de cadenas $C^1 = \{C_n^1, d_n^1\}$ y $C^2 = \{C_n^2, d_n^2\}$, un **homomorfismo de complejos de cadenas** $f : C^1 \rightarrow C^2$ es una familia de homomorfismos $f = \{f_n : C_n^1 \rightarrow C_n^2\}$ verificando que, para cada n , el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} C_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C_{n+1}^1 \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ C_n^2 & \xrightarrow{d_n^2} & C_{n+1}^2 \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama anterior implica, en particular, que $f_n(\text{Ker}(d_n^1)) \subseteq \text{Ker}(d_n^2)$ y $f_{n+1}(\text{Im}(d_n^1)) \subseteq \text{Im}(d_n^2)$. Por tanto, f induce homomorfismos $f_* : H_n(C^1) \rightarrow H_n(C^2)$, donde $f_*([z]) = [f_n(z)]$. A f_* se le llama **homomorfismo inducido por f** .

| **Definición 1.19.** Dos homomorfismos de complejos de cadenas $f, g : C^1 \rightarrow C^2$, son **homotópicos**, y se denota por $f \simeq g$, cuando existe una familia de homomorfismos $\{h_n : C_n^1 \rightarrow C_{n-1}^2\}$, llamada **homotopía**, de modo que $f_n - g_n = d_{n-1}^2 h_n + h_{n+1} d_n^1$ para

todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C^1 \\
 & & \downarrow h_n & & \downarrow h_{n+1} \\
 & & C_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C_{n+1}^1 \\
 & \swarrow h_n & \downarrow g_n & \swarrow h_{n+1} & \downarrow g_{n+1} \\
 & C_{n-1}^2 & \xrightarrow{d_{n-1}^2} & C_n^2 & \xrightarrow{d_n^2} & C_{n+1}^2 \\
 & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & \\
 & & C_{n-1}^1 & \xrightarrow{d_{n-1}^1} & C_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C_{n+1}^1
 \end{array}$$

Definición 1.20. El homomorfismo de complejos de cadenas $f : C^1 \rightarrow C^2$ se dice una **equivalencia de homotopía** cuando existe $g : C^2 \rightarrow C^1$ con $f \circ g \simeq id_{C^2}$ y $g \circ f \simeq id_{C^1}$. En tal caso, se dice que C^1 y C^2 son **homotópicamente equivalentes**, y g una **inversa homotópica** de f .

Proposición 1.2. Si $f : C^1 \rightarrow C^2$ es un equivalencia de homotopía, entonces $f_* : \mathcal{H}(C^1) \rightarrow \mathcal{H}(C^2)$ es un isomorfismo para todo entero n .

Definición 1.21. Sea X un complejo de cadenas, y sea A un subcomplejo de X . La inclusión $in : A \rightarrow X$ es un **retracto**, si existe un homomorfismo $\rho : X \rightarrow A$, llamado **retracción**, tal que $\rho \circ in = id_A$.

Aunque en esta introducción de homología hemos utilizado para las definiciones el concepto más general de R -módulo, en nuestro caso particular utilizaremos \mathbb{Z} -módulos, es decir, grupos abelianos.

2 | Estados

En este capítulo hablaremos de los estados y los estados mejorados, dos conceptos que nos darán una variación del cálculo del polinomio de Jones y el corchete de Kauffman de un enlace. Esto nos ayudará en la categorización del polinomio de Jones, que obtendremos al definir la homología de Khovanov.

2.1 Estado

Con la propiedad de relación madeja hemos visto las dos maneras de deshacer los cruces de un nudo. Un cruce divide localmente al plano en cuatro regiones y al deshacer dicho cruce resulta que unimos dos de estas regiones que están en posiciones opuestas.

Definición 2.1. *A la acción de deshacer un cruce se la denomina suavizar.*

Estas dos formas de suavizar un cruce se distinguen con unos ciertos marcadores que ahora definimos.

Definición 2.2. *Dado un cruce de un diagrama de un enlace, un **marcador** es un segmento que se coloca en un cruce, indicando qué regiones del plano se unirán al suavizar dicho cruce.*

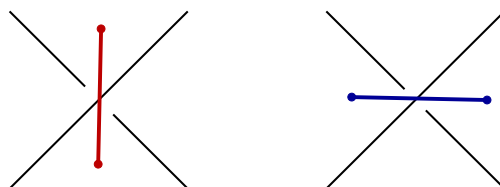


Figura 2.1: Marcador A o positivo y marcador B o negativo respectivamente.

Como podemos ver en la Figura 2.1, según qué dos regiones opuestas conectamos, corresponde un marcador tipo A o un marcador tipo B.

| Definición 2.3. Dado un diagrama D , con un marcador en cada cruce, el diagrama obtenido al suavizar cada cruce de D , uniendo las regiones indicadas por cada marcador, se denomina **estado** de D , y se denotará por s .

Al número de círculos que quedan se les denota por $|s|$ y a la diferencia entre marcadores A y marcadores B del diagrama se la denota por $\sigma(s)$

En la Figura [ref] se pueden ver todos los estados posibles asociados al diagrama estándar del nudo trébol.

Con estas nuevas definiciones podríamos expresar el corchete de Kauffman aumentado de la siguiente manera:

$$\langle \widetilde{D} \rangle = \sum_{\text{estados } s \text{ de } D} A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|s|}$$

y junto a (1.2) podemos expresar el polinomio de Jones aumentado como sigue:

$$\widetilde{V}_D(A^{-4}) = (-A)^{-3w(D)} \sum_{\text{estados } s \text{ de } D} A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|s|} \quad (2.1)$$

2.2 Categorización y cambio de variable.

La categorización es un proceso por el que se obtiene más información de la que ya obtenemos con el polinomio de Jones. Se pretende conseguir que los coeficientes del polinomio de Jones aumentado sean la suma de otros objetos.

A continuación, haremos un cambio de variable del polinomio de Jones aumentado y trabajaremos con esta nueva variable a partir de ahora.

$$q = -t^{1/2} \quad (2.2)$$

Esta variable q es la que utiliza Khovanov y, además, con este cambio de variable en el polinomio de Jones aumentado, obtenemos el polinomio $K(D)$ que tiene exponentes

enteros. Por tanto, las tres propiedades que tiene el polinomio de Jones aumentado se transforman en:

1. Normalización. $K(\bigcirc)(q) = q + q^{-1}$
2. Estabilización. $K(D \amalg \bigcirc)(q) = (q + q^{-1})K(D)$
3. Skein relación. $q^{-2}K(\nearrow)(q) - q^2K(\searrow)(q) = (q^{-1} - q)K(\curvearrowright)(q)$

Con este cambio de variable, por ejemplo, el polinomio de Jones del trébol (1.4) nos quedaría.

$$K(\text{trébol})(q) = q + q^3 + q^5 - q^9$$

En general, haciendo el cambio de variable en (2.1), como en [3], obtenemos lo siguiente.

$$K(D)(q) = \sum_{\text{estados } s \text{ de } D} (-1)^{(w(D)-\sigma(s))/2} q^{(3w(D)-\sigma(s))/2} (q + q^{-1})^{|s|} \quad (2.3)$$

2.3 Estado mejorado.

En esta sección modificaremos la última igualdad (2.3) para que $K(D)$ dependa de dos valores i y j .

Definición 2.4. Entenderemos por **estado mejorado** cuando todos los círculos de un estado s tengan asignado un signo (más o menos), y se denominará S .

La diferencia entre los signos más y los signos menos de un estado mejorado S se denotará por $\tau(S)$

En este caso, la notación que utilizamos para un estado mejorado es diferente a la usada para un estado ya que tiene elementos nuevos. Una observación importante es que para todo estado s se cumple que

$$q^{(3w(D)-\sigma(s))/2} (q + q^{-1})^{|s|} = \sum_{\substack{\text{estados} \\ \text{mejorados } S}} q^{(3w(D)-\sigma(S)+2\tau(S))/2} \quad (2.4)$$

Esta igualdad se cumple ya que la igualdad

$$(q + q^{-1})^{|s|} = \sum_{\substack{\text{estados} \\ \text{mejorados } S}} q^{\tau(S)} \quad (2.5)$$

se cumple por el binomio de Newton. Si desarrollamos la primera parte de la igualdad con el binomio de Newton tendríamos

$$(q + q^{-1})^{|s|} = \sum_{k=0}^{|s|} \binom{|s|}{k} q^{|s|-k} q^{-k} = \sum_{k=0}^{|s|} \binom{|s|}{k} q^{|s|-2k}$$

Veamos que todo sumando de esta última igualdad está también en la suma de la igualdad (2.5).

Sea k un k fijo entre 0 y $|s|$, tenemos el sumando $\binom{|s|}{k} q^{|s|-2k}$ con este k . Sea este k fijo también el número de círculos con signos negativos de un estado mejorado. Entonces, siendo k el número de círculos con signo negativo, el resto de círculos, es decir, $|s| - k$, tienen asignados un signo positivo. Este estado mejorado con estos números de signos negativos y positivos existe ya que están todos los estados con todas las combinaciones posibles de signos. Pero, además, el número de estados posibles que pueden tener este número concreto de signos es de $\binom{|s|}{k}$.

Todos estos exponentes que tenemos combinando (2.3) y (2.4) se pueden simplificar con la siguiente notación.

Definición 2.5. Denotemos como i y j las siguientes igualdades

$$i(S) = \frac{w(D) - \sigma(S)}{2} \quad (2.6)$$

$$j(S) = \frac{3w(D) - \sigma(S) + 2\tau(S)}{2} = w(D) + i(S) + \tau(S) \quad (2.7)$$

Con esto, la expresión (2.3) y la (2.4) nos queda

$$K(D)(q) = \sum_{\text{estados mejorados } S \text{ de } D} (-1)^{i(S)} q^{j(S)} \quad (2.8)$$

Una pequeña observación de las igualdades (2.6) y (2.7) es que $i(S)$ es entero y por lo tanto $j(S)$ también. Esto es debido a que $w(D)$ y $\sigma(s)$ son congruentes en módulo 2.

3 | Homología de Khovanov

En este capítulo definiremos las cadenas de Khovanov, las cuales más adelante utilizaremos para la homología. Además definiremos el concepto de adyacencia entre estados mejorados para utilizarlo en la definición de la diferencial, es decir, los homomorfismos de las cadenas de Khovanov.

3.1 Cadenas

Denotemos como $C(D)$ al \mathbb{Z} -módulo libre generado por los estados mejorados de un diagrama D . Ahora denotemos por $C^j(D)$ al submódulo de $C(D)$ generado por los estados mejorados S con $j(S) = j$. Al estar generados por conjuntos disjuntos podemos descomponer

$$C(D) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C^j(D)$$

Definimos $C^{i,j}(D)$ como el submódulo de $C^j(D)$ generado por los estados mejorados $S \in C^j(D)$ con $i(S) = i$. Con esto podemos deducir junto con (2.8) que

$$K(D)(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \text{rk} C^{i,j}(D)$$

Pero los $C^{i,j}(D)$ no son invariantes del enlace determinado por D .

3.2 Adyacencia

| Definición 3.1. A todo par de estados mejorados S, T de un diagrama D , le asociamos un valor $(S : T) \in \{-1, 0, 1\}$ llamado **número de incidencia**. $(S : T)$ será distinto de cero si S y T se distinguen en un único cruce, al que llamaremos *changing crossing* y denotaremos $x(S, T)$. El marcador de $x(S, T)$ en S es de tipo A y en T es de tipo B. Además en el resto del diagrama que no toma contacto con $x(S, T)$ los estados mejorados S y T serán iguales.

En el caso de ser $(S : T) \neq 0$, definimos

$$(S : T) = (-1)^n$$

donde n es el número de marcadores B posteriores a $x(S, T)$, para un orden prefijado de los cruces de D .

| Definición 3.2. Cuando dos estados mejorados tengan número de incidencia distinto de cero entonces se dirá que son **adyacentes**.

De esta definición del número de incidencia surgen una serie de propiedades que iremos anunciando a continuación.

Proposición 3.1. Si S y T son dos estados mejorados tales que $(S : T) \neq 0$ entonces $j(S) = j(T)$ y $i(S) = i(T) - 1$.

Demostración. Esta restricción surge del propio concepto de número de incidencia, ya que S y T sólo se diferencian en un marcador, que pasa del tipo A al tipo B. **|**

Proposición 3.2. Si S y T son estados mejorados tales que $(S : T) \neq 0$ entonces $\sigma(S) = \sigma(T) + 2$

Demostración. Como sabemos por laproposición anterior $i(S) = i(T) - 1$. Sabiendo esto y utilizando la definición de i obtenemos la igualdad del enunciado. **|**

Proposición 3.3. Si S y T son estados mejorados con $(S : T) \neq 0$ entonces $\tau(S) - 1 = \tau(T)$.

Demostración.

$$\tau(T) = j(T) - i(T) - w(D) = j(S) - i(S) - 1 - w(D) = \tau(S) - 1$$

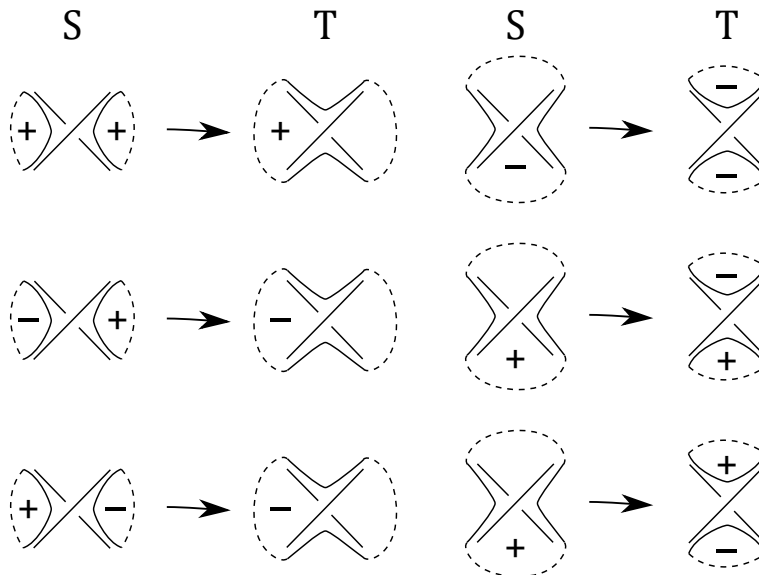
Proposición 3.4. Sean S y T estados mejorados con $(S : T) \neq 0$, entonces $|T| = |S| \pm 1$

Demostración. Puesto que cambiamos el marcador en $x(S, T)$ de S a T , esto puede estar uniendo (o separando) dos círculos en T que estaban separados (o unidos) en S respectivamente. Por lo tanto afecta al número total de círculos en ± 1 . |

Proposición 3.5. Sean S y T estados mejorados con $(S:T) \neq 0$. Se tiene:

1. Si $|T| = |S| - 1$ y ambos círculos que se van a unir de D_S son positivos, entonces el círculo resultante de D_T debería ser positivo.
2. Si $|T| = |S| - 1$ y ambos círculos que se van a unir de D_S tienen diferentes signos, entonces el círculo resultante de D_T debería ser negativo.
3. Si $|T| = |S| + 1$ y el círculo de D_S que se divide es negativo, entonces ambos círculos resultantes de D_T debería ser negativos.
4. Si $|T| = |S| + 1$ y el círculo de D_S que se divide es positivo, entonces los círculos de D_T deberían ser de diferentes signos.

Demostración. Teniendo en cuenta que $\tau(S) = \tau(T) + 1$ y que el resto de los círculos comparten el mismo signo, sean cuales sean los signos de los círculos que se unen o separan de D_S , en D_T tiene que disminuir en uno la suma de los signos de los círculos implicados. |



Cambios permitidos para que S y T sean estados mejorados. En la parte discontinua S y T serian iguales.

Proposición 3.6. Si $(S:T) \neq 0 \neq (T:U)$ entonces $x(S,T) \neq x(T,U)$.

Demostración. No pueden ser el mismo porque en D_T , $x(S,T)$ tiene que tener un marcador negativo y en $x(T,U)$ tiene que tener un marcador positivo por definición del número de incidencia. |

Proposición 3.7. Sean S y U dos estados mejorados adyacentes de segundo orden, es decir, existe a menos un T tal que $(S:T) \neq 0 \neq (T:U)$. En el conjunto de todos los T que cumplen esto último, el changing crossing $x(S,T)$ puede tomar dos valores diferentes.

Demostración. Cuando vamos de S a T lo que cambia es el marcador $x(S,T)$ y cuando vamos de T a U cambia el marcador $x(T,U)$ pero sabemos por la Proposición 3.6 que estos dos changing crossing son dos marcadores distintos. Por lo tanto, cuando pasamos de S a U cambian dos marcadores. Ahora bien, cuando pasamos de S a T y luego a U puede que cambie primero un marcador y luego el otro, o puede que sea al contrario. Por ésto, $x(S,T)$ puede tomar dos valores distintos entre los dos marcadores que cambian para pasar a U . |

3.3 Diferencial

Para dar una expresión de la diferencial de una cadena de Khovanov, puesto que es un homomorfismo entre \mathbb{Z} -módulos, basta con dar los elementos de la matriz. En este caso los elementos de la matriz serán los números de incidencia de los generadores.

Definición 3.3. Dado un diagrama D la diferencial de Khovanov es el homomorfismo $d : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$ cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} (S_1 : T_1) & \dots & (S_N : T_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (S_1 : T_M) & \dots & (S_N : T_M) \end{pmatrix}$$

Donde $\{S_1, \dots, S_N\}$ y $\{T_1, \dots, T_M\}$ son los estados mejorados que generan $C^{i,j}(D)$ y $C^{i+1,j}(D)$ respectivamente. Aunque, para usar en el cálculo, la siguiente expresión será más simple.

$$d(S) = \sum_T (S:T)T$$

Donde S es algún generador de $C^{i,j}(D)$ y T son los generadores de $C^{i+1,j}(D)$. Observemos que d depende de i y j , pero omitiremos estos índices, ya que esto no dará lugar a confusión.

Teorema 3.1. El homomorfismo $d : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$, cuya expresión es

$$d(S) = \sum_T (S:T)T \tag{3.1}$$

satisface $d^2 = 0$. [3]

Demostración. Queremos demostrar que $d^2(S) = 0$ y para ello expresaremos d^2 como en (3.1). Sean $C^{i-1,j}$, $C^{i,j}$ y $C^{i+1,j}$ y sean S , T y U respectivamente como denominaremos a los generadores de $C^{i-1,j}$, $C^{i,j}$ y $C^{i+1,j}$. Con esta notación la expresión de d^2 es de la siguiente manera.

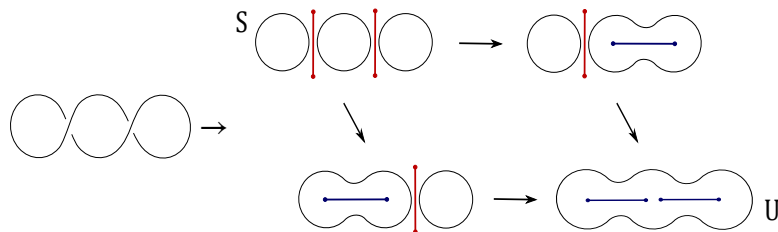
$$d^2(S) = \sum_T \sum_U (S:T)(T:U)U \tag{3.2}$$

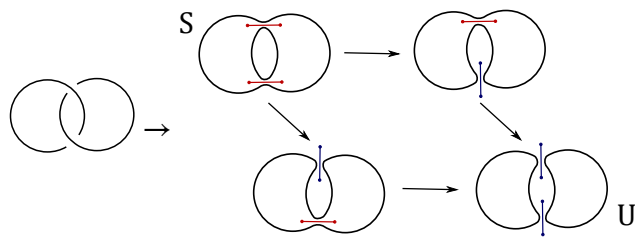
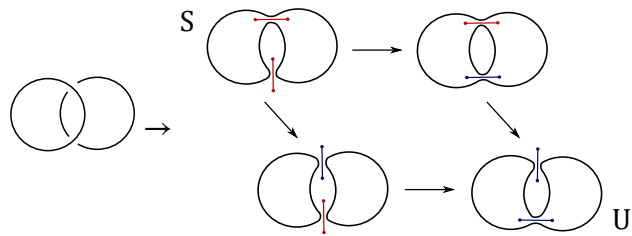
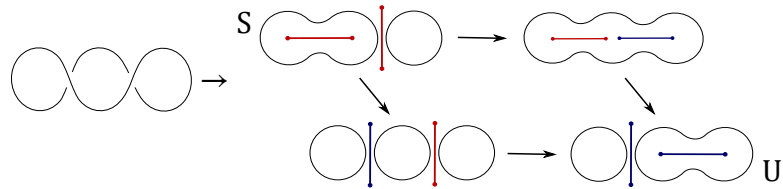
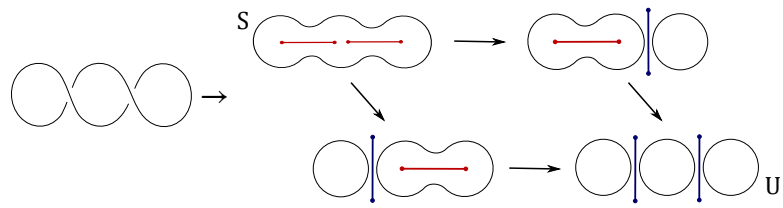
Veamos ahora qué pasa para los T tales que $(S:T)(T:U) \neq 0$. Como podemos deducir, S y U difieren exactamente en dos marcadores. Estos marcadores son positivos en S y negativos en U .

Entre estos dos marcadores puede haber cero círculos en común, en tal caso los signos de los círculos colindantes de un marcador no se ven afectados por el cambio del otro marcador. Pero si hay círculos en común los signos pueden verse afectados.

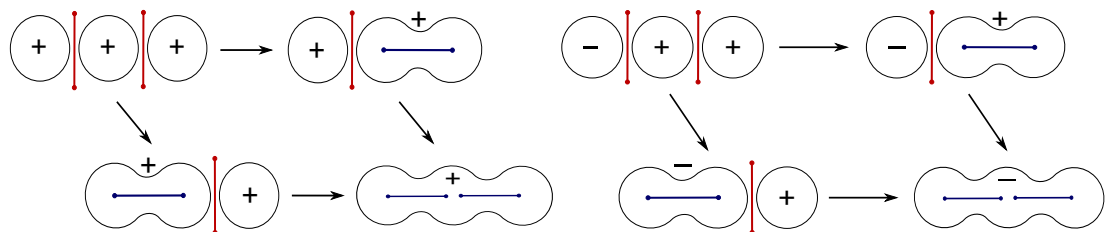
Si, como mínimo, tenemos un círculo en común, el número máximo de círculos que podemos separar con dos marcadores es de tres.

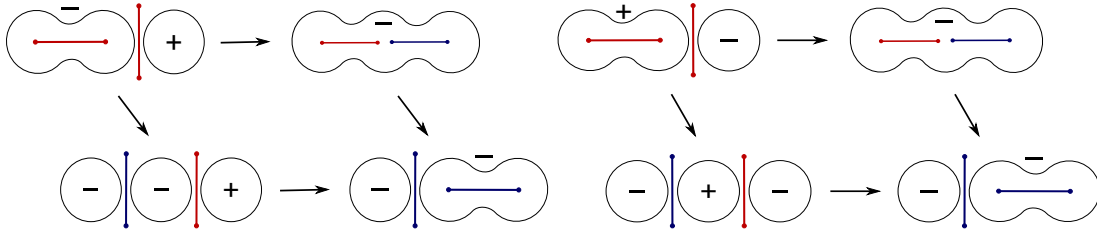
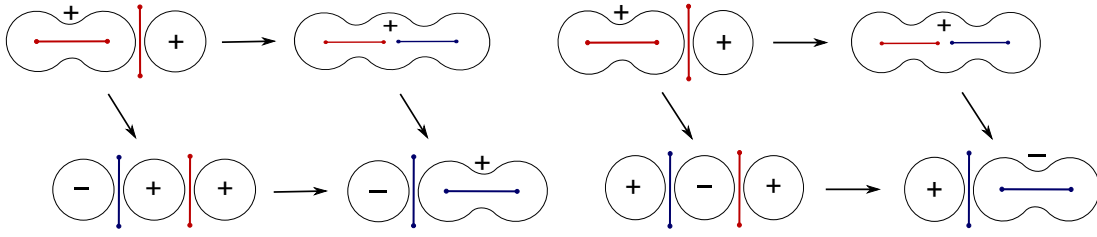
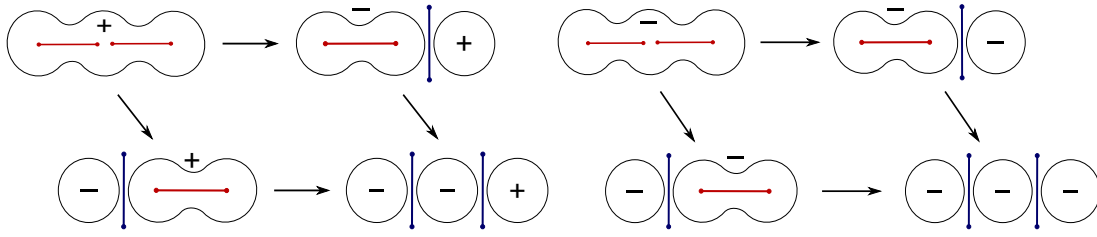
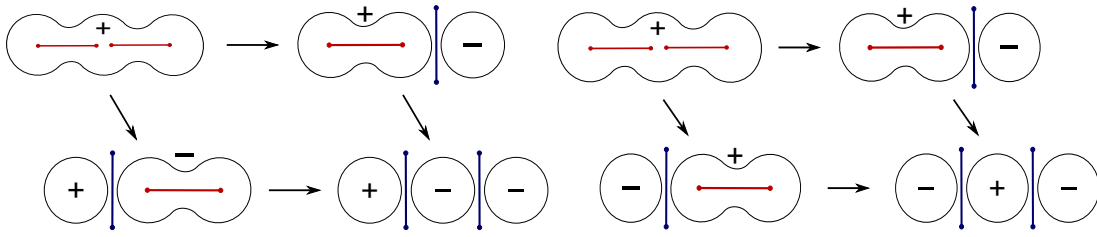
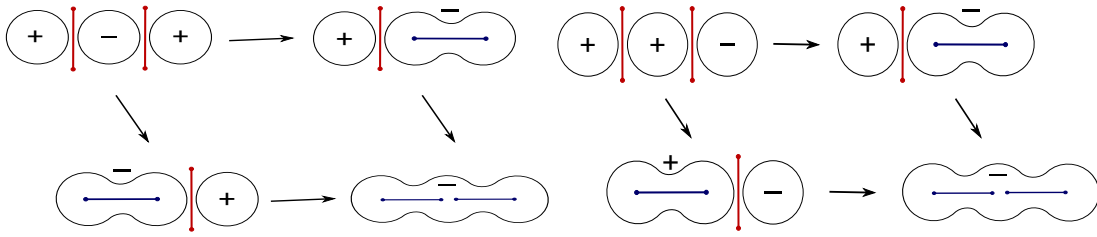
Veamos ahora los casos en los que ocurre esto. Los signos de los círculos que no son colindantes con los marcadores que van a cambiar, permanecerán invariantes y, por lo tanto, los diagramas que vamos a representar para esta demostración solo contendrán los marcadores y círculos que nos interesan.

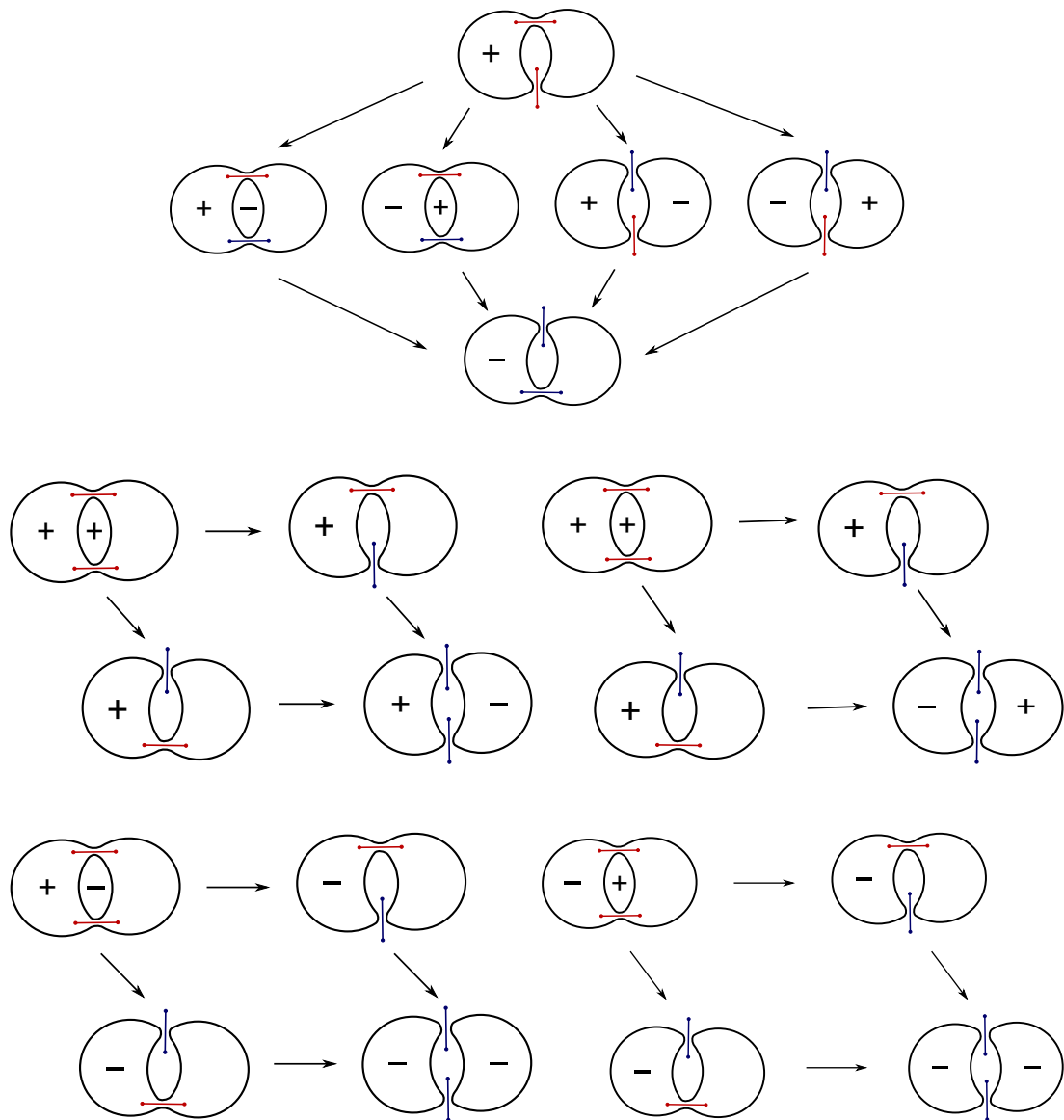




Estos son todos los posibles estados (simples) S que puede haber compartiendo círculos y los estados U a los que llega. Veamos qué ocurre cuando añadimos los posibles signos de los círculos.







Como se puede ver, para ir de un estado mejorado S a un estado mejorado U con adyacencia de segundo grado existen dos posibles caminos; cambiando uno de los marcadores o el otro. En los enlaces que acabamos de ver, cuyos marcadores comparten círculos, hemos visto, no solo que estos dos caminos se dan, sino que además existen el mismo número de un tipo que del otro. Veamos la existencia de estos dos caminos para enlaces cuyo marcadores no comparten círculos.

Sean dos estados mejorados adyacentes de segundo orden S y U . Si los dos marcadores en los que se diferencian son independientes sabemos que podemos ir de S a

U a través de un T que, o bien haya cambiando un marcador o el otro.

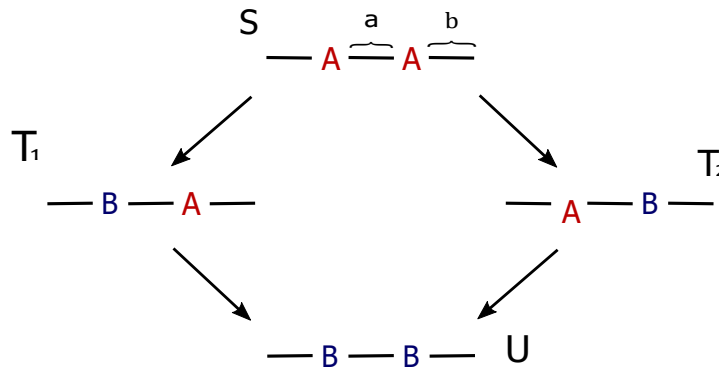


Figura 3.1

Además, en este caso, por cada camino solo hay un único T puesto que, al cambiar el marcador, U nos marca como debemos cambiar los signos de las círculos. Así, como nos pasaba anteriormente en los casos con círculos en común, por cada T que conecta S y U por un camino existe otro T que los conecta por el otro camino.

Ahora veamos que pasa con el cálculo de $d^2(S)$, siendo un S y un U fijos, por cada pareja de T . Digamos que todos los T que $(S:T) \neq 0 \neq (T:U)$ se pueden agrupar en dos conjuntos como los de la Figura 3.1. Los que cambian el primer marcador según el orden establecido, serán los T_1 y los que cambian el otro orden serán los T_2 . Como para calcular los números de incidencia lo único que hay que tener en cuenta son los marcadores y su orden, entonces todos los números de incidencia relacionados con los T_1 serán iguales entre si y lo mismo con los T_2 . Esto es debido a que todos los T_1 comparten los mismos marcadores y los mismo ocurre con los T_2 y los U .

Por tanto, como sabemos que existen el mismo número de elementos en los T_1 y en los T_2 podemos calcular la suma de (3.2) puesto que esta suma se compone de varias de la siguiente forma.

$$[(S:T_1)(T_1:U) + (S:T_2)(T_2:U)]U$$

Denominemos ahora por a al número de marcadores de tipo B que hay entre los marcadores que cambian y por b al número de marcadores de tipo B que hay detrás del segundo marcador que cambia.

$$\begin{aligned}
 (S : T_1) &= (-1)^{a+b}(T_1 : U) = (-1)^b \\
 (S : T_2) &= (-1)^b(T_2 : U) = (-1)^{a+b+1} \\
 (S : T_1)(T_1 : U) + (S : T_2)(T_2 : U) &= \\
 &= (-1)^{a+b}(-1)^b + (-1)^b(-1)^{a+b+1} = 0
 \end{aligned}$$

Entonces, como la suma del número de incidencias de cada par de T es cero, tenemos que $d^2(S) = 0$. |

3.4 Homología

Con todo esto podemos formar nuestros complejos de cadenas.

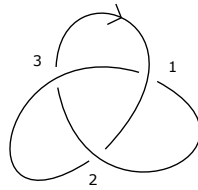
$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d} & C^{i-1,j-1}(D) & \xrightarrow{d} & C^{i,j-1}(D) & \xrightarrow{d} & C^{i+1,j-1}(D) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 \dots & \xrightarrow{d} & C^{i-1,j}(D) & \xrightarrow{d} & C^{i,j}(D) & \xrightarrow{d} & C^{i+1,j}(D) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 \dots & \xrightarrow{d} & C^{i-1,j+1}(D) & \xrightarrow{d} & C^{i,j+1}(D) & \xrightarrow{d} & C^{i+1,j+1}(D) & \xrightarrow{d} & \dots
 \end{array}$$

En cada uno de estos espacios vectoriales tenemos, por la definición de la diferencial, un núcleo y una imagen de la aplicación diferencial que sale y la diferencial que entra del conjunto, respectivamente. Haciendo homología, es decir, haciendo cocientes en cada uno de los conjuntos - núcleo entre imagen - tenemos la homología de Khovanov del diagrama D .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & H^{i-1,j-1} & H^{i,j-1} & H^{i+1,j-1} & \dots \\
 \dots & H^{i-1,j} & H^{i,j} & H^{i+1,j} & \dots \\
 \dots & H^{i-1,j+1} & H^{i,j+1} & H^{i+1,j+1} & \dots
 \end{array}$$

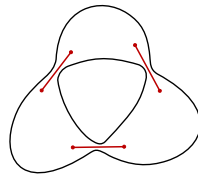
| Teorema 3.2 (de Khovanov). *El conjunto $\{H^{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ es un invariante del enlace determinado por D . [2]*

Para mejor comprensión de todo el proceso del cálculo haremos un ejemplo utilizando un diagrama del nudo del trébol.



Trébol orientado con un orden en los cruces.

Este es el diagrama del trébol al cual le calcularemos la homología. Como podemos ver, le hemos dado una orientación para poder calcular el writhe number — el cual es $w(D) = 3$ — y también le hemos dado un orden a los cruces para más adelante poder calcular los números de incidencia. Ahora calcularemos los estados mejorados.



$$\sigma = 3, i = 0, \text{AAA.}$$

Este es el estado que se genera cuando colocamos marcadores de tipo A sobre todos los cruces como sabemos por la Figura 2.1. Teniendo los marcadores colocados podemos calcular i , σ , y también la secuencia ordenada de los marcadores. El resto de los estados serían los siguientes.

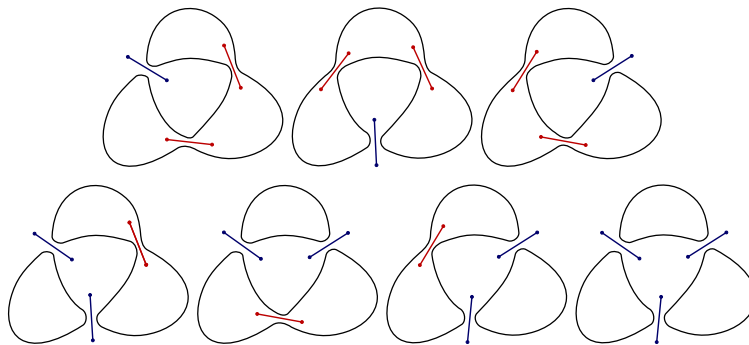
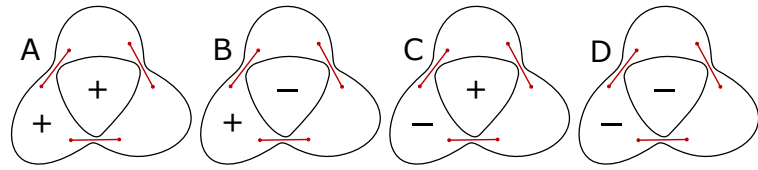
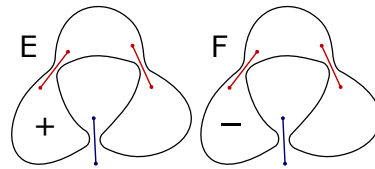


Figura 3.2: Estados posibles del diagrama del nudo trébol (salvo el AAA)

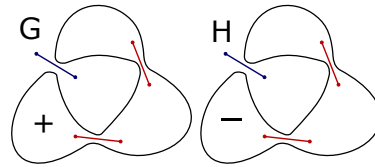
Como podemos ver, en cada caso nos quedan un cierto número de círculos. Para generar los estados mejorados procederemos a asignar un signo + o - a cada uno de los círculos. Una vez hecho esto nos quedan los siguientes estados mejorados.



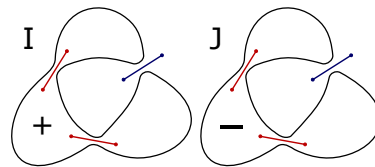
$$\begin{array}{ll}
 A \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 3 & i = 0 \\ \tau = 2 & j = 5 \end{array} \right\} AAA & B \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 3 & i = 0 \\ \tau = 0 & j = 3 \end{array} \right\} AAA \\
 C \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 3 & i = 0 \\ \tau = 0 & j = 3 \end{array} \right\} AAA & D \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 3 & i = 0 \\ \tau = -2 & j = 1 \end{array} \right\} AAA
 \end{array}$$



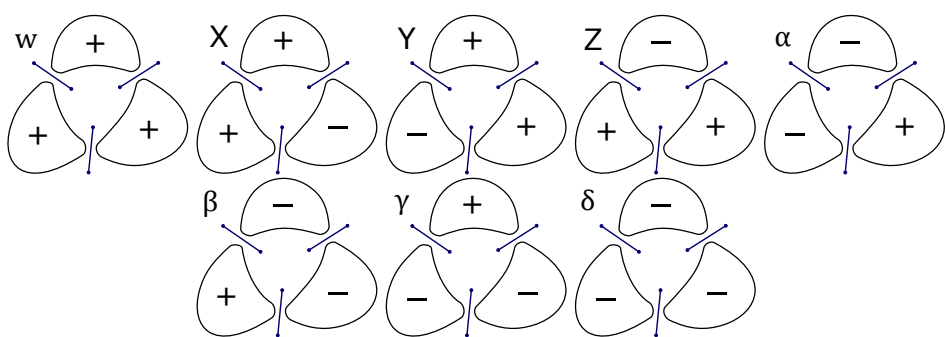
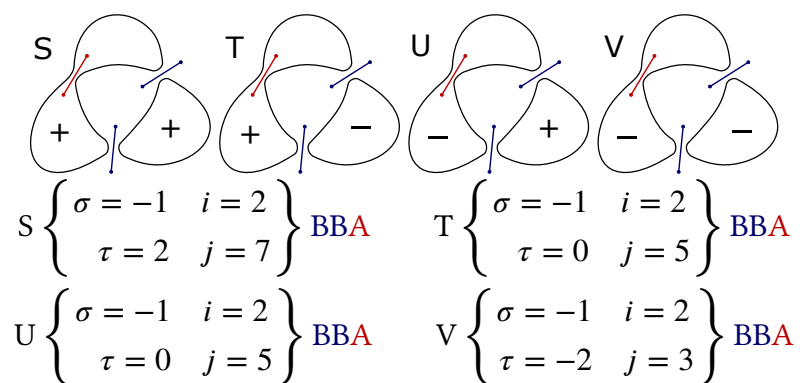
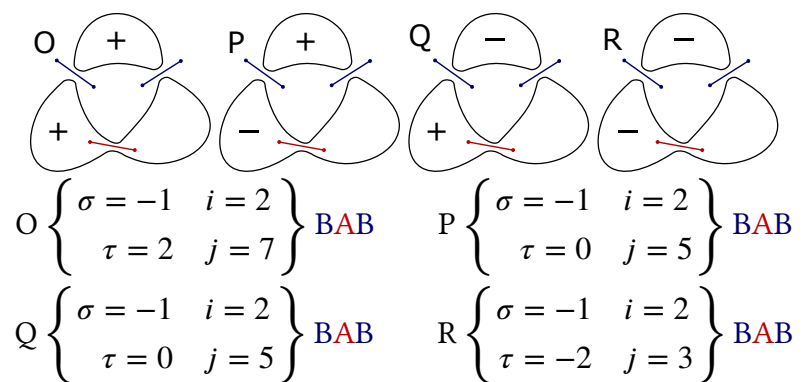
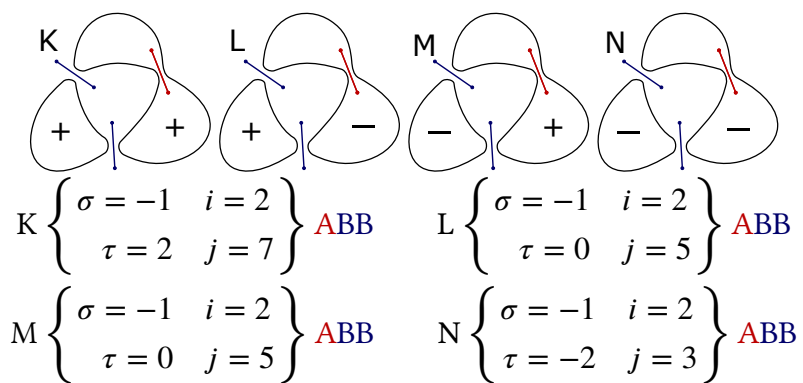
$$\begin{array}{ll}
 E \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 1 & i = 1 \\ \tau = 1 & j = 5 \end{array} \right\} ABA & F \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 1 & i = 1 \\ \tau = -1 & j = 3 \end{array} \right\} ABA
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 G \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 1 & i = 1 \\ \tau = 1 & j = 5 \end{array} \right\} AAB & H \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 1 & i = 1 \\ \tau = -1 & j = 3 \end{array} \right\} AAB
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 G \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 1 & i = 1 \\ \tau = 1 & j = 5 \end{array} \right\} BAA & H \left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 1 & i = 1 \\ \tau = -1 & j = 3 \end{array} \right\} BAA
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 W \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = 3 & j = 9 \end{array} \right\} \text{BBB} & X \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = 1 & j = 7 \end{array} \right\} \text{BBB} & Y \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = 1 & j = 7 \end{array} \right\} \text{BBB} \\
 Z \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = 1 & j = 7 \end{array} \right\} \text{BBB} & \alpha \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = -1 & j = 5 \end{array} \right\} \text{BBB} & \beta \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = -1 & j = 5 \end{array} \right\} \text{BBB} \\
 & \gamma \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = -1 & j = 5 \end{array} \right\} \text{BBB} & \delta \left\{ \begin{array}{cc} \sigma = -3 & i = 3 \\ \tau = -3 & j = 3 \end{array} \right\} \text{BBB}
 \end{array}$$

Cada estado mejorado tiene un valor en i y en j , de forma que los podemos clasificar y escribir los complejos de cadenas siguientes teniendo en cuenta que el resto de elementos de las cadenas que no se reflejan son cero.

$$\begin{array}{ccccccc}
 i \mapsto \{0, 1, 2, 3\} & & j \mapsto \{1, 3, 5, 7, 9\} & & & & \\
 \rightarrow C^{0,1} & \rightarrow & C^{1,1} & \rightarrow & C^{2,1} & \rightarrow & C^{3,1} \rightarrow \\
 \rightarrow C^{0,3} & \rightarrow & C^{1,3} & \rightarrow & C^{2,3} & \rightarrow & C^{3,3} \rightarrow \\
 \rightarrow C^{0,5} & \rightarrow & C^{1,5} & \rightarrow & C^{2,5} & \rightarrow & C^{3,5} \rightarrow \\
 \rightarrow C^{0,7} & \rightarrow & C^{1,7} & \rightarrow & C^{2,7} & \rightarrow & C^{3,7} \rightarrow \\
 \rightarrow C^{0,9} & \rightarrow & C^{1,9} & \rightarrow & C^{2,9} & \rightarrow & C^{3,9} \rightarrow
 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow \langle D \rangle & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \rightarrow \\
 \rightarrow \langle B, C \rangle & \rightarrow & \langle F, H, J \rangle & \rightarrow & \langle N, R, V \rangle & \rightarrow & \langle \delta \rangle \rightarrow \\
 \rightarrow \langle A \rangle & \rightarrow & \langle E, G, I \rangle & \rightarrow & \langle L, M, P, Q, T, U \rangle & \rightarrow & \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \rightarrow \\
 \rightarrow 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \langle K, O, S \rangle & \rightarrow & \langle X, Y, Z \rangle \rightarrow \\
 \rightarrow 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \langle W \rangle \rightarrow
 \end{array}$$

Veamos cómo calcular algunos de los homomorfismo no triviales. Por ejemplo:

$$\varphi : \langle B, C \rangle \rightarrow \langle F, H, J \rangle$$

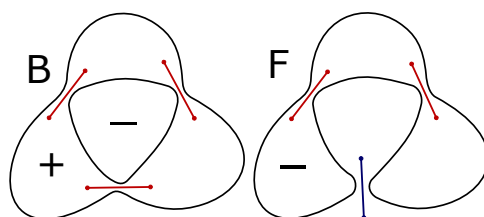
Hagamos el calculo del núcleo y la imagen de este homomorfismo para ver cómo se aplican los conceptos de adyacencia y numero de incidencia en estos cálculos.

Primero calcularemos las imágenes de B y C . Esto seria

$$d(B) = (B : F)F + (B : H)H + (B : J)J \quad (3.3)$$

$$d(C) = (C : F)F + (C : H)H + (C : J)J \quad (3.4)$$

Sabemos por la Definición 3.1 que $(B : F) = (-1)^n$ donde n es el número de marcadores tipo B que se encuentran posteriormente a $x(B, F)$. Para calcular $(B : F)$ veamos si B y F son adyacentes.



Estados mejorados B y F.

Como podemos ver de B a F solo cambia el segundo marcador, de positivo a negativo y el resto del estado mejorado se queda igual. También podemos observar que hay dos círculos que se unen al cambiar el marcador y que la suma de los signos dispuestos en estos círculos disminuye en uno al cambiar el marcador. Cumpliéndose estas condiciones tenemos que B y F son adyacentes. Teniendo que la secuencia de marcadores de B es AAA y en F ABA y que $x(B, F)$ es el segundo marcador podemos calcular el número de incidencia, que sería $(B : F) = (-1)^0 = 1$.

Haciendo lo mismo con el resto de números de incidencia obtenemos las siguientes igualdades.

$$d(B) = F + H + J \quad (3.5)$$

$$d(C) = F + H + J \quad (3.6)$$

Con esto vemos que la imagen es

$$Im(\varphi) = \langle F + H + J \rangle$$

de dimensión uno. Calculando dimensiones con el primer teorema de isomorfía sabemos que la dimensión del núcleo también tiene que ser uno. En este caso, como las

imágenes de B y C son la misma esta claro que el núcleo es

$$\ker(\varphi) = \langle B - C \rangle$$

Siguiendo este procedimiento tendremos los conjuntos imagen y núcleo de cada una de las diferenciales y haciendo homología obtenemos la siguiente tabla que es la homología de Khovanov de nuestro diagrama del trébol.

$j \ i$	0	1	2	3
1	\mathbb{Z}	0	0	0
3	\mathbb{Z}	0	0	0
5	0	0	\mathbb{Z}	0
7	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$
9	0	0	0	\mathbb{Z}

Además teniendo esta tabla podemos sacar el polinomio de Jones sumando las dimensiones.

| Teorema 3.3. *La homología de Khovanov y el polinomio de Jones se relacionan por la siguiente formula.*

$$K(D)(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \dim H^{i,j}(D) \tag{3.7}$$

Si cogemos el polinomio de Jones (1.4) que hemos calculado antes y le aplicamos el cambio de variable (2.2) nos da el polinomio

$$K = +q^1 + q^3 + q^5 - q^9 \tag{3.8}$$

El mismo que sale si lo calculamos con 3.7.

4 | Invarianza

La homología de Khovanov es un invariante de enlaces. En este capítulo haremos una demostración de que es invariante por el primer movimiento de Reidemeister y lo compararemos con el polinomio de Jones. La invarianza por movimientos de Reidemeister de tipos II y III es similar, y extendería demasiado la longitud de este trabajo.

4.1 Invariante por el primer movimiento

Como hemos comentado, en esta sección demostraremos que la homología de Khovanov es invariante por el primer movimiento de Reidemeister – (1.1) –. Esto quiere decir que tenemos que demostrar que la homología del complejo de cadenas del diagrama de un enlace, es decir, de $C(\square)$ es igual a la homología del complejo de cadenas de este mismo enlace pero una vez hecho sobre este el primer movimiento de Reidemeister, es decir, la homología de $C(\infty)$ y $C(\infty)$ ya que el primer movimiento puede hacerse de dos maneras posibles. Hagamos primero la demostración para $C(\infty)$.

El conjunto $C(\infty)$ está generado por todos sus posibles estados mejorados. Una forma de escribir resumidamente esto sería

$$C(\infty) = \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} | \ominus, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} | \ominus, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} | \oplus, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} | \oplus, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \oplus, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \ominus \rangle$$

Ya que con cada elemento que genera nos referimos a todos los estados mejorados que son iguales en esa parte del diagrama. Como sabemos, si cambiamos uno de los

generadores por una combinación de este con el resto, el conjunto resultante seguiría siendo una base. Para nuestro propósito haremos un cambio de este tipo. Además, como estos elementos son independientes, podemos poner $C(\infty)$ como suma directa de esta base separada en dos conjuntos.

$$\begin{aligned} & \langle \rightarrow|_{\ominus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus}, \rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \ominus \\ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \oplus \\ \searrow \end{array} \rangle = \\ & \langle \rightarrow|_{\ominus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus} \rangle \oplus \langle \rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \oplus \\ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \ominus \\ \searrow \end{array} \rangle \end{aligned}$$

Por tanto podemos escribir los grupos del complejo de cadenas de la siguiente forma

$$C(\infty) = C(\rightarrow|_{\ominus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus}) \oplus C(\rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \oplus \\ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \ominus \\ \searrow \end{array}) \quad (4.1)$$

A partir de ahora trabajaremos con la suma directa de (4.1). Para demostrar la invarianza por el primer movimiento demostraremos que la homología de (4.1) es isomorfa a la homología de $C(\rightarrow|_{\ominus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus})$ y a su vez, que la homología de $C(\rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus})$ es isomorfa a la homología de $C(\supset)$ y con esto tendríamos nuestra demostración.

Como hemos dicho, veamos que la homología de $C(\infty)$ es la misma que la de $C(\rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus})$. Resulta que la inclusión de $C(\rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus})$ a $C(\infty)$ es un retracto cuya retracción $\rho : C(\infty) \rightarrow C(\rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\ominus})$ viene definida por

$$\begin{aligned} & \rightarrow|_{\ominus} \mapsto \rightarrow|_{\ominus} \\ & \rightarrow|_{\oplus} \mapsto \rightarrow|_{\oplus} - \rightarrow|_{\oplus} \\ & \rightarrow|_{\oplus}, \rightarrow|_{\oplus}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \oplus \\ \searrow \end{array}, \begin{array}{c} \nearrow \\ \ominus \\ \searrow \end{array} \mapsto 0 \end{aligned}$$

Observemos que $\rho \circ in = id_{C(\infty, \infty - \infty)}$ y, por consecuencia, $\rho \circ in \simeq id_{C(\infty, \infty - \infty)}$ tomando la homotopía igual a cero. También tenemos que $in \circ \rho \simeq id_{C(\infty)}$ con la aplicación de homotopía h definida como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{Diagrama con un bucle y una línea} \mapsto \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +} \\ & \text{Diagrama con un bucle y una línea} \mapsto \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +} \\ & \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +, una línea y un círculo con signo -, una línea y un círculo con signo +, una línea y un círculo con signo -} \mapsto 0 \end{aligned}$$

Con esto sabemos que ρ es una equivalencia de homotopía y por tanto que $\rho_* : \mathcal{H}(\infty) \rightarrow \mathcal{H}(\infty, \infty - \infty)$ es un isomorfismo.

Además, $C(\infty, \infty - \infty)$ es isomorfo a $C(\supset)$ y este isomorfismo induce un isomorfismo entre sus homología. El isomorfismo entre complejos viene dado por

$$\text{Diagrama con una línea y un círculo con signo -} \mapsto \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo -} \quad \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +} - \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo -} \mapsto \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +}$$

La demostración para $C(\infty)$ es análoga. El complejo de cadenas se pone como suma de otros dos complejos

$$C(\infty) = C(\text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +}, \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +}) \oplus C(\text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +} + \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo -}, \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo -}, \text{Diagrama con un bucle y una línea con signo +}, \text{Diagrama con un bucle y una línea con signo -}) \quad (4.2)$$

de forma que la homología de (4.2) es isomorfa a la homología de $C(\text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +}, \text{Diagrama con una línea y un círculo con signo +})$ y la homología de este último es isomorfa a la homología de $C(\supset)$.

La retracción ρ en este caso es

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \! | \! \oplus \! \diagdown \\ \oplus \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \! | \! \oplus \! \diagdown \\ \oplus \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagup \! | \! \ominus \! \diagdown \\ \ominus \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \ominus \! \diagup \\ \ominus \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \! | \! \oplus \! \diagdown \\ \oplus \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array} \mapsto 0
 \end{array}$$

Y la homotopía h viene definida por

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \! | \! \ominus \! \diagdown \\ \ominus \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \! | \! \oplus \! \diagdown \\ \oplus \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \ominus \! \diagup \\ \ominus \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagup \! | \! \oplus \! \diagdown \\ \oplus \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \! | \! \oplus \! \diagdown \\ \oplus \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \! | \! \oplus \! \diagup \\ \oplus \end{array} \mapsto 0
 \end{array}$$

Y con ésto queda demostrada, para las dos variantes del primer movimiento de Reidemeister, la invarianza de la homología de Khovanov. Esta misma demostración puede encontrarse en [3].

4.2 Polinomio de Jones

Como hemos visto en capítulos anteriores, la homología de Khovanov es una categorificación del polinomio de Jones. Y aunque ambos sean invariantes de nudos, la homología de Khovanov da más información sobre el enlace y esto ayuda a poder distinguir un mayor número de enlaces (que con el polinomio de Jones).

Recordemos que con los elementos de la homología podemos calcular los coeficientes del polinomio de Jones. Esto es, mientras que en el polinomio tenemos simplemente el coeficiente, en la homología tenemos una suma de dimensiones que nos da como resultado este coeficiente y claro está, distintas sumas, es decir, distintas homologías, podrían darnos los mismos coeficientes, es decir, los mismos polinomios.

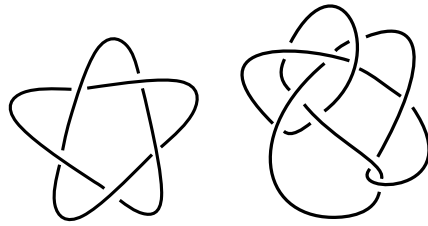


Figura 4.1: Nudos 5_1 y 10_{132} respectivamente.

En la Figura 4.1 tenemos un ejemplo de dos diagramas pertenecientes a enlaces distintos. Mientras que si calculamos su polinomio de Jones, éste nos saldrá el mismo tanto en un enlace como en el otro, la homología de Khovanov resulta diferente.

Este ejemplo y algunos más pueden verse en [6] como pares de enlaces que no son distinguibles por el polinomio de Jones pero sí lo son con la homología de Khovanov.

Vemos entonces que la homología de Khovanov es un invariante más fino que el polinomio de Jones, puesto que es capaz de distinguir enlaces indistinguibles por el polinomio de Jones, mientras que dos enlaces con polinomio de Jones distintos, tendrán siempre homologías distintas.

Bibliografía

- [1] C. C. ADAMS, *The knots book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, W. H. Freeman and Company, 2001.
- [2] M. KHOVANOV, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math J. 101 (1999), 359–426.
- [3] O. VIRO, *Khovanov homology, its definitions and ramifications*, Fundamenta Mathematicae 184 (2004), 317–342.
- [4] R. AYALA, E. DOMÍNGUEZ y A. QUINTERO, *Elementos de la teoría de homología clásica*, Universidad de Sevilla, 2002.
- [5] L. H. KAUFFMAN, *State models and Jones polynomial*, Topology 26 (1987), 395–407.
- [6] D. BAR-NATAN, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, Algebraic & Geometric Topology Vol. 2 (2002), 337–370.

