

TRABAJO FIN DE GRADO EN FÍSICA
“Propiedades de las ondas de gravitación
en Relatividad General”

Alumno: Rufino Pérez Hernández

Tutor: Diego Gómez García

Facultad de Física

Universidad de Sevilla

Curso académico 2017-2018



Índice general

1. Campos vectoriales y tensoriales	5
1.1. Sistemas de coordenadas en espacios euclídeos	5
1.2. La notación con sufijos	7
1.3. Tangentes y gradientes	9
1.4. Transformación de coordenadas en espacios euclídeos	11
1.5. Superficies en un espacio euclídeo	12
1.6. Variedades	15
1.7. Campos tensoriales en variedades	16
1.8. Propiedades métricas	18
2. El espacio-tiempo en Relatividad General y trayectorias de partículas	20
2.1. Geodésicas	20
2.2. Vectores paralelos a lo largo de una curva	24
2.3. Diferenciación absoluta y covariante	27
2.4. Coordenadas geodésicas	32
2.5. El espacio-tiempo de la Relatividad General	34
2.6. El potencial gravitatorio y las geodésicas	36
3. Ecuaciones de campo y curvatura	38
3.1. El tensor de energía-momento y el movimiento en fluidos	38
3.2. El tensor de curvatura y tensores relacionados	40
3.3. Curvatura y transporte paralelo	43
3.4. La desviación geodésica	45
3.5. Las ecuaciones de campo de Einstein	47
3.6. Las ecuaciones de Einstein comparadas con la ecuación de Poisson	48
3.7. La solución de Schwarzschild	49

4. Radiación gravitatoria **52**
4.1. ¿Qué se mueve? 52
4.2. Dos polarizaciones 55

Resumen

En este trabajo vamos a hacer un estudio de las ondas gravitacionales, dentro del marco de la Relatividad General. Esta teoría es la generalización del Principio de la Relatividad aplicado a los campos gravitacionales. La teoría formulada está basada en el principio de equivalencia, que postula que un observador no inercial no puede realizar ningún experimento que le permita discernir si está en el seno de un campo gravitacional o si su sistema está acelerado respecto a un marco externo inercial. En este contexto, Einstein postula que la gravitación no es una fuerza, sino que es un efecto puramente geométrico: es la consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo provocada por la presencia de un cuerpo masivo. Se ha hecho una división en cuatro capítulos, yendo desde la presentación de las herramientas matemáticas necesarias a una aplicación de estas para estudiar el espacio-tiempo.

En el primer capítulo nos centraremos en definir los elementos básicos como los vectores, los tensores y las variedades, así como la notación característica para representarlos y sus propiedades. Empezaremos hablando del espacio euclídeo, que es plano, y al final acabaremos particularizando algunas de sus propiedades para espacios no euclídeos y pseudoriemannianos, ya que, debido a las contracciones que se producen en el espacio y en el tiempo cuando viajamos a velocidades cercanas a las de la luz, estos se curvan, y tendremos que tratar con sistemas así para poder estudiar la Relatividad General.

En el segundo capítulo hablaremos de algunos conceptos importantes de espacios curvados como son las geodésicas, ya que nos ayudarán a entender la manera de la que se desplaza la luz por el Universo. Esto llevará a la definición del transporte paralelo y de dos formas diferentes de derivar en espacios curvados como son la derivada absoluta y la covariante, que sustituirán a la derivada a lo largo de curvas y a la derivada parcial respectivamente. Después veremos cómo podemos definir sistemas de coordenadas cartesianas en regiones locales y pequeñas. Con todo esto ya podremos hacer un primer acercamiento al espacio-tiempo en la Relatividad General, siendo así capaces de dar una aproximación del valor del potencial gravitatorio para velocidades mucho más pequeñas que la de la luz.

En el tercer capítulo obtendremos las ecuaciones de campo de Einstein, aunque para ello primero tendremos que definir un par de tensores importantes. También veremos cómo podemos obtener la ecuación de Poisson a partir de las de Einstein como una aproximación en el límite newtoniano cuando las velocidades no son muy altas. Terminaremos el tema obteniendo la solución que propuso Schwarzschild de estas ecuaciones con las hipótesis en las que se basó.

Finalmente, en el cuarto capítulo haremos una aproximación de primer orden de estas ecuaciones de campo para linealizarlas y obtener así una ecuación de ondas, a partir de la cual podemos deducir la existencia de las ondas de gravitación. Se hablará de las simplifica-

ciones a efectuar y de las ondas planas que se obtienen como solución, dando una expresión aproximada. También hablaremos del experimento en el que se descubrieron y los avances que se espera poder hacer con estos experimentos y su estudio.

Abstract

In this report we are going to study a classical topic of the General Relativity: the existence of gravitational waves. To this purpose, first of all we will introduce all the mathematical tools needed: vectors, tensors and manifolds, and non-Euclidean spaces will be defined also. Secondly, geodesics will be defined as well as two types of derivation in curved spaces: the absolute derivative and the covariant derivative. Once these mathematical tools are well established, we will be able to give an approximation to the value of the gravitatory potential in the context of weak gravitational fields. Einstein field equations will be postulated as made in the original publication, and the solution proposed by Schwarzschild will be derived. Finally, assuming some reasonable approximations, the field equations will be linearized to obtain a wave equation, a theoretical demand of the existence of gravitational waves. The report will conclude with some ideas about the experimental observation and the consequences of this fact.

Capítulo 1

Campos vectoriales y tensoriales

En este primer capítulo nos vamos a concentrar en el álgebra de campos vectoriales y tensoriales, conceptos que nos serán de utilidad en el cálculo de campos que veremos en el capítulo 3. Empezaremos considerando los campos vectoriales como un espacio vectorial euclídeo (real, plano, tridimensional y con el producto escalar habitual) y estudiaremos cómo manejarlos con sistemas de coordenadas curvilíneos arbitrarios. La generalización de esta idea se hará de dos formas: con campos tensoriales y permitiendo que la dimensión sea aleatoria y su geometría no euclídea. Con esto podremos particularizar para el caso de la Relatividad General, en la que el espacio es tetradimensional y no es plano, está curvado debido a la presencia de objetos masivos. Necesitaremos así una geometría no euclídea para estudiarla, y es aquí donde aparecerán las variedades pseudoriemannianas. Introduciremos a continuación diversos entes matemáticos que serán de utilidad en el futuro y se asociarán con la física de la gravitación.

1.1. Sistemas de coordenadas en espacios euclídeos

Empezaremos trabajando en un espacio euclídeo tridimensional con un sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) con su sistema de vectores unitarios asociados $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, cada uno apuntando en la dirección de su eje de coordenadas correspondiente. Será un elemento que fijaremos, ya que nos servirá como un sistema de referencia básico para describir otros sistemas de coordenadas, que generalmente no serán cartesianos.

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas alternativo (u, v, w) que no es cartesiano (como, por ejemplo, las coordenadas esféricas (r, θ, Φ)). Podemos expresar las coordenadas cartesianas x, y, z en función de u, v, w de la siguiente forma:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \quad (1.1)$$

Estas relaciones podrían, en un principio, invertirse para obtener u, v, w en función de x, y, z . A lo largo de cualquier punto P de coordenadas (u_0, v_0, w_0) pasan tres superficies coordenadas o paramétricas, cuyas expresiones son $u = u_0, v = v_0$ y $w = w_0$, que se cortan en las llamadas curvas coordenadas o paramétricas.

Podemos combinar las tres ecuaciones (1.1) para crear una única ecuación vectorial que nos dé la posición del vector \mathbf{r} en función de las coordenadas u, v, w :

$$\mathbf{r} = x(u, v, w) \mathbf{i} + y(u, v, w) \mathbf{j} + z(u, v, w) \mathbf{k} \quad (1.2)$$

Si en esta ecuación (1.2) fijásemos una de las tres coordenadas y variásemos las otras dos, tendríamos superficies coordenadas, mientras que, fijando dos de ellas, obtendríamos curvas coordenadas. Si ahora tomásemos derivadas parciales respecto de cada una de dichas coordenadas obtendríamos el vector tangente a las otras dos superficies coordenadas. Al evaluar dichos vectores en el punto (u_0, v_0, w_0) , obtendríamos los vectores tangentes a las tres curvas coordenadas que pasan por el punto P:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \quad (1.3)$$

Normalmente, los tres vectores que forman el sistema de coordenadas suelen ser ortogonales, lo cual significa que las superficies coordenadas se cortan ortogonalmente, deduciéndose así que los tres vectores (1.3) son ortogonales. Para que sean unitarios se normalizan dividiéndolos entre su módulo, de tal forma que, si

$$h_1 = |\mathbf{e}_u|, \quad h_2 = |\mathbf{e}_v|, \quad h_3 = |\mathbf{e}_w|$$

entonces los vectores unitarios se pueden definir como;

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_u, \quad \hat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{h_2} \mathbf{e}_v, \quad \hat{\mathbf{e}}_w = \frac{1}{h_3} \mathbf{e}_w$$

Podemos usar así el conjunto de vectores $\{\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w\}$ como una base de vectores en P, escribiendo cualquier vector $\boldsymbol{\lambda}$ de la forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = \alpha \hat{\mathbf{e}}_u + \beta \hat{\mathbf{e}}_v + \gamma \hat{\mathbf{e}}_w \quad (1.4)$$

El triplete (α, β, γ) es lo que se conoce como coordenadas de $\boldsymbol{\lambda}$ respecto de la base $\{\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w\}$.

Existe otra forma de construir una base en el punto P a partir del sistema de coordenadas (u, v, w) , y es usando los vectores normales a las superficies coordenadas en lugar de los tangentes. El primer paso será invertir las ecuaciones (1.1) para obtener u, v, w en función de x, y, z :

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \quad (1.5)$$

Con esto podemos considerar cada coordenada un campo escalar y calcular sus gradientes:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.6)$$

Estos vectores gradiente son normales a las correspondientes superficies de nivel que pasan por P, que son las superficies coordenadas $u = u_0, v = v_0$ y $w = w_0$. Se obtiene así la base dual a la obtenida con los vectores tangentes a las curvas coordenadas: $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$. Para distinguir esta base de la anterior, escribiremos los vectores de la base con superíndices en lugar de con subíndices:

$$\mathbf{e}^u = \nabla u, \mathbf{e}^v = \nabla v, \mathbf{e}^w = \nabla w \quad (1.7)$$

De igual manera, podemos escribir cualquier vector $\boldsymbol{\lambda}$ en función de la base dual:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_u \mathbf{e}^u + \lambda_v \mathbf{e}^v + \lambda_w \mathbf{e}^w \quad (1.8)$$

Si el sistema de coordenadas es ortogonal, entonces los vectores tangentes a las curvas coordenadas coincidirán con los normales a las superficies coordenadas, coincidiendo así ambas bases. Sin embargo, los módulos no tendrían por qué ser iguales, distinción que desaparecería al normalizarlos.

1.2. La notación con sufijos

La notación con sufijos nos proporciona una forma de tratar con conjuntos de cantidades relacionadas que, de otra forma, serían difícil de estudiar. Se basa en representar los miembros de un conjunto (por ejemplo, las coordenadas de un punto) a través de una letra central a la que van unidos uno o varios sufijos que representan números, a partir de los cuales podemos etiquetar las diferentes cantidades contenidas en él. Este sufijo puede ser un superíndice o un subíndice. Cuando utilizamos el convenio de suma de Einstein, esta notación nos da una forma elegante y compacta de trabajar con coordenadas, vectores y otras entidades similares. Veamos cómo cambiarían las bases con esto:

En lugar de (u, v, w) nos bastaría con usar u^i (con $i = 1, 2, 3$) para las coordenadas, y $\{\mathbf{e}_i\}$ en lugar de $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$ para la base natural, mientras que la base dual las componentes serían u_i y la base quedaría como $\{\mathbf{e}^i\}$. Para un vector cualquiera $\boldsymbol{\lambda}$, podemos reescribir las ecuaciones (1.4) y (1.8) como:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2 + \lambda^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \mathbf{e}_i = \lambda^i \mathbf{e}_i \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1 \mathbf{e}^1 + \lambda_2 \mathbf{e}^2 + \lambda_3 \mathbf{e}^3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}^i = \lambda_i \mathbf{e}^i \quad (1.10)$$

donde se ha abreviado la notación suponiendo que los subíndices y los superíndices recorren siempre los valores 1, 2 y 3 y que, por el convenio de suma, si un sufijo aparece tanto como superíndice como subíndice dichas cantidades se sumarán, permitiéndonos así escribir estas dos ecuaciones de una forma muchísimo más compacta. Las componentes λ^i se conocen como componentes contravariantes, mientras que las λ_i se conocen como componentes covariantes. Veamos qué pasaría si multiplicásemos un vector perteneciente a cada una de estas dos bases:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \nabla u^i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \frac{\partial u^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u^j} + \frac{\partial u^i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u^j} + \frac{\partial u^i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u^j} = \frac{\partial u^i}{\partial u^j}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = 1$ si $i = j$ y que $\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = 0$ si $i \neq j$, podemos reescribir este producto como:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (1.11)$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.12)$$

Con esto podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e}^j = \lambda^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) nos muestra que podemos obtener las componentes de un vector $\boldsymbol{\lambda}$ en función de una base (la natural o la dual) a partir de multiplicar dicho vector por los de la otra base. Usando así las componentes contravariantes, podemos escribir el producto escalar de dos vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ como:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda^i \mathbf{e}_i \cdot \mu^j \mathbf{e}_j = g_{ij} \lambda^i \mu^j$$

donde

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.14)$$

Igualmente, tomando componentes covariantes, obtendríamos operando de manera análoga que:

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \quad (1.15)$$

Mezclando ambos tipos de componentes, el resultado que obtendríamos sería:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda_i \mathbf{e}^i \cdot \mu_j \mathbf{e}^j = \lambda_i \mu^j \delta_j^i = \lambda^i \mu_j$$

Tenemos así cuatro formas de expresar este producto escalar:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = g_{ij} \lambda^i \mu^j = g^{ij} \lambda_i \mu_j = \lambda_i \mu^j = \lambda^i \mu_j \quad (1.16)$$

Esto nos permite ver que, como $g^{ij} \mu_j = \mu^i$ y $g_{ij} \mu^j = \mu_i$, podemos usar g^{ij} para elevar los sufijos y obtener las componentes contravariantes de $\boldsymbol{\mu}$ a partir de las covariantes, cumpliéndose también que podemos obtener las componentes covariantes a partir de las contravariantes multiplicando por g_{ij} . Combinando ambas expresiones, podemos obtener que:

$$\mu^i = g^{ij} \mu_j = g^{ij} g_{jk} \mu^k$$

$$\mu_i = g_{ij} \mu^j = g_{ij} g^{jk} \mu_k$$

Como esto se cumple para cualquier componente arbitraria μ^i , podemos deducir que:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (1.17)$$

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (1.18)$$

Estos coeficientes también satisfacen propiedades de simetría, ya que están definidos a partir del producto escalar de vectores de la base: $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$. Dichas propiedades pueden expresarse de forma matricial, pero antes necesitamos hacer un pequeño paréntesis de notación. Se usará $[\lambda^i]$ para denotar a un vector columna que tiene como coordenada i -ésima λ^i , caracterizando así las filas del vector con el sufijo. $[\lambda_i]$ se define de la misma forma. Si queremos expresarlo en forma de vector fila, entonces debemos usar la notación $[\lambda^i]^T$ o $[\lambda_i]^T$ para denotar que el vector se está trasponiendo. En el caso de querer trabajar con matrices, $[A_{ij}]$ se usará para denotar a una matriz que tiene como entrada A_{ij} en la fila i -ésima y la columna j -ésima, usándose este mismo criterio para A^{ij} . Ahora sí que estamos en condiciones de reescribir algunas de las ecuaciones que se han visto con esta notación.

Sean $G \equiv [g_{ij}]$ y $\hat{G} = [g^{ij}]$. Las propiedades de simetría se pueden definir ahora como:

$$G = G^T, \hat{G} = \hat{G}^T \quad (1.19)$$

Esto nos dice que las matrices G y \hat{G} son simétricas. Teniendo en cuenta que $[\delta_j^i] = I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3), podemos escribir las ecuaciones (1.17) y (1.18) de la forma:

$$\hat{G}G = I, G\hat{G} = I \quad (1.20)$$

lo cual nos dice que $\hat{G} = G^{-1}$. Si usamos $L \equiv [\lambda^i]$ y $M = [\mu^i]$ para hablar de las componentes contravariantes de $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ y $L^* \equiv [\lambda_i]$ y $M^* = [\mu_i]$ para las covariantes, podemos reescribir $g^{ij}\mu_j = \mu^i$ y $g_{ij}\mu^j = \mu_i$ de la forma:

$$\hat{G}M^* = M, GM = M^* \quad (1.21)$$

También podemos reescribir con esto la ecuación (1.16) de la forma:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = L^T GM = (L^*)^T \hat{G}M^* = (L^*)^T M = L^T M^* \quad (1.22)$$

En espacios tetradimensionales usaremos letras griegas como sufijos (μ, ν, \dots) para indicar que toman los valores 0, 1, 2 y 3.

1.3. Tangentes y gradientes

El punto de partida de esta sección será analizar el vector tangente a una curva en el espacio. Supongamos que tenemos:

$$u = u(t), v = v(t), w = w(t) \quad (1.23)$$

donde $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ son funciones diferenciables que dependen de un parámetro t perteneciente a un intervalo I . Entonces los puntos dados por las ecuaciones (1.23) recaerán sobre una curva γ parametrizada justamente por dicho parámetro t . El vector de posición de estos puntos quedaría entonces de la forma:

$$\mathbf{r}(t) = x(u(t), v(t), w(t)) \mathbf{i} + y(u(t), v(t), w(t)) \mathbf{j} + z(u(t), v(t), w(t)) \mathbf{k}$$

y, para cada $t \in I$, la derivada de este vector $\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ nos da el vector tangente a la curva. Aplicando la regla de la cadena y la notación con sufijos, nos quedará:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \frac{dw}{dt} \implies \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{u}(t)\mathbf{e}_u + \dot{v}(t)\mathbf{e}_v + \dot{w}(t)\mathbf{e}_w = \dot{u}^i(t)\mathbf{e}_i \quad (1.24)$$

Se tiene así que la base $\{\mathbf{e}_i\}$ será la adecuada para tratar con vectores tangentes a curvas. La longitud de la curva γ se obtendrá integrando $|\dot{\mathbf{r}}|$ respecto de t en el intervalo I . Usando la ecuación (1.14) podemos expresar este módulo en función de los términos g_{ij} :

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{u}^i \mathbf{e}_i \cdot \dot{u}^j \mathbf{e}_j = g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

Si ahora damos el intervalo I como $a \leq t \leq b$, la longitud de γ vendrá dada por:

$$L = \int_a^b (g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j)^{1/2} dt \quad (1.25)$$

Podemos también generalizar el concepto de diferencial de volumen clásico (definido como $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) partiendo de la versión infinitesimal de la ecuación (1.24), que será $d\mathbf{r} = du^i \mathbf{e}_i$. Multiplicándolo por sí mismo podemos hallar la expresión que nos dará la distancia entre dos puntos cuyas coordenadas difieren un elemento du^i :

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = du^i \mathbf{e}_i \cdot du^j \mathbf{e}_j = g_{ij} du^i du^j \quad (1.26)$$

Esta expresión también se puede ver como una generalización del Teorema de Pitágoras. El término $g_{ij} du^i du^j$ recibe el nombre de elemento de línea, e integrándolo a lo largo de la curva podemos obtener la longitud de γ .

Para tratar los gradientes partiremos de una función $\phi(u, v, w)$ a la cual le hallaremos el gradiente respecto de x, y y z sustituyendo de la misma forma que utilizamos en (1.5). Aplicando la regla de la cadena de forma análoga a la que se ha hecho con las tangentes y abreviando con las expresiones (1.7) y la notación con sufijos, llegaremos a:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial \phi}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial \phi}{\partial w} \nabla w = \frac{\partial \phi}{\partial u} \mathbf{e}^u + \frac{\partial \phi}{\partial v} \mathbf{e}^v + \frac{\partial \phi}{\partial w} \mathbf{e}^w = \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \mathbf{e}^i \quad (1.27)$$

donde se puede apreciar claramente que las derivadas parciales $\frac{\partial \phi}{\partial u^i}$ son las componentes de $\nabla \phi$ respecto de la base dual $\{\mathbf{e}^i\}$. Otra apreciación importante es que podemos representar la derivada parcial de dos formas diferentes que nos permitirán escribir esto de una forma más compacta. La primera será sustituir $\frac{\partial \phi}{\partial u^i}$ por $\partial_i \phi$, y la segunda consistirá en denotar la derivada como $\phi_{,i}$, lo cual nos permite reescribir la expresión (1.27) como:

$$\nabla \phi = \partial_i \phi \mathbf{e}^i = \phi_{,i} \mathbf{e}^i \quad (1.28)$$

De aquí deducimos que la base dual $\{\mathbf{e}^i\}$ será apropiada cuando tengamos que trabajar con gradientes de campos escalares.

1.4. Transformación de coordenadas en espacios euclídeos

Supongamos que tenemos dos sistemas de coordenadas curvilíneas en un espacio euclídeo a los que denotaremos por (u, v, w) y (u', v', w') . Para hablar de ellos los denominaremos coordenadas apostrofadas y sin apostrofar. Vamos a estudiar la forma como las componentes de un vector respecto de una base definida por un sistema de coordenadas se transforma, pasando así de un sistema al otro. Las bases también se transforman en base a este criterio, teniendo así que $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ sería la base natural en el sistema apostrofado y $\{\mathbf{e}^{i'}\}$ la dual. Así, si tenemos un vector $\boldsymbol{\lambda}$, sus coordenadas contravariantes respecto de la base natural serían $\lambda^{i'}$ y las covariantes respecto de la base dual serían $\lambda_{i'}$. Esto nos permite escribir este vector de la forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{i'} \mathbf{e}_{i'} , \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_{i'} \mathbf{e}^{i'} \quad (1.29)$$

En una región del espacio cubierta por ambos sistemas de coordenadas, tendremos ecuaciones de la forma $u^{i'} = u^i(u^j)$, dando las coordenadas apostrofadas en función de las no apostrofadas, relación que podemos invertir para obtener $u^i = u^i(u^{j'})$. Aplicándole la regla de la cadena a la derivada del vector \mathbf{r} , nos queda:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}$$

que, teniendo en cuenta que hemos definido los vectores de las bases como $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ y $\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}}$, nos permite reescribir la ecuación anterior como:

$$\mathbf{e}_j = U_j^{i'} \mathbf{e}_{i'} \quad (1.30)$$

donde $U_j^{i'}$ es una forma abreviada de escribir la derivada $\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}$. Esto nos permite escribir el vector $\boldsymbol{\lambda}$ de la forma $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^j \mathbf{e}_j = \lambda^j U_j^{i'} \mathbf{e}_{i'}$, que, combinándolo con la expresión (1.29), nos permite obtener la siguiente relación, que es la fórmula de transformación para las componentes contravariantes de un vector:

$$\lambda^{i'} = U_j^{i'} \lambda^j \quad (1.31)$$

Si repetimos lo mismo para las coordenadas covariantes y la base dual para un vector $\boldsymbol{\mu}$ dado (teniendo en cuenta que los vectores de esta base son gradientes), nos saldrán unos términos $U_{i'}^j$ utilizados para escribir de forma abreviada las derivadas $\frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}$ y la fórmula de transformación para las componentes covariantes siguiente:

$$\mu_{i'} = U_{i'}^j \mu_j \quad (1.32)$$

Para hallar las transformaciones inversas hay dos rutas. La primera de ellas pasa por admitir que la cantidades apostrofadas y no apostrofadas están en igualdad de condiciones, lo que nos permite intercambiarlos libremente en los sufijos. Obtenemos así las siguientes relaciones para transformar los vectores de la base y para las componentes respectivamente:

$$\mathbf{e}_{j'} = U_{j'}^i \mathbf{e}_i , \quad \mathbf{e}^{j'} = U_i^{j'} \mathbf{e}^i \quad (1.33)$$

$$\lambda^i = U_{j'}^i \lambda^{j'} , \mu_i = U_i^{j'} \mu_{j'} \quad (1.34)$$

La segunda ruta pasa por observar que la regla de la cadena nos proporciona la siguiente regla:

$$U_{i'}^k U_j^{i'} = \delta_j^k \quad (1.35)$$

luego, aplicándolo a la ecuación (1.31), nos queda:

$$U_{i'}^k \lambda^{i'} = U_{i'}^k U_j^{i'} \lambda^j = \delta_j^k \lambda^j = \lambda^k$$

que es la primera de las dos ecuaciones de (1.34). La segunda viene de aplicarle lo mismo a la ecuación (1.32):

$$U_k^{i'} \mu_{i'} = U_k^{i'} U_{i'}^j \mu_j = \delta_k^j \mu_j = \mu_k$$

Todo esto también puede tratarse de forma matricial. Las matrices jacobianas asociadas al cambio de coordenadas son $U \equiv [U_{j'}^i]$ y $\hat{U} \equiv [U_j^{i'}]$, que son ortogonales y verificarán que $\hat{U} = U^{-1}$. Si llamamos a los vectores $L \equiv [\lambda^i]$, $L' \equiv [\lambda^{i'}]$, $M \equiv [\mu_i]$ y $M' \equiv [\mu_{i'}]$, las componentes contravariantes y las covariantes transformadas son, respectivamente:

$$L' = UL , L = \hat{U}L'$$

$$M' = U\hat{M} , M = UM'$$

Para los elementos de la forma g_{ij} , sus transformados en el sistema de coordenadas apostrofado serán $g_{i'j'} \equiv \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'}$. Usando la ecuación de transformación para bases, tenemos que:

$$g_{i'j'} = \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = (U_{i'}^k \mathbf{e}_k) \cdot (U_{j'}^l \mathbf{e}_l) = U_{i'}^k U_{j'}^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = U_{i'}^k U_{j'}^l g_{kl} \quad (1.36)$$

Esto nos permite definir la regla de transformación para los g_{ij} , y haciendo algo similar pero con 2 elementos de matriz jacobiana tenemos la de los g^{ij} :

$$g^{i'j'} = U_k^{i'} U_l^{j'} g^{kl} \quad (1.37)$$

Estos g_{ij} reciben el nombre de tensor métrico, ya que nos da acceso a las propiedades métricas como la longitud de los vectores.

1.5. Superficies en un espacio euclídeo

Una superficie Σ en un espacio euclídeo se obtiene paramétricamente expresando las coordenadas cartesianas x , y y z como funciones de dos parámetros u y v :

$$x = x(u, v) , y = y(u, v) , z = z(u, v) \quad (1.38)$$

En un principio, estos dos parámetros se pueden eliminar para obtener una ecuación para Σ de la forma $f(x, y, z) = 0$. Sin embargo, nos centraremos en el uso de dichos parámetros y

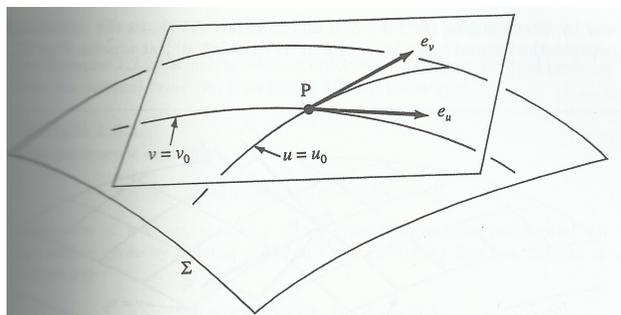


Figura 1.1: Plano tangente a la superficie Σ en P .

en observar las similitudes (y diferencias) entre su uso para etiquetar puntos en una superficie y en su utilización en las coordenadas curvilíneas u , v y w para etiquetar puntos en el espacio euclídeo.

El vector de posición \mathbf{r} de los puntos de Σ se puede dar como una función de los parámetros combinando las ecuaciones (1.38) en una única ecuación vectorial:

$$\mathbf{r} = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

Al igual que con las curvas coordenadas, ahora tenemos dos curvas paramétricas en cada punto de Σ . La primera se obtiene manteniendo v constante y tomando u como variable, y la segunda fijando u y variando v . Luego, en un punto P de coordenadas (u_0, v_0) , las dos curvas paramétricas vienen dadas por:

$$\mathbf{r} = x(u, v_0) \mathbf{i} + y(u, v_0) \mathbf{j} + z(u, v_0) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = x(u_0, v) \mathbf{i} + y(u_0, v) \mathbf{j} + z(u_0, v) \mathbf{k}$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ evaluadas en el punto (u_0, v_0) nos dan los vectores tangentes a estas dos curvas en el punto P (\mathbf{e}_u y \mathbf{e}_v , respectivamente). Estos dos forman el plano tangente a Σ en el punto P , tal y como se puede ver en la imagen (ver Figura 1.1).

Un campo vectorial a una superficie Σ es una asignación de un vector $\boldsymbol{\lambda}$ a cada punto de tal forma que este es tangente a Σ . Podemos apreciar que el vector en cada punto P de la superficie está en el plano tangente en P , por lo que podemos asociar $\boldsymbol{\lambda}$ a la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v\}$ dada por los vectores tangentes, que se llama base natural para los planos tangentes:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^u \mathbf{e}_u + \lambda^v \mathbf{e}_v \tag{1.39}$$

También existe una base dual, pero esta no se define de una forma tan sencilla a partir de los gradientes de las coordenadas. Cada parámetro u , v proporciona un campo escalar en Σ , y son los gradientes de estos campos los que nos proporcionan la base dual $\{\mathbf{e}^u, \mathbf{e}^v\}$. Estos gradientes son normales a las curvas de nivel que pasan por P y apuntan en la dirección creciente de u y v , de donde se puede deducir que los vectores \mathbf{e}^u y \mathbf{e}^v son ortogonales a los vectores de la base natural \mathbf{e}_v y \mathbf{e}_u respectivamente. Todo esto se puede apreciar en la siguiente imagen:

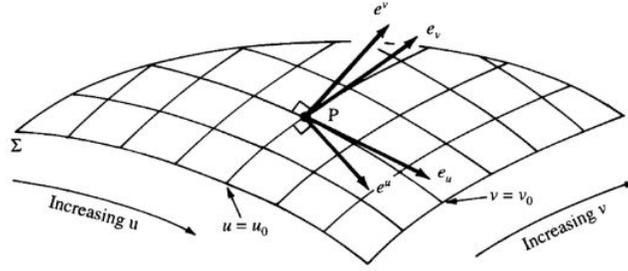


Figura 1.2: Las bases natural y dual en un punto P de Σ

Esto nos permite observar que

$$\mathbf{e}^u \cdot \mathbf{e}_v = 0, \quad \mathbf{e}^v \cdot \mathbf{e}_u = 0 \quad (1.40)$$

Ahora fijamos las longitudes de los vectores imponiendo que tengan un módulo igual a la unidad:

$$\mathbf{e}^u \cdot \mathbf{e}_u = 1, \quad \mathbf{e}^v \cdot \mathbf{e}_v = 1 \quad (1.41)$$

Si ahora usamos la notación de sufijos con A, B, \dots tomando los valores 1 y 2, entonces los parámetros u y v se convierten en u^A , la base natural en $\{\mathbf{e}_A\}$ y la dual en $\{\mathbf{e}^B\}$. Podemos combinar así las ecuaciones (1.40) y (1.41) para dar lugar a:

$$\mathbf{e}^A \cdot \mathbf{e}_B = \delta_B^A \quad (1.42)$$

que es la ecuación análoga para superficies de (1.11). Podemos introducir así el tensor métrico definido de la forma $g_{AB} \equiv \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B$, y a partir de él también podemos definir el tensor $g^{AB} \equiv \mathbf{e}^A \cdot \mathbf{e}^B$. Con estos dos tensores podemos reescribir muchas de las ecuaciones de la sección 2.2, y también tenemos:

$$\mathbf{e}_A = g_{AB} \mathbf{e}^B, \quad \mathbf{e}^A = g^{AB} \mathbf{e}_B \quad (1.43)$$

Estas dos ecuaciones nos dan una forma rápida de obtener la base dual a partir de la natural y viceversa. Si ahora escribimos estos dos parámetros dependiendo de otro parámetro $t \in I$, nos quedará que $u^A = u^A(t)$, que serán diferenciables. Con esto podemos obtener una curva γ en la superficie Σ cuyo vector tangente tiene unas componentes \dot{u}^A respecto de la base natural. Podemos así definir la longitud L de dicha curva como:

$$L = \int_a^b (g_{AB} \dot{u}^A \dot{u}^B)^{1/2} dt \quad (1.44)$$

donde $a \leq t \leq b$ nos da el intervalo I . Para puntos del entorno de Σ , cuyos parámetros de diferencia son du^A , la distancia que los separa ds viene dada por:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{AB} du^A du^B \quad (1.45)$$

que define el elemento de línea para Σ . Podemos así adaptar muchos de los conceptos que se han visto con anterioridad a superficies, donde ahora los parámetros u^A juegan el papel de las coordenadas. Sin embargo, hay una diferencia notable entre ambas cosas: la geometría de los espacios euclídeos es euclídea, mientras que la de una superficie no tiene por qué serlo (a no ser que sea una superficie plana). Otra diferencia notable es que los campos vectoriales están contenidos dentro del propio espacio euclídeo, mientras que en una superficie los vectores no están contenidos en ella, pero sí que son tangentes.

1.6. Variedades

Una variedad es un ente matemático que generaliza los conceptos de curva y superficie a cualquier dimensión. Trataremos con variedades N -dimensionales, que están caracterizadas por puntos que pueden ser etiquetados por un sistema de N coordenadas reales x^1, x^2, \dots, x^N , de tal forma que la correspondencia entre los puntos y las etiquetas es biyectiva. No es necesario que toda la variedad M esté cubierta por un único sistema de coordenadas, al igual que tampoco tratamos ningún sistema con más preferencia sobre otros. Generalmente tendremos un conjunto de sistemas de coordenadas recubriendo la variedad entre todos ellos, y todos estarán en igualdad de condiciones. Si se produce un solapamiento de dos sistemas de coordenadas en una región, entonces podremos obtener unas ecuaciones que nos den las coordenadas de uno de los sistemas en función de las del otro. Por tanto, si las coordenadas x^a cubren una región U y las coordenadas $x^{a'}$ cubren una región U' (con intersección no nula), entonces las coordenadas de los puntos en la región de solapamiento vienen dadas por:

$$x^{a'} = x^{a'}(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (a = 1, \dots, N) \quad (1.46)$$

Estas relaciones se pueden invertir para obtener cada x^a en función de las coordenadas $x^{b'}$:

$$x^a = x^a(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{N'}) \quad (a = 1, \dots, N) \quad (1.47)$$

Podemos asumir que las funciones involucradas son diferenciables, de tal forma que las derivadas parciales $X_b^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b}$ y $X_{b'}^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}$ existan. Esto significa que M es una variedad diferenciable. La matriz $N \times N$ $[X_b^{a'}]$ es el jacobiano asociado a las ecuaciones (1.46), las cuales nos permiten pasar de las coordenadas x^a a $x^{a'}$. Como estas ecuaciones son invertibles, entonces el jacobiano es invertible, por lo que su determinante será no nulo en cualquier punto de la región de solapamiento. La matriz $[X_{b'}^a]$ es así el jacobiano de las transformaciones inversas, verificándose que ambas matrices son la inversa de la otra. Por la regla de la cadena, y teniendo en cuenta que podemos cambiar el papel de las coordenadas apostrofadas y las no apostrofadas:

$$X_b^{a'} X_c^{b'} = \delta_c^a \quad (1.48)$$

$$X_b^{a'} X_c^b = \delta_c^a \quad (1.49)$$

El hecho de que el determinante sea no nulo nos permite definir un nuevo sistema de coordenadas a partir de unas ecuaciones como (1.46). Para ello, supongamos que queremos introducir un nuevo sistema de coordenadas expresando $x^{a'}$ como funciones diferenciables de las antiguas coordenadas x^a y que existe un punto P en el que el jacobiano $\det [X_b^{a'}]$ es no nulo. El teorema de la función inversa nos dice entonces que P tiene un entorno U' en el que la aplicación entre las antiguas coordenadas y las nuevas sea biyectiva. Como la correspondencia entre los puntos de la variedad y las coordenadas x^a es biyectiva, entonces la correspondencia en U' entre los $x^{a'}$ y los puntos de la variedad es biyectiva, por lo que actúan como coordenadas en U' .

A la hora de hablar de vectores y campos vectoriales en una variedad, lo que se hará será definirlos como objetos con N coordenadas que, bajo un cambio de coordenadas, se transformen de tal forma que generalicen las ecuaciones (1.31) y (1.32) para componentes vectoriales en espacios euclídeos. Se definen así los vectores contravariantes en un punto P como un objeto de N componentes λ^a que, bajo un cambio de coordenadas en P , se transforman de acuerdo con:

$$\lambda^{a'} = X_b^{a'} \lambda^b \quad (1.50)$$

donde las derivadas parciales se evalúan en P . De forma análoga, un vector covariante se define a partir de sus componentes μ_a como:

$$\mu_a = X_{a'}^b \mu_b \quad (1.51)$$

1.7. Campos tensoriales en variedades

Supongamos que, para cada sistema de coordenadas en un punto P de una variedad M , existen N^{r+s} cantidades asociadas $\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ que, bajo un cambio de coordenadas, se transforman de acuerdo con:

$$\tau_{b'_1 \dots b'_s}^{a'_1 \dots a'_r} = X_{c_1}^{a'_1} \dots X_{c_r}^{a'_r} X_{b'_1}^{d_1} \dots X_{b'_s}^{d_s} \tau_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_r} \quad (1.52)$$

donde los jacobianos están evaluados en P . Entonces las cantidades $\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ son las componentes de un tensor de tipo (r, s) en P . La suma $(r + s)$ suele llamarse rango u orden del tensor. En los casos en los que $r = 0$ o $s = 0$, el tensor solo tendría subíndices o superíndices respectivamente. Se dice así que los tensores de tipo $(r, 0)$ son tensores contravariantes de rango r , mientras que los de tipo $(0, s)$ son tensores covariantes de rango s . Si tanto r como s son no nulos, decimos que el tensor es mixto. Los vectores contravariantes y covariantes están incluidos en la definición de tensor, siendo así tensores de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente. Los escalares son tensores de tipo $(0, 0)$.

Si para cada región N -dimensional V en M tenemos definido un tensor de tipo (r, s) , entonces tenemos un campo tensorial en V . Sus componentes se pueden ver como funciones de las coordenadas que se usaron para etiquetar los puntos de V . Si estas funciones son diferenciables, entonces podremos decir que el tensor será diferenciable. Si tuviésemos los tensores definidos a lo largo de una curva γ pero no en todo M , entonces tendremos un campo tensorial a lo largo de γ , pudiendo definir sus componentes como funciones de t , el

parámetro usado para etiquetar los puntos de γ . Para una superficie Σ en M el razonamiento es análogo, solo que aquí las componentes de los tensores dependerán de dos parámetros u y v en lugar de depender de uno.

Veamos ahora algunas operaciones con tensores. La primera es la aditividad: la suma de dos componentes de dos tensores del mismo tipo da lugar a componentes de un tensor del mismo tipo. La segunda es el producto por escalares: la multiplicación de cada componente del tensor por un escalar nos da un tensor del mismo tipo que el inicial. La tercera es la multiplicación de dos tensores, que recibe el nombre de producto tensorial. Las componentes del tensor resultante se obtienen multiplicando las componentes de los dos tensores involucrados, formando así todos los posibles productos.

La cuarta operación es la contracción. Se puede aplicar a cualquier ente con superíndices y subíndices, pero su aplicación más característica se obtiene al aplicarse a las componentes de un tensor. Consiste en seguir el convenio de suma cuando hay un superíndice y un subíndice iguales. Si hay r superíndices y s subíndices, entonces existen rs formas de hacer la contracción. La importancia que tiene esta operación en tensores radica en que, si el tensor inicial era de tipo (r, s) , entonces tras contraerse será un tensor de tipo $(r - 1, s - 1)$. Puede combinarse con el producto tensorial.

Otra propiedad interesante de los tensores es la simetría. En el caso de un tensor de tipo $(0, 2)$, este será simétrico si sus componentes cumplen que $\tau_{ab} = \tau_{ba}$. Si verificase que $\tau_{ab} = -\tau_{ba}$, entonces se dice que el tensor es antisimétrico.

Veamos ahora cómo se pueden asociar tensores de diferentes tipos contrayendo con el tensor métrico contravariante o el covariante. Supongamos que la variedad tiene un tensor métrico cuyas componentes son g_{ab} . Este tensor es simétrico, verificando que $g_{ab} = g_{ba}$, y además es regular, por lo que la matriz $[g_{ab}]$ tiene una inversa $[g^{ab}]$ que también será simétrica y cuyas componentes verifican que:

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a \quad (1.53)$$

Supongamos ahora que α^a y β^a son las componentes de dos vectores contravariantes, y definamos ahora λ_a y μ_a de la forma $\lambda_a \equiv g_{ab}\alpha^b$, $\mu_a \equiv g_{ab}\beta^b$. Por la regularidad del tensor métrico, λ_a y μ_a son las componentes de dos vectores covariantes. Con estos vectores se verificará que:

$$g^{ab}\lambda_a\mu_b = g^{ab}g_{ac}\alpha^c g_{bd}\beta^d = \delta_d^a g_{ac}\alpha^c\beta^d = g_{dc}\alpha^c\beta^d$$

que es un tensor de tipo $(0, 0)$. Aplicamos a este resultado el llamado teorema del cociente, que nos dice que el tipo de un tensor que ha perdido sufijos por contracción es el del tensor inicial, por lo que el tensor g^{ab} es de tipo $(2, 0)$.

Los tensores métricos suelen ser utilizados para subir o bajar los sufijos, y se dice que dos tensores están asociados si se pueden obtener subiendo o bajando los sufijos. Por ejemplo, podemos transformar un tensor de tipo $(1, 2)$ en uno de tipo $(2, 1)$ utilizando el tensor métrico contravariante, y ambos tensores estarán asociados: $\tau_a^b{}_c = g_{ad}\tau^{db}{}_c$.

1.8. Propiedades métricas

El campo tensorial métrico g_{ab} nos proporciona un producto interno $g_{ab}\lambda^a\mu^b$ para vectores λ^a y μ^a en cada punto P de M . Al igual que en el espacio euclídeo, hay cuatro formas de escribir este producto interno:

$$g_{ab}\lambda^a\mu^b = g^{ab}\lambda_a\mu_b = \lambda_a\mu^a = \lambda^a\mu_a \quad (1.54)$$

Este producto interno suele ser definido positivo, es decir, $g_{ab}\lambda^a\lambda^b \geq 0$ para cualquier vector λ^a , dándose la igualdad únicamente si $\lambda^a = 0$. Sin embargo, para estudiar el espacio-tiempo en la Relatividad General debemos relajar esta hipótesis, y simplemente diremos que el tensor métrico es regular, de tal forma que es invertible. Una variedad que posee un campo tensorial definido positivo se dice que es riemanniana, mientras que si es indefinido se dice que es pseudoriemanniana. Con esto ya estamos en condiciones de definir nuevos conceptos que nos permitirán tratar con estas propiedades métricas extendiendo y generalizando las propiedades vistas para espacios y superficies euclídeos.

Definimos la longitud de un vector λ^a como

$$|g_{ab}\lambda^a\lambda^b|^{1/2} = |g^{ab}\lambda_a\lambda_b|^{1/2} = |\lambda_a\lambda^a|^{1/2} \quad (1.55)$$

Un vector unitario es aquel cuya longitud es uno. Sin embargo, si g_{ab} fuese indefinido, podría darse que $|\lambda_a\lambda^a| = 0$ para $\lambda \neq 0$, en cuyo caso decimos que λ^a es un vector nulo. El ángulo θ entre dos vectores no nulos λ^a y μ^a viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{g_{ab}\lambda^a\mu^b}{|g_{cd}\lambda^c\lambda^d|^{1/2} |g_{ef}\mu^e\mu^f|^{1/2}} \quad (1.56)$$

que generaliza la fórmula que daba el ángulo entre dos vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ en espacios euclídeos. Si el tensor métrico fuese indefinido, esta fórmula podría llevarnos a $|\cos \theta| > 1$, dando así un valor no real de θ .

Dos vectores son ortogonales si su producto interno es cero. Esta definición tiene sentido incluso si uno de los dos vectores (o ambos) es el vector nulo.

En una variedad M , una curva γ viene dada por $x^a = x^a(t)$, con $t \in I$, y definíamos el vector tangente a cada punto como $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{dt}$. Si el intervalo I viene dado por $a \leq t \leq b$, entonces la longitud de γ podemos definirla como:

$$L = \int_a^b |g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b|^{1/2} dt \quad (1.57)$$

Esta definición de longitud no depende de las coordenadas, y además no depende de la forma de la que la curva está parametrizada. Si el tensor métrico es indefinido $g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$ podría ser negativo, de ahí que se defina con el módulo. Si este factor fuese nulo en todos los puntos, tendríamos una curva de longitud cero llamada curva nula.

Podemos definir la distancia δs entre puntos cercanos cuya diferencia de coordenadas sea pequeña. Esto puede verse como puntos en una curva cuya diferencia δt es pequeña y, como en primer orden $\delta x^a = \dot{x}^a\delta t$, la definición de distancia quedaría así como $\delta s^2 = |g_{ab}\delta x^a\delta x^b|$. La versión infinitesimal de esto es:

$$ds^2 = |g_{ab}dx^a dx^b| \quad (1.58)$$

Esto define el elemento de línea de la variedad M . La variedad que se utiliza en Relatividad General es una variedad pseudoriemanniana cuyo tensor métrico es $g_{\mu\nu}$, que tiene una indefinición caracterizada por $(+ - - -)$. Esto quiere decir que, si adoptamos un sistema de coordenadas que nos deje el tensor métrico en un punto P $|g_{\mu\nu}|_P$ como una matriz diagonal, entonces un elemento de la diagonal sería positivo y los otros tres negativos. Podemos así describir cualquier vector no nulo como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{temporal} \\ \textit{nulo} \\ \textit{espacial} \end{array} \right. \quad \textit{si } g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

Estos términos también se asocian a curvas, diciendo así que una curva es temporal si su vector tangente es temporal. Las curvas espaciales y nulas se definen de forma análoga.

Capítulo 2

El espacio-tiempo en Relatividad General y trayectorias de partículas

Einstein postuló que los efectos gravitatorios se podían explicar con la curvatura del espacio-tiempo, y que, como consecuencia, la gravedad no debía ser considerada una fuerza. Empezaremos el tema introduciendo las geodésicas, que nos permitirán entender cuál es el camino más corto entre dos puntos en un espacio curvado. Veremos que, localmente, el espacio-tiempo de la Relatividad General será como el de la Especial, pero en escalas más grandes este se curvará, pudiendo calcular esta curvatura a partir de lo que se conoce como desviación geodésica.

Al pasar de la teoría de Einstein a la teoría de Newton como una aproximación tendremos que hacer dos cosas: pasar a una forma no relativista de ver las cosas y explicar los efectos de la curvatura del espacio-tiempo con un sistema tridimensional de coordenadas espaciales y una dimensión temporal. Es aquí donde surgirán dos conceptos importantes como son la derivada absoluta y la covariante. Por último, obtendremos una aproximación del potencial gravitatorio para velocidades pequeñas en comparación con la de la luz.

2.1. Geodésicas

Una geodésica en un espacio euclídeo es simplemente una línea recta que puede caracterizarse como la curva más corta entre dos puntos. Esta caracterización se puede extender a una variedad, donde el campo del tensor métrico nos da la longitud de la curva utilizando la integral (1.57). Sin embargo, cuando el campo del tensor métrico es indefinido esto presenta algunos problemas, ya que podemos tener curvas con longitud nula. Surge así un nuevo concepto que usaremos para definir la curvatura de las geodésicas en una variedad: la rectitud.

Una línea es recta si todos sus vectores tangentes apuntan en la misma dirección. Si usamos la longitud de arco s medida desde algún punto base de la línea como parámetro, entonces los vectores tangentes $\boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathbf{r}}(s)$ tienen una longitud constante (por ser vectores unitarios), algo que se puede expresar de la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds} = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

Veamos la forma que adopta esta ecuación cuando usamos como coordenadas arbitrarias u^i y como base natural asociada $\{\mathbf{e}_i\}$. Si ponemos $\boldsymbol{\lambda}$ como $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^i \mathbf{e}_i$ y usamos los puntos para aclarar que estamos derivando respecto del parámetro s , nos queda:

$$0 = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds} = \frac{d(\lambda^i \mathbf{e}_i)}{ds} = \dot{\lambda}^i \mathbf{e}_i + \lambda^i \dot{\mathbf{e}}_i \quad (2.2)$$

Obtenemos de aquí el término $\dot{\mathbf{e}}_i$, que podemos expresar de la forma $\dot{\mathbf{e}}_i = \partial_j \mathbf{e}_i \dot{u}^j$. Los vectores $\partial_j \mathbf{e}_i$ generalmente son no nulos, luego podemos asociarlos en cada punto del espacio a la base $\{\mathbf{e}_i\}$, de tal forma que:

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

Esto nos da lugar a 27 términos Γ_{ij}^k definidos en cada punto del espacio. Teniendo en cuenta todo esto, la ecuación (2.2) queda:

$$\left(\dot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{u}^k \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Como $\lambda^i = \dot{u}^i = \frac{du^i}{ds}$, tendremos que las componentes $\frac{du^i}{ds}$ del vector tangente de la línea recta satisfacen:

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (2.4)$$

Para que esta ecuación tenga algún significado, tenemos que expresar Γ_{jk}^i en función de cantidades que conozcamos. Como

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \partial_i \mathbf{e}_j \implies \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k = \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k$$

Si ahora hacemos el producto escalar con \mathbf{e}^l , obtendremos la siguiente propiedad de simetría:

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l \quad (2.5)$$

Usamos ahora que $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ para obtener:

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma_{ik}^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \Gamma_{jk}^m \mathbf{e}_m$$

Usando el tensor métrico, esta expresión se nos reduce a:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{im} \quad (2.6)$$

Renombrando los sufijos, nos queda:

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ji}^m g_{mk} + \Gamma_{ki}^m g_{jm} \quad (2.7)$$

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma_{kj}^m g_{mi} + \Gamma_{ij}^m g_{km} \quad (2.8)$$

Sumando las ecuaciones (2.6) y (2.7), restándole la (2.8) y utilizando la simetría tanto en Γ_{ij}^m como en g_{ij} nos queda:

$$2\Gamma_{ki}^m g_{mj} = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}$$

Contrayendo con $\frac{1}{2}g^{lj}$ obtenemos:

$$\Gamma_{ki}^l = \frac{1}{2}g^{lj} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) \quad (2.9)$$

Esta ecuación junto con la (2.4) recibe el nombre de ecuación de las geodésicas en el espacio euclídeo. Si en vez de usar la longitud de arco utilizásemos un parámetro t para parametrizar la línea recta, entonces esta ecuación adopta una forma más complicada. Sin embargo, para parámetros relacionados con la longitud de arco s por una ecuación de la forma $t = As + B$, donde A y B son constantes ($A \neq 0$), entonces la ecuación de las geodésicas adopta la misma forma que cuando usamos s :

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

Estos parámetros cuya ecuación de las geodésicas tiene esta forma se llaman parámetros afines. Para un parámetro afín, $\frac{ds}{dt}$ es constante, por lo que recorre la geodésica a una velocidad constante. Para obtener una solución particular, necesitamos seis condiciones. Suelen tener la forma de un punto y una dirección iniciales o un punto inicial y otro final para la geodésica.

Usando todo esto, podemos definir una geodésica afínmente parametrizada en una variedad N -dimensional riemanniana o pseudoriemanniana como una curva dada por $x^a(u)$ que verifica:

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0 \quad (2.11)$$

donde los N^3 coeficientes Γ_{bc}^a están dados por:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \quad (2.12)$$

Estas cantidades reciben el nombre de coeficientes de conexión y, al igual que sus contrapartes euclídeas tridimensionales, cumplen la relación de simetría siguiente:

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a \quad (2.13)$$

Se puede ver que, a medida que nos movemos por una geodésica afínmente parametrizada, la longitud del vector tangente $\dot{x}^a \equiv \frac{dx^a}{du}$ permanece constante, y si además la geodésica es no nula entonces el parámetro afín está relacionado con el de la longitud de arco s por:

$$u = As + B \quad (2.14)$$

donde A y B son constantes ($A \neq 0$). Las geodésicas nulas afínmente parametrizadas no pueden ser parametrizadas con s porque sus vectores tangentes \dot{x}^a verifican $g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0$.

Para obtener las ecuaciones paramétricas $x^a = x^a(u)$ de una geodésica afínmente parametrizada, debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1.11). Estas ecuaciones son de segundo orden, y requieren $2N$ condiciones para determinar una solución única. Unas

condiciones adecuadas consistirían en especificar las coordenadas x_0^a de un punto de la geodésica y las componentes \dot{x}_0^a del vector tangente en ese punto. Para resolver estas ecuaciones tan complejas a priori utilizaremos un procedimiento que también nos proporcionará los Γ_{bc}^a de forma indirecta.

Consideremos el lagrangiano $L(\dot{x}^c, x^c) \equiv g_{ab}(x^c) \dot{x}^a \dot{x}^b$, que podemos ver como una función de $2N$ variables independientes x^c y \dot{x}^c . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano son:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0 \quad (2.15)$$

Para el lagrangiano dado, estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones de las geodésicas, como veremos a continuación:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} = \frac{1}{2} g_{ab} \delta_c^a \dot{x}^b + \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \delta_c^b = g_{cb} \dot{x}^b$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^c} = \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

Las ecuaciones (2.15) quedan así:

$$\frac{d(g_{cb} \dot{x}^b)}{du} - \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \implies g_{cb} \ddot{x}^b + \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$$

Pero $\partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b = \frac{1}{2} \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b + \frac{1}{2} \partial_b g_{ca} \dot{x}^a \dot{x}^b$, con lo que nos queda que:

$$g_{cb} \ddot{x}^b + \frac{1}{2} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$$

Nos queda así que la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a:

$$g_{cb} \ddot{x}^b + \Gamma_{cab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (2.16)$$

Subiendo el sufijo c de Γ_{cab} , nos queda que:

$$\ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (2.17)$$

Estas son las ecuaciones de las geodésicas afinmente parametrizadas. Estas ecuaciones nos permiten obtener un resultado de bastante utilidad. Si g_{ab} no depende de una coordenada particular x^d , entonces la ecuación (2.15) nos dice que:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^d} \right) = 0$$

lo cual quiere decir que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^d}$ es constante a lo largo de una geodésica afinmente parametrizada. Pero $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^d} = g_{ab} \dot{x}^b$, lo que nos lleva a que $p_d = g_{ab} \dot{x}^b$ es constante a lo largo de una geodésica afinmente parametrizada. Al igual que en la mecánica lagrangiana con los momentos generalizados, ahora podremos decir que una coordenada que no tiene g_{ab} es cíclica. Poder afirmar que $p_d = \text{constante}$ cuando x^d es cíclica nos da integrales inmediatas de las ecuaciones de las geodésicas, ayudando bastante a la resolución del problema.

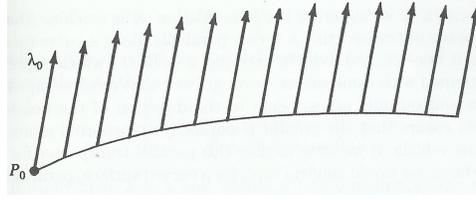


Figura 2.1: Campo de vectores paralelos generado por transporte paralelo

2.2. Vectores paralelos a lo largo de una curva

La forma de caracterizar tanto una línea recta en un espacio euclídeo como una geodésica en una variedad está relacionada con el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva. Sea γ una curva tridimensional en el espacio euclídeo definida paramétricamente como $u^i(t)$ y sea P_0 con un valor del parámetro t_0 un punto inicial de γ donde tendremos un vector λ_0 . La idea del transporte se basa en mover este vector λ_0 a lo largo de la curva sin modificar ni su módulo ni su dirección, obteniendo así un vector paralelo $\lambda(t)$ en cada punto de λ , como se aprecia en la Figura 2.1. Se obtendrá así un campo de vectores paralelos a lo largo de γ generado por el transporte paralelo de λ_0 a lo largo de la curva.

Como el módulo y la dirección de $\lambda(t)$ no cambian a lo largo de γ , se cumplirá que:

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

La condición inicial de dicha ecuación sería $\lambda(t_0) = \lambda_0$. Si hacemos con esta ecuación lo mismo que hicimos con la ecuación (2.1), llegaremos a algo como (2.3), que nos dice que las componentes λ^i del vector transportado satisfacen:

$$\dot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{u}^k = 0 \quad (2.19)$$

con los coeficientes de conexión dados por (2.9). Esta es la ecuación para componentes de la ecuación de transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva en un espacio euclídeo. Su generalización para un vector contravariante λ^a a lo largo de una curva γ en una variedad N -dimensional con un campo tensorial métrico g_{ab} está dado por:

$$\dot{\lambda}^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \dot{x}^c = 0 \quad (2.20)$$

donde los coeficientes de conexión estarían dados por (2.12) y \dot{x}^a es el vector tangente resultante de la parametrización de $x^a(u)$ en γ . La definición de geodésica afinmente parametrizada de la sección anterior nos permite afirmar que esta es una curva caracterizada por que sus vectores tangentes \dot{x}^a forman un campo de vectores paralelos a lo largo de sí misma.

En las variedades curvadas, el transporte paralelo es muy diferente al de los espacios euclídeos, ya que dependerá del camino seguido: el vector obtenido al transportar un vector dado desde un punto P hasta un punto Q depende del camino tomado entre dichos puntos. También se puede observar que, si la curva a lo largo de la cual el vector se transporta es una geodésica, entonces el ángulo entre dicho vector y el tangente a la geodésica permanece constante, como se verá más adelante.

Otro aspecto a tener en cuenta radica en lo que pasaría al transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada de longitud pequeña. Localmente, la superficie se comporta como si fuera plana, y es el estudio sobre regiones más amplias del espacio la que nos proporciona una forma de medir la curvatura.

Los coeficientes de conexión Γ_{bc}^a nos definen una conexión entre los espacios tangentes en diferentes puntos de la variedad (de ahí su nombre), permitiéndonos así asociar un vector en el espacio tangente con un vector paralelo a este en otro punto. Para puntos muy separados esta asociación dependería del camino seguido, pero para puntos de un entorno cercano la asociación será única, como veremos a continuación.

Supongamos que P (con coordenadas x^a) y Q (con coordenadas $x^a + \delta x^a$) son dos puntos cercanos. Sea γ una curva cualquiera parametrizada entre P y Q , donde P tendrá asociado un parámetro u y Q un parámetro $u + \delta u$, y sea $\bar{\lambda}^a = \lambda^a + \delta \lambda^a$ el vector en Q paralelo al vector inicial λ^a en P . Como el vector en Q procede del transporte paralelo de λ^a en P a lo largo de la pequeña curva que los une, tenemos que:

$$\delta \lambda^a \approx \frac{d\lambda^a}{du} \delta u$$

De la ecuación (2.20) obtenemos despejando que $\frac{d\lambda^a}{du} = -\Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du}$, que sustituido en la expresión anterior de $\bar{\lambda}^a$ nos da:

$$\bar{\lambda}^a \approx \lambda^a - \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du} \delta u \approx \lambda^a - \Gamma_{bc}^a \lambda^b \delta x^c \quad (2.21)$$

Tenemos así para primer orden en δx^a una aplicación lineal entre el espacio tangente T_P y el espacio tangente T_Q que nos lleva el vector tangente en P de componentes λ^a al vector paralelo en Q cuyas componentes son $\bar{\lambda}^a = A_b^a \lambda^b$, donde:

$$A_b^a \equiv \delta_b^a - \Gamma_{bc}^a \delta x^c \quad (2.22)$$

Esta aplicación será utilizada a la hora de definir las derivadas absoluta y covariante.

Al tomar la ecuación (2.20) como la ecuación que define el transporte paralelo de un vector contravariante a lo largo de una curva en una variedad no se ha tenido en cuenta la independencia de coordenadas. Si usamos un sistema de coordenadas apostrofaado, el transporte paralelo de un vector $\lambda^{a'}$ verificará:

$$\dot{\lambda}^{a'} + \Gamma_{b'c'}^{a'} \lambda^{b'} \dot{x}^{c'} = 0 \quad (2.23)$$

donde

$$\Gamma_{b'c'}^{a'} \equiv \frac{1}{2} g^{a'd'} (\partial_{b'} g_{d'c'} + \partial_{c'} g_{b'd'} - \partial_{d'} g_{b'c'}) \quad (2.24)$$

Para ver si esto cambia el campo de vectores paralelos, veremos que, en primer orden y con diferencias entre coordenadas pequeñas, la aplicación entre T_P y T_Q dada por la ecuación (2.21) no depende del sistema de coordenadas usado. Para ello, tendremos que ver que, si

$$\bar{\lambda}^{a'} \equiv \lambda^a - \Gamma_{b'c'}^{a'} \lambda^{b'} \delta x^{c'}$$

entonces

$$\bar{\lambda}^{a'} (X_{a'}^e)_Q = \bar{\lambda}^e$$

donde $(X_{a'}^e)_Q$ es la derivada parcial $\frac{\partial x^e}{\partial x^{a'}}$ evaluada en Q . En función de los valores en P , podemos decir que, en primer orden:

$$(X_{a'}^e)_Q = X_{a'}^e + X_{d'a'}^e \partial x^{d'}$$

donde $X_{d'a'}^e = \frac{\partial^2 x^e}{\partial x^{d'} \partial x^{a'}}$, con lo que nos queda ver que:

$$\left(\lambda^{a'} - \Gamma_{b'c'}^{a'} \lambda^{b'} \partial x^{c'} \right) \left(X_{a'}^e + X_{d'a'}^e \delta x^{d'} \right) = \lambda^e - \Gamma_{fg}^e \lambda^f \delta x^g$$

Pero $\lambda^{a'} X_{a'}^e = \lambda^e$, lo que nos permite simplificar la ecuación anterior en primer orden a:

$$X_{d'a'}^e \lambda^{a'} \delta x^{d'} - \Gamma_{b'c'}^{a'} X_{a'}^e \lambda^{b'} \delta x^{c'} = -\Gamma_{fg}^e \lambda^f \delta x^g$$

que es equivalente a:

$$\left(\Gamma_{b'c'}^{a'} - \Gamma_{fg}^d X_d^{a'} X_{b'}^f X_{c'}^g - X_{c'b'}^d X_d^{a'} \right) X_{a'}^e \lambda^{b'} \delta x^{c'} = 0 \quad (2.25)$$

con $X_{b'}^f \lambda^{b'} = \lambda^f$ y (en primer orden) $X_{c'}^g \delta x^{c'} = \delta x^g$. Usando ahora las ecuaciones (2.12) y (2.24), podemos ver que los coeficientes de conexión se transforman de acuerdo a:

$$\Gamma_{b'c'}^{a'} = \Gamma_{fg}^d X_d^{a'} X_{b'}^f X_{c'}^g + X_{c'b'}^d X_d^{a'} \quad (2.26)$$

Luego la condición (2.25) se satisface, lo cual nos establece la condición de independencia de las coordenadas en un transporte paralelo. Como podemos expresar la definición de la geodésica en función del transporte paralelo, deducimos que esta definición también es independiente de las coordenadas.

Veamos a continuación una fórmula que nos relacionará los coeficientes de conexión Γ_{bc}^a con las cantidades Γ_{abc} definidas como

$$\Gamma_{abc} \equiv \frac{1}{2} (\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{bc}) \quad (2.27)$$

Los nombres tradicionales de Γ_{abc} y Γ_{bc}^a son símbolos de Christoffel de primer y segundo tipo respectivamente. De la ecuación (2.12) podemos ver que:

$$\Gamma_{bc}^a = g^{ad} \Gamma_{abc} \quad (2.28)$$

Con un pequeño cálculo, obtenemos también que:

$$\Gamma_{abc} = g_{ad} \Gamma_{bc}^d \quad (2.29)$$

Sumando Γ_{abc} y Γ_{bac} llegamos a:

$$\partial_c g_{ab} = \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} \quad (2.30)$$

Esta ecuación nos permite expresar las derivadas de las componentes del tensor métrico en función de los coeficientes de conexión.

2.3. Diferenciación absoluta y covariante

En esta sección estudiaremos qué es lo que pasa cuando diferenciamos un campo tensorial en una variedad M . Podemos ver las componentes del campo como unas funciones que dependen del parámetro u usado para etiquetar los puntos de la curva, y podemos considerar sus derivadas respecto de u . Sin embargo, estas derivadas no son las componentes de un tensor. Para poder derivar respecto del carácter tensorial de los campos este tiene que ser modificado, lo que, aplicado a lo largo de curvas, nos lleva a la idea de la derivada absoluta. Tras esto, consideraremos campos tensoriales definidos en una región cubierta por un sistema de coordenadas, donde podemos ver las componentes como funciones de las coordenadas. Aquí se modifican las derivadas parciales para respetar el carácter tensorial, dando lugar así a las derivadas covariantes. Ambos tipos de derivadas dependerán del concepto de paralelismo previamente estudiado.

Supongamos que tenemos un campo vectorial $\lambda^a(u)$ definido a lo largo de una curva γ dada paramétricamente por $x^a(u)$. Las N cantidades $\frac{d\lambda^a}{du}$ no son las componentes de un vector. Para verlo, usaremos un sistema de coordenadas apostrofadas y nos fijaremos en las cantidades $\frac{d\lambda^{a'}}{du}$ para ver cómo se relacionan con las $\frac{d\lambda^a}{du}$. Estas cantidades apostrofadas vendrán dadas por:

$$\frac{d\lambda^{a'}}{du} = \frac{d(X_b^{a'}\lambda^b)}{du} = X_b^{a'} \left(\frac{d\lambda^b}{du} \right) + X_{bc}^{a'} \left(\frac{dx^c}{du} \right) \lambda^b \quad (2.31)$$

El término que contiene a $X_{bc}^{a'} \equiv \frac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^b \partial x^c}$ desaparecería si los $\frac{d\lambda^a}{du}$ fueran las componentes de un vector. La razón por la que este término aparece es que en la ecuación

$$\frac{d\lambda^a}{du} \equiv \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\lambda^a(u + \delta u) - \lambda^a(u)}{\delta u} \quad (2.32)$$

tomamos la diferencia de las componentes en distintos puntos de γ . Como los coeficientes de la transformación generalmente dependen de la posición, tendremos que $(X_b^{a'})_u \neq (X_b^{a'})_{u+\delta u}$, que significa que estas diferencias de coordenadas no son las componentes de un vector (en ningún punto). En el límite, la diferencia entre $(X_b^{a'})_u$ y $(X_b^{a'})_{u+\delta u}$ aparece como $X_{bc}^{a'}$. Para poder obtener un vector, lo que debemos hacer es tomar diferencias de componentes en el mismo punto de γ , algo que podremos hacer utilizando el concepto de paralelismo.

Sea P un punto de γ con parámetro u y Q otro punto de su entorno con parámetro $u + \delta u$. Entonces $\lambda^a(u + \delta u)$ es un vector en Q , al igual que el vector $\bar{\lambda}^a$ obtenido por el transporte paralelo de $\lambda^a(u)$ de P a Q . La resta $\lambda^a(u + \delta u) - \bar{\lambda}^a$ es ahora un vector en Q , y también lo será el cociente $\frac{\lambda^a(u + \delta u) - \bar{\lambda}^a}{\delta u}$. El límite de este cociente cuando $\delta u \rightarrow 0$ es lo que nos da la derivada absoluta $\frac{D\lambda^a}{du}$ de $\lambda^a(u)$ a lo largo de γ . Sabemos que:

$$\lambda^a(u + \delta u) \approx \lambda^a(u) + \frac{d\lambda^a}{du} \delta u$$

Por la ecuación (2.21):

$$\bar{\lambda}^a \approx \lambda^a(u) - \Gamma_{bc}^a \lambda^b(u) \delta x^c$$

Luego:

$$\frac{\lambda^a(u + \delta u) - \bar{\lambda}^a}{\delta u} \approx \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b(u) \frac{\delta x^c}{\delta u}$$

Cuando $\delta u \rightarrow 0$, el punto Q tiende a P , y el límite del cociente es:

$$\frac{D\lambda^a}{du} \equiv \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du} \quad (2.33)$$

Todas las cantidades que aparecen en esta fórmula están evaluadas en el mismo punto P de γ . Esta es la definición de la derivada absoluta de un campo vectorial λ^a a lo largo de una curva γ , que también será un campo vectorial a lo largo de esta. Involucra tanto a los coeficientes de conexión Γ_{bc}^a como a las derivadas $\frac{dx^c}{du}$, donde estas últimas no forman un campo vectorial a lo largo de γ .

La afirmación que hemos hecho de que la derivada absoluta es un campo vectorial a lo largo de γ se justifica por la forma de la que está definido. También podría hacerse comprobando que:

$$\left(\frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{b'c'}^a \lambda^{b'} \frac{dx^{c'}}{du} \right) = X_d^{a'} \left(\frac{d\lambda^d}{du} + \Gamma_{ef}^d \lambda^e \frac{dx^f}{du} \right) \quad (2.34)$$

Esta ecuación sale de utilizar la ecuación (2.31) y que $\Gamma_{b'c'}^a = \Gamma_{ef}^d X_d^{a'} X_{b'}^e X_{c'}^f - X_{b'}^e X_{c'}^f X_{ef}^{a'}$ para $\frac{d\lambda^a}{du}$ y Γ_{bc}^a .

Veamos ahora que la ecuación (2.20) para el transporte paralelo de un vector contra-variante a lo largo de una curva puede escribirse como $\frac{D\lambda^a}{du} = 0$, y estos $\lambda^a(u)$ forman un campo paralelo de vectores a lo largo de γ si y solo si $\frac{D\lambda^a}{du} = 0$. Podemos extender el concepto de la derivada absoluta a campos tensoriales generales $\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}(u)$, llegando así también al transporte paralelo a lo largo de γ requiriendo que $\frac{D\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}}{du} = 0$.

Para definir la derivada absoluta de campos tensoriales generales a lo largo de una curva tendremos que hacer dos aproximaciones. La primera de ellas consiste en extender la noción de paralelismo entre espacios tangentes vecinos T_P y T_Q a una entre espacios con tensores de tipo (r, s) en P y tensores de tipo (r, s) en Q . La segunda se basa en pedirle a la derivada absoluta que satisfaga ciertas condiciones razonables que nos permitan extender el concepto sin problemas. Las condiciones que le imponemos al operador $\frac{D}{du}$ para aplicarlo a campos tensoriales generales a lo largo de una curva parametrizada por u son las siguientes:

- (a) Al aplicarle $\frac{D}{du}$ a un campo tensorial, este nos dará un campo tensorial del mismo tipo.
- (b) $\frac{D}{du}$ es una operación lineal, lo cual significa que $\frac{D(\sigma_c^{ab} + \tau_c^{ab})}{du} = \frac{D\sigma_c^{ab}}{du} + \frac{D\tau_c^{ab}}{du}$ y que $\frac{D(k\tau_{bc}^a)}{du} = k \frac{D\tau_{bc}^a}{du}$.
- (c) $\frac{D}{du}$ obedece la regla de Leibniz respecto del producto tensorial, lo que nos permite hacer $\frac{D(\sigma_b^a \tau^{cd})}{du} = \left(\frac{D\sigma_b^a}{du} \right) \tau^{cd} + \sigma_b^a \left(\frac{D\tau^{cd}}{du} \right)$.
- (d) Para cualquier campo escalar ϕ , se cumplirá que $\frac{D\phi}{du} = \frac{d\phi}{du}$.

Veamos ahora que, usando estas cuatro condiciones y la ecuación (2.33), podemos obtener expresiones para las derivadas absolutas de campos vectoriales de cualquier tipo.

La derivada absoluta de un campo escalar

Resulta inmediato a partir de la condición (d) del apartado anterior:

$$\frac{D\phi}{du} \equiv \frac{d\phi}{du} \quad (2.35)$$

La derivada absoluta de un campo vectorial contravariante

Con la notación del punto para las derivadas, la ecuación (2.33) queda de la forma:

$$\frac{D\lambda^a}{du} \equiv \dot{\lambda}^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \dot{x}^c \quad (2.36)$$

La derivada absoluta de un campo vectorial covariante

Si μ_a es un vector covariante y λ^a es un vector contravariante, ambos definidos a lo largo de una curva γ , entonces $\lambda^a \mu_a$ es un campo escalar, por lo que usando la ecuación (2.35):

$$\frac{d(\lambda^a \mu_a)}{du} = \frac{D(\lambda^a \mu_a)}{du}$$

Usando ahora la condición (c) sobre el producto tensorial contraído, nos queda:

$$\frac{d\lambda^a}{du} \mu_a + \lambda^a \frac{d\mu_a}{du} = \frac{D\lambda^a}{du} \mu_a + \lambda^a \frac{D\mu_a}{du} = \mu_a \left(\frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du} \right) + \lambda^a \frac{D\mu_a}{du}$$

Esto implica que:

$$\lambda^a \frac{D\mu_a}{du} = \lambda^a \frac{d\mu_a}{du} - \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du} \mu_a = \lambda^a (\dot{\mu}_a - \Gamma_{ac}^d \mu_d \dot{x}^c)$$

Como esto se cumple para cualquier campo vectorial arbitrario, concluimos que:

$$\frac{D\mu_a}{du} \equiv \dot{\mu}_a - \Gamma_{ac}^d \mu_d \dot{x}^c \quad (2.37)$$

La derivada absoluta para un campo tensorial de tipo (2, 0)

Consideraremos el caso particular en el que $\tau^{ab} = \lambda^a \mu^b$, donde λ^a y μ^a son campos vectoriales contravariantes a lo largo de la curva. Usando ahora la condición (c), llegamos a que:

$$\frac{D\tau^{ab}}{du} = \frac{D(\lambda^a \mu^b)}{du} = \left(\frac{D\lambda^a}{du} \right) \mu^b + \lambda^a \left(\frac{D\mu^b}{du} \right)$$

Sustituyendo las expresiones adecuadas de $\frac{D\lambda^a}{du}$ y $\frac{D\mu^b}{du}$ y teniendo en cuenta que $\tau^{ab} = \lambda^a \mu^b$, obtenemos que:

$$\frac{D\tau^{ab}}{du} \equiv \dot{\tau}^{ab} + \Gamma_{cd}^a \tau^{cb} \dot{x}^d + \Gamma_{cd}^b \tau^{ac} \dot{x}^d \quad (2.38)$$

La derivada absoluta para un campo tensorial de tipo (0, 2)

El procedimiento es análogo al del apartado anterior, solo que esta vez consideraremos el caso particular en el que $\tau_{ab} = \lambda_a \mu_b$, resultando así la expresión:

$$\frac{D\tau_{ab}}{du} \equiv \dot{\tau}_{ab} - \Gamma_{ad}^c \tau_{cb} \dot{x}^d - \Gamma_{bd}^c \tau_{ac} \dot{x}^d \quad (2.39)$$

La derivada absoluta para un campo tensorial de tipo (1, 1)

Aquí consideraremos el caso $\tau_b^a = \lambda^a \mu_b$, obteniendo:

$$\frac{D\tau_b^a}{du} \equiv \dot{\tau}_b^a + \Gamma_{cd}^a \tau_b^c \dot{x}^d - \Gamma_{bd}^c \tau_c^a \dot{x}^d \quad (2.40)$$

Con todo esto, ya podemos deducir que, en el caso de tener un campo tensorial de tipo (r, s) $\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ a lo largo de una curva γ , la derivada absoluta vendrá dada por la suma de la derivada total $\dot{\tau}_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ de sus componentes, r términos de la forma $\Gamma_{cd}^{a_k} \tau_{\dots}^{a_1 \dots a_r} \dot{x}^d$ y s términos de la forma $-\Gamma_{b_k d}^c \tau_{\dots}^{a_1 \dots a_r} \dot{x}^d$.

Como dijimos, el concepto de transporte paralelo lo podemos extender a un tensor de cualquier tipo, simplemente tenemos que imponer que su derivada absoluta a lo largo de la curva sea nula. Esta definición dependerá del camino seguido. La única excepción a esta regla son los campos escalares, ya que sus derivadas absoluta y total son iguales, teniendo que son constantes a lo largo de toda la curva si estas se igualan a cero.

Ahora ya podemos introducir el concepto de derivada covariante de un campo tensorial, que está bastante relacionado con el de la derivada absoluta. Para ello, necesitamos que el campo tensorial esté definido en todo M (o en toda una región de M). Supongamos que tenemos un campo vectorial contravariante λ^a definido en una región U . Si γ es una curva en U , podemos restringir λ^a a γ , definiendo así su derivada absoluta como en la ecuación (2.36). Pero $\dot{\lambda}^a = \frac{\partial \lambda^a}{\partial x^c} \dot{x}^c$, por lo que podemos sustituir en la ecuación para obtener:

$$\frac{D\lambda^a}{du} = \left(\frac{\partial \lambda^a}{\partial x^c} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \right) \dot{x}^c$$

La expresión entre paréntesis no depende de γ , pero sí que depende de las componentes λ^a y de sus derivadas en un punto, siendo la ecuación válida para vectores tangentes \dot{x}^a en dicho punto. Por el teorema del cociente, deducimos que $\frac{\partial \lambda^a}{\partial x^c} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b$ son las componentes de un campo tensorial de tipo (1, 1). Esta es la derivada covariante, y la denotaremos como $\lambda^a_{;c}$. Reescribiendo la derivada parcial como $\frac{\partial \lambda^a}{\partial x^c} = \lambda^a_{,c}$, la expresión para la derivada covariante de λ^a viene dada por:

$$\lambda^a_{;c} = \partial_c \lambda^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b = \lambda^a_{,c} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \quad (2.41)$$

Podemos aplicar el mismo razonamiento de antes para definir la derivada covariante de un campo tensorial de tipo (r, s) , dando lugar a un campo tensorial de tipo $(r, s + 1)$. Estas derivadas satisfarán las mismas cuatro condiciones que las derivadas absolutas, obteniendo así las siguientes expresiones para las derivadas covariantes para campos tensoriales de orden bajo.

Derivadas covariantes de campos tensoriales de orden bajo

Para campos escalares ϕ , la derivada covariante es simplemente una derivada parcial:

$$\phi_{;a} \equiv \partial_a \phi \quad (2.42)$$

Para campos vectoriales contravariantes λ^a , tenemos:

$$\lambda^a_{;b} \equiv \partial_b \lambda^a + \Gamma_{cb}^a \lambda^c \quad (2.43)$$

Para campos vectoriales covariantes μ_a , tenemos:

$$\mu_{a;c} \equiv \partial_c \mu_a - \Gamma_{ac}^b \mu_b \quad (2.44)$$

Para campos tensoriales de tipo $(2, 0)$ τ^{ab} , tenemos:

$$\tau^{ab}_{;c} \equiv \partial_c \tau^{ab} + \Gamma_{dc}^a \tau^{db} + \Gamma_{dc}^b \tau^{ad} \quad (2.45)$$

Para campos tensoriales de tipo $(0, 2)$, tenemos:

$$\tau_{ab;c} \equiv \partial_c \tau_{ab} - \Gamma_{ac}^d \tau_{db} - \Gamma_{bc}^d \tau_{ad} \quad (2.46)$$

Para campos tensoriales de tipo $(1, 1)$, tenemos:

$$\tau^a_{b;c} \equiv \partial_c \tau^a_b + \Gamma_{dc}^a \tau^d_b - \Gamma_{bc}^d \tau^a_d \quad (2.47)$$

La propiedad esencial que tienen en común tanto la derivada absoluta como la covariante es que producen un campo tensorial cuando son aplicadas sobre un campo tensorial, algo que no ocurre con las derivadas total y parcial. Otra diferencia entre la derivada covariante y la parcial es que en la primera el orden importa al hacer derivadas sucesivas (o sea, que en general $\lambda^a_{;bc} \neq \lambda^a_{;cb}$). Veamos ahora las derivadas del campo tensorial métrico y sus campos asociados, pudiendo así obtener una propiedad especial que poseen. Usando la ecuación (2.29) y que $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$, podemos reescribir la ecuación (2.30) como:

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad} = 0$$

que nos dice que $g_{ab;c} = 0$. O sea, hemos obtenido así que la derivada covariante del campo tensorial métrico es cero. El campo tensorial de Kronecker cuyas componentes son δ_b^a y el campo tensorial métrico contravariante con componentes g^{ab} también tendrán derivadas covariantes nulas. Veamos en primer lugar que el campo tensorial de Kronecker cumple esto:

$$\delta^a_{b;c} = \partial_c \delta_b^a + \Gamma_{dc}^a \delta_b^d - \Gamma_{bc}^d \delta_d^a = 0 + \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{bc}^a = 0$$

Para el campo tensorial métrico contravariante usaremos este resultado para deducir que:

$$0 = \delta^a_{b;c} = (g^{ad} g_{db})_{;c} = g^{ad}_{;c} g_{db} + g^{ad} g_{db;c} = g^{ad}_{;c} g_{db}$$

Si contraemos multiplicando por g^{be} , nos quedará:

$$0 = g^{ad}_{;c} \delta_d^e = g^{ae}_{;c}$$

Si tenemos una curva γ podemos expresar las componentes g_{ab} como funciones del parámetro u , teniéndose así que $\frac{Dg_{ab}}{du} = g_{ab;c}\dot{x}^c = 0$, cumpliéndose así que la derivada absoluta del campo tensorial métrico es nula a lo largo de γ . Por el mismo razonamiento, las derivadas absolutas del campo tensorial de Kronecker y del métrico contravariante son cero a lo largo de cualquier curva. Agrupando los resultados obtenidos para estos tres campos tensoriales para derivadas covariantes y absolutas respectivamente, tenemos que:

$$g_{ab;c} = 0, \quad \delta_{b;c}^a = 0, \quad g^{ab}{}_{;c} = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{Dg_{ab}}{du} = 0, \quad \frac{D\delta_b^a}{du} = 0, \quad \frac{Dg^{ab}}{du} = 0 \quad (2.49)$$

Estas propiedades de los campos tensoriales métricos y sus asociados nos permiten concluir que los productos internos se conservan bajo transporte paralelo. O sea, que si transportamos paralelamente dos campos vectoriales λ^a y μ^a a lo largo de una curva γ , entonces el producto interno $g_{ab}\lambda^a\mu^b$ es constante a lo largo de γ . Probémoslo:

$$\frac{d(g_{ab}\lambda^a\mu^b)}{du} = \frac{D(g_{ab}\lambda^a\mu^b)}{du} = \left(\frac{Dg_{ab}}{du}\right)\lambda^a\mu^b + g_{ab}\left(\frac{D\lambda^a}{du}\right)\mu^b + g_{ab}\lambda^a\left(\frac{D\mu^b}{du}\right) = 0$$

donde $\frac{D\lambda^a}{du} = \frac{D\mu^a}{du} = 0$ porque los vectores están siendo transportados paralelamente. De aquí también podemos deducir que el módulo de un vector transportado paralelamente es constante, al igual que el ángulo formado entre dos de ellos. De esto último se puede concluir que, si un vector se transporta paralelamente a lo largo de una geodésica, entonces el ángulo entre este vector y el tangente a la geodésica será constante, ya que este último se transporta paralelamente a lo largo de una geodésica afinmente parametrizada.

A partir de la derivada covariante podemos definir la divergencia. Para un campo vectorial contravariante λ^a , definimos su divergencia como el campo escalar $\lambda^a{}_{;a}$. La divergencia de un campo vectorial covariante μ_a se define como la asociada al campo vectorial contravariante $\mu^a \equiv g^{ab}\mu_b$. Para un campo tensorial de tipo (r, s) , tendremos que definir $(r + s)$ divergencias de las formas $\tau_{b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r}{}_{;c}$ y $(\tau_{b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r})_{;c}$, aunque estos no serían distintos si el campo tensorial tuviera simetría.

2.4. Coordenadas geodésicas

En la ecuación (2.12) podemos ver que, si pudiésemos conseguir un sistema de coordenadas en el que las componentes del tensor métrico fuesen constantes, entonces los coeficientes de conexión serían nulos, algo que simplificaría enormemente las expresiones de las derivadas absoluta y covariante y del transporte paralelo. Esto es posible hacerlo en un espacio euclídeo, pero no se puede hacer generalmente en una variedad curvada. Sin embargo, sí que se puede introducir un sistema de coordenadas en el que $\Gamma_{bc}^a = 0$ en un punto O , algo muy interesante a la hora de simplificar cálculos con los coeficientes de conexión. Estas son las coordenadas geodésicas con origen en O .

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas inicial en el que O tiene como coordenadas x_O^a . Definamos ahora un nuevo sistema de coordenadas apostrofadas a partir de la ecuación:

$$x^{a'} \equiv x^a - x_O^a + \frac{1}{2} (\Gamma_{bc}^a)_O (x^b - x_O^b) (x^c - x_O^c) \quad (2.50)$$

donde los $(\Gamma_{bc}^a)_O$ son los coeficientes de conexión en O , dados por el sistema de coordenadas inicial. Derivando respecto de x^d obtenemos:

$$X_d^{a'} = \delta_d^a + \frac{1}{2} (\Gamma_{bc}^a)_O \delta_d^b (x^c - x_O^c) + \frac{1}{2} (\Gamma_{bc}^a)_O (x^b - x_O^b) \delta_d^c = \delta_d^a + (\Gamma_{dc}^a)_O (x^c - x_O^c)$$

Luego $(X_d^{a'})_O = \delta_d^a$, que implica que $\det [X_d^{a'}]_O \neq 0$. Esto nos dice que la ecuación (2.50) nos define un nuevo sistema de coordenadas en un entorno U' de O . Una segunda derivación nos lleva a que:

$$X_{ed}^{a'} = (\Gamma_{dc}^a)_O \delta_e^c = (\Gamma_{de}^a)_O$$

Usando ahora que $\Gamma_{b'c'}^{a'} = \Gamma_{ef}^d X_d^{a'} X_{b'}^e X_{c'}^f - X_{b'}^e X_{c'}^f X_{ef}^{a'}$ y teniendo en cuenta que $(X_{a'}^d)_O = \delta_a^d$, obtenemos que:

$$\left(\Gamma_{b'c'}^{a'} \right)_O = (\Gamma_{ef}^d)_O \delta_d^a \delta_b^e \delta_c^f - \delta_b^e \delta_c^f (\Gamma_{fe}^a)_O = (\Gamma_{bc}^a)_O - (\Gamma_{bc}^a)_O = 0$$

Lo que nos demuestra que los coeficientes de conexión en O para este sistema de coordenadas apostrofado son nulos, habiendo obtenido así un sistema de coordenadas geodésicas con origen en O .

En una región muy pequeña de la variedad en la que su curvatura sea despreciable, podemos construir un sistema de coordenadas cartesianas locales en torno al punto O . Para obtenerlo, utilizaremos una segunda transformación de coordenadas que nos transforme el tensor métrico en O en una forma diagonal y que nos mantenga los coeficientes de conexión nulos. Introducimos así un sistema de coordenadas doblemente apostrofado centrado en O definido como:

$$x^{a''} = p_b^a x^{b'} \quad (2.51)$$

donde los p_b^a son constantes y forman una matriz regular $P \equiv [p_b^a]$. Derivando esta ecuación, obtenemos que:

$$X_c^{a''} = p_b^a \delta_c^b = p_c^a$$

Con esto podemos obtener la versión matricial de $(g_{a''b''})_O = (g_{c'd'})_O (X_{a''}^{c'})_O (X_{b''}^{d'})_O$, que será:

$$G''_O = P^T G'_O P$$

Es decir, que con una transformación usando la matriz P podemos obtener la matriz G''_O a partir de G'_O . La teoría matricial nos dice además que la matriz P existe y nos permite

llevar a G''_O a una forma diagonal en las que sus entradas son $+1$ ó -1 por ser indefinida. Si fuese definida positiva, entonces todas las entradas serían $+1$. Al elegir la matriz P , lo haremos de tal forma que nos ponga primero los valores positivos y después los negativos:

$$[g_{a''b''}]_O = G''_O = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

Esta segunda transformación cumple que $X_{d''c''}^{a''} = 0$, y se cumple que, si $(\Gamma_{b''c''}^{a''})_O = 0$, entonces $(\Gamma_{b''c''}^{a''})_O = 0$, que es lo que requerimos para esto. También podemos ver que el punto O actúa como el origen del sistema doblemente apostrofado, ya que de la ecuación (2.50) podemos obtener que $x_O^{a'} = 0$, luego $x_O^{a''} = 0$. Quitando los apóstrofes, podemos concluir que hemos construido en torno al punto O un sistema en el que:

$$x_O^a = 0, (\Gamma_{bc}^a)_O = 0, [g_{ab}] = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

que, en un entorno de O , verificará que:

$$(\Gamma_{bc}^a) \approx 0, [g_{ab}] \approx \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

Estas son las coordenadas cartesianas locales, y su región de validez de estas dos aproximaciones dependerá de la curvatura de la variedad en el entorno de O . La relación entre esto y la Relatividad General es que a cada punto del espacio le podemos asignar un sistema de coordenadas en el que:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \approx 0, g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, lo que nos permite ver que el espacio-tiempo de la Relatividad General es localmente como el de la Relatividad Especial.

2.5. El espacio-tiempo de la Relatividad General

Como ya hemos ido introduciendo, el espacio-tiempo en la Relatividad General es una variedad tetradimensional y pseudoriemanniana en la que siempre existe un sistema de coordenadas local (cartesiano) en el cual el tensor métrico adopta la forma:

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a los puntos en el espacio-tiempo eventos. Las coordenadas cartesianas y las que se usan en la Relatividad Especial se relacionan de la forma $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, donde c es la velocidad de la luz. En la Relatividad Especial tendremos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, ya que tendremos un sistema cartesiano de coordenadas en todo el espacio. Localmente, el espacio-tiempo de la Relatividad General es similar al de la Especial, teniendo la propiedad de que en cada punto existe un sistema de coordenadas locales en las cuales el tensor $g_{\mu\nu}$ es aproximadamente $\eta_{\mu\nu}$.

Como ya sabemos, en cada punto P podemos construir un sistema de coordenadas en el que $(\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu})_P = 0$ y $(x^{\mu})_P = (0, 0, 0, 0)$, lo que significa que $(\partial_{\sigma}g_{\mu\nu})_P = 0$. Con todo esto, en puntos cercanos a P en los que los x^{μ} sean pequeños, el teorema de Taylor nos da:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\nu})_P x^{\alpha}x^{\beta} \quad (2.52)$$

De aquí se puede ver que solo podremos decir que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ aproximadamente si estamos lo suficientemente cerca de P como para poder despreciar el segundo término, y que este último será el que determinará el límite de validez de dicha aproximación. Aquí se puede apreciar una diferencia entre la Relatividad Especial y la General. En la primera siempre se tendrá la igualdad entre los tensores métricos por tener coordenadas cartesianas globales, mientras que en la General solo podemos hablar de que son aproximadamente iguales y estas coordenadas cartesianas solo son válidas localmente. Se tiene así que el espacio-tiempo de la Relatividad Especial es plano, mientras que el de la Relatividad General está curvado.

A pesar de todo, las coordenadas cartesianas locales implican hacer aproximaciones que nos harían despreciar los efectos de la gravedad, por lo que usaremos coordenadas generales para formular todo de forma que sea válido en cualquier sistema de coordenadas. Sí que nos servirán, sin embargo, para generalizar ecuaciones que son válidas para la Relatividad Especial. Los cambios que habrá que hacer al generalizar dichas ecuaciones serán reemplazar las derivadas parciales por derivadas covariantes, las derivadas a lo largo de una curva por derivadas absolutas y $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$.

Con estos cambios, podemos definir la velocidad de universo como $u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$, donde el tiempo propio τ y la ecuación de movimiento se definen como:

$$c^2 d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.53)$$

$$\frac{Dp^{\mu}}{d\tau} = f^{\mu} \quad (2.54)$$

donde $p^{\mu} = mu^{\mu}$, siendo m la masa propia de la partícula, y f^{μ} el cuadvivector fuerza que actúa sobre ella. En el caso de una partícula libre para la que $f^{\mu} = 0$, la ecuación (2.54) se reduce a $\frac{D(dx^{\mu}/d\tau)}{d\tau} = 0$, o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (2.55)$$

Esta ecuación refuerza la hipótesis de que la trayectoria de una partícula es una geodésica en el espacio-tiempo, y nos muestra que el tiempo propio es un parámetro afín a lo largo de esta. Normalmente esto se asume como postulado de la Relatividad General, pero aquí nos aparece como una consecuencia de generalizar los conceptos de la Relatividad Especial.

Si tuviésemos un fotón (o cualquier otra partícula sin masa en reposo), su trayectoria también se generalizaría a una geodésica. Sin embargo, para él no se produce ningún cambio en el tiempo propio τ , por lo que no lo podemos usar como parámetro. Pero usando otro parámetro afín u , su ecuación de movimiento quedaría:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{du^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\sigma}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} = 0 \quad (2.56)$$

Como su velocidad es c , esto nos permite deducir que:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} = 0 \quad (2.57)$$

2.6. El potencial gravitatorio y las geodésicas

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas en el que el campo tensorial métrico viene dado por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.58)$$

donde los $h_{\mu\nu}$ son pequeños, pero no lo suficiente como para ser despreciados. En esta sección intentaremos obtener una aproximación newtoniana de la ecuación de las geodésicas que nos da el campo tensorial métrico (2.58), válida para partículas cuyas componentes de la velocidad $\frac{dx^i}{dt}$ sean pequeñas en comparación con c . Debemos asumir que el campo gravitatorio, expresado como $h_{\mu\nu}$, es cuasiestático en el sentido de que $\partial_0 h_{\mu\nu} \equiv c^{-1} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$ es despreciable en comparación con $\partial_i h_{\mu\nu}$.

Si en lugar de usar el tiempo propio como parámetro usamos el tiempo coordenado t , la ecuación de la geodésica que nos da la trayectoria de la partícula libre adopta la forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = h(t) \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.59)$$

donde

$$h(t) \equiv -\frac{d^2 t}{d\tau^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} = \frac{d^2 \tau}{dt^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} \quad (2.60)$$

Dividiendo entre c^2 , la parte espacial de la ecuación (2.59) puede escribirse como:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i + 2\Gamma_{0j}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) + \Gamma_{jk}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{dx^k}{dt} \right) = \frac{1}{c} h(t) \left(\frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \right) \quad (2.61)$$

y el último término del miembro izquierdo de la ecuación es claramente despreciable. Si ponemos $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} h_{\sigma\rho}$, entonces tenemos que, en primer orden para $h_{\mu\nu}$ y $h^{\mu\nu}$, obtenemos:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad y \quad \Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}) \quad (2.62)$$

Luego en primer orden y despreciando las derivadas temporales sobre las espaciales, nos queda:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} \eta^{i\rho} (\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_{0\rho} - \partial_\rho h_{00}) = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00} = \frac{1}{2} \delta_j^i \partial_j h_{00} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} \eta^{i\rho} (\partial_0 h_{j\rho} + \partial_j h_{0\rho} - \partial_\rho h_{0j}) = -\frac{1}{2} \delta^{ik} (\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}) \end{aligned}$$

Trabajando de la misma forma y despreciando los cuadrados de productos de $c^{-1}\frac{dx^i}{dt}$, partiendo de

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

llegamos a:

$$\frac{d\tau}{dt} = (1 + h_{00})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h_{00} \quad (2.63)$$

Derivando respecto del tiempo otra vez, obtenemos que $\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{1}{2}ch_{00,0}$, y podemos reescribir con esto la ecuación (2.60) como:

$$\frac{1}{c}h(t) = \frac{1}{2}h_{00,0}\left(1 - \frac{1}{2}h_{00}\right) = \frac{1}{2}h_{00,0}$$

De aquí deducimos que el miembro derecho de la ecuación (2.61) es despreciable, y aproximando con todo esto la ecuación se nos transforma en:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} - \delta^{ij}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})\frac{1}{c}\frac{dx^j}{dt} = 0$$

Introduciendo la masa m de la partícula y reordenando, obtenemos:

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m\delta^{ij}\partial_j\left(\frac{1}{2}c^2h_{00}\right) + mc\delta^{ik}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})\frac{dx^j}{dt} \quad (2.64)$$

Si a continuación llamamos a un sistema de coordenadas sin rotación a aquel en el que el término $\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}$ es cero, tenemos para una partícula que se mueve lentamente por un sistema de coordenadas casi inercial y sin rotación con la condición cuasiestática la aproximación

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\delta^{ij}\partial_j V \quad (2.65)$$

donde V es un potencial que viene dado por:

$$V \equiv \frac{1}{2}c^2h_{00} + cte \quad (2.66)$$

Esta es la ecuación newtoniana de movimiento para una partícula que se mueve en un campo gravitatorio con un potencial V dado por (2.66). De aquí podemos obtener que

$$g_{00} = \frac{2V}{c^2} + cte$$

Si imponemos que la constante valga 1, entonces el coeficiente g_{00} se reduce a su valor en el espacio-tiempo plano cuando $V = 0$. Obtenemos así que

$$g_{00} = 1 + \frac{2V}{c^2} \quad (2.67)$$

Capítulo 3

Ecuaciones de campo y curvatura

En este tema vamos a obtener las ecuaciones de campo de la Relatividad General, que nos asocian el campo gravitatorio (contenido en la curvatura del espacio-tiempo) con sus fuentes. Empezaremos hallando un tensor que nos describa adecuadamente las fuentes, y después haremos lo mismo con la curvatura. Las ecuaciones de campo deberán unir ambos tensores en una única expresión.

La ecuación de campo de la teoría de Newton es la ecuación de Poisson. Veremos cómo las ecuaciones de Einstein derivan en la ecuación de Poisson como una aproximación a velocidades bajas, y además serán válidas en el espacio-tiempo curvado de la Relatividad General. También veremos la solución exacta de estas ecuaciones para el campo gravitatorio creado por un cuerpo masivo con simetría esférica.

3.1. El tensor de energía-momento y el movimiento en fluidos

Trataremos un espacio-tiempo plano en esta sección, y usaremos además un sistema de coordenadas inercial. Trataremos con cuadvectores y vectores tridimensionales, representando estos últimos en negrita para distinguirlos. Un vector podrá así ser representado como:

$$\lambda^\mu \equiv (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) \equiv (\lambda^0, \boldsymbol{\lambda})$$

Comenzaremos describiendo una partícula, y utilizaremos las siguientes cantidades para tratar esto:

$m \equiv$ masa propia en reposo de una partícula.

$t \equiv$ tiempo coordenado.

$\tau \equiv$ tiempo propio.

$\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, donde v es la velocidad de la partícula.

$E \equiv \gamma mc^2 \equiv$ energía de la partícula.

$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv$ velocidad de universo.

$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt} \equiv \frac{u^\mu}{\gamma} \equiv$ velocidad coordenada.

$p^\mu \equiv mu^\mu \equiv$ cuádrimomento de la partícula.

Luego, en nuestra notación, $v^\mu \equiv (c, \mathbf{v})$, donde \mathbf{v} es la velocidad tridimensional de la partícula, luego esa v que aparece en la fórmula de γ es $|\mathbf{v}|$. También cabe destacar que solo m y τ son escalares, y solo u^μ y p^μ son vectores.

Los cuadvectores velocidad y momento para una partícula ubicada en el punto con vector de posición \mathbf{x}_0 son:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d(c\tau, \mathbf{x}_0)}{d\tau} = (c, \mathbf{0})$$

$$p^\mu \equiv m(c, \mathbf{0})$$

La componente cero-ésima de p^μ es lo que se conoce como energía de la partícula en reposo si lo multiplicamos por un factor c . Para una partícula en movimiento, tendremos:

$$p^\mu \equiv mu^\mu = \gamma mv^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (3.1)$$

Aquí se puede apreciar que la energía y el momento son la parte temporal y espacial de un único cuadvector p^μ .

Pasemos ahora a distribuciones continuas de materia, que consideraremos por simplicidad un fluido ideal, caracterizado por dos campos escalares (su densidad ρ y su presión p) y uno vectorial (su velocidad de universo u^μ). Por ser un campo escalar, ρ se definirá como la densidad propia, o sea, la masa en reposo por unidad en reposo de volumen. En lugar del cuadrimento, ahora tendremos un cuadvector de densidad de momento ρu^μ .

Lo que buscamos es un tensor que represente de alguna forma toda la energía contenida en el fluido y que, cuando se lleve a un espacio-tiempo curvado, pueda actuar como la fuente del campo gravitatorio. Como en relatividad se pierde la distinción entre masa y energía, se espera que toda forma de energía sea capaz de producir un campo gravitatorio. Como además la energía es la componente cero-ésima del cuadrimento, esperamos que esta fuente contenga la densidad del cuadvector de densidad de momento del fluido. Este tensor recibe el nombre de tensor de energía-momento, y para un fluido ideal se define como:

$$T^{\mu\nu} \equiv \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

$T^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, y depende de los campos escalares y vectoriales que caracterizan al fluido. Otra propiedad destacable es que:

$$T^{\mu\nu} u_\nu = c^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu - pu^\mu = c^2 \rho u^\mu$$

Se obtiene así que $T^{\mu\nu} u_\nu$ es el cuadvector de densidad de momento del fluido multiplicado por c^2 . Si igualamos su divergencia $T^{\mu\nu}{}_{,\mu}$ a cero, obtendremos dos ecuaciones importantes: la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento. Obtengámoslas hallando las derivadas. Si igualamos la divergencia $T^{\mu\nu}{}_{,\mu}$ a cero, obtendremos:

$$(\rho u^\mu)_{,\mu} u^\nu + \rho u^\mu u^\nu{}_{,\mu} + \left(\frac{p}{c^2} \right) u^\mu{}_{,\mu} u^\nu + \left(\frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu{}_{,\mu} + c^{-2} p_{,\mu} u^\mu u^\nu - p_{,\mu} \eta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.3)$$

La velocidad de universo u^ν verifica que $u^\nu u_\nu = c^2$, y su derivada nos da:

$$u^\nu{}_{,\mu}u_\nu + u^\nu u_{\nu,\mu} = 0 \implies u^\nu{}_{,\mu}u_\nu = 0 \quad (3.4)$$

Luego contrayendo la ecuación (3.3) con u_ν y dividiendo entre c^2 , obtenemos:

$$(\rho u^\mu)_{,\mu} + \left(\frac{p}{c^2}\right) u^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (3.5)$$

Por otro lado, si en lugar de contraer simplificamos, obtenemos:

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\nu{}_{,\mu}u^\mu = (\eta^{\mu\nu} - c^{-2}u^\mu u^\nu) p_{,\mu} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) es la ecuación de continuidad del fluido, y la ecuación (3.6) es su ecuación de movimiento. Podemos comprobarlo si consideramos que los fluidos se mueven a una velocidad pequeña ($\gamma \approx 1$) y a presiones bajas ($\frac{p}{c^2}$ despreciable frente a ρ), ya que se obtendrían así las ecuaciones clásicas. También podemos observar que la ecuación de continuidad depende de la presión, ya que lo que se conserva es la energía, no la masa, y, cuando el fluido se encuentra bajo presión, esta hace una contribución a la energía. La ecuación de movimiento se podría escribir también de la siguiente forma:

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = (\eta^{\mu\nu} - c^{-2}u^\mu u^\nu) p_{,\mu}$$

ya que

$$u^\nu{}_{,\mu}u^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}$$

De esta forma se parece más a una ecuación de movimiento, ya que se ve que las partículas del fluido se desvían de las geodésicas ($\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0$) por la acción de un gradiente de presión $p_{,\mu}$.

En la Relatividad General, los cambios que habrá que hacer serán reemplazar $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ y las derivadas parciales por derivadas covariantes, llegando así a que la definición del tensor de energía-momento para un fluido ideal se convierte en:

$$T^{\mu\nu} \equiv \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

y con la divergencia su ecuación sería:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad (3.8)$$

Esta última ecuación puede extenderse para todos los fluidos y no solo los ideales con las definiciones adecuadas. Este tensor se toma como la fuente del campo gravitatorio, y la ecuación (3.8) jugará un papel importante a la hora de formular las ecuaciones de campo.

3.2. El tensor de curvatura y tensores relacionados

Los resultados de esta sección son aplicables a cualquier variedad N -dimensional, por lo que usaremos como sufijos letras latinas en lugar de griegas. El primer aspecto a tener en

cuenta será observar cómo el orden en el que se deriva en las derivadas covariantes influye, variando normalmente el resultado al cambiar el orden de derivación. La derivada covariante de un campo vectorial λ_a es:

$$\lambda_{a;b} \equiv \partial_b \lambda_a - \Gamma_{ab}^d \lambda_d$$

Derivando una segunda vez, obtenemos:

$$\lambda_{a;bc} = \partial_c (\lambda_{a;b}) - \Gamma_{ac}^e \lambda_{e;b} - \Gamma_{bc}^e \lambda_{a;e} = \partial_c \partial_b \lambda_a - (\partial_c \Gamma_{ab}^d) \lambda_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c \lambda_d - \Gamma_{ac}^e (\partial_b \lambda_e - \Gamma_{eb}^d \lambda_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e \lambda_a - \Gamma_{ae}^d \lambda_d)$$

Intercambiando el orden de b y c y restando, obtenemos:

$$\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = R_{abc}^d \lambda_d \quad (3.9)$$

donde:

$$R_{abc}^d \equiv \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \quad (3.10)$$

Aplicando el teorema del cociente a (3.9) podemos deducir que R_{abc}^d es un tensor de tipo (1, 3), que recibirá el nombre de tensor de curvatura. La ecuación (3.10) nos dice además que este tensor está definido en función del tensor métrico y sus derivadas.

Tenemos así que la condición necesaria y suficiente para que el orden de las derivadas covariantes de cualquier campo tensorial (0, 1) puedan intercambiarse es que $R_{bcd}^a = 0$. A partir de aquí podemos decir que una variedad es plana si se cumple en cada punto que $R_{bcd}^a = 0$. En caso contrario, se dirá que está curvada. Esto también nos permite hablar de regiones planas de una variedad. En este tipo de regiones será posible introducir un sistema de coordenadas en el que las componentes g_{ab} sean constantes, luego sería un sistema cartesiano. En Relatividad Especial se tiene que existen sistemas de coordenadas en los que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, lo que implica que, en estos sistemas, $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = 0$. En consecuencia, su tensor de curvatura es idénticamente cero, de lo que se deduce que es una variedad plana.

El tensor de curvatura cumple lo que se conoce como identidad cíclica:

$$R_{bcd}^a + R_{cdb}^a + R_{dbc}^a = 0 \quad (3.11)$$

Esto nos dice que posee simetrías, algo que nos reduce el número de componentes independientes considerablemente. Estas simetrías se pueden expresar mejor en función del tensor asociado de tipo (4, 0):

$$R_{abcd} \equiv g_{ae} R_{bcd}^e$$

Utilizando las ecuaciones (2.27), (2.29) y (2.30) y simplificando, esto se nos reduce a:

$$R_{abcd} \equiv \frac{1}{2} (\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_d \partial_b g_{ac} + \partial_c \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd}) - g^{ef} (\Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}) \quad (3.12)$$

De esta forma, es inmediato comprobar que:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad (3.13)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (3.14)$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (3.15)$$

De la ecuación (3.13), se sigue que:

$$R^a_{acd} = 0 \quad (3.16)$$

Las derivadas covariantes del tensor de curvatura también satisfacen otra identidad, llamada identidad de Bianchi:

$$R^a_{bcd;e} + R^a_{bde;c} + R^a_{bec;d} = 0 \quad (3.17)$$

Para demostrarla, construiremos en un punto cualquiera P un sistema de coordenadas en el que $(\Gamma^a_{bc})_P = 0$. Derivando la ecuación (3.10) y evaluándola en P nos da, en este sistema de coordenadas:

$$(R^a_{bcd;e})_P = (\partial_e \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_e \partial_d \Gamma^a_{bc})_P$$

Permutando cíclicamente c , d y e y sumando obtenemos que la fórmula es correcta en el punto P . Como este punto es arbitrario, este resultado se cumple en todos lados.

La ecuación (3.16) nos dice que R^a_{acd} es cero. Sin embargo, la contracción R^a_{bca} no es cero, y esto nos lleva a definir un nuevo tensor: el tensor de Ricci. Sus componentes se denotan como:

$$R_{ab} \equiv R^c_{abc} \quad (3.18)$$

Este tensor es simétrico, como puede comprobarse aplicándole la identidad cíclica. Como R_{ab} es simétrico, entonces $R^a_b = R^a_b$, pudiendo denotar ambos como R^a_b . Contrayéndolo una vez más obtenemos la curvatura escalar:

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R^a_a \quad (3.19)$$

Otro tensor que será importante más adelante es el tensor de Einstein, definido como:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (3.20)$$

También es simétrico, y posee así una única divergencia $G^{ab}{}_{;a}$. Este tensor es importante porque su divergencia es cero, como veremos a continuación. Si contraemos a con d en la identidad de Bianchi, nos queda:

$$R_{bc;e} + R^a_{bae;c} + R^a_{bec;a} = 0$$

Usando la ecuación (3.14):

$$R_{bc;e} - R_{be;c} + R^a_{bec;a} = 0$$

Subiendo b y contrayendo con d , obtenemos:

$$R^b_{c;b} - R_{;c} + R^{ab}{}_{bc;a} = 0$$

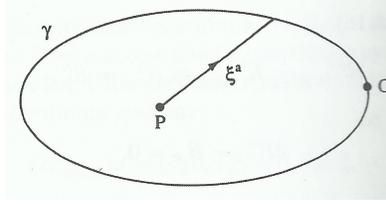


Figura 3.1: Un bucle pequeño cerca de un punto P

Sin embargo, aplicando la ecuación (3.15):

$$R_{bc;a}^{ab} = R_{cb;a}^{ba} = R_{c;a}^a = R_{c;b}^b$$

Ahora podemos reducir la ecuación a:

$$2R_{c;b}^b - R_{;c} = 0$$

lo que nos da:

$$\left(R_c^b - \frac{1}{2} R \delta_c^b \right)_{;b} = 0$$

Esto nos da que $G_{c;b}^{bb} = 0$, lo cual implica que $G^{bc}_{;b} = 0$.

3.3. Curvatura y transporte paralelo

Como ya hemos visto, el transporte paralelo en una variedad curva depende del camino seguido. El tensor de curvatura es el que nos dice si una variedad es plana o está curvada, por lo que se deduce que debe haber una relación entre ambos conceptos. Supongamos que transportamos paralelamente un vector λ^a a lo largo de una curva γ partiendo de un punto inicial O donde este vale λ_O^a . Si parametrizamos γ con t , entonces λ^a verificará la ecuación diferencial:

$$\frac{d\lambda^a}{dt} = -\Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{dt} \quad (3.21)$$

de donde podemos ver que λ satisface la ecuación integral:

$$\lambda^a = \lambda_0^a - \int \Gamma_{bc}^a \lambda^b dx^c \quad (3.22)$$

La integral se evalúa a lo largo de γ , partiendo de un punto inicial O . A partir de aquí podemos calcular la variación $\Delta\lambda^a$ en λ mientras es transportado a lo largo de un bucle pequeño cercano a un punto P . Si P tiene coordenadas x_P^a , entonces los puntos del bucle tienen coordenadas x^a dadas por:

$$x^a = x_P^a + \xi^a$$

donde los ξ^a son pequeños. Estos coeficientes se pueden ver como un vector que va de P a un punto cualquiera de γ , como se puede ver en la Figura 3.1. Como los x_P^a son constantes, la ecuación (3.22) se puede escribir como:

$$\lambda^a = \lambda_O^a - \int \Gamma_{bc}^a \lambda^b d\xi^c \quad (3.23)$$

La integral también contiene al vector transportado, por lo que no podemos obtener λ^a en función de λ_O^a de manera directa. Lo que haremos será aplicar el método de las aproximaciones sucesivas, ya que sus valores no difieren mucho al ser este bucle γ pequeño. Como primera aproximación, pondremos que $\lambda^b = \lambda_O^b$ en la integral, obteniendo así como resultado:

$$\lambda^a = \lambda_O^a - \int \Gamma_{bc}^a \lambda_O^b d\xi^c = \lambda_O^a - \lambda_O^b \int \Gamma_{bc}^a d\xi^c$$

Repetiendo este mismo procedimiento en el lado derecho, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda^a &= \lambda_O^a - \int \Gamma_{bc}^a \left(\lambda_O^b - \lambda_O^d \int \Gamma_{de}^b d\xi^e \right) d\xi^c = \\ &= \lambda_O^a - \lambda_O^b \int \Gamma_{bc}^a d\xi^c + \lambda_O^d \int \Gamma_{bc}^a \left(\int \Gamma_{de}^b d\xi^e \right) d\xi^c \end{aligned} \quad (3.24)$$

Este procedimiento se puede repetir indefinidamente, pero con esta aproximación será suficiente, ya que implica trabajar en segundo orden en ξ^a . En la primera integral de la derecha, podemos usar la aproximación de primer orden siguiente:

$$\Gamma_{bc}^a = (\Gamma_{bc}^a)_P + (\partial_d \Gamma_{bc}^a)_P \xi^d$$

Esta aproximación nos da una precisión de segundo orden al integrar respecto de ξ^c . En la segunda integral, podemos aproximar Γ_{bc}^a por $(\Gamma_{bc}^a)_P$, ya que integrar dos veces nos dará esa precisión de segundo orden. Con todas estas aproximaciones, la integral a lo largo de γ comenzando y terminando en el punto O nos da, teniendo en cuenta que $\oint d\xi^c = 0$:

$$\begin{aligned} \oint \Gamma_{bc}^a d\xi^c &= (\Gamma_{bc}^a)_P \oint d\xi^c + (\partial_d \Gamma_{bc}^a)_P \oint \xi^d d\xi^c = (\partial_d \Gamma_{bc}^a)_P \oint \xi^d d\xi^c \\ \oint \Gamma_{bc}^a \left(\int \Gamma_{de}^b d\xi^e \right) d\xi^c &= (\Gamma_{bc}^a \Gamma_{de}^b)_P \oint \left(\int d\xi^e \right) d\xi^c = (\Gamma_{bc}^a \Gamma_{de}^b)_P \oint \xi^e d\xi^c \end{aligned}$$

Luego, a partir de la ecuación (3.24), la variación en λ^a al transportarlo a lo largo de γ es:

$$\Delta \lambda^a = -\lambda_O^b (\partial_d \Gamma_{bc}^a)_P \oint \xi^d d\xi^c + \lambda_O^d (\Gamma_{bc}^a \Gamma_{de}^b)_P \oint \xi^e d\xi^c$$

que se reduce a:

$$\Delta \lambda^a = -\lambda_O^b (\partial_c \Gamma_{bd}^a - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e)_P \oint \xi^c d\xi^d \quad (3.25)$$

Como $\oint d(\xi^c \xi^d) = 0$, podemos definir ahora:

$$f^{cd} \equiv \oint \xi^c d\xi^d = \frac{1}{2} \oint (\xi^c d\xi^d - \xi^d d\xi^c) \quad (3.26)$$

que es antisimétrico en sus sufijos. Como la integral de la derecha en la ecuación (3.25) puede antisimetrizarse en c y d , podemos obtener lo siguiente:

$$\Delta\lambda^a = -\frac{1}{2} (\partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e)_P \lambda_O^b f^{cd}$$

Es decir, llegamos a que:

$$\Delta\lambda^a = -\frac{1}{2} (R_{bcd}^a)_P \lambda_O^b f^{cd} \quad (3.27)$$

Esta ecuación nos da la relación básica entre el tensor de curvatura en un punto P y el transporte paralelo alrededor de un pequeño bucle cercano a P . Cambiando la forma de γ podremos utilizar esta relación para investigar cómo son las componentes del tensor de curvatura en el punto P . Supongamos así que nos restringimos a puntos cercanos a P de coordenadas:

$$x^a = x_P^a + xi^a + yj^a$$

donde $\{i^a, j^a\}$ es un par de vectores unitarios ortogonales en P y x e y son pequeños. Estos puntos están contenidos en una superficie Σ dentro de la variedad, y el par (x, y) actúa localmente como coordenadas cartesianas en Σ , donde P sería el origen y los "ejes" estarían dados por los vectores unitarios i^a y j^a . Si suponemos que el bucle γ está contenido en Σ y rodeando a P , entonces ξ^a podría expresarse de la forma $\xi^a = xi^a + yj^a$, llegando así a que:

$$f^{cd} = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) (i^c j^d - i^d j^c) \quad (3.28)$$

Como (x, y) son coordenadas cartesianas locales, podemos deducir que $\frac{1}{2} \oint (x dy - y dx)$ es prácticamente el área A encerrada en γ . Por tanto, llegamos así a que:

$$\frac{\Delta\lambda^a}{A} = -\frac{1}{2} (R_{bcd}^a)_P \lambda_O^b (i^c j^d - i^d j^c) = - (R_{bcd}^a)_P \lambda_O^b i^c j^d \quad (3.29)$$

Esto nos permite hallar los valores del tensor de curvatura en P eligiendo adecuadamente λ_O^a , i^a y j^a . Cabe destacar que esto es una aproximación, y el valor exacto se obtendría imponiendo que $A \rightarrow 0$, es decir, haciendo que γ se encoja para contener solo al punto P .

3.4. La desviación geodésica

Supongamos que tenemos dos geodésicas cercanas γ y $\tilde{\gamma}$, dadas por $x^a(u)$ y $\tilde{x}^a(u)$ respectivamente, ambas afínmente parametrizadas, y sea $\xi^a(u)$ el pequeño "vector" que conecta puntos con el mismo valor del parámetro, es decir, $\xi^a(u) \equiv \tilde{x}^a(u) - x^a(u)$ (ver Figura 3.2). Si ninguna de las dos geodésicas es nula, entonces se puede usar la longitud de arco s . Pondremos el valor cero de s en $\tilde{\gamma}$. Como tanto $\tilde{\gamma}$ como γ son geodésicas, tenemos que, respectivamente:

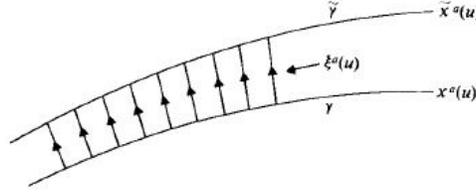


Figura 3.2: Desviación geodésica.

$$\frac{d^2 \tilde{x}^a}{du^2} + \tilde{\Gamma}_{bc}^a \frac{d\tilde{x}^b}{du} \frac{d\tilde{x}^c}{du} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0 \quad (3.31)$$

En primer orden en ξ^a :

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bc,d}^a \xi^d$$

Restándole ahora (3.31) a (3.30), obtenemos:

$$\ddot{\xi}^a + \Gamma_{bc,d}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \xi^d + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{\xi}^c + \Gamma_{bc}^a \dot{\xi}^b \dot{x}^c = 0$$

Esto podemos reescribirlo como:

$$\frac{d}{du} \left(\dot{\xi}^a + \Gamma_{bc}^a \xi^b \dot{x}^c \right) - \Gamma_{bc,d}^a \xi^b \dot{x}^c \dot{x}^d - \Gamma_{bc}^a \xi^b \ddot{x}^c + \Gamma_{bc,d}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \xi^d + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{\xi}^c = 0$$

Sustituyendo \ddot{x}^c de la ecuación (3.31) y reordenando los términos, obtenemos:

$$\frac{D^2 \xi^a}{du^2} + \left(\Gamma_{cd,b}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{be}^a \Gamma_{dc}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e \right) \xi^b \dot{x}^c \dot{x}^d = 0$$

Esta ecuación puede escribirse de una forma más compacta para obtener la ecuación de desviación geodésica:

$$\frac{D^2 \xi^a}{du^2} + R_{cbd}^a \xi^b \dot{x}^c \dot{x}^d = 0 \quad (3.32)$$

En una variedad plana $R_{bcd}^a = 0$, y en coordenadas cartesianas la derivada total y la absoluta coinciden, reduciéndose la ecuación a $\frac{d^2 \xi^a}{du^2} = 0$, cuya solución es $\xi^a(u) = A^a u + B^a$ (A^a y B^a constantes). Por tanto, en una variedad plana el vector de separación crece linealmente con u y, por tanto, con s . En Relatividad General, sin embargo, el tensor de curvatura no es cero, luego la relación no será lineal.

3.5. Las ecuaciones de campo de Einstein

Einstein se dio cuenta de que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que describía la geometría del espacio-tiempo parecía depender de la cantidad de materia gravitante que hubiese en la región en concreto. El tensor métrico contiene dos partes diferenciadas:

- (1) La información relativamente poco importante relacionada con el sistema de coordenadas específico utilizado.
- (2) La información importante relativa a la existencia de algún potencial gravitatorio.

La componente g_{00} vimos que era esencialmente el potencial newtoniano. En un sistema de coordenadas más general, este potencial newtoniano estaría disperso por todo el tensor, motivo por el cual toda las componentes de $g_{\mu\nu}$ se pueden ver como potenciales gravitatorios. Como el contenido de materia en el espacio-tiempo está recogido en el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$, por lo que, en un principio, si la materia provoca la geometría, podríamos pensar que:

$$g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (3.33)$$

donde κ es una constante de acoplamiento. Ambos tensores son simétricos y tienen divergencia nula, por lo que podría parecer una propuesta viable. Sin embargo, en el límite newtoniano, esta ecuación no se reduce a la ecuación de Poisson ($\nabla^2 V = 4\pi G\rho$), por lo que no es posible. Pero, como los $g_{\mu\nu}$ son los potenciales gravitatorios, podemos concluir que lo que necesitamos en lugar de los $g^{\mu\nu}$ en la ecuación (3.33) es un tensor simétrico que contenga a las segundas derivadas de $g^{\mu\nu}$.

Tras unos años buscando la relación presupuesta entre el tensor métrico y la materia, Einstein publicó su ecuación de campo tras descartar $R^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$ al no tener el tensor de Ricci contravariante divergencia nula:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (3.34)$$

El miembro izquierdo de la ecuación es el tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, que cumple la condición de tener divergencia nula. Por tanto, esta ecuación parece satisfactoria, y además se obtiene la ecuación de Poisson como una aproximación. Es más, dicha aproximación nos permite darle a la constante de acoplamiento κ el valor $\frac{-8\pi G}{c^4}$. Una forma alternativa de la ecuación de campo (3.34) es:

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu} \right) \quad (3.35)$$

Como $T^{\mu\nu}$ contiene todas las formas de energía y momento, aquella región del espacio en la que $T^{\mu\nu} = 0$ se llama vacía. Como su propio nombre indica, esta región estará vacía de materia, pero también lo estará de energía radiante y de momento. De la ecuación (3.35) podemos deducir que las ecuaciones de campo del espacio-tiempo vacío se pueden expresar también como:

$$R^{\mu\nu} = 0 \quad (3.36)$$

3.6. Las ecuaciones de Einstein comparadas con la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson reaparece en la ecuación de Einstein considerando su componente 00 en la aproximación de campo débil. Usaremos la versión covariante de (3.35), y estaremos interesados en el término:

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) \quad (3.37)$$

Al igual que en la sección 2.6, usaremos un sistema de coordenadas casi cartesiano en el que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde los productos de los $h_{\mu\nu}$ se pueden despreciar. Asumiremos también que la condición cuasiestática de dicha sección se mantiene.

Supongamos que nuestro campo gravitatorio débil viene de un campo perfecto cuyas partículas tienen velocidades v pequeñas en comparación con c , con lo que podemos considerar $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1$. Para la mayor parte de las distribuciones clásicas, $\frac{p}{c^2} \ll \rho$, por lo que podemos medir el tensor de energía-momento como:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \implies T = \rho c^2$$

Con esto, la ecuación (3.37) se convierte en:

$$R_{00} = \kappa \rho \left(u_0 u_0 - \frac{1}{2} c^2 g_{00} \right)$$

Pero como $u_0 \approx c$ y $g_{00} \approx 1$, nos queda:

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \quad (3.38)$$

De la ecuación (3.10) obtenemos que:

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu + \Gamma_{0\mu}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\mu - \Gamma_{00}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\mu \quad (3.39)$$

En nuestro sistema de coordenadas casi cartesiano los $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ son pequeños, por lo que podemos despreciar los dos últimos términos de esta ecuación. Si además utilizamos la condición cuasiestática podemos despreciar el primer término también, quedándonos así que:

$$R_{00} \approx -\partial_i \Gamma_{00}^i$$

Pero en la sección 2.6 obtuvimos que en esta aproximación $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00}$, por lo que la ecuación (3.38) se nos reduce a:

$$-\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa \rho c^2$$

Pero $\delta^{ij} \partial_i \partial_j = \nabla^2$, y de la ecuación (2.67) $h_{00} = \frac{2V}{c^2}$, donde V es el potencial gravitatorio, y de aquí sale que:

$$\nabla^2 V \approx -\frac{1}{2} \kappa \rho c^4 \quad (3.40)$$

que, tomando el valor de κ previamente mencionado, se corresponde satisfactoriamente con la ecuación de Poisson. La ecuación (3.40) se transforma así en:

$$\nabla^2 V \approx 4\pi G\rho \quad (3.41)$$

3.7. La solución de Schwarzschild

Schwarzschild fue el primero en encontrar una solución exacta a las ecuaciones de Einstein. Lo que hizo fue buscar que el campo tensorial métrico que representaba el campo gravitatorio fuera estático y esféricamente simétrico alrededor de un objeto masivo y esférico como una estrella. Hizo una serie de suposiciones, ya que las ecuaciones no son lineales:

- (a) El campo era estático.
- (b) El campo era esféricamente simétrico.
- (c) El espacio-tiempo estaba vacío.
- (d) El espacio-tiempo era asintóticamente plano.

También asumió que se le podían asociar al espacio-tiempo las coordenadas (t, r, θ, ϕ) , donde t era una coordenada temporal, r una radial y θ y ϕ ángulos polares. El elemento de línea que postuló fue el siguiente:

$$c^2 d\tau = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (3.42)$$

donde $A(r)$ y $B(r)$ eran dos funciones de r desconocidas que se obtendrían resolviendo la ecuación.

El hecho de que ninguno de los $g_{\mu\nu}$ dependiese de t justificaba su suposición (a), y de que el elemento de línea de las superficies dadas por r y t constantes tenga la geometría de una esfera

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.43)$$

se puede deducir su suposición (b). La suposición (c) implica que $A(r)$ y $B(r)$ tienen que hallarse utilizando las ecuaciones de campo del espacio-tiempo en el vacío $R_{\mu\nu} = 0$, mientras que la (d) nos da una condición de contorno para A y B :

$$A(r) \rightarrow c^2 \quad y \quad B(r) \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty \quad (3.44)$$

Como $B(r)$ no es necesariamente 1, no podemos asumir que sea la distancia radial.

Con todo esto, ya estamos en condiciones de reformular la solución de las ecuaciones de campo de Schwarzschild. La idea consiste en utilizar los $g_{\mu\nu}$, obtenidos a partir del elemento de línea (3.42), como una solución de prueba para las ecuaciones de campo del espacio-tiempo vacío. De la ecuación (3.10), tenemos que:

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma$$

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange con el elemento de línea y comparando las ecuaciones resultantes con la ecuación de las geodésicas, obtenemos que los coeficientes de conexión no nulos son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= A'/2A, & \Gamma_{00}^1 &= A'/2B, & \Gamma_{11}^1 &= B'/2B, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r/B, & \Gamma_{33}^1 &= -(r \operatorname{sen}^2 \theta)/B, & \Gamma_{12}^2 &= 1/r, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \end{aligned}$$

Donde el apóstrofe indica derivación respecto de r . Tras sustituir en $R_{\mu\nu}$ y simplificar, obtenemos que:

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = 0 \quad (3.45)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = 0 \quad (3.46)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (3.47)$$

$$R_{33} = R_{22} \operatorname{sen}^2 \theta = 0 \quad (3.48)$$

Si $\mu \neq \nu$, la ecuación $R_{\mu\nu} = 0$ se seguirá verificando. La última ecuación no es útil, así que nos quedaremos con las otras tres. Si a la ecuación (3.46) le sumamos $\frac{B}{A}$ veces la ecuación (3.45), la ecuación se reduce a:

$$A'B + AB' = 0 \implies (AB)' = 0$$

Esto implica que $AB = \text{constante}$. Por la condición de contorno (3.44) podemos identificar esta constante como c^2 , luego

$$AB = c^2 \implies B = c^2/A$$

Sustituyendo esto en la ecuación (3.47) nos da $A + rA' = c^2$, que es el equivalente a

$$\frac{d(rA)}{dr} = c^2$$

Integrando esta ecuación, obtenemos que:

$$rA = c^2 (r + k)$$

donde k es una constante, luego:

$$A(r) = c^2 (1 + k/r) \quad y \quad B(r) = (1 + k/r)^{-1}$$

Con esto ya hemos resuelto las ecuaciones de campo, obteniendo así la solución de Karl Schwarzschild, que es de la forma:

$$c^2 d\tau = c^2 (1 + k/r) dt^2 - (1 + k/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2$$

Calculemos el valor de la constante k . Es lógico pensar que debe representar la masa del objeto que produce el campo gravitatorio. En la región del espacio-tiempo en la que $\frac{k}{r}$ es pequeño (es decir, en la región asintótica), el elemento de línea se acerca bastante al del espacio-tiempo plano en coordenadas esféricas, habiendo una pequeña diferencia entre ambos. Podemos suponer así que r es aproximadamente la distancia radial, haciéndose más parecida a medida que $r \rightarrow \infty$. Tomando como coordenadas

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad x^2 \equiv r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad x^3 = r \cos \theta \quad (3.49)$$

obtenemos un tensor métrico de la forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. En la zona asintótica los $h_{\mu\nu}$ son pequeños, y $h_{00} = \frac{k}{r}$. También en esta región se cumple que el potencial newtoniano correspondiente es $V = \frac{-GM}{r}$, donde M es la masa del cuerpo produciendo el campo y G es la constante de gravitación. Como $h_{00} \equiv \frac{2V}{c^2}$, concluimos que $k = \frac{-2GM}{c^2}$, teniéndose así que la solución de Schwarzschild para el espacio-tiempo vacío fuera de un cuerpo esférico de masa M es:

$$c^2 d\tau = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \quad (3.50)$$

Con esto, el tensor métrico que obtenido es:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 - 2GM/c^2 r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 2GM/c^2 r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

Radiación gravitatoria

En este capítulo veremos cómo las ecuaciones de Einstein, bajo ciertas hipótesis, nos llevan a la existencia de una ecuación de onda que nos dice que las perturbaciones gravitatorias se propagan a una velocidad característica c . Para ello, tendremos que linealizar las ecuaciones, ya que estas ecuaciones de campo no lo son y eso hace prácticamente imposible su tratamiento. Después propondremos una onda plana como solución, y trataremos de obtener su expresión. Finalmente, hablaremos de la verificación experimental de estas ondas y de los experimentos que hicieron que esto fuese posible.

4.1. ¿Qué se mueve?

Antes de nada, conviene precisar qué se entiende por “*onda gravitacional*”. La presencia de un objeto masivo en un punto del espacio-tiempo produce una curvatura local de éste, que afectaría a una masa prueba situada en su seno. Supuesto que el objeto masivo evoluciona en dicho espacio-tiempo, la curvatura de éste lo haría de manera análoga, si bien estaría desfasada de forma similar a lo que sucede si una piedra golpea la superficie de un estanque en reposo. El espacio-tiempo es pues el medio en que evolucionan los objetos masivos, como si éstos fueran partículas sumergidas en el estanque y se agitaran con las oscilaciones del agua.

La manera de acercarse al tema de la radiación gravitatoria será linealizando las ecuaciones de Einstein para un campo débil. Esto es lógico, pues la propagación de ondas es un fenómeno lineal. Esto implicará que, en amplias regiones del espacio-tiempo, exista un sistema de coordenadas casi-cartesiano en el que:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

donde los $h_{\mu\nu}$ son pequeños en comparación con la unidad. Las reglas que se utilizarán para linealizar son las siguientes:

- (1) Los $h_{\mu\nu}$ junto con sus derivadas primeras $h_{\mu\nu,\rho}$ y superiores son pequeños, y todos los productos entre ellos se despreciarán.
- (2) Los sufijos se subirán y se bajarán usando $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ en lugar de $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$.

La situación será la misma que la de la sección 3.6, pero en este caso no tendremos en cuenta la condición cuasiestática (la variable tiempo es necesaria). También habrá que tener en cuenta que todas las aproximaciones hechas serán de primer orden. Con todas estas hipótesis, tenemos que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, y teniendo en cuenta que $\eta^{\mu\beta} h_{\nu\sigma,\beta} = h_{\nu\sigma}{}^{;\mu}$:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\beta} (h_{\sigma\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\sigma} - h_{\nu\sigma,\beta}) = \frac{1}{2} (h_{\sigma,\nu}^{\mu} + h_{\nu,\sigma}^{\mu} - h_{\nu\sigma}{}^{;\mu}) \quad (4.2)$$

Teniendo en cuenta que $h \equiv h_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, podemos calcular el tensor de Ricci como (ob-sérvese cómo se prescinden de los términos no lineales, productos de símbolos de Christoffel:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} (h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha}) \quad (4.3)$$

Renombrando los sufijos, podemos obtener la curvatura escalar en la forma siguiente:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = h_{,\alpha}^{\alpha} - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} \quad (4.4)$$

La forma covariante de las ecuaciones de campo (3.34) nos da:

$$h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu} (h_{,\alpha}^{\alpha} - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}) = 2\kappa T_{\mu\nu}$$

Esto se simplifica a:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + (\eta_{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - \bar{h}_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha}) = 2\kappa T_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

donde se ha adoptado la notación siguiente:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

Esto se puede simplificar más si tenemos en cuenta que la simetría de las ecuaciones de campo permite la existencia de una simetría gauge. En el marco de la Relatividad General, una transformación gauge es un cambio de coordenadas definido por:

$$x^{\mu'} \equiv x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\alpha}) \quad (4.7)$$

Los ξ^{μ} son del mismo orden que los $h_{\mu\nu}$, es decir, son pequeños. En estas condiciones, podemos pasar de un sistema de coordenadas casi-cartesiano a otro del mismo tipo. El elemento de matriz $X_{\nu}^{\mu'} \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$ viene dado por:

$$X_{\nu}^{\mu'} = \delta_{\nu}^{\mu} + \xi^{\mu}{}_{,\nu} \quad (4.8)$$

Con un pequeño cálculo, se puede ver que, bajo esta transformación de coordenadas:

$$h^{\mu'\nu'} = h^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} \quad (4.9)$$

$$h' = h - 2\xi^{\mu}{}_{,\mu} \quad (4.10)$$

$$\bar{h}^{\mu'\nu'} = \bar{h}^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu} \xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \quad (4.11)$$

El elemento de matriz inverso $X_{\nu'}^{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}$ está dado por:

$$X_{\nu'}^{\mu} = \delta_{\nu'}^{\mu} - \xi^{\mu}_{,\nu'}$$

con lo que, utilizando la ecuación (4.11) y simplificando:

$$\bar{h}^{\mu'\alpha'}_{,\alpha'} = \bar{h}^{\mu'\alpha'}_{,\beta} X_{\alpha'}^{\beta} = \bar{h}^{\mu'\alpha'}_{,\beta} \delta_{\alpha}^{\beta} = \bar{h}^{\mu'\alpha'}_{,\alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha}{}^{\alpha} \quad (4.12)$$

La transformación gauge puramente dicha viene en este momento. Si ahora elegimos ξ^{μ} como solución de:

$$\xi^{\mu}_{,\alpha}{}^{\alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} \quad (4.13)$$

Tenemos así que $\bar{h}^{\mu'\alpha'}_{,\alpha'} = 0$. En este nuevo sistema de coordenadas, cada término entre paréntesis de la ecuación (4.5) es cero y, quitando los apóstrofes, obtenemos que:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 2\kappa T_{\mu\nu} \quad (4.14)$$

Nótese que el tensor energía-impulso es idéntico ante ambas transformaciones de coordenadas hasta primer orden. Esta simplificación es válida siempre que $\bar{h}^{\mu\nu}$ satisfaga la condición gauge:

$$\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0 \quad (4.15)$$

Por las condiciones anteriormente citadas, siempre podremos asumir que se verifica esto. De manera análoga, como nos muestra la ecuación (4.12), una transformación gauge como (4.7) mantendrá la condición gauge (4.15) si y solo si:

$$\xi^{\mu}_{,\alpha}{}^{\alpha} = 0 \quad (4.16)$$

Introduzcamos ahora el D'Alembertiano \square^2 , que se define como:

$$\square^2 \equiv -\eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \quad (4.17)$$

Luego, tomando como coordenadas $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ y $x^3 \equiv z$, obtenemos su versión completa desarrollando:

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

Para cualquier cantidad f , tendremos ahora que:

$$f_{,\alpha}{}^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} f_{,\alpha\beta} = -\square^2 f$$

Con esto, tendremos que, con la condición gauge (4.15) vigente, las cantidades $\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta^{\mu\nu}$ verifican que:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -2\kappa T^{\mu\nu} \quad (4.19)$$

La condición de libertad gauge $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \xi^{\mu}$ conserva la condición gauge siempre y cuando ξ^{μ} verifique que:

$$\square^2 \xi = 0 \quad (4.20)$$

La ecuación (4.19) es una ecuación de ondas cuyo término de fuentes vale $-2\kappa T^{\mu\nu} = (\frac{16\pi G}{c^4}) T^{\mu\nu}$. Por tanto, respondiendo a la pregunta del encabezado de la sección, lo que se mueve es $\bar{h}^{\mu\nu}$, una cantidad relacionada con $h_{\mu\nu}$, (el tensor de Einstein perturbado) que representa una perturbación del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ aparte del tensor métrico plano $\eta_{\mu\nu}$. En un espacio-tiempo vacío, la ecuación (4.19) se reduce a $\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0$, lo que nos permite ver que la radiación gravitatoria se propaga por el vacío a la velocidad de la luz.

4.2. Dos polarizaciones

La solución más simple de la ecuación de ondas $\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ en el espacio-tiempo vacío es la representada por una onda plana:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \Re [A^{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (4.21)$$

donde la \Re implica que tomamos la parte real, $[A^{\mu\nu}]$ es la matriz de amplitudes, que tiene coeficientes constantes, y $k^\mu \equiv \eta^{\mu\alpha} k_\alpha$ es el cuadrivector de ondas en la dirección de propagación. Además, de la ecuación de ondas se puede deducir al derivar que k^μ tiene que ser de módulo cero (es un cuadrivector luz como en Relatividad Especial) , por lo que con la condición gauge (4.15) tenemos que:

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (4.22)$$

Como $\bar{h}^{\mu\nu} = \bar{h}^{\nu\mu}$, nos quedará que la matriz de amplitudes tendrá diez elementos diferentes, pero la condición (4.22) nos da cuatro condiciones, reduciendo su número a seis. Con la libertad gauge $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ podremos reducir todavía más el número de elementos independientes, llegando finalmente a que solo habrá dos entradas de la matriz independientes a especificar. Esto da lugar a dos polarizaciones posibles para ondas gravitacionales planas. Consideremos que tenemos una onda plana que se propaga en la dirección x^3 , por lo que

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad y \quad k_\mu = (k, 0, 0, -k) \quad (4.23)$$

donde $k > 0$. Además, $k = \frac{\omega}{c}$, donde ω es la frecuencia angular. La ecuación (4.22) nos permite obtener que $A^{\mu 0} = A^{\mu 3}$, lo que implica que podemos expresar todos los $A^{\mu\nu}$ en función de A^{00} , A^{01} , A^{02} , A^{11} , A^{12} y A^{22} :

$$[A^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Consideremos ahora una transformación gauge dada por:

$$\xi^\mu = -\Re [i\varepsilon^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha)]$$

donde los ε^μ son constantes. Esto satisface la condición (4.20), y además cumple que

$$\xi_{,\nu}^\mu = \Re [\varepsilon^\mu k_\nu \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (4.25)$$

En el nuevo gauge, la matriz de amplitudes está definida por:

$$\bar{h}^{\mu'\nu'} = \Re \left[A^{\mu'\nu'} \exp \left(ik_{\alpha'} x^{\alpha'} \right) \right]$$

como $\exp(ik_{\alpha'} x^{\alpha'})$ difiere de $\exp(ik_{\alpha} x^{\alpha})$ solo en un término de primer orden, al sustituir en la ecuación (4.11) usando (4.25) obtenemos:

$$A^{\mu'\nu'} = A^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu} k^{\nu} - k^{\mu} \varepsilon^{\nu} + \eta^{\mu\nu} (\varepsilon^{\alpha} k_{\alpha})$$

Basándonos en las ecuaciones (4.23) y (4.24) para k^{μ} y $A^{\mu\nu}$ respectivamente, esta ecuación nos da lugar a:

$$\begin{aligned} A^{0'0'} &= A^{00} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) & A^{1'1'} &= A^{11} - k(\varepsilon^0 - \varepsilon^3) \\ A^{0'1'} &= A^{01} - k\varepsilon^1 & A^{1'2'} &= A^{12} \\ A^{0'2'} &= A^{02} - k\varepsilon^2 & A^{2'2'} &= A^{22} - k(\varepsilon^0 - \varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Si elegimos nuestras constantes ε^{μ} para que sean

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= (2A^{00} + A^{11} + A^{22})/4k & \varepsilon^1 &= A^{01}/k \\ \varepsilon^2 &= A^{02}/k & \varepsilon^3 &= (2A^{00} - A^{11} - A^{22})/4k \end{aligned}$$

entonces obtendremos $A^{0'0'} = A^{0'1'} = A^{0'2'} = 0$ y $A^{1'1'} = -A^{2'2'}$. Si quitamos los apóstrofes, tendremos que la matriz de amplitudes tendrá así cuatro entradas (A^{11} , A^{12} , A^{21} , A^{22}), de las que solo necesitamos especificar dos, ya que $A^{11} = -A^{22}$ y $A^{12} = A^{21}$. Este nuevo gauge, que estará determinado por la propia onda, es conocido como el gauge sin traza transversal (abreviado como TT gauge). En este gauge, $\bar{h} \equiv \bar{h}_{\mu}^{\mu} = 0$ (porque $A^{00} = A^{33} = 0$ y $A^{11} = -A^{22}$, es decir, tiene traza nula), y de aquí se sigue que $h = 0$, por lo que no habrá diferencia entre $h_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu}$. El hecho de que $h_{0\mu} = \bar{h}_{0\mu} = 0$ es lo que hace que se llame transversal.

Introduzcamos ahora dos matrices de polarización lineales $[e_1^{\mu\nu}]$ y $[e_2^{\mu\nu}]$, definidas por:

$$[e_1^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [e_2^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Podemos ver ahora que la matriz de amplitudes general es una combinación lineal de ambas:

$$A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu} + \beta e_2^{\mu\nu} \quad (4.28)$$

donde α y β son constantes complejas.

Podemos comprobar fácilmente que, bajo el TT gauge, $\Gamma_{00}^{\mu} = 0$, lo cual implica que la ecuación geodésica (2.55) se satisface con $\dot{x}^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = c\delta_0^{\mu}$. Por tanto, las curvas con coordenadas espaciales constantes son geodésicas temporales, y se pueden tomar como las líneas de universo de una nube de partículas de prueba. De aquí se sigue que el vector espacial $\xi^{\mu} = (0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, que es el que nos da la separación espacial entre dos puntos cercanos de la nube, es constante. Sin embargo, eso no significa que su separación espacial d sea constante, ya que esta está dada por:

$$d^2 = \tilde{g}_{ij} \xi^i \xi^j$$

donde:

$$\tilde{g}_{ij} \equiv -g_{ij} = \delta_{ij} - h_{ij}$$

Los h_{ij} no son constantes, por lo que la distancia espacial d tampoco será constante. Si ahora ponemos:

$$\zeta^i \equiv \xi^i + \frac{1}{2} h_k^i \xi^k \quad (4.29)$$

Entonces, para primer orden en $h_{\mu\nu}$:

$$\delta_{ij} \zeta^i \zeta^j = (\delta_{ij} - h_{ij}) \xi^i \xi^j = d^2 \quad (4.30)$$

Por tanto, estos ζ^i se pueden ver como un vector de posición que nos da la separación espacial correcta cuando contraemos con el tensor métrico euclídeo δ_{ij} . Además, con el TT gauge $h_i^3 = 0$, por lo que la ecuación (4.29) nos da $\zeta^3 = \xi^3 = \text{constante}$. Esto nos dice que, si la separación entre partículas de prueba recae sobre la dirección de propagación de la onda, entonces no son afectadas por la onda al pasar, mostrando que las ondas gravitacionales son transversales.

Veamos a continuación cómo las dos polarizaciones de una onda gravitacional plana afectan al desplazamiento relativo de las partículas de prueba. Si seleccionamos una partícula en concreto como partícula de referencia, entonces podemos definir el movimiento de las otras respecto de ella en función de los ζ^i usando la ecuación (4.29). Si suponemos en primer lugar que $A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu}$, con α una constante real y, por conveniencia, elegimos $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, 0)$, esta ecuación nos quedará:

$$\zeta^i = (\xi^1, \xi^2, 0) - \frac{1}{2} \alpha \cos k (x^0 - x^3) (\xi^1, -\xi^2, 0) \quad (4.31)$$

Si consideramos aquellas partículas que, cuando $\cos k (x^0 - x^3) = 0$, forman un círculo (con la partícula de referencia en el centro) contenido en el plano perpendicular a la dirección de propagación, entonces, cuando la onda pase, estas se mantendrán coplanares, y en tiempos diferentes sus posiciones serán las mostradas en la fila (a) del Cuadro 4.1.

Si ahora suponemos el caso en el que $A^{\mu\nu} = \alpha e_2^{\mu\nu}$, también imponiendo que α sea real y positiva por conveniencia, entonces la ecuación (4.29) nos quedará de la forma:

$$\zeta^i = (\xi^1, \xi^2, 0) - \frac{1}{2} \alpha \cos k (x^0 - x^3) (\xi^2, \xi^1, 0) \quad (4.32)$$

En lo referente a la detección, prestaremos atención a lo que obtuvimos al hablar de la polarización en la sección 4,2, ya que vimos que el efecto que tenía una onda gravitacional sobre una nube de partículas libres de prueba era una variación en su separación. Es como si una fuerza de marea variante estuviese actuando sobre la nube. Si las partículas de prueba formasen parte de un cuerpo elástico en lugar de estar libres, entonces estas fuerzas de marea darían lugar a vibraciones en el cuerpo, y aquí es donde aparecen los detectores de ondas gravitacionales. Si la radiación incidente fuese una onda plana de una frecuencia dada,

Value of $k(x^0 - x^3)$	$2n\pi$	$(2n + \frac{1}{2})\pi$	$(2n + 1)\pi$	$(2n + \frac{3}{2})\pi$
Displacement of particles from circular configuration (a) $A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu}$				
ξ^2 ξ^1 (b) $A^{\mu\nu} = \alpha e_2^{\mu\nu}$				

Cuadro 4.1: Efecto de una onda plana en un anillo transversal de partículas de prueba

entonces la sensibilidad del detector sería mejorada si su frecuencia de vibración fundamental fuese a coincidir con la de la onda.

Debido a la extremadamente baja potencia de los generadores de laboratorio y de las distancias tan extremas de los generadores astrofísicos, durante mucho tiempo se pensó que sería imposible detectar la radiación predicha. Sin embargo, con el paso del tiempo, se han conseguido construir detectores, incluyendo algunos mecánicos basados en el principio de la vibración explicado en el párrafo anterior. Un ejemplo de estos detectores es el LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

El LIGO está formado por dos detectores idénticos, uno en Louisiana y otro en Washington. Lo que estos hacen es dividir un haz de luz en dos, modificando la fase de uno de ellos, y después los envía hacia dos brazos perpendiculares e iguales con forma de L de cuatro kilómetros de longitud cada uno. A través de espejos estos haces son reflejados, y vuelven al detector. Cuando los rayos se recombinan al llegar se produce una interferencia destructiva entre ambos, impidiendo así detectar señal alguna en la salida. Sin embargo, si una onda gravitacional atraviesa el interferómetro, esta cambiará la longitud de los dos brazos, haciendo que los dos haces no se cancelen al recorrer una distancia que ahora será diferente. En consecuencia, se producirá un pequeño desfase cuando uno de los haces llegue antes que el otro y, cuando estos se recombinen no se cancelarán del todo, dando lugar a una señal (ver Figura 4.2). Este efecto es muy pequeño, y una colisión de dos estrellas de neutrones cambiaría la longitud de los brazos en menos del diámetro de un protón. Debido al minúsculo tamaño de estas perturbaciones, las ondas gravitacionales han sido muy difíciles de detectar.

Para aumentar la precisión en las medidas habría que construir brazos más largos, y aquí los detectores se verían afectados por interferencias externas debido a su alta sensibilidad y también por la curvatura de la Tierra. Es por ello que se empezó a desarrollar un sistema de tres satélites que formarían un interferómetro triangular en el espacio con brazos de cinco millones de kilómetros, el LISA (Laser Interferometer Space Antenna). Este interferómetro se espera que sea capaz de detectar las ondas gravitacionales emitidas por la unión de agujeros negros supermasivos que existieron hace muchos años, cuando las primeras estrellas del

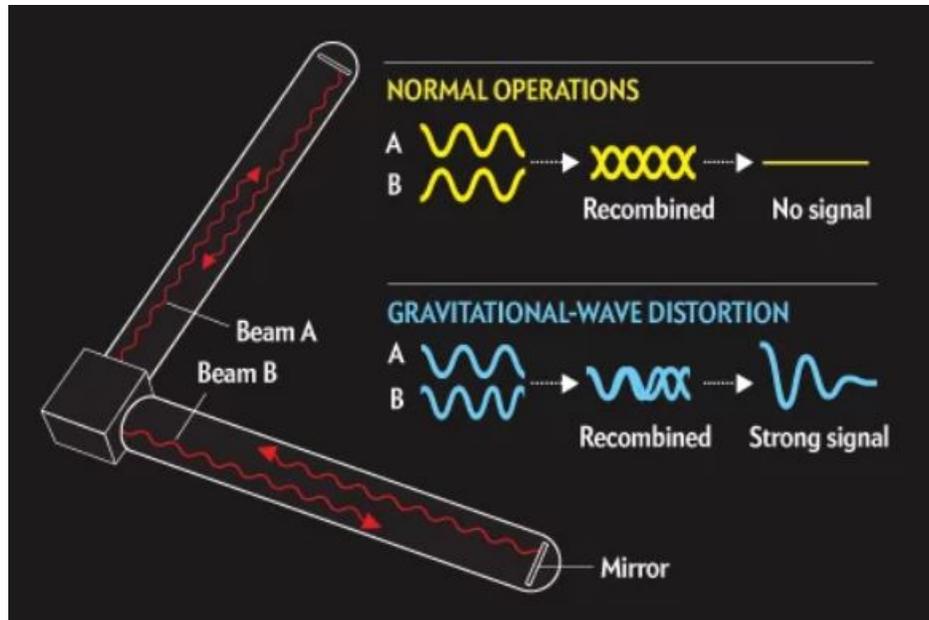


Figura 4.1: Interferómetro LIGO y su funcionamiento

Un universo empezaron a brillar cientos de millones de años después del Big Bang.

Se espera que estos descubrimientos sean capaces de permitirnos observar sucesos que ocurrieron miles de millones de años atrás, pudiendo así crear un fondo de ondas gravitatorias estocásticas, y que consigamos estimar la velocidad a la que se expande el universo. También podrían transportar información sobre lo que pasa en el interior del horizonte de sucesos de los agujeros negros. Se espera que, gracias a esto, podamos estudiar con mayor nivel de detalle la inflación cósmica, permitiéndonos investigar épocas del universo que el fondo cósmico de microondas (que data de 380,000 años después de que ocurriese el Big Bang) no llega a explicar, ya que son capaces de pasar barreras que la luz no puede. Todo esto supondrá un auge de la astronomía gravitatoria, que podría ganar bastante peso y competir contra la astronomía óptica y a la radioastronomía.

Bibliografía

- [1] James Foster and J. David Nightingale: *A Short Course in General Relativity*. Springer, Third Edition, 2005.
- [2] Lee Billings: *The Future of Gravitational Wave Astronomy*. Scientific American, 2016.
Internet: <https://www.scientificamerican.com/article/the-future-of-gravitational-wave-astronomy/>
- [3] Amanda Montañez: *LIGO and Gravitational Waves: A Graphic Explanation*. Scientific American, 2016.
Internet: <https://blogs.scientificamerican.com/sa-visual/ligo-and-gravitational-waves-a-graphic-explanation/>
- [4] Clara Moskowitz: *Gravitational Waves Discovered from Colliding Black Holes*. Scientific American, 2016.
Internet: <https://www.scientificamerican.com/article/gravitational-waves-discovered-from-colliding-black-holes1/>
- [5] Davide Castelvecchi: *How gravitational waves could solve some of the Universe's deepest mysteries*. Nature, 2016
Internet: <https://www.nature.com/articles/d41586-018-04157-6>