



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

EL TEOREMA DE MUESTREO Y SUS APLICACIONES

Memoria realizada por José García Fernández

Dirigido por:
Dr. D. Renato Álvarez Nodarse

Resumen

En este trabajo nuestro objeto de estudio será la teoría de señales, el objetivo es llegar al teorema de muestreo de Shannon-Whittaker-Kotelnikov, con su correspondiente demostración, y aplicarlo a distintas situaciones, en particular al problema de recuperación de señales.

Para ello necesitaremos trabajar con herramientas de análisis Fourier, así que realizaremos un estudio previo sobre la serie de Fourier, con una breve introducción histórica, además de ejemplos, propiedades y convergencia. Seguiremos el estudio con otra de las herramientas del análisis de Fourier, la transformada de Fourier, que será un instrumento fundamental en este trabajo, y al que por supuesto dedicaremos un estudio previo con ejemplos y propiedades fundamentales. Por último realizaremos una breve descripción de lo que consideraremos señales, veremos algunos ejemplos y tipos de señales que nos podemos encontrar.

Para finalizar, tras realizar el estudio teórico, efectuaremos un estudio numérico, contrastando nuestro estudio teórico con ejemplos prácticos. Para esto último nos apoyaremos en herramientas de software libre como son Maxima u Octave.

Todos los programas que se han realizado para esta labor están a disposición de todos los lectores en:

<http://euler.us.es/~renato/clases/tfg/jgf/>.

Abstract

The aim of this work is to present an introduction to the Mathematical Signal Theory. We will prove the Shannon-Whitaker-Kotelnikov Sampling Theorem and we will apply it to different situations, in particular to the problem of signal recovering.

In order to do that, we will use some tools from the Fourier Analysis. So we will carry out a previous study of the Fourier Series, with a brief historical introduction, examples, properties and convergence Theorems. The study will continue with the Fourier Transform, which will be a key instrument along this work, and, therefore, we will include a previous study including some examples and fundamental properties. Finally, we will briefly describe what we consider to be signals and we present some examples of them.

To conclude our analysis, we will a numerical study, contrasting our provide theoretical results with examples. In order to do this, we will use free software tools such as Maxima and Octave.

All the programs used along this research are available to all readers and can be found on the web site of the advisor of this work:

<http://euler.us.es/~renato/clases/tfg/jgf/>.

Índice general

1. La serie trigonométrica de Fourier	9
1.1. Introducción	9
1.2. Definiciones principales y ejemplos	11
1.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier	15
1.4. Convergencia uniforme de la serie de Fourier	16
1.5. La serie exponencial de Fourier	17
1.6. La serie de Fourier en un intervalo arbitrario	18
1.7. El fenómeno de Gibbs	19
2. La transformada de Fourier	23
2.1. Definiciones principales y ejemplos	23
2.2. Propiedades fundamentales	26
2.3. Identidad de Plancherel-Parseval	27
2.4. Una normalización diferente	28
3. Señales	31
3.1. Definiciones principales	31
3.2. Primeros ejemplos	32
3.3. Tipos de señales	33
3.4. Teorema de muestreo	34
3.5. Convergencia	36
3.6. Cota de error cometido	37
3.7. El fenómeno del aliasing	39
3.8. Muestreo Irregular	39
4. Programas	41
4.1. Serie de Fourier, paquete <code>fourie</code>	41
4.2. Serie de Fourier, la función <code>aprfov</code>	43

4.3. Transformada de Fourier con Octave	46
4.4. Espectro de una señal con Octave	48
4.5. Espectro de una señal con ruido	49
4.6. Reconstrucción de señales con Maxima	50
4.7. Reconstrucción de señales con Octave	56
4.8. Aliasing	58
4.9. Lista de programas	61
Bibliografía	63

Capítulo 1

La serie trigonométrica de Fourier

En este apartado vamos a estudiar con algún detalle la serie trigonométrica de Fourier. En particular, veremos algunos teoremas de convergencia puntual y uniforme de las mismas. En adelante, asumiremos que la función f es de cuadrado integrable en $[-\pi, \pi]$, es decir, $f \in L^2[-\pi, \pi]$, aunque la mayoría de los resultados son ciertos para f absolutamente integrable.

Nótese que el sistema de funciones $\{1\} \cup \{\sin(nx), \cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos respecto al producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

1.1. Introducción

El 21 de diciembre de 1807, Joseph Fourier, presentó al Institut de France una memoria titulada *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Cuatro miembros, uno más de lo que era habitual, Lagrange, Laplace, Lacroix y Monge, fueron designados para emitir un informe, que nunca se llegó a escribir a pesar de las insistencias de Fourier, que deseaba un juicio sobre su trabajo. A cambio, el Instituto lo propuso como tema para el premio que se debía otorgar en 1812 (la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con la de los experimentos). A finales de 1811 Fourier entregó una nueva memoria como

concurante, esta vez con el título *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. Ganó el premio aunque la valoración del jurado mostraba sus reservas, lo que tuvo como consecuencia inmediata la no publicación del trabajo. Nacido en Auxerre en 1768, Fourier era profesor de la École Polytechnique cuando en 1798 fue reclutado por su colega Gaspard Monge para participar en la sección científica de la expedición de Napoleón a Egipto. Allí tuvo algunas responsabilidades administrativas, además de científicas, y a la vuelta de la expedición a Francia en 1801 sus planes de reincorporarse a la Escuela Politécnica como profesor se vieron truncados por su nombramiento de prefecto de Isère (el departamento de Isère está en el sudeste de Francia y su capital es Grenoble. El cargo de prefecto equivale al de gobernador civil). No volvió a enseñar pero no por ello abandonó su labor científica que, además de con su labor política, tuvo que compaginar con otras labores.

Intentó ser miembro de la Académie des Sciences y fue elegido por primera vez en 1816, pero Luis XVIII rechazó su nombramiento por su pasado napoleónico. La segunda vez optó a un puesto en la sección de Física, lo ganó ampliamente y fue aceptado.

A partir de su nombramiento, puso especial empeño en que se publicase su trabajo premiado de 1812, lo que consiguió en dos partes aparecidas en 1824 y 1826, aunque datadas en fecha anterior. Mientras tanto, había publicado en 1822 su libro *Théorie analytique de la chaleur*, que el físico Arnold Sommerfeld calificó como "Biblia de la Física Matemática". Ese mismo año fue nombrado Secretario Perpetuo de la Academia de Ciencias y en 1826 fue elegido miembro de la Academia Francesa. Murió en París en 1830.

En sus tres obras, Fourier comienza a partir de principios físicos deduciendo la ecuación que gobierna la difusión del calor. Después resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial, en varios casos. Para ello, utiliza el método de separación de variables, que introdujo d'Alembert en su estudio de la ecuación de ondas. Para escribir la solución, necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica. Esta es precisamente la principal herramienta que usaremos en nuestro trabajo y su teoría a día de hoy se conoce como análisis de Fourier, que en su momento generó el análisis moderno.

Para más información, consultar [6] en bibliografía.



Figura 1.1: Joseph Fourier (1768-1830).

1.2. Definiciones principales y ejemplos

Definición 1.2.1 Dada una función f de cuadrado integrable en $[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica en $[-\pi, \pi]$ definimos la serie trigonométrica de Fourier como:

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (1.2.1)$$

Los coeficientes vienen dados por las expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Definición 1.2.2 Por $S_n f(x)$ denotaremos la suma parcial de orden n de la serie de Fourier de f .

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad (1.2.2)$$

donde a_k y b_k vienen dados por (2.1.2).

Ejemplos

Vamos a calcular la serie de Fourier de las siguientes funciones y a representarlas con Maxima:

1: $g(x) = |x|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right),$$

donde hemos aplicado integración por partes.

Ahora vemos que:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) dx = 0,$$

ya que el integrando es una función impar en un dominio de integración simétrico.

$$\text{Luego tenemos que } Sg(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

2: $h(x) = ax^2$ en $[-\pi, \pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax^2 dx = \frac{2a\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax^2 \cos(nx) dx = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4a(-1)^n}{n^2},$$

donde hemos aplicado integración por partes dos veces.

Vemos que $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax^2 \sin(nx) dx = 0$, análogamente a la integral anterior se verifica que tenemos que el integrando es una función impar en un dominio de integración simétrico. Luego tenemos:

$$Sh(x) = \frac{2a\pi^2}{3} + 4a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(nx)}{n^2}.$$

3: $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$. Obtenemos que la serie de Fourier es

$$S_n f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{-2(-1)^k}{k} \sin(kx).$$

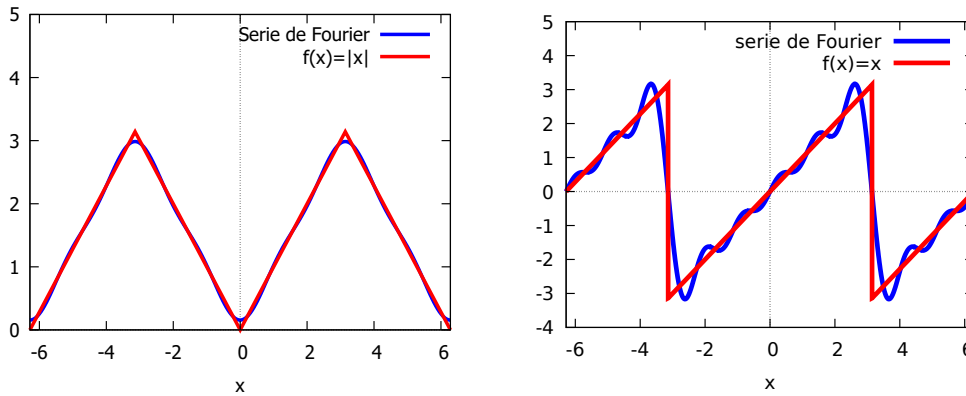


Figura 1.2: Serie de Fourier con 3 términos de $|x|$ (izquierda) y serie de Fourier con 20 términos de x (derecha).

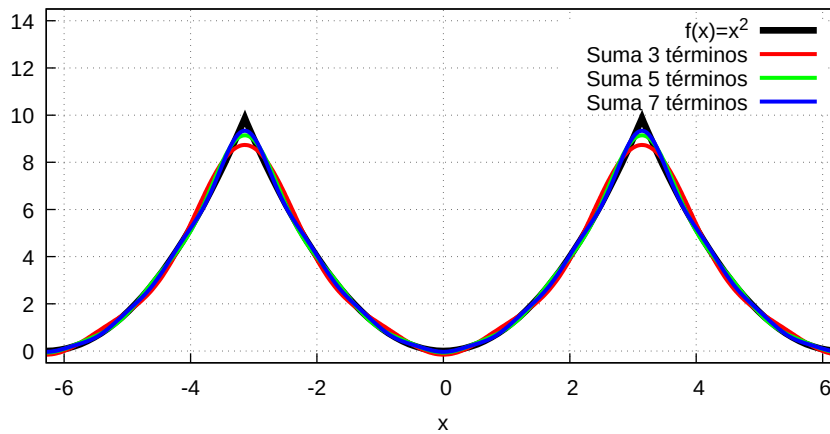


Figura 1.3: Serie de Fourier de x^2 .

Definición 1.2.3 Diremos que la serie de Fourier converge puntualmente a f en x_0 si la sucesión de sus sumas parciales $S_n f(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ en $x_0 \in [-\pi, \pi]$, es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se verifica que:

$$|f(x_0) - S_n f(x_0)| < \varepsilon. \quad (1.2.3)$$

Si $S_n f(x)$ converge puntualmente para todo $x \in (a, b)$ entonces diremos que la serie de Fourier converge puntualmente en (a, b) . Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ y cada $x \in (a, b)$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se verifica que:

$$|f(x) - S_n f(x)| < \varepsilon.$$

Definición 1.2.4 Diremos que la serie de Fourier converge uniformemente a f en $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$, si para todo ε existe un $N \in \mathbb{N}$ (independiente de x) tal que para todo $n > N$ y todo $x \in (a, b)$ se verifica que:

$$|f(x) - S_n f(x)| < \varepsilon. \quad (1.2.4)$$

Definición 1.2.5 Diremos que $S_n f(x)$ converge en media a f si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|f - S_n f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.2.5)$$

Definición 1.2.6 Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es casi-continua en $[a, b]$ excepto quizás, en un número finito de discontinuidades x_1, x_2, \dots, x_n y además en dichos puntos existen los límites laterales $\lim_{x \rightarrow x_i+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_i-} f(x)$. Al espacio de dichas funciones lo denotaremos por $C[a, b]$.

Definición 1.2.7 Diremos que una $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es casi-continuamente derivable en $[a, b]$ si su primera derivada es una función casi-continua en $[a, b]$, es decir, si existe la derivada continua de f en todo $[a, b]$, excepto quizás, en un número finito de puntos $a = x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = b$, y además en dichos puntos existen los límites laterales (derivadas laterales) $\lim_{h \rightarrow 0+} (f(x_i \pm h) - f(x_i))/h$. Al espacio de dichas funciones lo denotaremos por $C^1[a, b]$.

Definición 1.2.8 Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es m -veces casi-continuamente derivable en $[a, b]$, $m \geq 1$, si su m -ésima derivada es una función casi-continua en $[a, b]$. Al espacio de dichas funciones lo denotaremos por $C^m[a, b]$.

1.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Comenzaremos probando el lema de Riemann:

Lema 1.3.1 Sea f una función integrable en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Entonces:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

Demostración: Si suponemos que f es casi-continuamente derivable, es decir, $f \in C^1[a, b]$, integrando por parte obtenemos:

$$I_\lambda = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = \left[\frac{f(x) e^{i\lambda x}}{i\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(x) e^{i\lambda x} dx.$$

Entonces:

$$|I_\lambda| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{si } \lambda \rightarrow \infty,$$

pues f' es casi-continua, y por tanto, absolutamente integrable. \square

Teorema 1.3.2 Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función casi-continua y derivable en un punto $x_0 \in (-\pi, \pi)$, entonces la serie de Fourier converge a $f(x_0)$ en x_0 , es decir, $S_n f(x_0) \rightarrow f(x_0)$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración: Usando propiedades de las series de Fourier, en concreto del Núcleo de Dirichlet [3], podemos escribir $S_n f(x_0)$ como:

$$S_n f(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + z) - f(x_0)}{2 \sin(t/2)} \sin(n + 1/2)z dz.$$

Ahora bien, al ser f derivable en x_0 , la función $\frac{f(x_0 + z) - f(x_0)}{2 \sin(t/2)}$ está bien definida y es integrable en $[-\pi, \pi]$ así que el lema de Riemann nos conduce a que $S_n f(x_0) \rightarrow f(x_0)$, cuando $n \rightarrow \infty$. \square

1.4. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Teorema 1.4.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y 2π -periódica y supongamos que f es casi-continuamente derivable en $[-\pi, \pi]$. Entonces:

1. La serie de Fourier f' se obtiene derivando término a término $Sf(x)$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$.
3. $Sf(x)$ converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Demostración: Calculemos los coeficientes $a_n(f')$ y $b_n(f')$ de f' en función de los coeficientes $a_n(f)$ y $b_n(f)$ de f .

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = -\frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = -\frac{1}{k} b_k(f'),$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} a_k(f'),$$

por tanto la serie de Fourier de f' es:

$$Sf'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k(f) \sin(kx) + kb_k(f) \cos(kx),$$

de donde se deduce 1.

Para probar 2 usamos que:

$$|a_k(f)| = \frac{1}{k} |b_k(f')| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + b_k^2(f') \right),$$

$$|b_k(f)| = \frac{1}{k} |a_k(f')| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + a_k^2(f') \right).$$

En la desigualdad anterior hemos usado que $(|a| - |b|)^2 \geq 0$.

Como f' es casi-derivable, tenemos por la desigualdad de Bessel [3]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx < +\infty, \text{ luego}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \left(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right) < +\infty.$$

De la desigualdad anterior aplicando el Criterio de Weierstrass para series de funciones vemos la convergencia uniforme de $Sf(x)$. \square

Corolario 1.4.2 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y 2π -periódica y supongamos que f es casi-continuamente derivable en $[-\pi, \pi]$. Entonces $Sf(x)$ converge absolutamente e uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

1.5. La serie exponencial de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, y sean las funciones:

$$e_n(x) = e^{inx}, n \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = f(x) = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } n = m, \\ \frac{2 \sin(n-m)\pi}{n-m}, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Es decir, el conjunto $(e_n)_n$ es un conjunto ortogonal respecto al producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Definición 1.5.1 Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de cuadrado integrable en $[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica definiremos la serie exponencial de Fourier por:

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (1.5.1)$$

donde los coeficientes vienen dados por la siguiente expresión:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx.$$

Obviamente esta serie es equivalente a la serie de (1.2.1). Para ello basta usar la fórmula de euler $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ lo que nos resulta:

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

$$c_n = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Además, de las relaciones anteriores podemos deducir que $\overline{c_n} = c_{-n}$.

Ejemplo 1.5.2 Encontrar la serie exponencial de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Vemos claramente que c_0 es $A/2$. Para $n \neq 0$ tenemos:

$$c_n = \frac{A}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{A(1 - e^{-in\pi})}{2\pi in} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par,} \\ \frac{A}{\pi ni} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$$

1.6. La serie de Fourier en un intervalo arbitrario

Si en vez de trabajar con funciones 2π -periódicas, trabajamos con periodos arbitrarios, por ejemplo $2l$ tendremos que usar los siguientes sistemas, que son ortogonales y completos en $[-l, l]$:

$$\left\{ 1, \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

O en la forma exponencial:

$$\left\{ e^{\frac{k\pi xi}{l}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Así, tenemos las series equivalentes:

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi i x}{l}}, \text{ donde } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\frac{n\pi x i}{l}} dx, n \in \mathbb{Z}.$$

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.7. El fenómeno de Gibbs

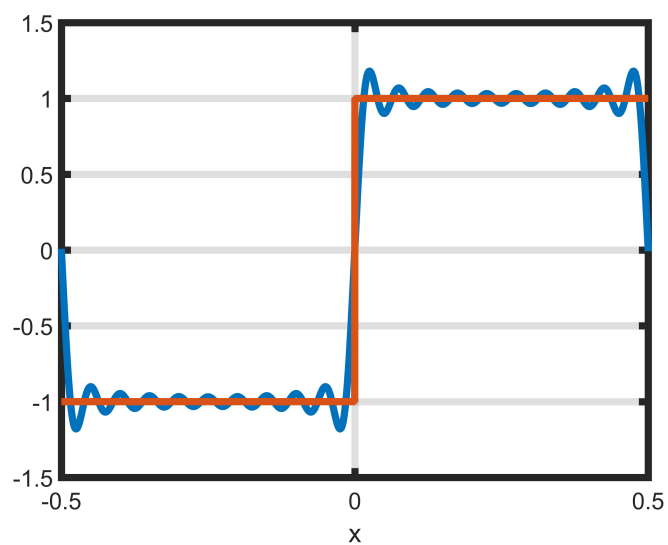
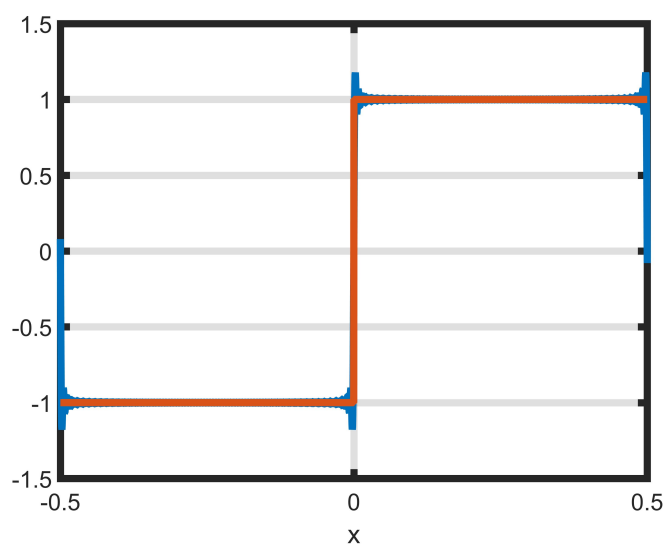
Vamos a ver un ejemplo interesante. Consideramos la función $\text{signo}(x)$ en $[-\pi, \pi]$ y extendamos periódicamente la función a todo \mathbb{R} . Su serie de Fourier es:

$$\text{signo}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Recordamos que:

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Vemos que además converge puntualmente en $(-1/2, 1/2)$ y lo hace uniformemente en cualquier compacto $[\delta, 1/2 - \delta] \subset (0, 1/2)$. Obviamente la convergencia no puede ser uniforme en $(-1/2, 1/2)$ pues $\text{signo}(x)$ no es continua en dicho intervalo. Si dibujamos las gráficas de $\text{signo}(x)$ y de algunas de sus sumas parciales vemos que cerca del cero aparece un pequeño pico que no parece disminuir incluso aumentando el número de sumandos en las sumas parciales.

Figura 1.4: Serie de Fourier con 20 términos de $\text{sign}(x)$.Figura 1.5: Serie de Fourier con 200 términos de $\text{sign}(x)$.

De hecho, al aumentar n vemos en un entorno de $x = 0$ que el pico no disminuye, sino que mantiene su altura.

Para aclarar lo que ocurre calculemos el máximo de la sumas $S_{2n-1}f$:

$$S_{2n-1}f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin 2\pi(2k+1)x}{2k+1},$$

que se obtienen al tomar la derivada en x :

$$\frac{d}{dx} S_{2n-1}f(x) = 8 \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\pi(2k+1)x = \frac{4 \sin 4n\pi x}{\sin 2\pi x}. \quad (1.7.1)$$

La derivada se anula en $x_k = \frac{k}{4n}, k = 1, \dots, 2n-1$, y podemos comprobar que:

$$\frac{d}{dx} S_{2n-1}f\left(\frac{k}{4n}\right) = 16\pi \csc\left(\frac{k}{2n}\right) \cos(k\pi),$$

Por tanto, en $k=1$ tenemos un máximo mientras que en $k=2$ un mínimo, y así, sucesivamente. Además de (1.7.1) tenemos que, al ser $S_{2n-1}f(0) = 0$,

$$S_{2n-1}f(x) = 4 \int_0^x \frac{\sin 4n\pi z}{\sin 2\pi z} dz.$$

A partir de esta expresión, podemos comprobar que precisamente el primer máximo es el máximo global de la suma parcial, es decir,

$$\max_{x \in [0, \delta]} S_{2n-1}f(x) = S_{2n-1}f\left(\frac{k}{4n}\right).$$

Ahora bien,

$$S_{2n-1}f\left(\frac{k}{4n}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \pi(2k+1) \frac{k}{2n}}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \pi \xi_k \frac{1}{n}}{\xi_k}, \quad \xi_k = \frac{2k+1}{2n}.$$

Nótese que la última suma, constituye una suma de Riemann de la inte-

gral $\int_0^1 \frac{2 \sin \pi x}{\pi x} dx$, en la partición $x_k = k/n, k = 0, 1, \dots, n$, al evaluar la función integrando en $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Luego :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} f\left(\frac{k}{4n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \pi \xi_k}{\pi} \frac{1}{\xi_k} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{2 \sin \pi x}{\pi x} dx = 1,17897\dots$$

Así, el máximo de las sumas parciales de la serie $\text{signo}(x)$ no tiende a 1 sino a 1,178979744..., es decir:

$$\left| \text{máx signo}(x) - \text{máx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) \right| = 1,17897\dots$$

Lo anterior es generalizable a cualquier función f con una discontinuidad en algún punto. Supongamos que en cierto intervalo $I = [\alpha, \beta]$ la función tiene un punto de discontinuidad en x_0 y sea $\mu = \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$ y supongamos que f es tal que la serie converge uniformemente a ambos lados de x_0 . Entonces la función $g(x) = f(x) - \mu \text{signo}(x)$ es continua en x_0 y su serie converge uniformemente en un entorno de x_0 , por lo tanto el comportamiento de f en un entorno de x_0 es el mismo que el de $\mu \text{signo}(x)$, es decir

$$\left| \text{máx } f(x) - \text{máx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) \right| = \mu 1,17897\dots$$

El efecto es válido para toda función discontinua se conoce como efecto de Gibbs quien estudió el problema en 1899.

Capítulo 2

La transformada de Fourier

En este capítulo, introduciremos la transformada de Fourier, que va a tener una gran importancia a la hora de demostrar el teorema de muestreo como ya veremos más adelante. Intuitivamente y adelantándonos un poco, la transformada de Fourier transforma una señal que depende del tiempo en una señal que depende de la frecuencia.

2.1. Definiciones principales y ejemplos

En adelante, asumiremos que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Definición 2.1.1 Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiremos su transformada de Fourier que denotaremos por $\widehat{f}(\lambda)$ o $F[f]$ a la función:

$$\widehat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx. \quad (2.1.1)$$

Por comodidad definiremos también la transformación:

$$\overline{F}[f](\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx. \quad (2.1.2)$$

Bajo ciertas condiciones sobre f , $2\pi\overline{F}[f](\lambda)$ es la inversa de $F[f](\lambda)$, y se verifica:

$$f(x) = 2\pi\overline{F}[\widehat{f}](x), \quad F^{-1}[f] = 2\pi\overline{F}[\widehat{f}].$$

Definición 2.1.2 A la función $F(\lambda) = |\widehat{f}(\lambda)|$, se le denomina espectro de la función f .

Ejemplos

Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones.

$$1. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$F[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\cos(\lambda x) - i \sin(\lambda x)) dx = \frac{\sin(\lambda)}{\pi \lambda}.$$

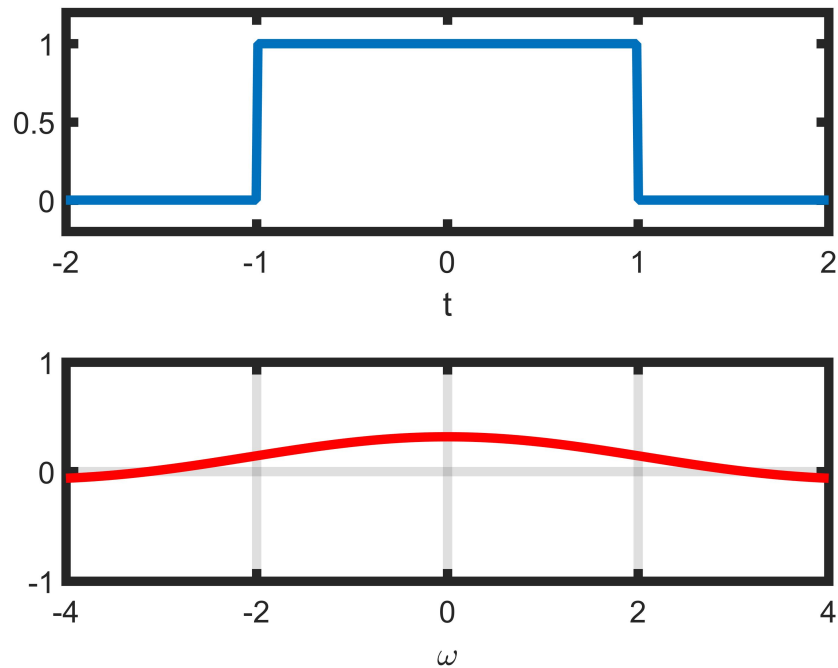


Figura 2.1: Pulso rectangular (arriba) y su transformada (abajo).

2. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{-x^2/2}$.

$$\widehat{h}(\lambda) = F[h](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(\lambda x) dx. \quad (2.1.3)$$

Entonces,

$$\frac{\partial \widehat{h}(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} (-x) \sin(\lambda x) dx = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(\lambda x) dx = -\lambda \widehat{h}(\lambda).$$

En la segunda igualdad hemos integrado por partes, luego:

$$\widehat{h}(\lambda) = C e^{-\lambda^2/2} \Rightarrow C = \widehat{h}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow F[h](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda^2/2}.$$

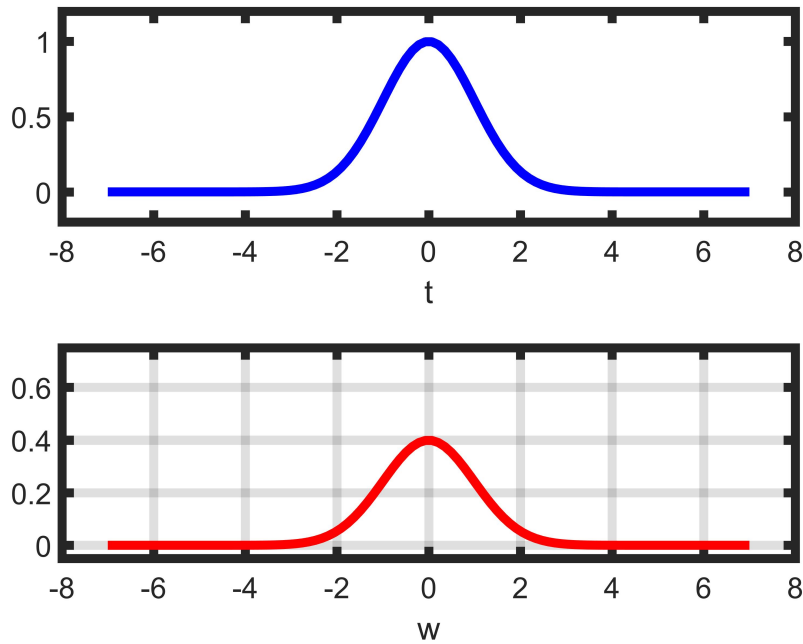


Figura 2.2: Gaussiana (arriba) y su transformada (abajo).

2.2. Propiedades fundamentales

Vamos a dar algunos resultados fundamentales y propiedades sobre la transformada de Fourier. Comenzaremos enunciando un lema cuya demostración omitiremos (consultar [2] en bibliografía).

Lema 2.2.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces:

- Existe la transformada $\widehat{f}(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$.
- La función $\widehat{f}(\lambda)$ es continua en \mathbb{R} .
- $\sup_{\lambda \rightarrow \infty} \widehat{f}(\lambda) = 0$.

En adelante, vamos a definir el operador traslación τ_h :

$$\tau_h f(x) = f(x + h), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Proposición 2.2.2

1. La transformada de Fourier es lineal: para todos $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$F[\alpha f + \beta g](\lambda) = \alpha F[f](\lambda) + \beta F[g](\lambda) = \alpha \widehat{f}(\lambda) + \beta \widehat{g}(\lambda).$$
2. $\tau_h \widehat{f}(\lambda) = F[\tau_h f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda h}$.
3. $\widehat{f e^{ixh}}(\lambda) = \tau_{-h} \widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - h)$.
4. $F[\alpha^{-1} f(x/\alpha)](\lambda) = F[f](\alpha\lambda) = \widehat{f}(\alpha\lambda)$.

Demostración: 1 es inmediata de la definición, ya que la integral es lineal. 2 la deducimos directamente de:

$$\widehat{\tau_h f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\lambda(z-h)} dz = e^{i\lambda h} F[f](\lambda).$$

Para probar 3 usamos:

$$\widehat{f e^{ixh}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} e^{ihx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i(\lambda-h)x} dz = F[f](\lambda-h).$$

La demostración de 4 es análoga a 3. □

2.3. Identidad de Plancherel-Parseval

Recordemos el Teorema de Fubini (para su demostración consultar [4]):

Teorema 2.3.1 Dada $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ entonces f es integrable en $E \times F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si y solo si existe cualquiera de las dos siguientes integrales:

$$\int_E \left(\int_F |f(x, y) dy| \right) dx, \quad \int_F \left(\int_E |f(x, y) dx| \right) dy.$$

Además, si f es integrable en $E \times F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces:

$$\iint_{E \times F} f(x, y) dx dy = \int_E \left(\int_F f(x, y) dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x, y) dx \right) dy.$$

Usando el teorema de Fubini, es inmediato probar que si f y g son absolutamente integrables, se verifica:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f(x)} g(x) dx.$$

Probaremos un resultado más general:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x + y) \widehat{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f(x)} g(x) e^{ixy} dx.$$

Para ello usamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{ixy} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} dz \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix(z-y)} dy \right) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z) \widehat{g(z-y)} dz = \int_{\mathbb{R}} f(\zeta + y) \widehat{g(\zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

Para cambiar el orden de integración, hemos usado el Teorema de Fubini.

Escogiendo $y = 0$ recuperamos la expresión anterior y obtenemos:

$$\widehat{\bar{g}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(z) e^{-ixz}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(z)} e^{ixz} dz = \overline{F[g]}(\lambda) \Rightarrow \widehat{\bar{g}} = \bar{g},$$

pues $\overline{F}[\cdot]$ es la inversa de la transformada de Fourier $F[\cdot]$. De lo anterior, se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.3.2 Fórmula de Plancherel-Parseval. Si f, g son absolutamente integrables en \mathbb{R} , entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g(x)}}dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx.$$

Para la demostración, basta tomar $f = \widehat{g}$ y $g = \widehat{f}$ y aplicar el teorema de Fubini.

2.4. Una normalización diferente

Antes de ver aplicaciones de la transformada de Fourier debemos destacar que existe una normalización distinta a la que hemos descrito. Debido a su uso muy común en teoría de señales vamos a escribir las principales fórmulas.

Definición 2.4.1 Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiremos su transformada de Fourier que denotaremos por \widehat{f} o por $F[f]$ a la función:

$$\widehat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\lambda x} dx. \quad (2.4.1)$$

Análogamente:

$$\overline{F}[f](\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\lambda x} dx. \quad (2.4.2)$$

Además, con esta normalización $\overline{F}[f](\lambda)$ es la inversa de $F[f]$, es decir:

$$f(x) = \overline{F}[\widehat{f}](x), \text{ y por otra parte } F^{-1}[f] = \overline{F}[\widehat{f}].$$

Es fácil comprobar que el cambio de la normalización no afecta a los resultados generales. En particular, tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 2.4.2

1. $\widehat{\tau_h f}(\lambda) = F[\tau_h f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda)e^{2\pi i\lambda h}$.
2. $\widehat{f e^{2\pi i x h}}(\lambda) = \tau_{-h}\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - h)$.
3. $F[\alpha^{-1}f(x/\alpha)](\alpha) = F[f](\alpha\lambda) = \widehat{f}(\alpha\lambda)$
4. Si $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$ es tal que $f, f', \dots, f^{(k)}$ son absolutamente integrables, entonces $F[f^{(n)}](\lambda) = (2\pi i\lambda)^n F[f](\lambda), n = 0, 1, \dots, k$.
5. Si f y $x^k f(x)$ son absolutamente integrables en \mathbb{R} , entonces $\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \frac{d^n F[f]}{d\lambda^n}(\lambda) = (-2\pi i)^k \widehat{x^n f}(\lambda) = (-2\pi i)^k F[x^n f](\lambda), \forall n = 0, 1, \dots, k$.
6. Identidad de Plancherel-Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)e^{2\pi ixy}dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx.$$

Capítulo 3

Señales

En este capítulo nos adentramos ya en la teoría de señales. Comenzaremos discutiendo el concepto matemático de *señal* y veremos algunos resultados relativos a las mismas.

3.1. Definiciones principales

Definición 3.1.1 Por una señal $s(t)$, entenderemos una función casi-continua en un intervalo $I = (t_0, t) \in \mathbb{R}$.

Definición 3.1.2 Una señal $s(t)$ es de energía finita si $s \in L^2$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty.$$

Definición 3.1.3 A la función $S(w) = |\widehat{s}(w)|$, se le denomina espectro de la señal s .

Definición 3.1.4 Una señal es de banda limitada a B si:

$$F[s](w) = 0, \quad \forall |w| \geq B,$$

donde $F[s](w)$ es la transformada de Fourier de $s(t)$, es decir, el espectro de la señal está contenido en un compacto de \mathbb{R} . Análogamente:

$$\widehat{s}(w) = F[s](w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-iwt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B s(t)e^{-iwt} dt.$$

3.2. Primeros ejemplos

Escalón de Heaviside:

$$\text{Heaviside}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Pulso rectangular:

$$\text{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

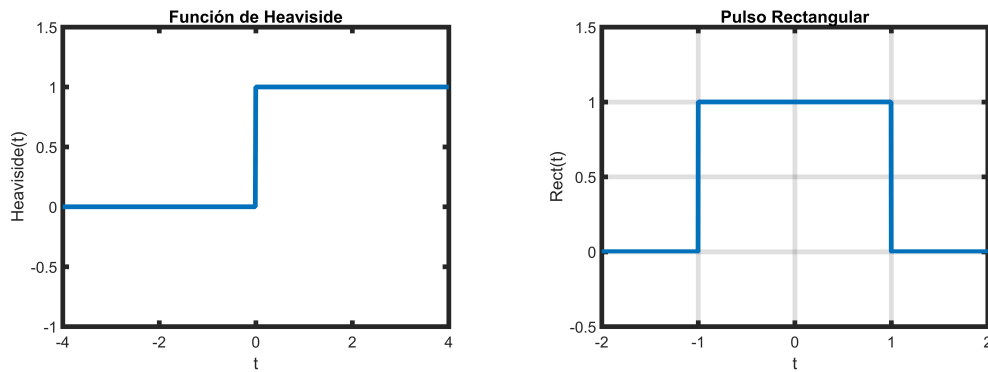


Figura 3.1: Escalón de Heaviside (izquierda) y pulso Rectangular $\text{Rect}(t)$ (derecha).

Señal sinusoidal:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega > 0.$$

Señal con ruido:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + a_0 \text{random}(t), \quad \omega > 0.$$

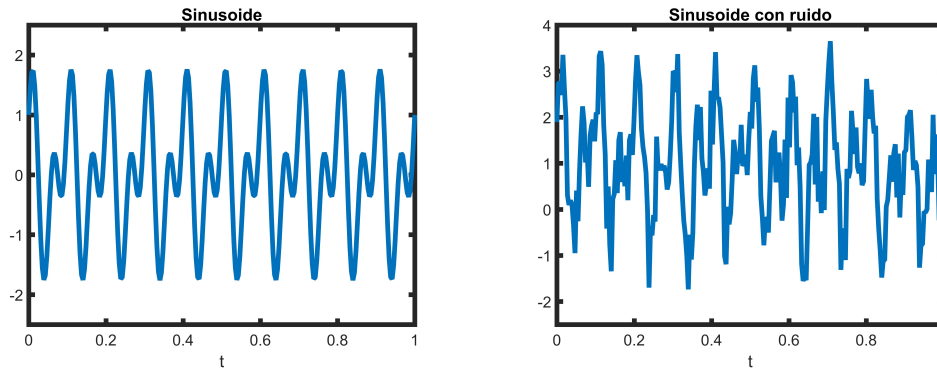


Figura 3.2: Señal sinusoidal $f(t) = \cos(20\pi t) + \sin(40\pi t)$ (izquierda) y con ruido $f(t) = \cos(20\pi t) + \sin(40\pi t) + 2 \text{ random}(t)$ (derecha).

3.3. Tipos de señales

En adelante, denotaremos por \mathbb{X} al espacio de las señales.

Uno de los objetivos del análisis de señales, es poder distinguir las señales, transmitir las, codificar las, etc.

Las funciones anteriores pueden representar el voltaje o la intensidad de corriente en un circuito, intensidad de la música en un reproductor de CD, potencia de un altavoz, etc.

Una señal que sea casi-continua, se dice que es analógica. Si la señal es un conjunto de valores dados $s_1, s_2, \dots, s_N, \dots$ se dice que la señal es digital. Así:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C(\mathbb{R}) \implies \text{señal analógica.}$$

Si en vez de f tenemos sus muestras tomadas con una frecuencia $1/a$, diremos que la señal es digital:

$$(f(x_k))_k : x_k = ka, \quad k \in \mathbb{Z} \implies \text{señal digital.}$$

En la naturaleza las señales suelen ser en general, analógicas. Uno de los principales problemas consiste en convertir una señal analógica en digital (discreta) para, por ejemplo, transmitirla (fotos digitales), grabarla (CD), y luego poder recuperarla sin perder información. El proceso de conversión se denomina “muestreo” de la señal. Nos interesará el problema de la recuperación de una señal a partir de sus muestras.

3.4. Teorema de muestreo

Vamos a enunciar y posteriormente probar, el resultado fundamental de este trabajo: el teorema de muestreo de Whittaker-Kotelnikov-Shannon, que como veremos posteriormente tiene una gran utilidad en la teoría de señales.

Teorema 3.4.1 Sea una señal $x(t)$ de energía finita y de banda limitada a B , entonces:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin(\pi(2Bt - n))}{2Bt - n}. \quad (3.4.1)$$

Es decir, para recuperar una señal banda limitada a B basta conocer sus muestras tomadas con una frecuencia igual a $2B$. Dicha frecuencia se denomina frecuencia de Nyquist.

Demostración Primero vamos a considerar la función $f(u) = e^{2\pi i u t}$ en el intervalo $(-B, B)$. Vamos a extenderla periódicamente y a calcular su serie exponencial de Fourier en la base $\{e^{2\pi i(n/2B)u}\}_{n \geq 0}$, que es una base ortogonal de $L^2(-B, B)$.

Nuestra función es continua y derivable luego su serie de Fourier será uniformemente convergente como hemos visto en el apartado de convergencia.

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i(n/2B)u}, \quad (3.4.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{2\pi i u t} (e^{-2\pi i(n/2B)u}) du = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{2\pi i(t - n/2B)u} du = \\ &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \cos\left(2\pi\left(t - \frac{n}{2B}\right)u\right) du + i \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \sin\left(2\pi\left(t - \frac{n}{2B}\right)u\right) du = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^B \cos\left(2\pi\left(t - \frac{n}{2B}\right)u\right) du = \frac{1}{B} \left[\frac{\sin\left(2\pi\left(t - \frac{n}{2B}\right)u\right)}{2\pi\left(t - \frac{n}{2B}\right)} \right]_0^B = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(\pi(2tB - n))}{\pi(2Bt - n)}.$$

Vemos que:

$$i \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \sin\left(2\pi\left(t - \frac{n}{2B}\right)u\right) du = 0,$$

ya que es una integral en la cual el integrando es una función impar en un dominio de integración simétrico.

En adelante usaremos la notación $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, que denota a la función seno cardinal.

Recordamos que definimos la trasformada de Fourier y su inversa como:

$$X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi iut} dt, \quad x(t) = \int_{-B}^B X(u)e^{2\pi iut} du.$$

Sustituimos $e^{2\pi iut}$ por su serie de Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-B}^B \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(u)e^{i\pi nu/B} \text{sinc}(2Bt - n) du = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-B}^B X(u)e^{i\pi nu/B} \text{sinc}(2Bt - n) du = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Bt - n) \int_{-B}^B X(u)e^{i\pi nu/B} du = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Bt - n) x\left(\frac{n}{2B}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin(\pi(2Bt - n))}{2Bt - n}. \end{aligned}$$

□

Nota: La integración término a término, la podemos realizar debido a que nuestra serie es uniformemente convergente. La igualdad se entiende en el sentido de L^2 .

Nota: En teoría de señales se define la serie cardinal de la señal x como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin(\pi(2Bt - n))}{2Bt - n} = \quad (3.4.3) \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(na) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{a} - n\right)\right)}{\frac{t}{a} - n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(na) \frac{\sin\frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)}. \end{aligned}$$

Para trabajar con (3.4.3) de una manera más cómoda, hemos realizado un cambio de notación llamando $a = \frac{1}{2B}$.

3.5. Convergencia

La serie cardinal converge en L^2 . Vamos ahora a probar que nuestra convergencia no solo es en L^2 , sino que tenemos convergencia uniforme. Para ello, probaremos un lema auxiliar y posteriormente que la serie cardinal converge uniformemente.

Lema 3.5.1 $\left(\sum_{N \leq |n| \leq M} \left| \frac{\sin\frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \right|^2 \right) = 1.$

Demostración Consideremos la función

$$k(t) = e^{2\pi i \lambda t} \chi_{\left[\frac{-1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y extendámosla periódicamente a todo $t \in \mathbb{R}$. Su serie de Fourier es:

$$\begin{aligned} k(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n a t}, \\ c_n &= a \int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{2\pi i \lambda t} e^{-2\pi i n a t} dt = \frac{\sin\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}, \end{aligned}$$

además $(c_n)_n \in L^2$. Si ahora usamos la identidad de Parseval obtenemos:

$$\sum_{n \in \mathbb{R}} |c_n|^2 = a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} |e^{2\pi i \lambda t}|^2 dt = 1.$$

Teorema 3.5.2 La serie cardinal (3.4.1) converge uniformemente.

Demostración Sean $M, N \in \mathbb{N}$, $N \leq M$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{|n| \leq M} x(na) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} - \sum_{|n| \leq N} x(na) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \right| \leq \\ & \leq \sum_{N \leq |n| \leq M} |x(na)| \left| \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \right| \leq \\ & \leq \left(\sum_{N \leq |n| \leq M} |x(na)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \leq |n| \leq M} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por el lema anterior, la serie $\left(\sum_{N \leq |n| \leq M} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \right|^2 \right)$ está acotada, luego:

$$\leq \left(\sum_{N \leq |n| \leq M} |x(na)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \leq |n| \leq M} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \right|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon,$$

ya que si M y N son suficientemente grandes, la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(na)|^2 < \infty$. Por tanto, por el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme, la serie converge uniformemente en \mathbb{R} . \square

3.6. Cota de error cometido

Es importante recordar que cuando hagamos los correspondientes programas no podremos tomar la serie infinita, sino una serie truncada, con lo cual nos será de interés una cota del error que cometemos. Para ello, enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.6.1 Sea $h(t)$ una señal con energía finita y de banda limitada a B , se verifica que:

$$|h(t)| \leq \sqrt{\frac{BE}{\pi}}. \quad (3.6.1)$$

Demostración Sea $H(w)$ la transformada de Fourier de la función $h(t)$.

Ahora consideramos la inversa de la transformada de Fourier de h :

$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B H(w)e^{iwt} dw$, y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |h(t)|^2 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-B}^B |H(w)|^2 dw \int_{-B}^B |e^{iwt}|^2 dw = \\ &= \frac{B}{2\pi^2} \int_{-B}^B |H(w)|^2 dw = \frac{B}{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B |H(w)|^2 dw \right) = \\ &= \frac{B}{\pi} \int_{-B}^B |h(w)|^2 dw = \frac{B}{\pi} E \Rightarrow |h(t)| \leq \sqrt{\frac{BE}{\pi}}. \end{aligned}$$

□

Nota En la última igualdad, hemos usado la fórmula de Parseval.

Corolario 3.6.2 Tomando $h(t) = x(t) - x_N(t)$, es inmediato de (3.6.1) que obtenemos la siguiente cota del error:

$$|x(t) - x_N(t)| \leq \sqrt{\frac{BE}{\pi}}.$$

Vemos como se cumplen las condiciones del teorema anterior, dado que h es una función de L^2 al ser una resta de dos funciones de L^2 , y además h es una señal de banda limitada al ser resta de funciones de banda limitada (esta propiedad se obtiene gracias a la linealidad de la integral).

3.7. El fenómeno del aliasing

El aliasing es el efecto que causa que señales continuas distintas no sean distinguibles cuando realizamos un muestreo digital. En este caso, no podemos recuperar la señal original de forma única a partir de la señal digital. En otras palabras, tenemos señales distintas, pero que coinciden en las muestras tomadas, por lo que la recuperación de nuestra señal no es posible.

Nos encontramos con este problema cuando nuestras muestras no son las “indicadas”, es decir, cuando no verifican que $\nu_s = 1/a \geq 2B$, donde ν_s representa nuestra frecuencia de muestreo.

Veamos un ejemplo de aliasing. Consideremos $x(t) = \sin(2\pi t)$:

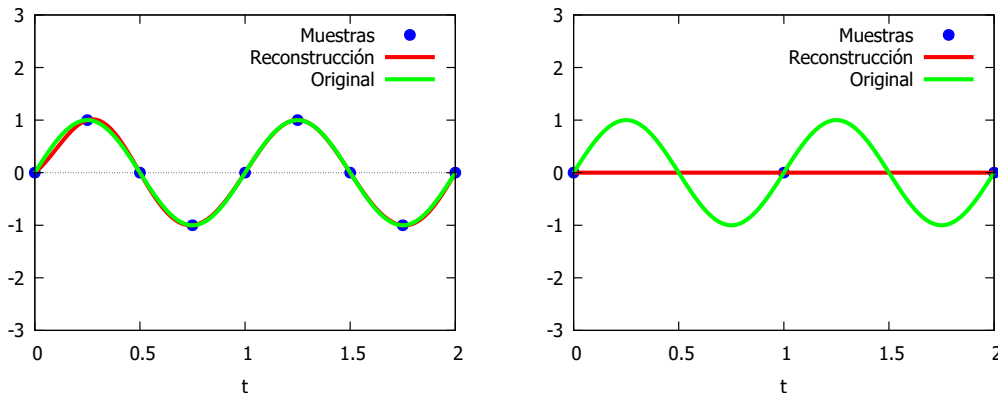


Figura 3.3: Recuperación de nuestra señal tomando como frecuencia de muestreo 4 (izquierda) y 1 (derecha).

3.8. Muestreo Irregular

Es interesante resaltar que hemos estado trabajando en nuestra teoría de señales con lo que se conoce como muestreo regular, es decir, que nuestras muestras se toman de forma equidistante. Hay diferentes tipos de muestreo, entre los cuales uno de los más destacamos es el muestreo irregular.

¿Cuáles son las ventajas y desventajas con respecto al muestreo regular?

Como desventaja, es muy importante el hecho de que el Teorema de Muestreo no es aplicable, y para la reconstrucción tenemos que usar métodos que son computacionalmente intensivos, como por ejemplo la transformada rápida de Fourier, que en el caso del muestreo irregular no es ni siquiera invertible.

Como ventaja, en el muestreo irregular es menos probable que se produzca el fenómeno del aliasing, que es uno de los inconvenientes más importantes del muestreo regular.

Para más información acerca del muestreo irregular, consultar [5] y [8] en la bibliografía.

Capítulo 4

Programas

En este capítulo mostraremos algunos de los programas que a lo largo del trabajo hemos usado y expondremos algunos ejemplos nuevos de interés.

Comenzaremos mostrando varias formas de construir las series de Fourier. En primer lugar, mostraremos un ejemplo donde podemos realizar los cálculos de manera analítica, usando un programa simbólico (en este caso de Maxima), también veremos algún programa que realice los cálculos numéricamente. Además de la transformada de Fourier, veremos programas de recuperación de señales y el problema del aliasing.

Para consultar los comandos utilizados tanto en Maxima como en Octave, ver referencias [1] y [10].

4.1. Serie de Fourier, paquete `fourie`

Vamos a usar Maxima para el caso de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$, extendida periódicamente a todo \mathbb{R} .

Ante todo debemos cargar el paquete `fourie`, que nos permite trabajar simbólicamente con series de Fourier.

```
(%i1) kill(all)$  
(%i1) load(fourie)$
```

Definimos la función que vamos a desarrollar en serie, en este caso $f(x) = x$.

```
(%i2) f1(x) := x;  
(%o2) f1(x) := x
```

A continuación, calculamos los coeficientes de Fourier para nuestra función:

```
(%i3) fourier(f1(x),x,%pi)$
(%t3) a[0]=0
(%t4) a[n]=0
(%t5) b[n]=(2*(sin(%pi*n)/n^2-(%pi*cos(%pi*n))/n))/%pi
```

La salida aparentemente no está simplificada pues $\sin(n\pi) = 0$ si n es entero, como es el caso. Si queremos que Maxima asuma que el índice n es entero podemos hacer lo siguiente:

```
(%i7) declare(n, integer)$
      fourier(f1(x),x,%pi)$
(%t7) a[0]=0
(%t8) a[n]=0
(%t9) b[n]=-(2*(-1)^n)/n
```

que nos da los coeficientes de Fourier de la función.

Luego obtenemos la suma parcial de la serie y definimos una función para su representación.

```
(%i11) fourexpand(%,x,%pi,5);
      define(fff(x),%)$

(%o10) (2*sin(5*x))/5-sin(4*x)/2+(2*sin(3*x))/3-sin(2*x)+2*sin(x)
```

Finalmente representamos en una gráfica los resultados. Para una mejor comprensión definiremos la extensión periódica de nuestra función en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$,

```
(%i12) g1(x):=f1(x+2*%pi)*(unit_step(x+2*%pi+%pi)-unit_step(x+%pi))+
      f1(x)*(unit_step(x+%pi)-unit_step(x-%pi))+
      f1(x-2*%pi)*(unit_step(x-%pi)-unit_step(x-2*%pi-%pi))$
```

y dibujamos la gráfica.

```
(%i13) wxplot2d([fff(x),g1(x)], [x,-2*%pi,2*%pi],
      [legend,"serie de Fourier","f(x)"]);
```

La gráfica podemos verla en la figura [4.1](#)

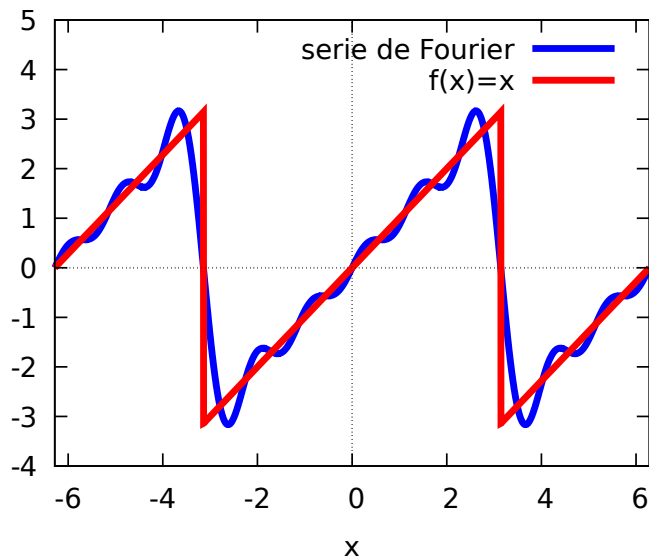


Figura 4.1: La función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$, extendida periódicamente a todo \mathbb{R} y la suma parcial de orden 5 de su serie de Fourier.

4.2. Serie de Fourier, la función aprfou

Antes de ver el ejemplo numérico con Maxima, vamos a ver un método alternativo para calcular la serie de Fourier sin usar el paquete `fourier`. Para ello, sea $g(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$. El código es el siguiente:

Limpiamos las variables y definimos nuestro propio comando `aprfou` para definir las sumas parciales de la serie de Fourier

```
(%i1) kill(all)$
aprfou(fun,n):= expand(sum(integrate(cos(i*x)*fun,x,-%pi,%pi)/
integrate(cos(i*x)^2,x,-%pi,%pi)*cos(i*x),i,0,n)
+sum(integrate(sin(i*x)*fun,x,-%pi,%pi)/
integrate(sin(i*x)^2,x,-%pi,%pi)*sin(i*x),i,1,n))$
```

Definimos la función que queremos desarrollar

```
(%i4) f1(x) := x^2;
f(x) := aprfou(f1(x),3);
f(x);
(%o2) f1(x) := x^2
(%o3) f(x) := aprfou(f1(x),3)
(%o4) -(4*cos(3*x))/9+cos(2*x)-4*cos(x)+%pi^2/3
```

Finalmente la representamos en una gráfica usando esta vez el paquete draw

```
(%i6) g1(x) := f1(x+2*%pi)*(unit_step(x+2*%pi+%pi)-unit_step(x+%pi))
      + f1(x)*(unit_step(x+%pi)-unit_step(x-%pi))
      + f1(x-2*%pi)*(unit_step(x-%pi)-unit_step(x-2*%pi-%pi))$
```

```
wxdraw2d(color=black, grid = true, line_type = solid,
         line_width = 5, yrange = [-0.5,11], key = "f(x)=x^2",
         explicit(g1(x),x,-2*%pi,2*%pi),line_width = 3,
         key = "Suma 3 términos", color=red,
         explicit(aprfou(x^2,3),x,-2*%pi,2*%pi),
         key = "Suma 5 términos", color=green,
         explicit(aprfou(x^2,5),x,-2*%pi,2*%pi),
         key = "Suma 7 términos", color=blue,
         explicit(aprfou(x^2,7),x,-2*%pi,2*%pi),
         xlabel="x",ylabel="")$
```

Vemos la gráfica a continuación en 4.2

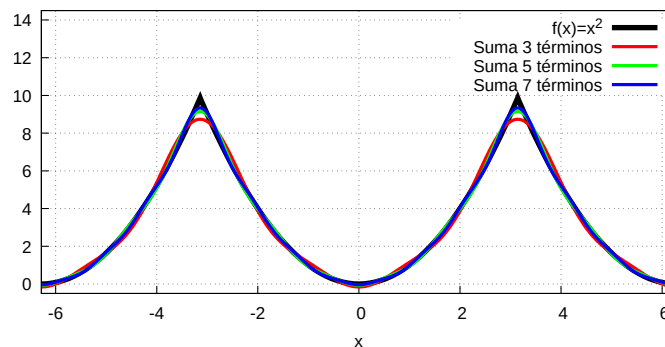


Figura 4.2: La función $f(x) = x^2$ y las sumas parciales de su serie de Fourier con 3, 5 y 7 términos.

Obviamente no para cualquier función podemos calcular de forma simbólica la serie. Por ejemplo si tomamos la función $f(x) = \log(1 + x^2)$ en $[-\pi, \pi]$

y la extendemos periódicamente a todo \mathbb{R} el programa anterior falla pues no puede calcular las integrales. En ese caso es mejor calcular las integrales de forma numérica. Por ejemplo, usando el paquete `quad_qag`.

```
(%i1) kill(all)$
aprfoun(fun,n):=quad_qag(fun,x,-%pi,%pi, 'epsrel=1d-10)[1]/float(2*%pi)+
expand( sum( quad_qawo(
    fun,x,-%pi,%pi,i,cos, 'epsrel=1d-10)[1]/float(%pi))*cos(i*x),i,1,n)+
sum( ( quad_qawo(
    fun,x,-%pi,%pi, i,sin, 'epsrel=1d-10)[1]/float(%pi) )*sin(i*x),i,1,n))$
(%i4) f1(x) := log(1+x^2);
      f(x):= aprfou(f1(x),3)$
      f(x);
(%o2) f1(x):=log(1+x^2)
(%o4) aprfou(log(x^2+1),3) (%i5) aprfoun(f1(x),3);
(%o5) -0.07356417649811077*cos(3*x)-0.04583587435504389*cos(2*x)
      -1.071421039291763*cos(x)+1.189783782922232
(%i6) g1(x):=f1(x+2*%pi)*(unit_step(x+2*%pi+%pi)-unit_step(x+%pi))
      +f1(x)*(unit_step(x+%pi)-unit_step(x-%pi))
      +f1(x-2*%pi)*(unit_step(x-%pi)-unit_step(x-2*%pi-%pi))$

(%i7) wxdraw2d(color=black, grid = true, line_type = solid,
line_width = 5, yrange = [-0.1,3], key = "f(x)=x^2",
explicit(g1(x),x,-2*%pi,2*%pi), line_width = 3,
key="Suma 3 términos",color=red,explicit(aprfou(f1(x),3),x,-2*%pi,2*%pi),
key="Suma 5 términos",color=green,explicit(aprfou(f1(x),5),x,-2*%pi,2*%pi),
key="Suma 7 términos",color=blue,explicit(aprfou(f1(x),7),x,-2*%pi,2*%pi),
xlabel="x",ylabel="",dimensions = [1200,600]);
```

Podemos ver la gráfica en figura 4.3

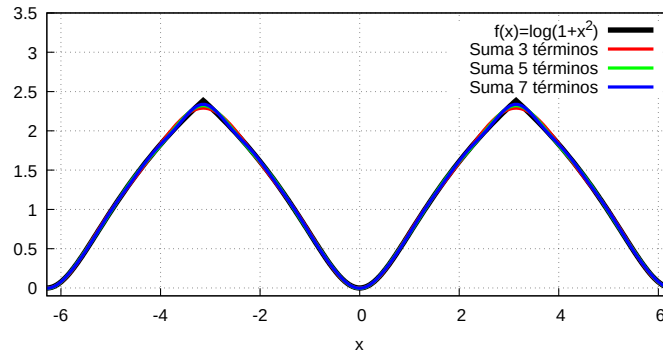


Figura 4.3: La función $f(x) = \log(1 + x^2)$ y las sumas parciales de su serie de Fourier con 3, 5 y 7 términos.

4.3. Transformada de Fourier con Octave

Vamos a calcular con Octave la transformada de Fourier de la función pulso:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

El código es el siguiente: Primero utilizamos syms para crear una variable simbólica.

```
syms a t;
```

Definimos nuestra función pulso utilizando el comando heaviside, que representa la función escalón:

```
ft=heaviside(t+a)-heaviside(t-a);
Fw=fourier(ft);
Fw=simplify(Fw)
```

Calculamos la transformada de Fourier mediante el comando `fourier`, y finalizamos representado las dos gráficas, tanto nuestra función como su transformada, añadiendo las leyendas correspondientes a cada gráfica.

```
ft=subs(ft,a,1);
subplot(2,1,1)
ezplot(ft,[-2,2]);
ylim([-0.2 1.2])
xlabel('t');
ylabel('f(t)')
title('Pulso rectangular')

Fw=subs(Fw,a,1);
subplot(2,1,2)
hg=ezplot(Fw,[-10,10]);
set(hg,'color','r')
ylim([-1 1])
xlabel('\omega');
ylabel('F(\omega)')
title('Transformada de Fourier')
grid on
```

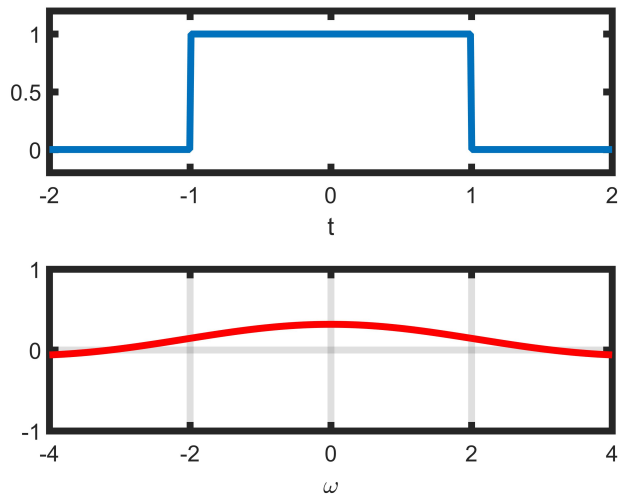


Figura 4.4: Pulso rectangular (arriba) y su transformada de Fourier (abajo).

4.4. Espectro de una señal con Octave

Este programa nos será muy útil a la hora de reconstruir señales, ya que podemos ver el espectro de una señal mediante su transformada. El programa es el siguiente:

```
T=1;                % periodo de muestreo
fs=256;            % frecuencia de muestreo
t=(0:1/fs:T);     % puntos de muestreo
N=length(t);
f=sin(5*2*pi*t);  % señal original

figure, plot(t,f), ylim=[-1.5,1.5], xlabel('Tiempo'),
title('Señal original')

F=fft(f)/sqrt(N);  % transformada de Fourier de f

                    % Para dibujarlo, despreciamos la
                    % mitad del dominio debido a la simetría

omega=0.5*fs*linspace(0,1,floor(N/2)+1); % vector de
                                         % frecuencias discretas

range=(1:floor(N/2)+1); % rango del espectro de potencia
P=abs(F(range)).^2;    % espectro de potencia de la señal f

figure, plot(omega,P),xlim([0,10]), xlabel('Frecuencia'),
title('Espectro de la señal f')
```

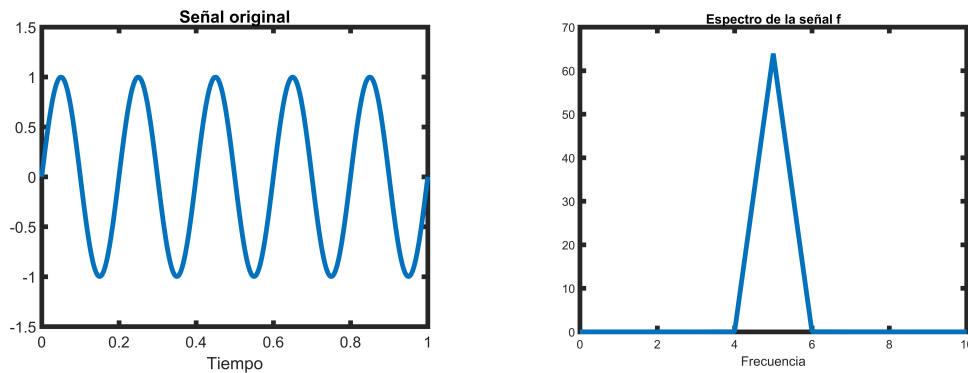



Figura 4.5: Señal original $f(t) = \sin(10\pi t)$ (izquierda). Vemos que la frecuencia de Nyquist se alcanza en 6 (derecha).

4.5. Espectro de una señal con ruido

Vamos a realizar un programa similar al anterior, pero con una función con ruido:

```

T=1; % periodo de muestreo
fs=2^9; % frecuencia de muestreo
t=(0:1/fs:T); % puntos de muestreo
N=length(t);
f=cos(10*2*pi*t)+cos(20*2*pi*t)+4*rand(size(t)); % señal original

figure, plot(t,f), ylim([-4,8.5]), xlabel('Tiempo'),
title('Señal original')

F=fft(f)/sqrt(N); % transformada de Fourier de f

% Para dibujarlo, despreciamos
% la mitad del dominio debido
% a la simetría
omega=0.5*fs*linspace(0,1,floor(N/2)+1);
% vector de frecuencias discretas
range=(1:floor(N/2)+1); % rango del espectro de potencia
P=abs(F(range)).^2; % espectro de potencia de la señal f

```

```
figure, plot(omega,P), xlabel('Frecuencia'),
title('Espectro de la señal f')
```

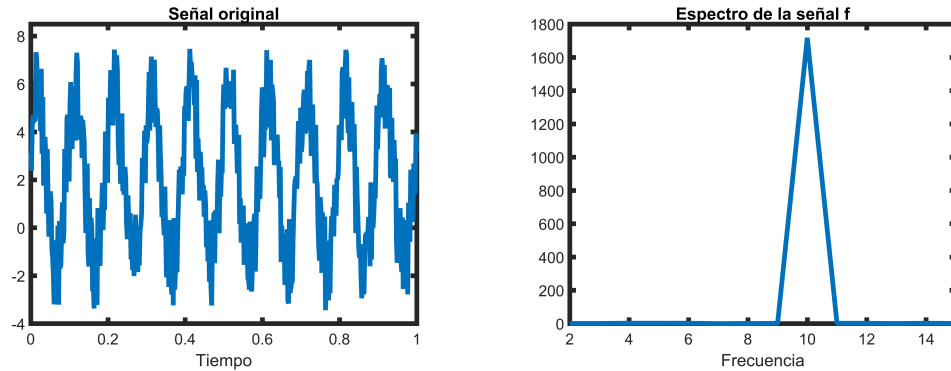


Figura 4.6: Señal original $f(t) = 2 \cos(20\pi t) + 3 \sin(20\pi t) + 4 \text{ random}(t)$ (izquierda) y espectro de nuestra señal (derecha).

4.6. Reconstrucción de señales con Maxima

Una de las utilidades más destacadas del teorema de muestreo es la reconstrucción de señales. La idea es que una señal analógica puede ser reconstruirla a través de sus muestras.

Como consecuencia del teorema de muestreo 3.4.1, para poder recuperar nuestra señal banda limitada a B se debe verificar que nuestra frecuencia de muestreo ν_s , sea mayor o igual que el doble de la frecuencia de Nyquist, es decir:

$$\nu_s = \frac{1}{a} \geq 2B.$$

Veamos un ejemplo con la señal $x(t) = \sin(2\pi t)$.

Si aplicamos el apartado anterior a nuestra señal para ver su frecuencia obtenemos:

```
T=1;                % periodo de muestreo
fs=256;            % frecuencia de muestreo
t=(0:1/fs:T);     % puntos de muestreo
N=length(t);
f=sin(2*pi*t);    % señal original

figure, plot(t,f), ylim([-1.5,1.5]), xlabel('Tiempo'),
title('Señal original')

F=fft(f)/sqrt(N);  % trasformada de Fourier de f

                    % Para dibujarlo, despreciamos la
                    % mitad del dominio debido a la simetría

omega=0.5*fs*linspace(0,1,floor(N/2)+1);
                    % vector de frecuencias discretas

range=(1:floor(N/2)+1); % rango del espectro de potencia
P=abs(F(range)).^2;   % espectro de potencia de la señal f

figure, plot(omega,P), xlim([-0.5 2.5]),
xlabel('Frecuencia'), title('Espectro de la señal f')
```

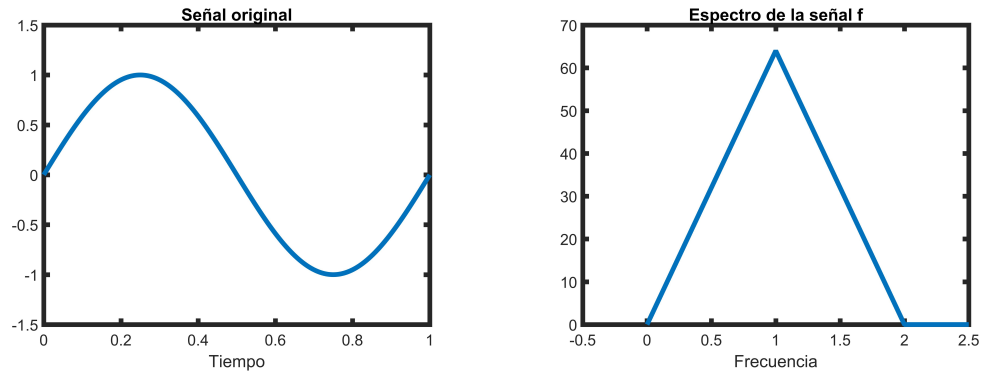


Figura 4.7: $x(t) = \sin(2\pi t)$ (izquierda). Espectro de $x(t) = \sin(2\pi t)$ (derecha).

Vemos como la frecuencia de Nyquist es 2, así que tomamos como frecuencia de muestreo 4, es decir, $a = 1/4$. Vamos a realizar un programa en Maxima que tome unas muestras de nuestra señal y, utilizando el teorema de muestreo, la reconstruya. El programa es el siguiente:

```
define(f(t),sin(2*%pi*t));

NN:10$ a:1/4$
tt:makelist( (k)*a , k,0,NN-1);
x:makelist(f((k)*a),k,0,NN-1);
dis:makelist( [tt[k],x[k]], k,1,NN);
ll:length(x);

sum(x[n]*sin((%pi/a)*(t-(n-1)*a))/((%pi/a)*(t-(n-1)*a)),n,1,ll);
define(fr(t),%);

plot2d([[discrete,dis],fr(t),f(t)], [t,0,2], [style,points,lines,
lines],[y,-3,3],
[legend,"Muestras","Reconstrucción","Original"],
[gnuplot_pdf_term_command,
"set term pdfcairo color solid lw 2 size 15 cm, 15 cm font \",24\""],
[pdf_file, "C:/Users/PC/AppData/Local/Temp/recuperacion.pdf"],
[style,points,[lines,3.5],[lines,3.5]]);
```

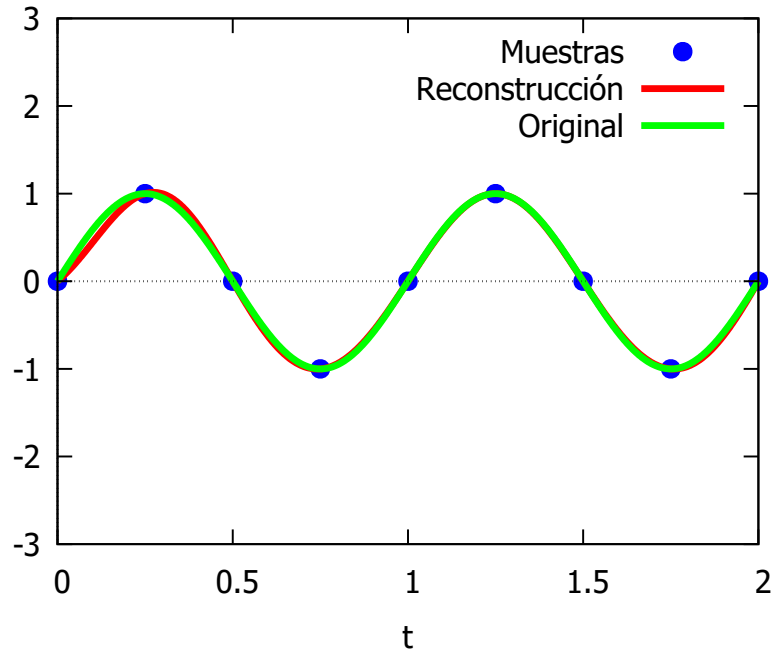


Figura 4.8: Recuperación de nuestra señal a partir de sus muestras.

Ahora realizamos una reconstrucción con dos armónicos.

Sea $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(3\pi t)$.

Aplicando los programas anteriores obtenemos:

```
T=1; % periodo de muestreo
fs=256; % frecuencia de muestreo
t=(0:1/fs:T); % puntos de muestreo
N=length(t);
f=sin(2*pi*t)+cos(3*pi*t); % señal original
```

```
figure, plot(t,f), ylim([-1.5,1.5]), xlabel('Tiempo'),
title('Señal original')
```

```

F=fft(f)/sqrt(N);           % transformada de Fourier de f

                               % Para dibujarlo, despreciamos la
                               % mitad del dominio debido a la simetría

omega=0.5*fs*linspace(0,1,floor(N/2)+1);
                               % vector de frecuencias discretas

range=(1:floor(N/2)+1);      % rango del espectro de potencia
P=abs(F(range)).^2;          % espectro de potencia de la señal f

figure, plot(omega,P), xlim([-0.5 12.5]),,ylim([0,38]),
xlabel('Frecuencia'), title('Espectro de la señal f')

```

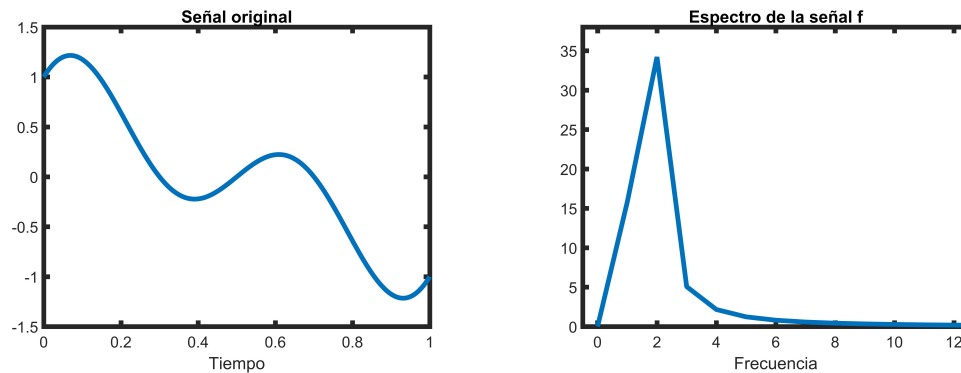


Figura 4.9: $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(3\pi t)$ (izquierda). Espectro de $x(t)$ (derecha).

La frecuencia de Nyquist está en torno a 8, así que podemos tomar por ejemplo, $a = 1/16$. Aplicando el programa anterior obtenemos:

```
define(f(t),sin(2*%pi*t)+cos(3*%pi*t));
```

```
NN:30$ a:1/16$
```

```

tt:makelist( (k)*a , k,0,NN-1);
x:makelist(f((k)*a),k,0,NN-1);
dis:makelist( [tt[k],x[k]], k,1,NN);
ll:length(x);

sum(x[n]*sin((%pi/a)*(t-(n-1)*a))/((%pi/a)*(t-(n-1)*a )),n,1,ll);
define(fr(t),%);

plot2d([[discrete,dis],fr(t),f(t)], [t,0,2], [style,points,lines,
lines], [y,-3,3],
[legend,"Muestras","Reconstrucción","Original"],
[gnuplot_pdf_term_command,
"set term pdfcairo color solid lw 2 size 15 cm, 15 cm font \",24\""],
[pdf_file, "C:/Users/PC/AppData/Local/Temp/recuperacion.pdf"],
[style,points,[lines,3.5],[lines,3.5]]);

```

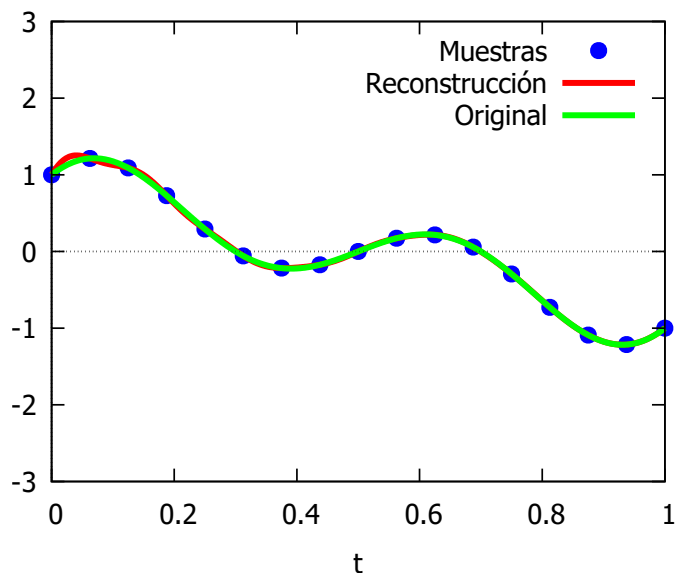


Figura 4.10: Recuperación de nuestra señal a partir de sus muestras.

4.7. Reconstrucción de señales con Octave

Realizamos un programa similar al anterior, pero esta vez usando Octave: Vamos a reconstruir $x(t) = 2 \cos(10\pi t)$:

```
T=0.1;
f=5;

no=0:0.0001:1;
xo=cos(2*pi*f*no);

n=(0:T:1)';
xs=cos(2*pi*f*n);
t=linspace(0,1,1/0.0001)';
ya=sinc((1/T)*t(:,ones(size(n)))-(1/T)*n(:,ones(size(t))))'*xs;

plot(n,xs,'or',t,ya,'r',no,xo,'b');grid;
legend('Muestras','Reconstruida','Original');
xlabel('Tiempo');
axis([0 1 -1.9 1.9]);
```

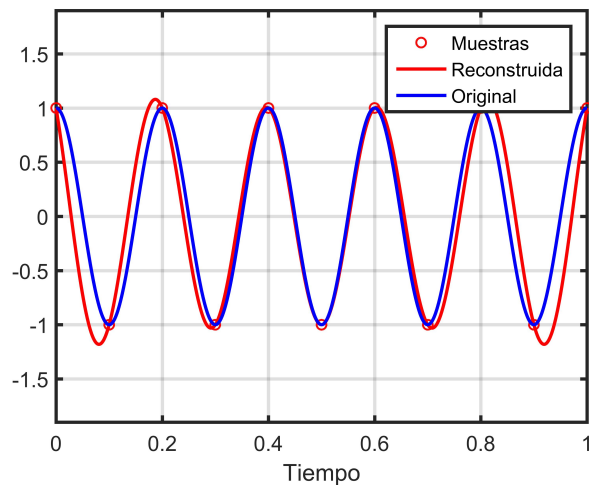


Figura 4.11: Recuperación de nuestra señal a partir de sus muestras.

Por último, vamos a realizar un ejemplo más complejo con nuestro programa en Octave. Para ello, sea $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(68\pi t) - \cos(5\pi t)$.

```
T=0.01;
f=1;
no=0:0.0001:10;
xo=cos(2*pi*f*no)+sin(34*pi*2*f*no)-cos(5*pi*f*no);

n=(0:T:1)';
xs=cos(2*pi*f*n) +sin(34*pi*2*f*n)-cos(5*pi*f*n);
t=linspace(0,1,1/0.0001)';
ya=sinc((1/T)*t(:,ones(size(n)))-(1/T)*n(:,ones(size(t))))'*xs;

plot(n,xs,'or',t,ya,'r',no,xo,'b');grid;
legend('Muestras','Reconstruida','Original');
xlabel('Tiempo');
axis([0 1 -3.3 3.3]);
```

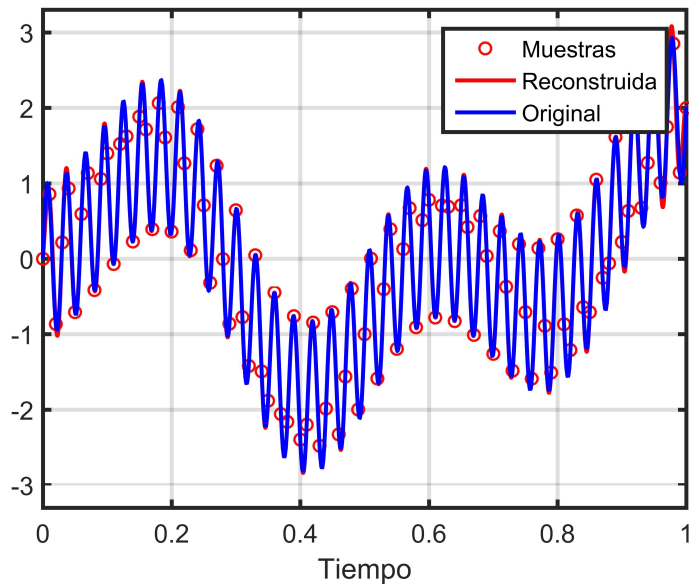


Figura 4.12: Recuperación de nuestra señal a partir de sus muestras.

4.8. Aliasing

Vamos a ver algunos ejemplos más del fenómeno del aliasing.

Como hemos estudiado en el apartado anterior, este fenómeno aparece cuando nuestra frecuencia de muestreo no verifica la condición impuesta por el teorema de muestreo, es decir, cuando no se verifica que $\nu_s = 1/a \geq 2B$.

Veamos un ejemplo. En el programa 4.8, si $a = 1$ vemos que:

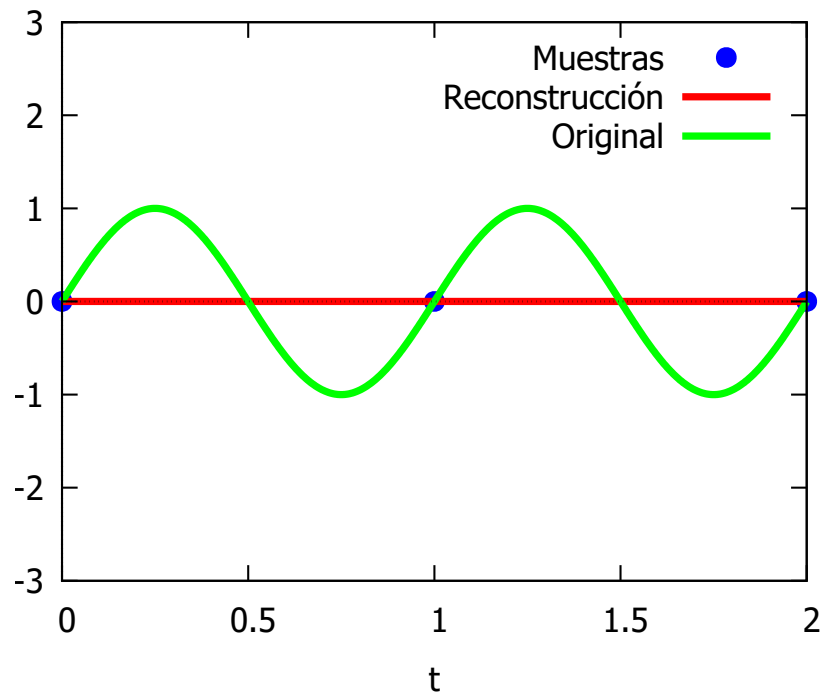


Figura 4.13: Error al recuperar la señal original.

Observamos la gran importancia de la tomar nuestras muestras de forma “adecuada”, ya que de lo contrario obtenemos una señal totalmente distinta a la original:

```

T=0.1;
f=8;

no=0:0.0001:1;
xo=cos(2*pi*f*no);

n=(0:T:1)';
xs=cos(2*pi*f*n);
t=linspace(0,1,1/0.0001)';
ya=sinc((1/T)*t(:,ones(size(n)))-(1/T)*n(:,ones(size(t))))'*xs;

plot(n,xs,'or',t,ya,'r',no,xo,'b');grid;
legend('Muestras','Reconstruida','Original');
xlabel('Tiempo');
axis([0 1 -1.9 1.9]);

```

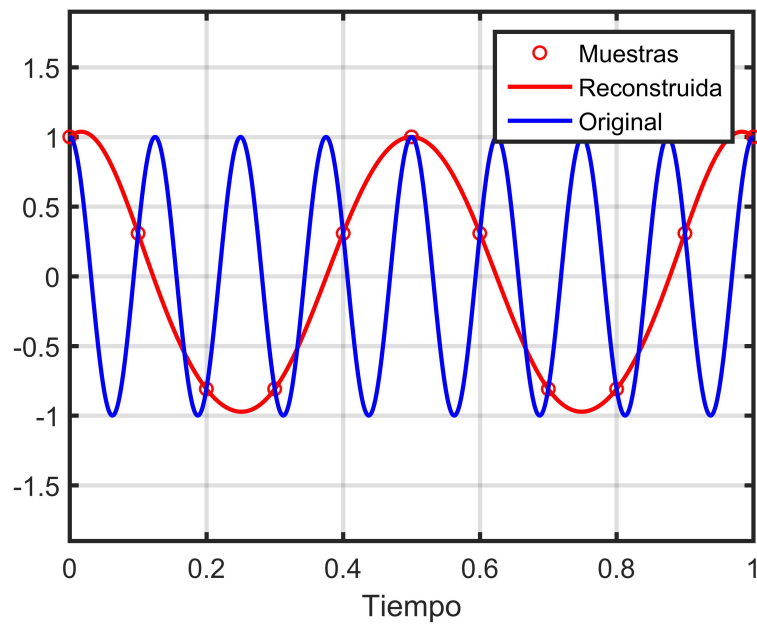


Figura 4.14: Error al recuperar la señal original.

```

T=0.1;
f=1;
no=0:0.0001:10;
xo=cos(2*pi*f*no)+sin(34*pi*2*f*no)-cos(5*pi*f*no);

n=(0:T:1)';
xs=cos(2*pi*f*n) +sin(34*pi*2*f*n)-cos(5*pi*f*n);
t=linspace(0,1,1/0.0001)';
ya=sinc((1/T)*t(:,ones(size(n)))-(1/T)*n(:,ones(size(t))))'*xs;

plot(n,xs,'or',t,ya,'r',no,xo,'b');grid;
legend('Muestras','Reconstruida','Original');
xlabel('Tiempo');
axis([0 1 -3.3 3.3]);

```

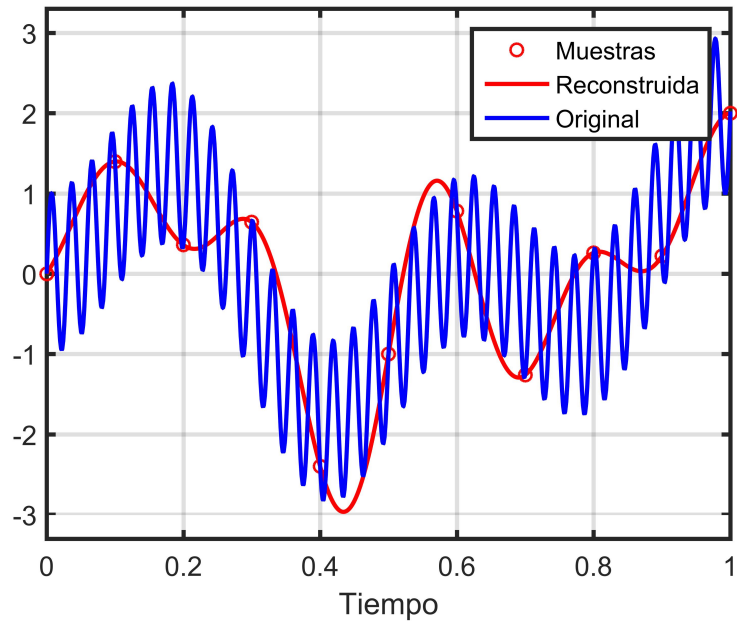


Figura 4.15: Error al recuperar la señal original.

4.9. Lista de programas

Para finalizar el trabajo, damos una breve lista con los programas más significativos para todos aquellos que deseen descargarlos. El enlace de descarga es el siguiente: <http://euler.us.es/~renato/clases/tfg/jgf/>.

- *aliasing414*: Aliasing producido en 4.14.
- *aliasing415*: Aliasing de la figura 4.15.
- *aliasingfigura413*: Aliasing programado con Maxima en 4.13.
- *espectroctave45*: Cálculo del espectro de una señal, figura 4.5.
- *espectrorecuperacion47*: Cálculo del espectro de una señal con la idea de encontrar la frecuencia de Nyquist, y así poder reconstruirla, lo vemos en 4.7.
- *espectrorecuperacion49*: Buscamos nuevamente encontrar la frecuencia de Nyquist, y así poder reconstruir nuestra señal original, esta vez tenemos dos armónicos como apreciamos en 4.9.
- *espectroruido46*: Espectro de una señal con ruido 4.6.
- *gaussianafigura22*: Gaussiana y su transformada de Fourier, figura 2.2.
- *recuperacion48*: Recuperación de una señal a partir de sus muestras, como vemos en 4.8.
- *recuperacion410*: Recuperación de una señal con dos armónicos a partir de sus muestras, 4.10.
- *recuperacionoctave411*: Recuperación de una señal utilizando Octave, en este caso ejemplo 4.11.
- *recuperacionoctave412*: Recuperación de una señal que posee tres armónicos 4.12.

Bibliografía

- [1] Renato Álvarez Nodarse. *Introducción al Maxima CAS con algunas aplicaciones*. Universidad de Sevilla, 2018.
<http://euler.us.es/~renato/clases/maxima/manualcurso/intro-maxima.pdf>.
- [2] Renato Álvarez Nodarse. *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*. *Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano*, número 26. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2003.
- [3] J. Duoandikoetxea. *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. UNAM-Mangua, 2003.
<http://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/analisisdefourier/Duoandikoetxeafourier.pdf>.
- [4] José Antonio Facenda Aguirre y Francisco José Freniche Ibáñez. *Integración de funciones de varias variables*. PIRÁMIDE, 2002.
- [5] Deguang Han, Keri Kornelson, David Larson, Eric Weber. *Frames for Undergraduates*. American Mathematical Society, 2007.
- [6] Jesús Hernández Alonso. *200 años de convergencia de las series de Fourier*. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 10.3, 2007.
http://personales.unican.es/lafernandez/200a%C3%B1os_convergencia_series_Fourier.pdf.
- [7] Robert J. Marks. *Handbook of Fourier Analysis and Its Applications*. Oxford University, 2009.
- [8] Richard James Martin. *Irregularly Sampled Signals: Theories and Techniques for Analysis*. University College London, 1998.

- [9] Athanasios Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill Companies City, 1977.
- [10] José María Valiente Cifuentes. *Manual de iniciación a GNU Octave*. E.U. Politécnica de Teruel, 2006.
http://softlibre.unizar.es/manuales/aplicaciones/octave/manual_octave.pdf.