DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Una Introducción Geométrica a la Teoría de Kaluza-Klein

Memoria realizada por Adrián Arenas Gullo

Dirigida por:

V^{o}B^{o}

Dr. Alfonso Carriazo Rubio

“I like mathematics because it is not human and has nothing particular to do with this planet or with the whole accidental universe - because, like Spinoza’s God, it won’t love us in return.”

Bertrand Russell

Abstract

In this work, we introduce some of the mathematical foundations that are needed to develop the ancestor of unifying theories: Kaluza-Klein theory. We start summarizing the main concepts about smooth manifolds. After that, we include some notions about semi-Riemannian geometry, such as its metric, basic concepts like the affine connections and the construction of warped products. Only then, we are able to go deeper into the physical aspect of this work, introducing some elements of the Theory of Relativity which allow us to define the concept of space-time. Finally, we deal with the concept of a fiber bundle, which is essential for us to present the Kaluza-Klein spaces.

Índice general

Introducción

Desde el momento en que nacemos, o desde el momento en que nuestro sistema nervioso está suficientemente desarrollado, empezamos a recibir estímulos procedentes de lo que hoy denominamos universo. Debido a que nuestro cuerpo presenta cierta complejidad biológica, somos capaces de responder a estos estímulos y, en cierto modo, interpretarlos. Esto nos lleva, finalmente, a cuestionarnos la naturaleza del universo.

Dejando de lado las cuestiones propias de la metafísica y ciñéndonos pues a la mera física, parece natural afirmar que un sinfín de estas han sido respondidas de forma satisfactoria. Gracias al volumen de información al que tenemos acceso en estos días, una gran proporción de la población (independientemente de su formación científica) tiene ciertas nociones, más o menos acertadas, sobre cuestiones de una magnitud tal como el origen del universo o las interacciones por las que este se rige. A mi parecer, sin embargo, son las propias preguntas y no las respuestas quienes toman el papel protagonista en las ciencias y en las matemáticas. Citando a Georg Cantor: "In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it".

El avance de las matemáticas y, como es lógico, la confirmación experimental de numerosas teorías nos han permitido dar los pasos necesarios para llegar a la posición en que nos encontramos actualmente. En este trabajo recorremos (como es usual) el camino del conocimiento en el orden inverso a aquel en que históricamente surgen los interrogantes: Topología, Geometría y Física.

Así pues, tratamos en primer lugar con el concepto de *variedad diferenciable*, que surge de una necesidad de extender los conceptos naturales de curva o superficie a dimensiones superiores. Para ello, procedemos a identificar (localmente) un espacio topológico con copias de $\mathbf{R}^m$ deformadas mediante un difeomorfismo.

A continuación, con el fin de introducir elementos propios de la geometría, que parece ser la disciplina apropiada a la hora de describir la forma del universo, dotamos a nuestras variedades de una métrica. Así pues, pasamos al estudio de las *variedades semi-Riemannianas*, cuya métrica surge de generalizar las métricas Riemannianas. De la geometría con que dotamos a las variedades surge la *conexión de Levi-Civita*, caso particular de la *conexión afín* (cuya descripción no precisa de una métrica). También a partir de la geometría surge el *producto warped*, cuya métrica es más rica que la de las variedades producto.

Tras todo este desarrollo, estamos en condiciones de estudiar nuestro universo. Gracias a la geometría expuesta anteriormente, conseguimos no solamente describir su forma en el espacio (en un instante concreto), sino su forma en el tiempo. Con esto nos referimos, por un lado, a la formalización de una idea tan natural para nuestra mente como es la causalidad. Por otro lado, somos también capaces de estudiar la evolución temporal del universo, en un modelo cosmológico general: el *espacio-tiempo de Robertson-Walker*.

Finalmente, aunque la idea de recorrer el camino del conocimiento en orden inverso parecía bastante ordenada y, por tanto, placentera, debemos echar la vista hacia atrás para volver a introducir algo de Topología (y algo de Álgebra). De este modo podemos describir los *fibrados principales*, que juegan un papel destacado a la hora de describir la *teoría de Kaluza-Klein*.

Como autor del texto, sentiría cierto amargor por no haber conseguido hacer el ordenado camino de ida y vuelta de la forma que anticipé. No obstante, este es el camino que seguimos para dar respuestas a los interrogantes planteados durante el transcurso de la historia. Ahora bien, debemos recordar los párrafos introductorios, cuya intención no era simplemente la de cautivar al lector con reflexiones propias de la divulgación. Como ya mencioné, considero que las preguntas son las verdaderas protagonistas de las ciencias y las matemáticas. El final del trabajo y, concretamente, el legado de la teoría de Kaluza-Klein siguen la tónica de esta posición. Esta teoría es propuesta en un momento en el que la física teórica está explotando. De este modo, el orden en que clásicamente se sigue el camino se ve alterado, como podemos observar en muchas de las teorías modernas, en las que es usual construir modelos matemáticos bastante sofisticados empleando ramas de las matemáticas (a priori) inesperadas. Estos modelos se asemejan a preguntas interesantes que le planteamos a la naturaleza, y que solamente pueden ser respondidas (en el caso de que puedan serlo), tras mucho tiempo de experimentación. No obstante, estas predicciones teóricas tienen un gran valor per se.

Tras esta contextualización en el marco del pensamiento científico, estamos en posición para comenzar con la exposición de las ideas que engloba este trabajo. No obstante, me gustaría aprovechar este momento para dar las gracias a aquellas personas sin las cuales no habría sido capaz de llegar hasta aquí. Doy las gracias, en primer lugar, a mi familia; tanto a los que siguen conmigo como a los que me han dejado, ya que sin ellos no habría soportado la presión que han supuesto estos duros años de estudios. A continuación, quiero dar las gracias a mis amigos, quienes me han rodeado en una etapa de mi vida marcada por fuertes emociones, tanto en el peor como en el mejor de los sentidos. Por último, me gustaría dedicar mi más sincero agradecimiento a todos los profesores y divulgadores que han cultivado mi mente y alentado mi curiosidad. En particular, doy las gracias a mi director del trabajo de fin de grado por sus cualidades, tanto humanas como académicas, y por su inagotable dedicación.

Capítulo 1

Variedades Diferenciables

En este capítulo introducimos definiciones y resultados que nos serán necesarios en los capítulos venideros. Las Variedades Diferenciables son la estructura topológica sobre la que se sustenta el marco teórico de la Física (en particular, la cosmología). Esta base teórica se desarrolla tal y como se estudia en la asignatura “Variedades Diferenciables” de 4º curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla (véase [3]). Para un tratamiento en mayor profundidad, podemos remitirnos, por ejemplo, a [2].

En general, para evitar extendernos demasiado, presentamos una lista de definiciones y resultados.

1.1. Variedades diferenciables.

En todo lo que sigue y salvo mención explícita en contra, se supondrá que M es un espacio topológico T_2 y 2ºN.

Definición 1.1.1 Una *carta local* de dimensión m en M es un par (U, φ) tal que:

1. U es un abierto de M, denominado *dominio* de la carta.

2. φ es un homeomorfismo de U en un abierto $\varphi(U)$ de $\mathbf{R}^m$, llamado *aplicación coordenada* de la carta.

Definición 1.1.2 Dada una carta local (U, φ) de M de dimensión m y dado $p \in U$, a las coordenadas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de $\varphi(p) \in \varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^m$ se les llama *coordenadas locales* de p respecto de la carta (U, φ). Por esta razón, también se denomina a las cartas *sistemas locales de coordenadas* (s.l.c.).

Considerando las proyecciones canónicas $u_i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}, i = 1, \ldots, m$ (en particular, se pueden pensar con dominio en $\varphi(U)$) y denotando por x_i a la función $x_i = u_i \circ \varphi : U \to \mathbf{R}$, se tiene que $\varphi(p) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (x_1(p), \ldots, x_m(p))$, pues, para cualquier $i = 1, \ldots, m$, $\lambda_i = u_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = u_i(\varphi(p)) = x_i(p)$.

Definición 1.1.3 Dada una carta local (U, φ) de M, las funciones x_i, $i = 1, \ldots m$, se llaman *funciones componentes* (o *funciones coordenadas*) de la carta y se escribe $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$.

Definición 1.1.4 Se dice que dos cartas locales de dimensión m sobre M, (U, φ) y (V, ψ) están *relacionadas* si se verifica una de las dos condiciones siguientes:

1. $U \cap V = \emptyset$, ó
2. Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las aplicaciones (llamadas *aplicaciones de transición* o *aplicaciones de cambio* de las cartas),

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

y

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

son de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Obsérvese que tanto $\varphi(U \cap V)$ como $\psi(U \cap V)$ son abiertos de $\mathbf{R}^m$.

Definición 1.1.5 Un *atlas* (de dimensión m) en M es una familia de cartas locales (de dimensión m) sobre M tales que sus dominios recubren a M y que dos a dos están relacionadas. Un atlas se dice *maximal* si no está propiamente contenido en otro atlas.

Definición 1.1.6 Dos atlas de la misma dimensión sobre M se dicen *compatibles* o *equivalentes* si su unión es otro atlas.

Proposición 1.1.7 *La relación de compatibilidad entre atlas de la misma dimensión es una relación de equivalencia.*

Definición 1.1.8 Una *variedad diferenciable* de dimensión m es un par $(M, \mathcal{A})$ donde M es un espacio topológico T_2 y $2^{\underline{o}}N$ y $\mathcal{A}$ un atlas de dimensión m sobre M. A la clase de equivalencia por la relación anterior del atlas $\mathcal{A}$ (o, por abuso del lenguaje, al propio atlas $\mathcal{A}$) se le llama *estructura diferenciable* de la variedad.

Cuando no haya lugar a confusión, se dirá que M es la variedad diferenciable, omitiendo nombrar explícitamente el atlas.

Por otra parte y en virtud de la definición de atlas, dado un punto p de una variedad diferenciable M, siempre existe una carta local (U, φ) de la estructura diferenciable tal que $p \in U$. Esta carta se denomina *carta entorno de* p. Es más, puede conseguirse fácilmente que $\varphi(p) = 0$ (simplemente, componiendo con la traslación correspondiente en $\mathbf{R}^m$). En tal caso, se dice que la carta está *centrada* en p.

1.2. Aplicaciones diferenciables.

En esta sección seguimos definiendo algunos conceptos de gran relevancia. Concretamente, nos centramos en el concepto de aplicación diferenciable y la noción de difeomorfismo.

Definición 1.2.1 Sean M y N dos variedades diferenciables y $G \subseteq M$ un abierto. Una aplicación continua $f : G \to N$, se dice *diferenciable en un punto* $p \in G$ si existe una carta local (U, φ) en M entorno de p y existe una carta local (V, ψ) en N entorno de $f(p)$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(G \cap U \cap f^{-1}(V)) \to \psi f(G \cap U \cap f^{-1}(V))$$

es diferenciable en un entorno de $\varphi(p)$ contenido en $\varphi(G \cap U \cap f^{-1}(V))$. La aplicación f se dice diferenciable en G si es diferenciable en todos los puntos de G.

Proposición 1.2.2 *La definición anterior no depende de las cartas elegidas entornos de p y $f(p)$, respectivamente.*

Obsérvese que, por definición, toda aplicación diferenciable es continua. Al conjunto de las aplicaciones continuas de G en N y diferenciables en G se denota por $\mathcal{F}(G, N)$. En particular, si $G = M$, se tiene el conjunto $\mathcal{F}(M, N)$ de las aplicaciones diferenciables de todo M en N.

Proposición 1.2.3 *Una aplicación continua $f : M \to N$ pertenece a $\mathcal{F}(M, N)$ si y sólo si para cualesquiera cartas locales (U, φ) en M y (V, ψ) en N tales que $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ se tiene que:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi f(U \cap f^{-1}(V))$$

es diferenciable.

Definición 1.2.4 Una aplicación biyectiva $f \in \mathcal{F}(M, N)$ se dice que es un *difeomorfismo* si $f^{-1} \in \mathcal{F}(N, M)$. Dos variedades diferenciables se dicen *difeomorfas* si existe un difeomorfismo entre ambas.

Cuando la variedad N es $\mathbf{R}$ con su estructura euclídea, las aplicaciones de M en $\mathbf{R}$ se suelen llamar funciones. Así, a una función continua $f : G \to \mathbf{R}$, si es diferenciable en un punto $p \in M$, se llama *función diferenciable en p* y al conjunto de tales funciones se denota por $\mathcal{F}(p)$ y si es diferenciable en todo G (que podría ser el propio M), se llama *función diferenciable en G* y el conjunto de tales funciones se denota por $\mathcal{F}(G)$, verificándose que:

$$\mathcal{F}(G) = \bigcap_{p \in G} \mathcal{F}(p).$$

Proposición 1.2.5 *Dado un abierto $G \subseteq M$, una aplicación continua $f : G \to \boldsymbol{R}$ es diferenciable en G si y sólo si para toda carta local (U, φ) de M, tal que $U \cap G \neq \emptyset$, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap G) \to \boldsymbol{R}$ es diferenciable.*

Ejemplo 1.2.6 Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ un s.l.c. Entonces:

1. $x_i \in \mathcal{F}(U)$, para todo $i = 1, \ldots, m$.
2. Sea $f \in \mathcal{F}(U)$. Dado cualquier $i = 1, \ldots, m$ se define:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : p \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{partial x_i}\right)_p = \left(\frac{(\partial f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}\right)_{\varphi(p)} \in \mathbf{R}.$$

   Se cumple que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{F}(U)$, $i = 1, \ldots, m$.

Proposición 1.2.7 (Lema de Extensión de Funciones Diferenciables). *Sea $h \in \mathcal{F}(G)$, donde G es un abierto conteniendo a $p \in M$. Entonces, existen un entorno abierto V de p, con $\overline{V} \subseteq G$ y una función $f \in \mathcal{F}(M)$ tales que $f \equiv h$ en V y $f \equiv 0$ en $M - G$.*

Teorema 1.2.8 *Una aplicación continua $f \in \mathcal{F}(M, N)$ si y sólo si para toda función $g \in \mathcal{F}(N)$, $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$.*

1.3. Vectores tangentes.

En esta tercera sección seguimos introduciendo algunos conceptos y resultados necesarios para el estudio y posterior comprensión de los capítulos siguientes. Entre todos ellos, podemos destacar la definición de vector tangente y la noción de espacio tangente.

Definición 1.3.1 Una *curva diferenciable* en una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$, donde (a, b) es un intervalo abierto (degenerado o no) de la recta real.

Definición 1.3.2 Sea $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ una curva diferenciable en M y $t_0 \in (a, b)$. Se llama *vector tangente* a la curva α en $\alpha(t_0)$ a la aplicación

$$\alpha'(t_0) : \mathcal{F}(\alpha(t_0)) \to \mathbf{R} : f \mapsto \alpha'(t_0)f = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ \alpha)}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}.$$

Una curva diferenciable $\alpha : (a, b) \to M$ en una variedad diferenciable M se dice *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$, para cualquier $t \in (a, b)$.

Proposición 1.3.3 *Sean $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ una curva diferenciable en M, $t_0 \in (a, b)$, $f, g \in \mathcal{F}(\alpha(t_0))$ y $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$. Entonces, el vector tangente a α en $\alpha(t_0)$ verifica las siguientes propiedades:*

1. $\alpha'(t_0)(\lambda f + \mu g) = \lambda\alpha'(t_0)f + \mu\alpha'(t_0)g$.
2. $\alpha'(t_0)(fg) = f(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)g + g(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)f$.

Proposición 1.3.4 *Sean $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ una curva diferenciable en M, $t_0 \in (a, b)$ y $f, g \in \mathcal{F}(\alpha(t_0))$ tales que coinciden en un entorno de $\alpha(t_0)$. Entonces $\alpha'(t_0)f = \alpha'(t_0)g$.*

Definición 1.3.5 Sea $p \in M$. Se llama *vector tangente* a M en p al vector tangente en p a cualquier curva diferenciable en M que pase por p. Al conjunto de los vectores tangentes a M en p se le llama *espacio tangente* a M en p.

Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ es un s.l.c. entorno de p, entonces

$$\varphi(p) = (p_1, \ldots, p_m) \in \varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^m.$$

Para cada $i = 1, \ldots, m$, sea $\epsilon > 0$ tal que

$$(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \ldots, p_m) \in \varphi(U),$$

con $|t| < \epsilon$, que existe ya que $\varphi(U)$ es abierto. Entonces

$$\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \to M : t \mapsto \varphi^{-1}((p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \ldots, p_m))$$

es una curva diferenciable en M, con $\alpha_i(0) = p$ y $\alpha_i'(0)$ es, por tanto, un vector tangente a M en p, que se denotará por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

A partir de ahora, se denotará:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p, \ i = 1, \ldots, m.$$

Por las propiedades de los vectores tangentes a curvas, se deduce que todo vector tangente a M en p es una aplicación $u : \mathcal{F}(p) \to \mathbf{R}$, verificando:

1. $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g),\ f, g \in \mathcal{F}(p),\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ (condición de $\mathbf{R}$–linealidad);
2. $u(fg) = f(p)u(g) + g(p)u(f),\ f, g \in \mathcal{F}(p)$ (Condición de Leibnitz);
3. $u(f) = u(g)$, si $f, g \in \mathcal{F}(p)$ coinciden en un entorno de p.

Si se denota por $T_p(M)$ al conjunto de las aplicaciones $u : \mathcal{F}(p) \to \mathbf{R}$ que son $\mathbf{R}$–lineales y que satisfacen la Condición de Leibnitz, se puede probar que dicho conjunto es, realmente, el espacio tangente a M en p. Este es, de hecho, un espacio vectorial.

Lema 1.3.6 *Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $u \in T_p(M)$.*

1. *Si $c \in \mathcal{F}(M)$ es la función constante dada por $c(q) = c$ para todo $q \in M$ y $c \in \boldsymbol{R}$, entonces, se verifica que $u(c) = 0$.*

2. *Si $f \in \mathcal{F}(p)$ se anula en un entorno de p, entonces $u(f) = 0$.*

3. *Si $f, g \in \mathcal{F}(p)$ coinciden en un entorno de p, entonces $u(f) = u(g)$.*

Sea ahora un s.l.c. $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ entorno de p. Dados $u \in T_p(M)$ y cualquier función $f \in \mathcal{F}(p)$, en virtud de los lemas anteriores se tiene que:

$$u = \sum_i u(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p . \tag{1.3.1}$$

En particular, si $\alpha : (a, b) \to M$ es una curva sobre M con $\alpha(t_0) = p$, como $\alpha'(t_0) \in T_p(M)$:

$$\alpha'(t_0) = \sum_i \alpha'(t_0) x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_i \left. \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \alpha)}{\mathrm{d}t} \right|_{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p .$$

Usando esta expresión, puede deducirse que, dado $u \in T_p(M)$ y considerando la curva diferenciable en M,

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M : t \mapsto \varphi^{-1}((p_1 + tu(x_1), \ldots, p_m + tu(x_m))),$$

para cierto $\epsilon > 0$ que existe por la continuidad de φ, donde $(p_1, \ldots, p_m) = \varphi(p)$, se verifica que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = u$.

Teorema 1.3.7 *El conjunto de los vectores tangentes a una variedad diferenciable M en un punto p es $T_p(M)$, es decir, los vectores tangentes a M en p son las aplicaciones $\boldsymbol{R}$–lineales de dominio $\mathcal{F}(p)$ con valores reales que verifican la Condición de Leibnitz.*

Teorema 1.3.8 *Dado un punto p de una variedad diferenciable M y una carta local $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ entorno de p, los vectores tangentes*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p , \; i = 1, \ldots, m,$$

forman una base de $T_p(M)$, con lo que $\dim(T_p(M)) = m$.

Definición 1.3.9 Dado un punto p de una variedad diferenciable M, se llama *espacio cotangente* a M en p al espacio vectorial dual del espacio tangente a M en p, que se denota por $T_p^*(M)$ y a cuyos elementos se llaman *covectores* en p.

Recuérdese que $T_p^*(M) = \{u^* : T_p(M) \to \mathbf{R} / u^* \text{es lineal}\}$.

Definición 1.3.10 Sea $f \in \mathcal{F}(p)$. Se llama *diferencial* de f en p a la función $(\mathrm{d}f)_p : T_p(M) \to \mathbf{R}$ tal que $(\mathrm{d}f)_p u = u(f)$, para cualquier vector $u \in T_p(M)$.

Proposición 1.3.11 *Dada* $f \in \mathcal{F}(p)$*, entonces* $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*(M)$.

Dado $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ un s.l.c. entorno de p, en virtud de la proposición anterior se tiene que $(\mathrm{d}x_i)_p \in T_p^*(M)$, para cualquier $i = 1, \ldots, m$. Además, se puede comprobar fácilmente que $\{(\mathrm{d}x_i)_p\}_{i=1,\ldots,m}$ es una base de $T_p^*(M)$, dual de la base $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\}_{i=1,\ldots,m}$ de $T_p(M)$.

Proposición 1.3.12 *Todo covector en p es la diferencial de alguna función diferenciable en p.*

1.4. Aplicación diferencial y aplicación codiferencial.

Como su propio título indica, en esta sección presentamos los conceptos fundamentales de aplicación diferencial y codiferencial, así como el (particularmente útil) resultado de la regla de la cadena para cada una de ellas.

Definición 1.4.1 Sean M y N dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$. Se llama *diferencial* de f en p a la aplicación $f_{*p} : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ definida de la siguiente forma: si $u \in T_p(M)$ es cualquier vector tangente a M en p y $\alpha : (a, b) \to M$ es una curva diferenciable que pasa por p y cuyo vector tangente en p es u (es decir, si existe $t_0 \in (a, b)$ con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = u$), entonces $f_{*p} u = (f \circ \alpha)'(t_0)$.

Proposición 1.4.2 *Si* $f \in \mathcal{F}(M, N)$*,* $p \in M$*,* $u \in T_p(M)$ *y* $g \in \mathcal{F}(f(p))$*, entonces se verifica:*

$$(f_{*p} u) g = u(g \circ f).$$

Proposición 1.4.3 (Propiedades de la Diferencial).

1. **(Regla de la Cadena).** *Sean* $f \in \mathcal{F}(M, N)$ *y* $g \in \mathcal{F}(N, P)$*. Entonces, para cualquier* $p \in M$ *se verifica que* $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$.

2. *Dado* $p \in M$*, entonces* $(\mathrm{Id}_M)_{*p} = \mathrm{Id}_{T_p(M)}$.

3. *Si* $f, g \in \mathcal{F}(M, N)$ *y* $f \equiv g$ *en un entorno de* $p \in M$*, entonces* $f_{*p} = g_{*p}$.

Proposición 1.4.4 *La diferencial en cada punto de una aplicación diferenciable es una aplicación lineal.*

Definición 1.4.5 La matriz jacobiana de la aplicación $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ se denomina *matriz jacobiana* de f en p respecto de las cartas dadas. En el caso en que $\dim(M) = \dim(N)$, el determinante de esta matriz se llama *jacobiano* de f en p y se denota por $J_p(f)$.

Definición 1.4.6 Una aplicación $f \in \mathcal{F}(M, N)$ se dice que es una *inmersión* si su diferencial en cada punto es una aplicación inyectiva y se dice que es una *sumersión* si su diferencial en cada punto es una aplicación sobreyectiva.

Definición 1.4.7 Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$. Se llama *aplicación codiferencial* de f en p a la aplicación dual de f_{*p}, denotada por f_p^* y dada por

$$f_p^* : T^*_{f(p)}(N) \to T^*_p(M) : \omega \mapsto f_p^* \omega$$

tal que, para cualquier $u \in T_p(M)$, $(f_p^* \omega)u = \omega(f_{*p} u)$.

Proposición 1.4.8 (Regla de la Cadena de la Codiferencial). *Sean* $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $g \in \mathcal{F}(N, P)$ *y* $p \in M$*. Entonces, se verifica que* $(g \circ f)_p^* = f_p^* \circ g^*_{f(p)}$.

Proposición 1.4.9 *Sean* $f \in \mathcal{F}(M, N)$ *y* $p \in M$*. Entonces, se verifican:*

1. f_{*p} *es inyectiva si y sólo si* f_p^* *es sobreyectiva.*

2. f_{*p} *es sobreyectiva si y sólo si* f_p^* *es inyectiva.*

1.5. Noción de subvariedad.

En esta sección presentamos la definición de subvariedad y el Teorema de la Función implícita. Las subvariedades tendrán una gran relevancia en los capítulos siguientes.

Definición 1.5.1 Una *subvariedad* de una variedad diferenciable N es un par (M, f), donde M es otra variedad diferenciable y $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es una inmersión inyectiva.

Definición 1.5.2 Se dice que una aplicación $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es una *incrustación* si es un homeomorfismo sobre su imagen, dotada ésta de la topología relativa de N, es decir, si $f : M \to f(M) \subseteq N$ (dando a $f(M)$ la topología relativa de N) es una aplicación biyectiva, continua y abierta o cerrada.

Definición 1.5.3 Una subvariedad (M, f) de una variedad diferenciable N se dice que es una *subvariedad regular* si f es, además, una incrustación.

Definición 1.5.4 Dos subvariedades (M_1, f_1) y (M_2, f_2) de una variedad N se dice que son *equivalentes* si existe un difeomorfismo $f : M_1 \to M_2$ tal que $f_1 = f_2 \circ f$.

Puede comprobarse sin dificultad que ésta es una relación de equivalencia en la clase de todas las subvariedades de N, que permite trabajar con más comodidad con dicha clase.

Proposición 1.5.5 *Cada clase de equivalencia de subvariedades de una variedad diferenciable N tiene un único representante de la forma (A, i) donde A es un subconjunto de N con estructura de variedad diferenciable y la inclusión $i : A \hookrightarrow N$ es una inmersión.*

Teorema 1.5.6 (Teorema de la Función Implícita). *Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables, $q \in N$ y $P = f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$. Si f_{*p} es sobreyectiva, para cualquier $p \in P$, entonces P tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que (P, i) es una subvariedad regular de M de dimensión* $\dim(M) - \dim(N)$.

1.6. Campos de vectores diferenciables.

En esta sección detallaremos el concepto de campo de vectores diferenciables, y estudiaremos las principales propiedades de dichos campos. Como podremos observar más adelante, este concepto nos será de gran utilidad.

Definición 1.6.1 Un *campo de vectores* X en un abierto $U \subseteq M$ de una variedad diferenciables es una ley que a cada punto $p \in U$ le asigna un vector tangente $X_p \in T_p(M)$.

Ejemplo 1.6.2 Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ un s.l.c. en M. Entonces, para cualquier $i = 1, \ldots, m$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : p \in U \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

es un campo de vectores en U.

Notación 1.6.3 En algunos casos, cuando trabajemos con un s.l.c. $(U, \varphi = (x_1, ..., x_m))$ utilizaremos la notación alternativa

$$\partial_i \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Esto nos será especialmente útil a partir del segundo capítulo.

Un campo de vectores X en U también puede interpretarse como una aplicación que envía funciones diferenciables en U en funciones de U, de la siguiente forma: si $f \in \mathcal{F}(U)$, se define $Xf : U \to \mathbf{R}$ por $(Xf)(p) = X_p f$.

Definición 1.6.4 Un campo de vectores en U se dice *diferenciable* si para toda función $f \in \mathcal{F}(U)$ se tiene que $Xf \in \mathcal{F}(U)$. Al conjunto de campos diferenciables en U se denota por $\mathfrak{X}(U)$.

Por tanto, un campo diferenciable en U puede interpretarse como una aplicación $X : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$. Esta aplicación verifica las dos siguientes propiedades:

1. $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X f + \mu X g$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(U)$ y $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$–linealidad).

2. $X(fg) = gXf + fXg$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Por otra parte, si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ es un s.l.c. en M, entonces, dado un campo de vectores X en U, para cualquier $p \in U$ se puede escribir

$$X_p = \sum_i (X_p(x_i)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

es decir,

$$X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.6.1}$$

para cierta funciones $f_i : U \to \mathbf{R}$, donde $f_i = Xx_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

Proposición 1.6.5 *Sea X un campo de vectores en U. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X \in \mathfrak{X}(U)$.*

2. *Si $(V, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ es un s.l.c. con $V \subseteq U$, entonces*

$$X|_V = \sum_i (X|_V x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_V,$$

   donde $X|_V x_i \in \mathcal{F}(V)$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

3. *Para todo $p \in U$, existe $(V, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$, s.l.c. entorno de p, con $V \subseteq U$, tal que*

$$X|_V = \sum_i (X|_V x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_V,$$

   donde $X|_V x_i \in \mathcal{F}(V)$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

En $\mathfrak{X}(U)$ se pueden definir las siguientes operaciones:

1. Suma: si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $(X+Y)_p = X_p + Y_p$, para todo $p \in U$. Se tiene que $X + Y \in \mathfrak{X}(U)$.

2. Producto por números reales: si $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\lambda X)_p = \lambda X_p$, para todo $p \in U$. Se tiene que $\lambda X \in \mathfrak{X}(U)$.

3. Producto por funciones diferenciables: si $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, $(fX)_p = f(p)X_p$, para todo $p \in U$. Se tiene que $fX \in \mathfrak{X}(U)$.

Proposición 1.6.6 *$\mathfrak{X}(U)$ es un espacio vectorial real con la suma y el producto de números reales y un $\mathcal{F}(U)$–módulo con la suma y el producto por funciones diferenciables.*

Proposición 1.6.7 *Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ es un s.l.c. en M, entonces el $\mathcal{F}(U)$–módulo $\mathfrak{X}(U)$ está finitamente generado y tiene como base:*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}.$$

En $\mathfrak{X}(U)$ puede definirse otra operación interna, llamada *producto corchete*, mediante $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$. Esta operación tiene las siguientes propiedades:

Proposición 1.6.8 *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ y $f, g \in \mathcal{F}(U)$, se verifica que:*

1. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$; $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$.
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticonmutatividad).*
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(identidad de jacobi).*
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.
5. *Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ es un s.l.c., entonces* $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, *para todos $i, j = 1, \ldots, m$.*

Corolario 1.6.9 $\mathfrak{X}(U)$ *con las operaciones suma, producto por escalares (números reales, que realmente son casos particulares de funciones diferenciables, las funciones constantes) y producto corchete es un álgebra de Lie real.*

1.7. Campos de tensores covariantes diferenciables.

En esta sección definimos los tensores y estudiamos sus propiedades. Estos nos servirán (especialmente) para desarrollar el siguiente capítulo. También cabe destacar la introducción del Lema de Extensión de Campos de Tensores Covariantes, así como la noción de producto tensorial.

Definición 1.7.1 Dada una variedad diferenciable M y un abierto $U \subseteq M$, un *campo de tensores r–covariantes diferenciable* sobre U es una aplicación r–lineal del $\mathcal{F}(U)$–módulo $\mathfrak{X}(U)$ en $\mathcal{F}(U)$, es decir, una aplicación

$$T : \mathfrak{X}(U) \times \overset{r)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

r–lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U). Al conjunto de los campos de tensores r–covariantes diferenciables sobre U se denota por $T_r(U)$. Se conviene que $T_0(U) = \mathcal{F}(U)$.

Notación 1.7.2 El nombre de campo de tensores r–covariantes proviene del hecho de que un tal objeto puede también interpretarse como una aplicación T que a cada punto $p \in U$ le hace corresponder un tensor r veces covariante sobre $T_p(M)$, es decir, una aplicación

$$T_p : T_p(M) \times \overset{r)}{\cdots} \times T_p(M) \to \mathbf{R}$$

r veces lineal (con escalares los números reales), definida por

$$T_p(u_1, \ldots, u_r) = T(X_1, \ldots, X_r)(p),\ u_1, \ldots u_r \in T_p(M),$$

donde $X_1, \ldots, X_r$ son campos de vectores diferenciables sobre U tales que $X_i(p) = u_i$, $i = 1, \ldots, r$ (se sabe que el valor de $T(X_1, \ldots, X_r)(p)$ no depende de la elección de los campos $X_1, \ldots, X_r$ en las condiciones requeridas). En este sentido, puede hablarse de restricciones de campos de tensores covariantes diferenciables a abiertos. En efecto, sea $T \in T_r(U)$ y $V \subseteq U$ un abierto. Se define $T|_V$ por

$$T|_V(X_1, \ldots X_r)(p) = T_p(X_1(p), \ldots, X_r(p)) = T(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r)(p),$$

para cualquier $p \in V$ y $X_1, \ldots X_r \in \mathfrak{X}(V)$, siendo $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r$ campos de vectores diferenciables en U, tales que $\overline{X}_i = X_i$ en un cierto entorno de p contenido en V, $i = 1, \ldots, r$. Por otra parte, es inmediato observar que, dados $T, S \in T_r(U)$, $T = S$ si y sólo si $T_p = S_p$ para todo $p \in U$.

Proposición 1.7.3 *Sea M una variedad diferenciable y $U \subseteq M$ un abierto. Se verifican:*

1. *Si $T \in T_r(U)$ y $V \subseteq U$ es un abierto, entonces $T|_V \in T_r(V)$.*

2. *Si*
$$U = \bigcup_{i \in I} U_i,$$
con U_i abierto para todo $i \in I$ y T es una aplicación r–lineal de $\mathfrak{X}(U) \times \overset{r)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(U)$ en el conjunto de las funciones de U en $\boldsymbol{R}$, tal que $T|_{U_i} \in T_r(U_i)$, para cualquier $i \in I$, entonces $T \in T_r(U)$.

Ejemplo 1.7.4 Sea $f \in \mathcal{F}(U)$. Se define $\mathrm{d}f : \mathfrak{X}(U) \to \mathcal{F}(U)$ por $(\mathrm{d}f)X = Xf$. Es fácil comprobar que $\mathrm{d}f \in T_1(U)$ y se lee *diferencial de f*. El nombre y la notación se justifican en el hecho de que, según la nota anterior, si $p \in U$, se tiene que $(\mathrm{d}f)_p$ coincide con la diferencial de la función f en p.

En $T_r(U)$ se pueden definir las siguientes operaciones de modo natural: suma, producto por números reales y producto por funciones diferenciables. Se prueba sin dificultad que, dados $T, S \in T_r(U)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, se tiene que $T + S, \lambda T, fT \in T_r(U)$. Además, dados $T \in T_r(U)$ y $S \in T_s(U)$, se define la operación *producto tensorial* de T y S, denotada por $T \otimes S$, mediante:
$$T \otimes S : \mathfrak{X}(U) \times \overset{r+s)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(U) \to \mathcal{F}(U) :$$
$$(X_1, \ldots, X_{r+s}) \mapsto (T \otimes S)(X_1, \ldots, X_{r+s}) = T(X_1, \ldots, X_r)S(X_{r+1}, \ldots, X_{r+s}).$$
Se tiene que $T \otimes S \in T_{r+s}(U)$.

En estas condiciones, se verifica que, si $r > 0$, $T_r(U)$ con la suma y el producto por números reales es un espacio vectorial real, con la suma y el producto por funciones diferenciables es un $\mathcal{F}(U)$–módulo y que
$$T(U) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T_r(U)$$
es un álgebra asociativa, no conmutativa y con elemento unidad, llamada *álgebra tensorial* de U.

Proposición 1.7.5 *Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ un s.l.c. en M. Entonces, la familia*
$$\{\mathrm{d}x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x_{i_r} / i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, m\}$$
es una base de $T_r(U)$ como $\mathcal{F}(U)$–módulo. Además, si $T \in T_r(U)$, en función de esa base se tiene que:
$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_r} T\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) \mathrm{d}x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x_{i_r}.$$

Al igual que ocurría con las funciones diferenciables y con los campos vectoriales diferenciables, se tiene un Lema de Extensión para campos diferenciables de tensores covariantes.

Lema 1.7.6 (Extensión de Campos de Tensores Covariantes). *Dados dos abiertos $V \subseteq U \subseteq M$ en una variedad diferenciable, si $T \in T_r(V)$, entonces, para cualquier $p \in V$ existe un entorno abierto de p, $W_p \subseteq V$ y existe $S \in T_r(U)$ tales que $S|_{W_p} = T|_{W_p}$. El mismo resultado se tiene en $\Lambda_r(V)$.*

Definición 1.7.7 Dada una variedad diferenciable M y un abierto $U \subseteq M$, un *campo de tensores r–covariantes y 1–contravariantes diferenciable* sobre U es una aplicación r–lineal del $\mathcal{F}(U)$–módulo $\mathfrak{X}(U)$ en $\mathfrak{X}(U)$, es decir, una aplicación

$$T : \mathfrak{X}(U) \times \overset{r)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$$

r–lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U). Al conjunto de los campos de tensores r–covariantes y 1–contravariantes diferenciables sobre U se denota por $T_r^1(U)$.

Definición 1.7.8 Dada una variedad diferenciable M y un abierto $U \subseteq M$, una *r–forma diferencial* sobre U es un campo de tensores r–covariantes diferenciable y alternado sobre U, es decir, una aplicación

$$\omega : \mathfrak{X}(U) \times \overset{r)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

r–lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U) alternada, esto es, verificando que

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) = \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}),$$

para cualquier $\sigma \in S_r$ y $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$. Al conjunto de las r-formas diferenciales sobre U se denota por $\Lambda_r(U)$. Se conviene que $\Lambda_0(U) = \mathcal{F}(U)$.

Notación 1.7.9 Es fácil comprobar que $\Lambda_r(U)$ es un subespacio vectorial y un submódulo de $T_r(U)$. Además, $\Lambda_1(U) = T_1(U)$.

Definición 1.7.10 Dado $T \in T_r(U)$, se llama *alternado* de T a la r–forma diferencial $Alt(T)$ definida mediante

$$Alt(T)(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}),$$

para cualesquiera $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$.

Dadas $\omega \in \Lambda_r(U)$ y $\theta \in \Lambda_s(U)$, se define la operación *producto exterior* de ω y θ, denotada por $\omega \wedge \theta$, mediante

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta).$$

Claramente, $\omega \wedge \theta \in \Lambda_{r+s}(U)$. Además, razonando por inducción, se tiene que si $\omega_i \in \Lambda_{r_i}(U)$, $i = 1, \dots, k$, entonces:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \frac{(r_1 + \cdots + r_k)|}{r_1! \dots r_k!} Alt(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k).$$

Proposición 1.7.11 *Sean $\omega \in \Lambda_r(U)$ y $\theta \in \Lambda_s(U)$. Entonces $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs}\theta \wedge \omega$. En consecuencia, si r es impar, $\omega \wedge \omega = 0$.*

Proposición 1.7.12 *Sean $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Lambda_1(U)$. Entonces:*

1. *Para cualquier $\sigma \in S_r$, $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \varepsilon(\sigma)\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(r)}$.*
2. *Dados cualesquiera $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$:*

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(X_1, \dots, X_r) = \det(\omega_i(X_j)).$$

Proposición 1.7.13 *Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. en M. Entonces, la familia*

$$\{\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r} / 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m\}$$

es una base de $\Lambda_r(U)$ como $\mathcal{F}(U)$–módulo. Además, si $\omega \in \Lambda_r(U)$, en función de esa base se tiene que:

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}.$$

Corolario 1.7.14 *Si $r > m$, entonces $\Lambda_r(U) = \{0\}$.*

Proposición 1.7.15 *Se verifica que*

$$\Lambda(U) = \bigoplus_{r=0}^{m} \Lambda_r(U)$$

con el producto exterior es un álgebra asociativa, no conmutativa y con elemento unidad.

Definición 1.7.16 Sean M y N dos variedades diferenciables y $f \in \mathcal{F}(M,N)$. Dado $T \in T_r(N)$, se define $f^*T \in T_r(M)$ por $f^*T = T \circ f$, si $r = 0$ y $f^*T(X_1, \ldots, X_r)(p) = T(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r)(f(p))$, si $r > 0$, donde p es un punto de M, $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ y $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r \in \mathfrak{X}(N)$ son tales que $f_{*p}X_i(p) = \overline{X}_i(f(p))$, para todo $i = 1, \ldots, r$. De manera equivalente, se puede definir

$$(f^*T)_p(u_1, \ldots, u_r) = T_{f(p)}(f_{*p}u_1, \ldots, f_{*p}u_r),$$

para todo $p \in M$ y todos $u_1, \ldots, u_r \in T_p(M)$.

Esta definición permite, al ser extendida por linealidad, obtener una aplicación $f^* : T(N) \to T(M)$, asociada a f.

Proposición 1.7.17 *Dada $f \in \mathcal{F}(M,N)$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $f^* : T_r(N) \to T_r(M)$ *es* $\boldsymbol{R}$*–lineal, para todo* $r \geq 0$.
2. $f^*(gT) = (g \circ f)f^*T$, *para cualquier* $T \in T(N)$ *y cualquier* $g \in \mathcal{F}(N)$.
3. $f^*(T \otimes S) = f^*T \otimes f^*S$, *para cualesquiera* $T, S \in T(N)$.
4. $f^*(Alt(T)) = Alt(f^*T)$, *para cualquier* $T \in T(N)$.
5. $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$, *para cualesquiera* $\omega, \theta \in \Lambda(N)$.
6. $f^*(\mathrm{d}g) = \mathrm{d}(f^*g)$, *para cualquier* $g \in \mathcal{F}(N)$.

Notación 1.7.18 Dados $f \in \mathcal{F}(M,N)$ y $T \in T_r(N)$, en ocasiones haremos referencia a f^*T como el *pullback* por f de T. En caso de que la función f esté clara por el contexto, podremos hablar simplemente del pullback de T.

1.8. Variedades producto

Para concluir, incluimos esta última sección, basada en [4], debido al especial interés que toman las variedades producto en los capítulos venideros.

Lema 1.8.1 *Dadas dos variedades diferenciables $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$, de dimensiones m y n respectivamente, el producto cartesiano de estas es a su vez una variedad diferenciable de dimensión $m + n$. De hecho, si (U, φ) y (V, ψ) son* *cartas de M y N respectivamente, $(U \times V, \varphi \times \psi)$ es una carta de la variedad producto.*

Utilizando el sistema de coordenadas producto sobre $M \times N$, se comprueba de manera sencilla que:

(a) Las *proyecciones*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & M \times N & \to & M \\ & (p,q) & \mapsto & p, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \sigma: & M \times N & \to & N \\ & (p,q) & \mapsto & q, \end{array}$$

son aplicaciones diferenciables. En particular, son sumersiones.

(b) Una aplicación $\phi : P \to M \times N$ es diferenciable si y solo si lo son $\pi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$.

(c) Para cada $(p,q) \in M \times N$, los subconjuntos

$$M \times \{q\} = \{(r,q) \in M \times N : r \in M\},$$

$$\{p\} \times N = \{(p,r) \in M \times N : r \in N\}$$

son subvariedades de $M \times N$.

(d) Para cada $(p,q) \in M \times N$,

$$\pi|_{M \times \{q\}} \text{ es un difeomorfismo de } M \times \{q\} \text{ en } M$$

y

$$\pi|_{\{p\} \times N} \text{ es un difeomorfismo de } \{p\} \times N \text{ en } N.$$

Se tiene por (b) que los espacios tangentes

$$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times \{q\}) \quad \text{ y } \quad T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(\{p\} \times N)$$

son subespacios del espacio tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$.

A continuación, con el fin de poder relacionar el cálculo sobre una variedad producto con el cálculo sobre sus factores, introducimos el concepto de *levantamiento*:

Definición 1.8.2

- Si $f \in \mathcal{F}(M)$, el *levantamiento* de f en $M \times N$ es $\tilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{F}(M \times N)$.
- Si $u \in T_p(M)$ y $q \in N$, entonces el *levantamiento* $\tilde{u}$ de u en (p,q) es el único vector $\tilde{u} \in T_{(p,q)}(M)$ tal que $\pi_{*(p,q)}(\tilde{u}) = u$.
- Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, el *levantamiento* de X en $M \times N$ es el campo de vectores $\tilde{X}$ cuyo valor sobre cada (p,q) es el levantamiento de X_p en (p,q). Como $\tilde{X}$ es diferenciable (gracias a las propiedades de los sistemas de coordenadas producto vistas anteriormente), se tiene que el levantamiento de $X \in \mathfrak{X}(M)$ en $M \times N$ es, en realidad, el único elemento de $\mathfrak{X}(M \times N)$ que está $\pi-$relacionado con X y $\sigma-$relacionado con el campo de vectores nulo sobre N.

El conjunto de los *levantamientos horizontales* $\tilde{X}$ se denota por $\mathfrak{L}(M)$. Las funciones, vectores tangentes y campos de vectores sobre N se levantan en $M \times N$ análogamente utilizando la proyección σ. El conjunto de los *levantamientos verticales* $\tilde{Y}$ se denota por $\mathfrak{L}(N)$.

Corolario 1.8.3 *(1) Si $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X,Y]^\sim \in \mathfrak{L}(M)$. Se tiene el resultado análogo para $\mathfrak{L}(M)$.*

(2) Si $\tilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ y $\tilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$, entonces $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$.

En este apartado hayamos usado una notación bastante precisa. No obstante, en la práctica cometeremos ciertos abusos de lenguaje, tales como escribir $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN$ u omitir la tilde $(\sim)$ de los levantamientos.

Nota 1.8.4 Aunque hemos definido la diferencial de una función f en un punto p utilizando la notación f_{*p}, de aquí en adelante la denotaremos frecuentemente por $(df)_p$ o, por abuso de lenguaje, incluso df.

Capítulo 2

Geometría semi-Riemanniana

En este capítulo introducimos una familia de variedades diferenciables particularmente relevante en el contexto de la Física: las variedades semi-Riemannianas, que se caracterizan por estar dotadas de cierta métrica. Esta será más general que la métrica Euclídea, que suponemos familiar al lector.

A continuación, describimos varios elementos de la geometría semi-Riemanniana, como son la conexión de Levi-Civita o la noción de paralelismo.

2.1. Variedades semi-Riemannianas

2.1.1. Métrica Euclídea

Como sabemos, $\mathbf{R}^m$ es un espacio métrico con la distancia asociada al producto escalar usual sobre los vectores $v, w \in \mathbf{R}^m$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i.$$

Este espacio es conocido como el *espacio Euclídeo m-dimensional.*

Si en vez de tomar este producto escalar, modificamos ligeramente el sumatorio para que los términos correspondientes a los productos de algunas coordenadas (en general, tomaremos las primeras) aparezcan en negativo, obtenemos:

$$\langle v, w \rangle = -\sum_i v_i w_i + \sum_j v_j w_j, \text{ con } 1 \leq i \leq \nu \text{ y } \nu < j \leq m$$

para cierto valor de ν.

Este nuevo producto está caracterizado por ser no degenerado (y no definido positivo, como es considerado usualmente). Esto es, si dado $v \in \mathbf{R}^m$, $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in \mathbf{R}^m$, entonces $v = 0$. Este espacio se dice *semi-Euclídeo*, de *índice* ν y lo denotaremos como $\mathbf{R}^m_\nu$.

Observación 2.1.1 Por definición, ν deberá ser no negativo y menor que la dimensión del espacio (en el caso anterior, m). Si $\nu = 0$, el espacio $\mathbf{R}^m_\nu$ se reduce al espacio Euclídeo $\mathbf{R}^m$. Para $m \geq 2$, $\mathbf{R}^m_1$ se conoce como *espacio de Minkowski m-dimensional*. Para $m = 4$, tenemos el ejemplo más simple de un espacio-tiempo relativista.

2.1.2. Formas bilineales

Aunque el caso Euclídeo sea un buen punto de partida, un planteamiento más general puede darnos más libertad para profundizar en el tema que nos concierne.

Definición 2.1.2 Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial. Se dice que una *forma bilineal* $b : V \times V \to \mathbf{R}$ es *simétrica* si $b(u, v) = b(v, u)$ para todos $u, v \in V$.

Definición 2.1.3 Sea $b : V \times V \to \mathbf{R}$ una *forma bilineal simétrica*. Se dice que esta es *no degenerada* si las siguientes condiciones son equivalentes:

- $u = 0$.
- $b(u, v) = 0$ para todo $v \in V$.

Se puede probar de forma sencilla que esta condición es equivalente a que la matriz de la forma bilineal sea invertible para algún (y, por tanto, para todo) sistema de coordenadas. En caso contrario, b se dice *degenerada*, y se llama *radical* de b al conjunto $N = \{u \in V \mid b(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in V\}$.

Definición 2.1.4 Sean $b : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal simétrica y $u, v \in V$. Se define la forma cuadrática $q : V \to \mathbf{R}$ asociada a b como:

$$q(v) = b(v, v).$$

La forma bilineal queda pues determinada por q, mediante la relación:

$$b(v, w) = \frac{1}{2}(b(v + w, v + w) - b(v, v) - b(w, w)) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)).$$

Definición 2.1.5 Sea el par (V, b), donde V es un espacio vectorial y b es una forma bilineal simétrica en V. Un vector $v \in V$ se dice:

$$\begin{array}{rl} \textit{espacial} & \text{si } b(v,v) > 0 \text{ ó } v = 0, \\ \textit{nulo} & \text{si } b(v,v) = 0 \text{ y } v \neq 0, \\ \textit{temporal} & \text{si } b(v,v) < 0. \end{array}$$

Observación 2.1.6 El conjunto de los vectores nulos en $T_p(M)$ se llama *cono nulo* en $p \in M$. La razón para establecer esta distinción en categorías es el carácter causal de estos vectores. La terminología procede de la Teoría de la Relatividad. Más adelante seguiremos profundizando al respecto, pero podemos resumir el fundamento de esta tricotomía como sigue:

Los vectores espaciales conectan sucesos en el espacio-tiempo demasiado alejados (espacialmente) para la poca distancia temporal que hay entre ellos. Con demasiado alejados nos referimos a que la luz no tiene tiempo de llegar de una posición a otra en el intervalo temporal que los separa. Así pues, estos sucesos no guardan una relación causal, ya que ni siquiera la luz puede conectarlos. De hecho, dependiendo del sistema de referencia, el orden en que se producen estos sucesos puede variar.

Los vectores temporales conectan sucesos cuya distancia (espacial) es suficiente pequeña para que la luz pueda llegar de un punto a otro (con tiempo de sobra) en el intervalo temporal que los separa. Así pues, puede existir una relación causal entre estos sucesos, y el orden en que acontecen está fijado.

Por último, los vectores nulos, que en las variedades de Lorentz (de las que hablaremos posteriormente) se conocen como vectores *luminosos*, conectan sucesos que están separados (espacialmente) la distancia justa que recorre la luz en el intervalo temporal que hay entre ellos.

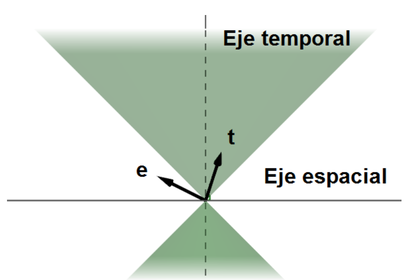

Figura 2.1: Cono nulo y vectores **e**spacial y **t**emporal.

A continuación, definiremos el producto escalar de forma análoga a su versión en espacios Euclídeos.

Definición 2.1.7 Un *producto escalar* b^* en V es una forma bilineal simétrica no degenerada.

Ligada a la definición de producto escalar, surge la noción de ortogonalidad, que permanece presente durante todo nuestro desarrollo geométrico. Nos serviremos de esta, en primer lugar, para estudiar ciertas propiedades de las bases de espacios vectoriales con respecto a los productos escalares.

Definición 2.1.8 Dado el par (V, b^*), se dice que:

- Dos vectores $u, v \in V$ son *ortogonales*, $u \perp v$, si $b^*(u, v) = 0$.
- Dos conjuntos $A, B \subseteq V$ son *ortogonales*, $A \perp B$, si $b^*(u, v) = 0$ para todos $u \in A$ y $v \in B$.
- Se denota por $A^\perp = \{v \in V \mid b^*(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in A\}$ el *ortogonal* de A.

Observación 2.1.9 De ahora en adelante, aunque no se especifique, b^* denotará un producto escalar en el espacio vectorial V.

Definición 2.1.10 Un subespacio $W < V$ se dice *no degenerado* si

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

Proposición 2.1.11 *Si $W < V$ es no degenerado, entonces:*

1. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
2. $(W^\perp)^\perp = W$.
3. $V = W + W^\perp$ *si y solo si W (o, equivalentemente, $W^\perp$) es no degenerado.*

Demostración*:*

1. *Sean* $B = \{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_m\}$ *una base de* V *y* $C = \{e_1, ...e_r\}$ *una base de* W $(\dim(W) = r)$.

   Sea un vector $v \in V$*, que puede ser expresado como*

   $$v = \sum_j a_j e_j,$$

   con $a_j \in \boldsymbol{R}$*. Como sabemos,* $v \in W^\perp$ *si y solo si* $b^*(v, e_i) = 0$ *para todo* $i = 1, ..., r$*. De esto se deduce*

   $$\sum_j a_j b^*(e_i, e_j) = 0,$$

   para todo $i = 1, ..., r$*. Como* b^* *es no degenerada,* $W^\perp$ *está determinado por las soluciones de un sistema lineal de* r *ecuaciones independientes con* m *variables, luego*

   $$\dim W^\perp = \dim V - \dim W = m - r.$$

2. *La inclusión* $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ *se tiene trivialmente. Por ser* W *no degenerado,*

   $$\dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp = \dim V.$$

   A partir de esta última ecuación y del apartado 1, deducimos $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$*. En consecuencia,* $W = (W^\perp)^\perp$*.*

3. *Se deduce a partir del apartado 1 y la fórmula de la dimensión.* □

Definición 2.1.12 Una base $B = \{e_1, ..., e_m\}$ de V es *ortonormal* si sus elementos son unitarios y ortogonales entre sí, es decir:

$$b^*_{ij} = b^*(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij},$$

para todos $i, j = 1, ..., m$.

Teorema 2.1.13 *Todo par* (V, b^*) *admite una base ortonormal.*

Demostración. *Se prueba por inducción utilizando la Proposición 2.1.11*□

Lema 2.1.14 *Dado un par (V, b^*), el número ν de vectores temporales en una base ortonormal B no depende de la base elegida.*

Demostración. *Razonamos por reducción al absurdo.*

Supongamos que existe otra base ortonormal B' con $\nu' < \nu$. Sean U' el subespacio generado por los $m-\nu'$ vectores espaciales de B' y W el subespacio generado por los ν vectores temporales de B. Entonces, por ser $\nu' < \nu$, se tiene:

$$\dim(U' \cap W) > 0,$$

luego existe algún vector $u \in U' \cap W \setminus \{0\}$, lo cual da lugar a $b^*(u, u) > 0$ y $b^*(u, u) < 0$, contradicción más que obvia. □

Definición 2.1.15 El número ν se denomina el *índice* de (V, b^*)

Como cabía esperar, esta nueva definición de índice es consistente con la que vimos en el contexto de los espacios Euclídeos. A continuación, extenderemos este concepto al caso de las variedades, sirviéndonos de la similitud local entre los espacios vectoriales y los espacios tangentes a las variedades diferenciables.

Sea una variedad diferenciable M. Recordemos, como vimos en la Sección 1.3, que para cada $p \in M$ se tiene que $T_p(\mathbf{R}^m)$ es un espacio vectorial de dimensión m y existe un isomorfismo lineal de $\mathbf{R}^m$ en $T_p(\mathbf{R}^m)$ que a cada $v \in \mathbf{R}^m$ le hace corresponder $v_p = \sum_i v_i(\partial_i)_p$. Esto nos permite utilizar el concepto de índice definido previamente en el contexto de las variedades.

2.1.3. Métricas semi-Riemannianas

A partir de la noción de espacio tangente, hemos podido conectar las variedades diferenciables con los espacios vectoriales. Una vez que hemos logrado esto, parece natural dotar de una métrica a las variedades sirviéndonos de los conceptos definidos previamente.

Definición 2.1.16 Un *tensor métrico g* sobre una variedad diferenciable M es un campo de tensores 2-covariante simétrico y no degenerado, con índice constante sobre M.

Dicho de otro modo, $g \in T_2(M)$ asigna a cada punto p un producto escalar g_p en el espacio tangente $T_p(M)$, siendo el índice de g_p idéntico para todo p.

Así pues, estos tensores métricos actuarán como:

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle_p.$$

Introduciendo el elemento

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & si \quad 1 \leq i \leq \nu, \\ \\ +1 & si \quad \nu < i \leq m, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

podemos escribir el tensor métrico de $\mathbf{R}^m_\nu$ en función de sus coordenadas naturales como:

$$g = \sum_i \varepsilon_i du_i \otimes du_i.$$

Definición 2.1.17 Una *variedad semi-Riemanniana* es un par (M, g), con M una variedad diferenciable y g un tensor métrico.

Aunque una variedad semi-Riemanniana venga dada por un par $(M,\, g)$, solemos denotarla (al igual que sucedía con las variedades diferenciables) simplemente por M.

De ahora en adelante, con frecuencia nos referiremos al índice de g_p, ν, como el *índice de* M.

Ejemplo 2.1.18 Como casos particulares (en función del índice) de variedades semi-Riemannianas, destacamos las siguientes familias:

- *Variedades Riemannianas*. En este caso, se tiene $\nu = 0$.
- *Variedades de Lorentz*. En este caso, se tiene $\nu = 1$ y $m \geq 2$.

Seguiremos usando, como venimos haciendo desde que presentamos el caso euclídeo, $\langle\ ,\ \rangle$ como notación alternativa para g. Así pues, escribiremos $g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbf{R}$ para vectores y $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$ para campos vectoriales.

Dado $(U, \varphi = (x_1, ..., x_m))$ un s.l.c. sobre $U \subset M$, las componentes del tensor métrico g son

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq m,$$

de donde deducimos la expresión de g:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Sin mucho esfuerzo, obtenemos la expresión para campos vectoriales $X = \sum_i X_i \partial_i$ e $Y = \sum_j Y_j \partial_j$:

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j.$$

Como g es no degenerado, se tiene que en cada punto p de U, la matriz $g_{ij}(p)$ es invertible. Denotamos su inversa como $g^{ij}(p)$, y deducimos que las funciones g^{ij} son diferenciables en U a partir de la fórmula usual para la inversión matricial.

Observación 2.1.19 Debido a la simetría que hemos exigido a nuestro tensor métrico g, se tiene $g_{ij} = g_{ji}$ y, en consecuencia $g^{ij} = g^{ji}$.

Al igual que hicimos en el apartado de espacios vectoriales, podemos definir la forma cuadrática $q(v) = \langle v, v \rangle$ para cualquier vector v tangente a M en un punto p cualquiera. Esta estará relacionada con el producto escalar en p, como vimos en la Definición 2.1.4.

Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, se tiene $q(fX) = f^2 q(X) \in \mathcal{F}(M)$, luego q no es un campo tensorial. Clásicamente, q se dice el *elemento de línea* de M, y se denota por ds^2. Respecto de un s.l.c. $(U, \varphi = (x_1, ..., x_m))$

$$q = ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j,$$

donde las diferenciales se aplican sobre cada espacio tangente, por lo que se tiene:

$$q(X) = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i(X) dx_j(X) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j.$$

Si a partir de una variedad diferenciable obtenemos otra, es habitual que del tensor métrico de la primera variedad podamos derivar uno para la segunda. Sea, por ejemplo P una subvariedad de una variedad semi-Riemanniana M. Dado que, para todo $p \in P$, $T_p(P)$ es visto como un subespacio de $T_p(M)$, obtenemos un tensor métrico $\bar{g}$ sobre P aplicando el tensor métrico de M a cualquier par de vectores tangentes a P. Formalmente, $\bar{g}$ viene dado por el pullback (Definición 1.7.16) $j^*(g)$, donde $j : P \hookrightarrow M$ es la inclusión.

Definición 2.1.20 Sea P una subvariedad de una variedad semi-Riemanniana M. Si el pullback $j^*(g)$ es un tensor métrico sobre P, se dice que P es una subvariedad semi-Riemanniana de M.

Nota 2.1.21 Si en particular P fuera una variedad Riemanniana o de Lorentz, podemos reemplazar "semi-Riemanniana" por estos términos en la definición anterior.

Proposición 2.1.22 *Sean M y N variedades semi-Riemannianas con tensores métricos g_M y g_N. Si π y σ son las proyecciones de la variedad diferenciable $M \times N$ (Sección 1.8) sobre M y N respectivamente, definiendo g como*

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N),$$

se tiene que g es un tensor métrico, que hace de $M \times N$ una variedad semi-Riemanniana producto.

Demostración. *Desarrollando la notación de pullback, se tiene que: si $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, entonces*

$$g(v, w) = g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

Por lo tanto, g es simétrico. Para probar que es no degenerado, supongamos que $g(v, w) = 0$ para todo $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Entonces se tiene que, para todo $w \in T_{(p,q)}M$, $g_M(d\pi(v), d\pi(w)) = 0$, ya que $d\sigma(w) = 0$. Por otra parte, se tiene que todos los vectores de $T_p(M)$ son de la forma $d\pi(w)$, luego $d\pi(v) = 0$. Análogamente, $d\sigma(v) = 0$, luego $v = 0$. Las bases ortonormales de $T_p(M)$ y $T_q(N)$ se combinan para obtener una base ortonormal de $T_{(p,q)}(M \times N)$. Así pues, el índice de g es igual a la suma de los índices de M y N, que es constante. $\square$

Podemos, mediante la inducción, extender este resultado a cualquier producto finito de variedades semi-Riemannianas.

Concluimos esta sección presentando la generalización de uno de los operadores diferenciales más usuales en el cálculo sobre $\mathbf{R}^3$: el gradiente. Este nos será de utilidad en el próximo capítulo.

Definición 2.1.23 Sean una variedad semi-Riemanniana M y una función $f \in \mathcal{F}(M)$. El *gradiente* de la función f, que denotaremos por grad f, viene dado por el campo de vectores métricamente equivalente a la diferencial $df \in \Lambda_1(M)$. Así pues:

$$\langle \text{grad } f, X\rangle = df(X) = Xf, \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Dado un s.l.c $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$, $df = \sum_i \partial_i f dx_i$ por lo que se tiene:

$$\text{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij}(\partial_i f)\partial_j.$$

En particular, para las coordenadas naturales de un espacio semi-Euclídeo, se tiene grad $f = \sum_i \varepsilon_i(\partial_i f)\partial i$, que da lugar a la fórmula usual sobre $\mathbf{R}^3$.

2.2. La conexión de Levi-Civita

Dados X e Y campos vectoriales sobre una variedad semi-Riemanniana M, pretendemos definir otro campo vectorial $\nabla_X Y$ sobre M que, para cada $p \in M$, corresponda a la variación de Y en la dirección X_p. En $\mathbf{R}^m_\nu$ existe una manera natural de definir este campo.

Definición 2.2.1 Sean $u_1, ..., u_m$ las coordenadas naturales de $\mathbf{R}^n_\nu$. Si X e $Y = \sum_i Y^i \partial_i$ son campos vectoriales sobre $\mathbf{R}^n_\nu$, el campo

$$D_X Y = \sum_i X(Y^i)\partial_i$$

se denomina la *derivada covariante* de Y respecto de X.

Veremos a continuación cómo podemos extender esta definición a una variedad semi-Riemanniana arbitraria. Comenzaremos axiomatizando sus propiedades básicas.

Definición 2.2.2 Denominamos *conexión afín* ∇ sobre M a una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que

(∇1) $\nabla_X Y$ es $\mathcal{F}(M)$–lineal en X,

(∇2) $\nabla_X Y$ es $\mathbf{R}$–lineal en Y,

(∇3) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.

La propiedad (∇1) hace de $\nabla_X Y$ un tensor en X. Así pues, para cada vector tangente $v \in T_p(M)$, el vector tangente $\nabla_v Y \in T_p(M)$ está bien definido. También denotamos este vector tangente como $(\nabla_X Y)_p$, donde X es cualquier campo tal que $X_p = v$. Por otro lado, la propiedad (∇3) muestra que $\nabla_X Y$ no es un tensor en Y.

A continuación pretendemos demostrar que, para cada variedad semi-Riemanniana, existe una única conexión que reúna otras dos propiedades, que detallaremos posteriormente. Para ello, probaremos una proposición que nos será de gran utilidad.

Proposición 2.2.3 *Sea M una variedad semi-Riemanniana. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, sea X^* la 1-forma sobre M tal que $X^*(Y) = \langle X, Y\rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, la función $X \to X^*$ es un isomorfismo $\mathcal{F}(M)$–lineal de $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathfrak{X}^*(M)$.*

Demostración. *X^* es efectivamente una 1-forma, por ser $\mathcal{F}(M)$–lineal. El hecho de que la función $X \to X^*$ (también $\mathcal{F}(M)$–lineal) sea un isomorfismo se sigue de las dos propiedades que siguen.*

(a) Si $\langle X, Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $X = Y$.

(b) Dada cualquier 1-forma $\theta \in \Lambda_1(M)$, existe un único campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\theta(Y) = \langle X, Y\rangle$ para todo Y.

Sea $T = X - Y$. Entonces, demostrar la afirmación (a) es equivalente a probar que si $\langle T_p, Z_p\rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $p \in M$, entonces $T = 0$. Dado que los elementos de $T_p(M)$ son de la forma Z_p, el resultado es inmediato a partir de la no degeneración del tensor métrico. Para probar *(b), tendremos en cuenta que hemos probado la unicidad en (a), luego sólo tendremos que probar la existencia. Para ello, bastará con encontrar* X *en un s.l.c. cualquiera* $(U, \varphi = (x_1, ..., x_m))$. *Dado* $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ *sobre* U*, sea* $X = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$. *Entonces, por ser* (g_{ij}) *la inversa de* (g^{ij})*,*

$$\langle X, \partial_k\rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j}\theta_i g^{ij}g_{jk} = \sum_i \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k).$$

Así pues, se tiene por $\mathcal{F}(M)$*–linealidad que* $\langle X, Z\rangle = \theta(X)$ *para todo* Z *sobre* U*.* □

Gracias a este resultado, en el contexto de la geometría semi-Riemanniana podemos transformar vectores en 1-formas (y viceversa) libremente. Así pues, los vectores y 1-formas asociados $V \leftrightarrow \theta$ contendrán la misma información y se dirán *métricamente equivalentes*.

Teorema 2.2.4 *Dada una variedad semi-Riemanniana* M*, existe una única conexión* ∇ *tal que*

(∇4) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

(∇5) $Z\langle X, Y\rangle = \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$,

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ *se denomina la* conexión de Levi-Civita *de* M*, y está caracterizada por la fórmula de* Koszul*:*

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Demostración. *Supongamos que* ∇ *es una conexión sobre* M *tal que satisface las propiedades* (∇4) *y* (∇5)*. Aplicando* (∇5) *y* (∇4) *en los tres primeros y los tres últimos sumandos (respectivamente) de la parte derecha de la ecuación (2.2.1), se tiene la igualdad. La unicidad se obtiene a partir del apartado (a) en la demostración de la Proposición 2.2.3.*

Para probar la existencia, definimos $F(X, Y, Z)$ *como la parte derecha de la ecuación (2.2.1). Si fijamos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, podemos comprobar fácilmente que la función* $Z \to F(X, Y, Z)$ *es* $\mathcal{F}(M)$*–lineal y, por lo tanto, una 1-forma.*

Así pues, la Proposición 2.2.3 garantiza la existencia de un único campo vectorial, que denotaremos por $\nabla_X Y$*, tal que* $2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = F(X,Y,Z)$ *para todo* Z*. Por lo tanto, se cumple la fórmula de Koszul, y se pueden deducir de esta las propiedades* $(\nabla 1) - (\nabla 5)$ *que hemos enunciado. Aunque en nuestro desarrollo no realizaremos esta demostración, es un ejercicio que puede resultar de interés para familiarizarse con la conexión de Levi-Civita.* □

Definición 2.2.5 Sea un s.l.c. $(U, \varphi = (x_1, ...x_m))$ de una variedad semi-Riemanniana M. Los *símbolos de Christoffel* para este s.l.c. son las funciones Γ_{ij}^k sobre U tales que

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k, \text{ para todos } 1 \leq i, j \leq m.$$

Dado que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, se sigue de $(\nabla 4)$ y $(\nabla 5)$ que $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$, luego $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ La conexión ∇ no es un tensor, luego los símbolos de Christoffel no siguen las reglas usuales de transformación para un cambio de coordenadas.

Proposición 2.2.6 *Dado un s.l.c.* $(U, \varphi = (x_1, ..., x_m))$,

$$(1) \quad \nabla_{\partial_i}(\sum Y_j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_k,$$

donde los símbolos de Christoffel vienen dados por

$$(2) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right\}.$$

Demostración. (1) *es una consecuencia inmediata de* $(\nabla 3)$*. Para deducir* (2)*, sean* $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_l$ *en la fórmula de Koszul. Los corchetes son iguales a cero, quedando así*

$$2\langle \nabla_{\partial_i}(\partial_j), \partial_l \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{il}) - \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij}).$$

Pero, por la definición de los símbolos de Christoffel,

$$2\langle \nabla_{\partial_i}(\partial_j), \partial_l \rangle = 2\sum_a \Gamma_{ij}^a g_{al}.$$

Multiplicando la ecuación por g^{lk} *y sumando sobre* l*, obtenemos el resultado que buscábamos.* □

Utilizando ($\nabla 1$) podemos computar cualquier $\nabla_X Y$ en el s.l.c. que queramos a partir de la fórmula en (1). Por otro lado, la fórmula en (2) describe cómo el tensor métrico determina la conexión de Levi-Civita.

Dependiendo de la variedad con la que tratemos, el cálculo de la conexión de Levi-Civita puede resultar bastante engorroso. A continuación, estudiaremos un caso de interés en el que su expresión resulta particularmente sencilla.

Lema 2.2.7 *La derivada covariante (Definición 2.2.1) es la conexión de Levi-Civita del espacio semi-Euclídeo $\boldsymbol{R}^m_\nu$, con sus coordenadas naturales, para todo $\nu = 0, \ldots, n$. Además, se tiene:*

(1) $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j$, con ε_j definido en (2.1.1),

(2) $\Gamma^k_{ij} = 0$, para todos $1 \leq i, j, k \leq m$.

Demostración. *El apartado (1) no es más que la definición del tensor métrico de $\boldsymbol{R}^m_\nu$. Para probar que D es la conexión de Levi-Civita de $\boldsymbol{R}^m_\nu$, debemos verificar que cumple las propiedades $(\nabla 1) - (\nabla 5)$, lo cual supone un simple cálculo. Por otro lado, (2) se sigue de la Proposición 2.2.6, ya que los g_{ij} son todos constantes.* □

Concluimos esta sección introduciendo un concepto al que haremos mención en el próximo capítulo.

Definición 2.2.8 Sean M una variedad semi-Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. La aplicación $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dada por:

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

se denomina *tensor de curvatura de Riemann*. Se puede probar fácilmente que esta aplicación es efectivamente un tensor 3-covariante y 1-contravariante.

En este trabajo, utilizaremos la definición que hemos dado anteriormente para el tensor de curvatura. No obstante, en las obras de muchos autores podemos encontrar el tensor de curvatura definido como:

$$R_{XY}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Debido a la complicación que puede suponer trabajar con el tensor R, introducimos una función que lo determina.

Dado el espacio tangente $T_p(M)$, un subespacio Π de dimensión 2 se dice una *sección* de M en p. Dados dos vectores tangentes $v, w \in T_p(M)$, definimos

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

La sección Π será no degenerada si y sólo si $Q(v, w) \neq 0$ para alguna base v, w de Π (análogo a la Definición 2.1.3). El valor absoluto $|Q(v, w)|$ representa el cuadrado del área del paralelogramo con lados v y w.

Lema 2.2.9 *Sea Π una sección no degenerada de M en p. La función*

$$K(v, w) = \langle R_{vw}v, w\rangle/Q(v, w)$$

es independiente de la elección de la base v, w de Π, y se denomina curvatura seccional $K(\Pi)$ *de Π.*

Demostración. *Dos bases de Π cualesquiera están relacionadas por ecuaciones*

$$v = ax + by,$$
$$w = cs + dy,$$

donde el determinante de los coeficientes $ad - bc$ es no nulo. A partir de un cálculo directo, se obtiene que

$$\langle R_{vw}v, w\rangle = (ad - bc)^2\langle R_{xy}x, y\rangle,$$

y que

$$Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y). \qquad \square$$

Se dice que una variedad semi-Riemanniana tiene *curvatura constante* si su curvatura seccional es constante.

Como hemos mencionado anteriormente, el tensor de curvatura R viene determinado por la función $K(v, w)$. Sin embargo, no probaremos este resultado, ya que sólo nos interesa la noción de curvatura constante.

Observación 2.2.10 En el contexto de las variedades Riemannianas, los espacios de curvatura constante son:

- Los espacios Euclídeos $\mathbf{R}^n$.
- Las esferas $\mathbf{S}^n_R$.
- Los espacios hiperbólicos $\mathbf{H}^n_R$.

2.3. Paralelismo y geodésicas

A continuación, nos servimos de la conexión de Levi-Civita para desarrollar ciertas nociones geométricas fundamentales. El caso más simple de un campo de vectores sobre una aplicación es un campo Z sobre una curva $\alpha : I \to M$ que asigna a cada $t \in I$ un vector tangente a M en $\alpha(t)$. Un ejemplo intuitivo de bastante interés es el campo de vectores α' sobre α, que representa la velocidad. El conjunto $\mathfrak{X}(\alpha)$ de los campos diferenciables sobre α es un módulo sobre $\mathcal{F}(I)$. En el caso de que M sea una variedad semi-Riemanniana, existe una forma natural de definir la velocidad a la que varía el campo $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, que denotaremos por Z'.

Proposición 2.3.1 *Sea $\alpha : I \to M$ una curva en una variedad semi-Riemanniana M Entonces, existe una única aplicación $Z \to Z' = DZ/dt$ que va de $\mathfrak{X}(M)$ sobre sí mismo, denominada* derivada covariante inducida, *tal que*

(1) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$ *para todos* $a, b \in \mathbf{R}, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$,

(2) $(hZ)' = (dh/dt)Z + hZ'$ *para todos* $h \in \mathcal{F}(I), Z \in \mathfrak{X}(M)$,

(3) $(X_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(X)$ *para todos* $t \in I, X \in \mathfrak{X}(M)$.

(4) Además, $(d/dt)\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$ *para todos* $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración:

Unicidad. Supongamos que existe una conexión inducida que satisface las propiedades (1)-(3). Podemos considerar que α pertenece al dominio de un único s.l.c. $(U, \varphi = (x_1, ..., x_m))$. Haciendo uso de la ecuación (1.6.1), podemos desarrollar $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ como sigue en $\alpha(t)$:

$$Z(t) = \sum_i Z(t)x_i\partial_i = \sum_i (Zx_i)(t)\partial_i.$$

Definimos Z_i como $Zx_i : I \to \mathbf{R}$. Por las propiedades (1) y (2),

$$Z' = \sum_i \frac{dZ_i}{dt} \partial_i|_\alpha + \sum_i Z_i (\partial_i|_\alpha)'.$$

Pero, se tiene por (3), que $(\partial_i|_\alpha)' = \nabla_{\alpha'}(\partial_i)$, lo que lleva a

$$Z' = \sum_i \frac{dZ_i}{dt} \partial_i + \sum_i Z_i \nabla_{\alpha'}(\partial_i). \tag{2.3.1}$$

Así pues, Z' queda determinado por la conexión de Levi-Civita.

Existencia. Dado cualquier subintervalo J de I tal que $\alpha(J)$ pertenece al dominio de un entorno coordenado, definimos Z' por la ecuación (2.3.1). A partir de esta, se puede comprobar de forma inmediata que las propiedades (1)-(4) se cumplen. Así pues, estas definiciones locales de Z' dan lugar a un único campo de vectores en $\mathfrak{X}(\alpha)$. $\square$

En el caso particular $Z = \alpha'$, la derivada $Z' = \alpha''$ se dice la *aceleración* de la curva α. Aunque α' no está relacionada con la geometría de la curva, sino con su parametrización, α'' sí que está ligada a la geometría.

A partir de los símbolos de Christoffel y la ecuación (2.3.1), obtenemos:

$$Z' = \sum_k \left\{ \frac{dZ_k}{dt} + \sum_{i,j} \mathit{\Gamma}_{ij}^k \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} Z_j \right\} \partial_k. \tag{2.3.2}$$

Si $Z' = 0$, se dice que Z es *paralelo*. Si recordamos el Lema 2.2.7, podemos afirmar que el sistema natural de campos coordenados sobre $\mathbf{R}^n_\nu$ es paralelo. También podemos deducir que los símbolos de Christoffel proporcionan una medida de cuánto se aleja un sistema de campos coordenados de ser paralelo.

De la ecuación (2.3.2) deducimos que $Z' = 0$ es equivalente a un SDO lineal. Aplicando a este el teorema de existencia y unicidad de solución para SDO, deducimos:

Proposición 2.3.2 *Dados una curva $\alpha : I \to M$, $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}(M)$, existe un único campo de vectores paralelo Z sobre α tal que $Z(a) = z$.*

Siguiendo la notación de la proposición, si $b \in I$, entonces la aplicación

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \to T_q(M)$$

que asocia cada z a $Z(b)$ se denomina *transporte paralelo* a lo largo de α desde $p = \alpha(a)$ hasta $q = \alpha(b)$.

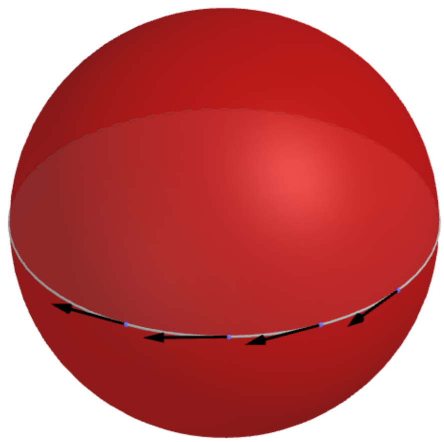

Figura 2.2: Campo de vectores paralelo a lo largo de una curva.

Definición 2.3.3 Dada una variedad semi-Riemanniana M, una *geodésica* es una curva $\gamma : I \to M$ tal que el campo γ' es paralelo. Así pues, la aceleración de estas curvas es nula: $\gamma'' = 0$.

Esta definición generaliza la noción Euclídea de línea recta.

Corolario 2.3.4 *Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ un s.l.c. sobre M. Una curva γ sobre U es una geodésica de M si y sólo si sus funciones coordenadas $x_k \circ \gamma$ satisfacen:*

$$\frac{d^2(x_k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x_j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

para $1 \leq k \leq m$.

A continuación, volvemos a denotar la derivada como γ' y las funciones coordenadas como γ_i en lugar de $x_i \circ \gamma$, lo cual resulta razonable en un contexto en que esta notación no se preste a confusión. Así pues, nuestra ecuación para las geodésicas es la siguiente:

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' \gamma_j' = 0 \qquad \text{para } \ 1 \leq k \leq m.$$

Capítulo 3

Geometría de algunos modelos físicos

En este último capítulo, damos un sentido físico a ciertas herramientas geométricas que han sido desarrolladas con anterioridad, y a algunas que construiremos a continuación. Cabe destacar que a lo largo del capítulo, utilizaremos una notación diferente de la habitual (en este texto) para las variedades con las que trabajemos. Esta notación es usual en teoría de fibrados.

Observación 3.0.5 Aunque en este capítulo siempre hablaremos de productos warped, estos también se conocen como productos alabeados. No obstante, utilizamos la nomenclatura más usual.

3.1. Robertson-Walker

En esta sección nos serviremos de conceptos introducidos anteriormente para definir los llamados *productos warped*. Del primer capítulo nos será particularmente útil la noción de variedad diferenciable producto (Sección 1.8) y del segundo capítulo, como parece natural, la noción de variedad semi-Riemanniana (y consecuentemente, métrica) producto (como vimos en la Proposición 2.1.22). Estos conceptos nos servirán como soporte para introducir un modelo de espacio-tiempo relativista bastante general; el espacio-tiempo de Robertson-Walker.

3.1.1. Producto warped

Dada una variedad semi-Riemanniana producto $B \times F$, el tensor métrico viene dado por $\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$, donde π y σ son las proyecciones de $B \times F$ sobre B y F respectivamente. Podemos obtener una gran familia de métricas sobre $B \times F$ deformando esta métrica producto sobre cada fibra $\{p\} \times F$ mediante una homotecia. Utilizaremos la notación usual para la geometría de B. Por otro lado, el tensor métrico de F se denotará como $g_F = \langle \cdot \, , \cdot \rangle$ y su conexión de Levi-Civita, como ∇.

Definición 3.1.1 Sean B y F variedades semi-Riemannianas y $f > 0$ una función diferenciable sobre B. El *producto warped* $M = B \times_f F$ es la variedad producto $B \times F$ dotada del tensor métrico

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

Explícitamente, si u es tangente a $B \times_f F$ en (p, q), entonces

$$\langle u, u \rangle = \langle d\pi(u), d\pi(u) \rangle + f^2(p) \langle d\sigma(u), d\sigma(u) \rangle.$$

Nota 3.1.2 En el caso particular en que $f = 1$, el producto warped se reduce a una simple variedad producto. Para el caso general, nuestro objetivo será expresar la geometría de $B \times_f F$ en términos de la *función alabeante* (warping) f y de las geometrías de B y F.

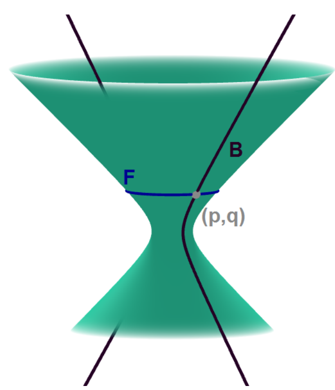

Figura 3.1: Producto warped $B \times_f F$.

Notación 3.1.3 Siguiendo la terminología de la teoría de fibrados, denominaremos a B y a F la *base* y la *fibra* de $B \times_f F$, respectivamente.

Al igual que en el caso de una variedad semi-Riemanniana producto, podemos comprobar de forma sencilla que las *fibras* $\{p\} \times F = \pi^{-1}(\{p\})$ y las *hojas* $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(\{q\})$ son subvariedades semi-Riemannianas de $B \times_f F$, y la métrica warped está caracterizada por:

(1) Para cada $q \in F$, la aplicación $\pi|_{(B\times\{q\})}$ es una isometría sobre B.

(2) Para cada $p \in B$, la aplicación $\sigma|_{(\{p\}\times F)}$ es una homotecia positiva sobre F, con factor de escala $1/f(p)$.

(3) Para cada $(p, q) \in M$, la hoja $B \times \{q\}$ y la fibra $\{p\} \times F$ son ortogonales en (p, q).

Notación 3.1.4 Los vectores tangentes a las hojas se dicen *horizontales* y los vectores tangentes a las fibras se dicen *verticales*. Denotaremos por $\mathcal{H}$ la proyección ortogonal de $T_{(p,q)}(M)$ sobre el subespacio horizontal $T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ y por $\mathcal{V}$ la proyección ortogonal de $T_{(p,q)}(M)$ sobre el subespacio vertical $T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$.

En este momento es conveniente recordar la Definición 1.8.2, en la que introducimos el levantamiento de un campo (de vectores) de B o F en $B \times F$. Los conjuntos de todos estos levantamientos se denotan por $\mathfrak{L}(B)$ y $\mathfrak{L}(F)$, respectivamente. Por abuso de notación, se suele denominar de la misma forma a un campo de vectores y a su levantamiento.

No tardaremos en comprobar que, realmente, sólo estamos interesados en la forma de las fibras. Esto se debe a que la relación de un producto warped con la base B es casi tan simple como en el caso de una variedad producto. Sin embargo, la relación con la fibra F involucra la función alabeante f.

Lema 3.1.5 *Si $h \in \mathcal{F}(B)$, entonces el gradiente del levantamiento $h \circ \pi$ de h en $M = B \times_f F$ es el levantamiento del gradiente de h sobre B.*

Demostración. *Debemos probar que* $\operatorname{grad}(h \circ \pi)$ *es horizontal y está π-relacionado con grad h sobre B.*

Sea v un vector vertical tangente a M, en ese caso $\langle \operatorname{grad}(h \circ \pi), v\rangle = v(h \circ \pi) = d\pi(v)h = 0$*, ya que $d\pi(v) = 0$. En consecuencia,* $\operatorname{grad}(h \circ \pi)$ *es* *horizontal. Si en su lugar, v es horizontal, se tiene:*

$$\langle d\pi(\text{grad}(h\circ\pi)), d\pi(v)\rangle = \langle \text{grad}(h\circ\pi), v\rangle = v(h\circ\pi) = d\pi(v)h = \langle \text{grad } h, d\pi(v)\rangle$$

De este modo, en cada punto se cumple que $d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)) = \text{grad } h$ y el resultado queda probado.

De ahora en adelante simplificaremos la notación, denotando $h \circ \pi$ por h y $\text{grad}(h \circ \pi)$ por grad h.

El siguiente resultado determina la conexión de Levi-Civita de M a partir de la conexión de Levi-Civita de las variedades B y F. De este modo, todas las nociones introducidas a partir de esta conexión en el capítulo anterior pueden ser utilizadas sin problema en el contexto de los productos warped.

Proposición 3.1.6 *Sea $M = B \times_f F$. Denotamos por ∇, ∇^B y ∇^F las conexiones de Levi-Civita de M, B y F respectivamente. Si $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ y $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, entonces:*

(1) *$\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(B)$ es el levantamiento de $\nabla^B_X Y$ sobre B.*

(2) *$\nabla_X V = \nabla_V X = (Xf/f)V$.*

(3) *La componente de $\nabla_V W$ normal a las fibras es $-(\langle V, W\rangle)/f)$ grad f.*

(4) *La componente de $\nabla_V W$ tangente a las fibras es el levantamiento de $\nabla^F_V W$ sobre F.*

Demostración. (1) *La fórmula de Koszul para $2\langle \nabla_X Y, V\rangle$ se reduce a*

$$-V\langle X, Y\rangle + \langle V, [X, Y]\rangle$$

ya que, en vigor del Corolario 1.8.3, $[X, V] = [Y, V] = 0$. Como se tiene que $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$, $\langle X, Y\rangle$ es constante sobre las fibras. Al ser V vertical, $V\langle X, Y\rangle = 0$. Como $[X, Y]$ es tangente a las hojas, se cumple que $\langle V, [X, Y]\rangle = 0$. Así pues, $\langle \nabla_X Y, V\rangle = 0$ para todo $V \in \mathfrak{L}(F)$, luego $\nabla_X Y$ es horizontal. Como, para cada $q \in F$, $\pi|_{B\times q}$ es una isometría, se tiene el resultado.

(2) *Se tiene $\nabla_X V = \nabla_V X$, ya que $[X, Y] = 0$. Estos campos de vectores son verticales ya que, a partir de* (1), *se tiene $\langle \nabla_X V, Y\rangle = -\langle V, \nabla_X Y\rangle = 0$.*

En la fórmula de Koszul para $2\langle\nabla_X V, W\rangle$*, el único término que no se anula es* $X\langle V, W\rangle$*. Por la definición del tensor métrico del producto warped,* $\langle V, W\rangle(p,q) = f^2(p)(V_p, W_q)$*. Si escribimos* f *en lugar de* $f\circ\pi$*, la expresión anterior adquiere la forma* $\langle V, W\rangle = f^2((V,W)\circ\sigma)$*. El término entre paréntesis es constante sobre las hojas, quienes son tangentes a* X*, luego:*

$$X\langle V, W\rangle = X[f^2((V,W)\circ\sigma)] = 2fXf((V,W)\circ\sigma) = 2(Xf/f)\langle V, W\rangle.$$

Así pues, $\nabla_X V = (Xf/f)V$*.*

(3) *A partir de* (2)*,*

$$\nabla_V W, X\rangle = -\langle W, \nabla_V X\rangle = -\langle W, (Xf/f)V\rangle = -(Xf/f)\langle V, W\rangle.$$

Sirviéndonos del Lema 3.1.5, $Xf = \langle \text{grad } f, X\rangle$ *sobre ambos* M *y* B*. De este modo, se sigue que para todo* X*,*

$$\langle\nabla_V W, X\rangle = -\langle((\langle V, W\rangle/f)\text{grad } f, X\rangle.$$

(4) *Como* V *y* W *son tangentes a todas las fibras, dada cualquier fibra, la componente tangente de* $\nabla_V W$ *es la conexión de Levi-Civita de la fibra (*∇^F*) aplicada a las restricciones de* V *y* W *a la fibra en cuestión. Si tenemos en cuenta que las homotecias preservan la conexión de Levi-Civita, la unicidad de esta última nos garantiza la* σ*-relación y el resultado queda probado.* $\square$

3.1.2. El espacio-tiempo de Robertson-Walker

Antes de describir este modelo físico, debemos introducir ciertas nociones fundamentales que ligan la Geometría y la Física con las que tratamos.

Si recordamos la Definición 2.1.5 y la Observación 2.1.6, presentamos la caracterización de los vectores en función del elemento de línea (a partir de la forma bilineal) y surge naturalmente la noción de cono temporal. Esta última es de gran importancia en el contexto de las variedades de Lorentz (Ejemplo 2.1.18). Dada una variedad de Lorentz M y un punto $p\in M$ cualesquiera, el espacio tangente $T_p(M)$ tiene siempre dos conos temporales, a priori indistinguibles. El realizar esta distinción se denomina *orientar temporalmente* $T_p(M)$. Surge así la siguiente pregunta: ¿Podemos orientar temporalmente cualquiera de los espacios tangentes de M de forma que se garantice la continuidad?

Sea τ una función sobre M que asigna a cada punto p un cono temporal τ_p en $T_p(M)$. La función τ se dirá *diferenciable* si para cada $p \in M$ existe un campo de vectores (diferenciable) X sobre un entorno U de p tal que $X_q \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Esta función se denomina *orientación temporal* de M. Si M admite una orientación temporal, se dice que es *orientable temporalmente*. *Orientar temporalmente* M consistirá pues en elegir una orientación temporal específica, lo cual coincide con la distinción entre los conos temporales que queríamos poder establecer anteriormente.

Por ejemplo, el espacio de Minkowski $\mathbf{R}_1^n$ es orientable temporalmente. Su *orientación temporal usual* es la que contiene el campo de vectores ∂_1 (derivada respecto de u_0) con las coordenadas naturales $u_0, \ldots, u_{n-1}$.

Definición 3.1.7 Un *espacio-tiempo* es una variedad de Lorentz 4-dimensional, conexa y orientada temporalmente (esta última condición suele reducirse informalmente por la de ser orientable temporalmente).

Ejemplo 3.1.8 Un *espacio-tiempo de Minkowski M* es un espacio-tiempo isométrico al espacio de Minkowski $\mathbf{R}_1^4$.

Notación 3.1.9 Comúnmente, dado un espacio-tiempo, denominamos su orientación temporal como *futuro*, y su orientación opuesta como *pasado*. Si recordamos la Observación 2.1.6, del carácter causal de los vectores surge la noción de *cono causal*, que no será más que el conjunto de los vectores no espaciales. También podremos distinguir, como es lógico, entre cono causal futuro y pasado. Diremos de un vector tangente perteneciente al cono causal futuro que *apunta* (o está *dirigido*) *hacia el futuro*. En este espacio-tiempo M, los puntos se dicen *eventos*. La evolución de las partículas vendrá dada por curvas parametrizadas temporalmente, a las que llamaremos *líneas de universo*.

Habiendo introducido los conceptos anteriores, estamos en condiciones de introducir un modelo espacio-temporal más general. En este modelo consideramos un espacio-tiempo que contiene un cierto fluido perfecto, cuyas moléculas serían las galaxias. Estas aparecen agrupadas en forma de clusters (cúmulos) galácticos. Si observamos el universo en una escala cosmológica, las evidencias nos hacen pensar que podemos considerar el universo isotrópico, sea cual sea la galaxia que observemos. Así pues, podemos construir modelos cosmológicos relativamente simples, que tengan una buena probabilidad de resultar físicamente realistas.

Partiremos, en primer lugar, de una variedad diferenciable $M = I \times S$, donde I es un intervalo (no forzosamente acotado) abierto de $\mathbf{R}$, y S una variedad tridimensional conexa. Denotaremos por t y σ las proyecciones sobre I y S, respectivamente. Las líneas $I \times \{p\}$ representarán las líneas de universo de las galaxias (o del sistema cuya evolución estudiemos).

Sea $U = \partial_t$ el levantamiento sobre $I \times S$ del campo de vectores d/dt sobre $I \subset \mathbf{R}$ y sea, para cada $p \in S$ la curva $I \times \{p\}$, parametrizada por $\gamma_p(t) = (t, p)$. Dado que U nos da la velocidad de cada "galaxia"γ_p, estas son curvas integrales. Así pues, la función t nos da el tiempo medido desde las propias galaxias, que se denomina *tiempo propio* en el contexto de la teoría de la relatividad.

Definición 3.1.10 Sea S una variedad semi-Riemanniana conexa tridimensional de curvatura constante $k = -1, 0$, ó 1. Sea $f > 0$ una función diferenciable sobre un intervalo abierto $I \subset \mathbf{R}_1^1$. Entonces, el producto warped

$$M(k, f) = I \times_f S$$

se dice un *espacio-tiempo de Robertson-Walker*.

Explícitamente, $M(k, f)$ no es más que la variedad $I \times S$ con el elemento de línea $-dt^2 + f^2(t)d\sigma^2$, donde $d\sigma^2$ es el elemento de línea de S. Este espacio-tiempo puede orientarse temporalmente imponiendo que $U = \partial_t$ esté dirigido hacia el futuro. Aunque la notación $M(k, f)$ no describa completamente el espacio-tiempo, el *signo* k y la *función de escala* f son sus elementos esenciales. Se dice que el intervalo I es *maximal* si f no puede extenderse a una función positiva diferenciable en un intervalo que contenga (en sentido estricto) a I.

La variedad Riemanniana S se conoce como *espacio* de $M(k, f)$. S no es más que un modelo a escala de cada corte espacial $S(t)$. Al ser S la fibra de $M(k, f)$ denotaremos su tensor métrico por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y su conexión por ∇, como vimos en la sección anterior. Las *elecciones estándar* para S son los espacios simplemente conexos: H^3, R^3 y S^3, con curvaturas $-1, 0, +1$, respectivamente.

3.2. Kaluza-Klein

En esta sección presentamos algunos de los elementos geométricos básicos para describir las generalidades de la teoría de Kaluza-Klein. Para ello, introducimos en primer lugar ciertas nociones referentes a la Teoría de Fibrados que nos serán necesarias. No obstante, nos limitaremos a dar las definiciones más básicas que nos permitan introducir el modelo físico, ya que un estudio en profundidad de la Teoría de Fibrados nos alejaría del objetivo principal de este trabajo.

3.2.1. Fibrado principal

Las métricas sobre los fibrados pueden resultar similares a las que hemos descrito anteriormente en el caso de los productos warped. No obstante, podremos comprobar a lo largo de esta sección que existen ciertas diferencias conceptuales. Para poder describir los *fibrados principales*, introduciremos en primer lugar el concepto de grupo de Lie.

Notación 3.2.1 Dado un grupo G con una operación $*$ y dos de sus elementos, $a, b \in G$, expresaremos la operación interna simplemente como ab.

Definición 3.2.2 Se denomina *grupo de Lie* a una variedad diferenciable G que es, a su vez, un grupo con las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G \times G & \to & G \\ & (a,b) & \mapsto & ab, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \zeta: & G & \to & G \\ & a & \mapsto & a^{-1}. \end{array}$$

Estas operaciones son, además, aplicaciones diferenciables. El elemento identidad de G se denota por e.

Definición 3.2.3 Se denomina *álgebra de Lie* sobre $\mathbf{R}$ a un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$ dotado de una operación $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Esta recibe el nombre de *producto corchete* y fue introducida para campos diferenciables en la Sección 1.6.

A continuación, veremos que cada grupo de Lie tiene un álgebra de Lie canónica asociada. Lo que caracteriza la Teoría de Lie es el estudio de los grupos de Lie en términos del álgebra a la que están asociados.

Definición 3.2.4 Sea a un elemento de un grupo de Lie G. Definimos las operaciones $L_a(g) = ag$ y $R_a(g) = ga$ para todo $g \in G$. Se tiene que $L_a : G \to G$ (análogamente R_a) es una aplicación diferenciable. Es, además un difeomorfismo, ya que su inversa viene dada por $L_{a^{-1}}$ (análogamente $R_{a^{-1}}$).

Definición 3.2.5 Un campo de vectores X sobre un grupo de Lie G se dice *invariante a izquierda* si se tiene $dL_a(X) = X$ para todo $a \in G$.

Explícitamente, $dL_a(X_g) = X_{ag}$ para todo $a, g \in G$. Así pues, la multiplicación a izquierda tan solo permuta los vectores tangentes pertenecientes a X. No es difícil comprobar que un campo de vectores invariante a izquierda es diferenciable.

Definición 3.2.6 Sean G un grupo y X un conjunto. Una aplicación $\phi : G \times X \to X$ se denomina *acción* de G sobre X si cumple:

(1) Dado el elemento neutro $e \in G$, $\phi(e, x) = x$ para todo $x \in X$.

(2) $\phi(ab, x) = \phi(a, (\phi(b, x)))$ para todos $x \in X$, $a, b \in G$.

Si además, se cumple que $\phi(a, x) = x$ implica que $a = e$, la acción se dice *libre*.

Definición 3.2.7 Sean P y M variedades diferenciables, G un grupo de Lie y $\pi : P \to M$ una aplicación diferenciable. La variedad P se denomina *fibrado principal* (*diferenciable*) sobre M con el grupo G y la acción ϕ de G sobre P si se satisface:

(1) ϕ actúa libremente sobre P.

(2) M es el espacio cociente de P para la relación de equivalencia inducida por G, $M = P/G$.

(3) P es localmente trivial, esto es, cada punto $x \in M$ tiene un entorno U tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo a $U \times G$. En este contexto, isomorfo quiere decir que existe un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que $\varphi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$, donde φ satisface $\varphi(ua) = (\varphi(u))a$ para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ y $a \in G$.

Notación 3.2.8 Un fibrado principal se denotará por $P(M, G, \pi)$, $P(M, G)$, o simplemente P en caso de que no haya posibilidad de confusión. Usualmente, se denomina a P el *espacio total*, a M el *espacio de base*, a G el *grupo de la estructura* y a π la *proyección*.

Observación 3.2.9 Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad cerrada de P, denominada la *fibra* sobre x. Dado un punto $u \in \pi^{-1}(x)$, el conjunto $\pi^{-1}(x)$ es de la forma ua, con $a \in G$. Una de las características más destacables de los fibrados principales es que cada fibra es difeomorfa a G.

Definición 3.2.10 Sean $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal y ω su conexión principal, con M y G variedades semi-Riemannianas con tensores métricos g_M y g_G, respectivamente. Para cualquier función $f > 0$ diferenciable sobre M, se puede construir una *métrica de Kaluza-Klein*, que tiene la forma siguiente:

$$g = \pi^*(g_M) + (f \circ \pi)^2 \omega^*(g_G).$$

Observación 3.2.11 Hemos dado esta definición con el único fin de observar su similitud (al menos, formal) con las métricas warped introducidas previamente. Sin embargo, para poder introducirla propiamente deberíamos definir previamente las conexiones principales. No obstante, esto requiere una profundización excesiva en la Teoría de Fibrados y, como hemos comentado anteriormente, esto se aleja del objetivo del trabajo.

Notación 3.2.12 En el caso particular en que $P = M \times G$, esta variedad producto se dice un *fibrado trivial*. En el caso general, sólo se puede identificar a P con el producto $M \times G$ de forma local. De este modo, los fibrados principales también pueden verse como una generalización de las variedades producto.

3.2.2. Teoría de Kaluza-Klein

En 1921, Theodor Kaluza publica unos resultados obtenidos en 1919 y consultados previamente con Albert Einstein. En este trabajo propone una dimensión espacial adicional con el fin de explicar la interacción electromagnética. En 1926, Oskar Klein da una interpretación cuántica de la hipótesis de Kaluza. Este propone también una compactificación de la nueva dimensión espacial, que identificaría con $\mathbf{S}^1$. Esta idea había aparecido previamente en la teoría gravitatoria de Gunnar Nordström (1914), pero causó un menor impacto en su momento.

La propuesta original de Kaluza-Klein, descrita en términos de los ahora conocidos fibrados principales, puede ser resumida como un fibrado $P(M, G)$ en el que M viene dada por nuestra variedad espacio-temporal y G viene dada por $\mathbf{S}^1$. No obstante, las teorías derivadas de esta, en las que G viene dado por otro grupo de Lie, tambien son denominadas teorías de Kaluza-Klein.

Observación 3.2.13 Para ser precisos, debemos introducir un poco de Álgebra. Esto nos permite identificar $\mathbf{S}^1$ con el grupo circular $\mathbf{T}$ (o $U(1)$), que se define como $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, con la operación del producto complejo. Los elementos $z, w \in \mathbf{T}$, pueden ser expresados como $z = e^{i\alpha}$ y $w = e^{i\beta}$, con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, por lo que $zw = e^{i(\alpha+\beta)}$. Se comprueba de forma inmediata que $\mathbf{T}$ es, en efecto un grupo. Este es, en concreto, un grupo abeliano.

Como hemos mencionado, la teoría de Kaluza-Klein surge como un intento de unificar las interacciones que rigen el universo. No obstante, esta teoría es formulada en un momento en el que solamente se conocen dos de estas interacciones. A día de hoy, se plantea un modelo en el que existen cuatro interacciones. Así pues, surgen nuevas teorías de Kaluza-Klein en las que el grupo de Lie G es algo menos simple. A continuación profundizaremos en la cuestión a partir de un ejemplo.

Ejemplo 3.2.14 Algunas de las teorías sucesoras de la Teoría de Kaluza-Klein original son las llamadas teorías de supergravedad. Una de ellas es la supergravedad de 11 dimensiones, o 11d: SUGRA. En esta teoría seguimos partiendo de un fibrado principal, pero en este caso el grupo G es, como ya mencionamos, bastante mas sofisticado. Esto se debe a que imponemos a G la condición de tener a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ como subgrupo, ya que los grupos que conforman el producto corresponden a los grupos de simetrías asociados a las interacciones fuerte, débil y electromagnética, respectivamente. Una de las posibles elecciones es $G = CP^2 \times S^2 \times S^1$, donde el espacio proyectivo CP^2 tiene dimensión 4 y S^2 y S^1 tienen, como ya sabemos, dimensiones 2 y 1. Así pues, las 7 dimensiones de G, unidas a las 4 dimensiones de nuestro espacio-tiempo M darían lugar a las 11 dimensiones mencionadas previamente.

Observación 3.2.15 Los grupos $SU(n)$ corresponden a los grupos de matrices $n \times n$ con determinante igual a 1, con la operación del producto de matrices usual.

Aunque la teoría original de Kaluza-Klein presenta ciertos fallos, tales como la relación carga-masa del electrón y ciertos aspectos obsoletos, como la consideración de las interacciones gravitatoria y electromagnética únicamente, el paradigma del que parte resulta bastante innovador e interesante, como podemos apreciar en las teorías que se basarían en esta.

En este trabajo se han introducido los aspectos geométricos fundamentales para poder construir la Teoría de Kaluza-Klein. No obstante, no se ha hecho ningún desarrollo o cálculo físico. Tampoco hemos descrito la cuantización que introduce Klein al primer modelo construido por Kaluza. Esto habría requerido la introducción de bastantes nociones que hemos omitido, además de una extensión excesiva. No obstante, el desarrollo presentado es suficiente para servir como introducción al tema, cuyos elementos introducidos pueden servir al lector como punto de partida para una posterior profundización.

Bibliografía

[1] M. Barros. The conformal total tension variational problem in Kaluza-Klein supergravity. *Nuclear Physics B* **535** (1998), 531-551.

[2] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, Amsterdam, 2003.

[3] A. Carriazo, L. M. Fernández. *Resumen de la asignatura Variedades Diferenciables.* Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla, 2017.

[4] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry.* Academic Press, New York, 1983.

[5] A. Založnik. *Kaluza-Klein Theory.* Department of Physics, University of Ljubljana, 2012.

FE DE ERRATAS

Durante el proceso de preparación de la exposición de este Trabajo Fin de Grado, detecté que faltaba la siguiente referencia bibliográfica, empleada para la elaboración de la Sección 3.2.1:

S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. John Wiley and Sons, New York, 1963-1969.

Sevilla, 21 de septiembre de 2018

Fdo.: Adrián Arenas Gullo