



Universidad de Sevilla

Facultad de Física

---

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Propagación del sonido en un medio granular

Jacob Martín Serrano

Tutores:

Miguel Ángel Sánchez Quintanilla

Alberto Pérez Izquierdo



## Índice

<b>Resumen</b> .....	3
<b>1. Objetivo</b> .....	4
<b>2. Introducción</b> .....	5
<b>3. Fundamento teórico</b> .....	8
<b>3.1. Ondas sonoras</b> .....	8
<b>3.2. Teoría de la elasticidad</b> .....	13
<b>3.3. Ondas sonoras en sólidos</b> .....	15
<b>3.4. Piezoelectricidad. Ecuaciones constitutivas.</b> .....	19
<b>3.5. Modelo de Hertz</b> .....	22
<b>3.6. Ondas en un medio granular tridimensional compuesto por esferas</b> .....	26
<b>4. Método experimental</b> .....	30
<b>4.1. Medida directa del tiempo de vuelo</b> .....	31
<b>4.2. Medida del tiempo de vuelo a través de la correlación cruzada</b> .....	34
<b>5. Resultados experimentales</b> .....	34
<b>5.1. Esferas de vidrio</b> .....	35
<b>5.2. Esferas de polimetilmetacrilato (PMMA)</b> .....	37
<b>5.3. Esferas de polietileno (PE)</b> .....	38
<b>5.4. Medidas con la correlación cruzada</b> .....	39
<b>6. Discusión de resultados</b> .....	42
<b>7. Conclusiones</b> .....	45
<b>8. Bibliografía</b> .....	46

## Resumen

En el siguiente trabajo se analiza la dependencia de la velocidad de propagación de ondas de ultrasonido en un medio granular con la carga de compresión a la que se encuentra sometido, esperando que siga la dependencia predicha por el modelo de contacto de Hertz. Primero se hace una breve introducción a los medios granulares, su importancia, teorías de contacto y ultrasonidos para posteriormente explicar la parte teórica necesaria para entender el experimento: los fundamentos de ondas, teoría de elasticidad, piezoelectricidad, modelo de Hertz de contacto entre dos partículas y su aplicación para medios granulares que nos da la dependencia de la velocidad del sonido con la carga que esperamos comprobar experimentalmente. A continuación, se explica el procedimiento experimental y el montaje para posteriormente analizar los resultados correspondientes a varias muestras de pequeñas esferas de vidrio, polimetilmetacrilato (PMMA) y polietileno (PE). No se observa el mismo comportamiento en todas las muestras, ya que el mecanismo de contacto depende de la rigidez del material y de la carga a la que está sometido, comprobándose que sólo con las esferas de polimetilmetacrilato se obtiene la dependencia esperada aplicando el modelo de contacto de Hertz.

## 1. Objetivo

El objetivo de este trabajo experimental es por tanto aplicar el modelo de Hertz de contacto entre dos partículas para obtener la relación entre la velocidad de propagación del sonido en un medio granular y la carga de compresión a la que se encuentra sometido con la finalidad de posteriormente comprobar dicha dependencia experimentalmente, para lo que se utilizarán distintas muestras de medios granulares. El montaje experimental se basa en un circuito con dos transductores piezoeléctricos (emisor y receptor) que convierten señales eléctricas en ondas de ultrasonido y viceversa, lo que nos permite obtener el tiempo de vuelo de la onda y así obtener una medida de la velocidad. Se utilizarán distintas pesas para comprimir el material y observar el cambio en la velocidad que esto provoca.

## 2. Introducción

Los medios granulares son conocidos por el hombre desde la antigüedad, habiendo sido manipulados con diferentes finalidades (por ejemplo, en la alimentación o construcción). Estos usos han motivado un interés por entender sus propiedades, aunque no es hasta principio de los años 80 cuando físicos se proponen elaborar una teoría sobre medios granulares, siendo actualmente un área de la Física en desarrollo, debido a la complejidad que presenta su estudio. Actualmente la comprensión de las propiedades mecánicas de los medios granulares es fundamental en diversas disciplinas como la ingeniería civil, ingeniería y ciencia de materiales, ingeniería química, geofísica, geología... [1].

Aunque el concepto de medio granular es intuitivo, una definición adecuada es la de un agregado de elementos macroscópicos independientes (granos) que interactúan entre sí mediante fuerzas de contacto disipativas y restitutivas [2]. Esto hace que, aunque dichos elementos constituyentes sean sólidos, puedan ser considerados un estado de la materia diferente a los estados de agregación típicos debido a las particulares propiedades que presentan. En la Figura 1 se observa la diferente respuesta de un medio granular contenido en un recipiente cuando se somete a una inclinación de un ángulo  $\theta$  y posteriormente se vuelve a la posición inicial.

A diferencia de los sólidos masivos cuando un material granular se deposita en un recipiente ocupa un volumen aparente  $V_a$ , siendo dicho volumen superior al que se obtendría sumando el volumen de cada grano uno a uno o volumen real  $V_r$ . La diferencia entre ambos es el volumen intersticial  $V_i$  o volumen que ocupan los huecos entre los granos. Se define la fracción de compactación o empaquetamiento como

$$\phi = \frac{V_r}{V_a} = 1 - \frac{V_i}{V_a}. \quad (2.1)$$

Otra magnitud análoga a la anterior es la densidad aparente  $\rho_a$

$$\rho_a = \frac{M}{V_a} = \phi \rho \quad (2.2)$$

donde  $M$  es la masa y  $\rho$  la densidad. La fracción de empaquetamiento depende de la forma y rugosidad de los granos, pero también de la forma en la que son manipulados o depositados. Cuando tenemos un material granular denso al azar su valor está en torno a  $\phi \sim 0.64$ .

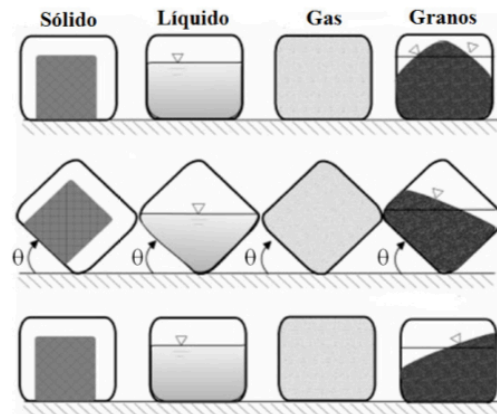


Figura 1. Comportamiento característico de un medio granular. Imagen sacada de “Los materiales granulares: una mirada al interior del pimentero” [2].

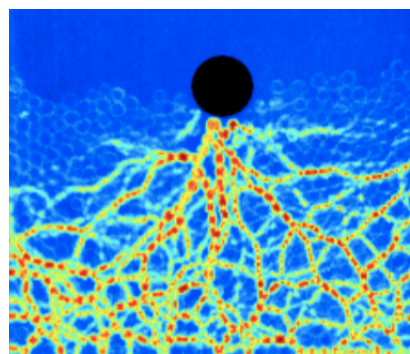


Figura 2. Distribución de las cadenas de esfuerzo en un medio granular. Imagen sacada de “Dynamics of meteor impact” [3].

Otra característica importante de los medios granulares es la forma en la que se transmiten los esfuerzos entre las distintas partículas. Éstos se transmiten de forma no lineal e irregular, siguiendo lo que se denominan “cadenas de esfuerzo”. Mientras que en un fluido al aplicar presión ésta se transmite uniformemente en todas direcciones (principio de Pascal), en un medio granular hay partículas que soportan gran parte de la carga y otras que no soportan ninguna, transmitiéndose ésta por los puntos de contacto entre los distintos granos. En la Figura 2 se muestra el esfuerzo transmitido cuando se bombardea un medio granular con una esfera de mayor peso [3].

Esta manera de transmitir los esfuerzos que tiene un medio granular es la que determina otras propiedades como la conductividad térmica, eléctrica o la que en este caso nos ocupa, la propagación del sonido.

La rama de la física que estudia la propagación del sonido es la acústica. El sonido es una onda mecánica que necesita de un medio material para su propagación, ya sea éste gaseoso, líquido o sólido. Aunque inicialmente se creía que el sonido sólo se podía propagar por el aire, el

considerado padre de la acústica Ernst Chladni (1756-1827) consiguió medir la velocidad del sonido en diferentes materiales sólidos no sólo demostrando su propagación, sino que además en general la velocidad del sonido es mayor en sólidos que en líquidos y en líquidos mayor que en gases [4]. Además, como se demostrará posteriormente, está íntimamente relacionada con las propiedades mecánicas del sólido mediante la expresión

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.3)$$

donde  $E$  es el módulo de Young o módulo de rigidez (relación entre tensión normal y deformación unitaria de un material) y  $\rho$  la densidad del material. Por lo tanto la medición experimental de la velocidad del sonido en un sólido proporciona una manera de estimar su módulo de Young. En el caso de un medio granular, la dependencia será distinta y estará influida por la manera en la que los esfuerzos se transmiten por dicho medio y en consecuencia por los contactos entre las distintas partículas.

Un modelo teórico de contacto es el establecido por el físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), el cual establece el área de contacto y una distribución de presión a través de dicha área para dos sólidos elásticos cargados uno contra otro. Aunque dicho modelo sólo es válido bajo ciertas condiciones, ha servido como fundamento para la elaboración de otras teorías de contacto más complejas. En el caso de un medio granular tenemos partículas en contacto unas con otras y estas áreas de contacto dependen de la carga a la que está sometido el material, afectando a la transmisión de esfuerzos en el medio y por tanto a la propagación del sonido.

Los sonidos que se utilizarán para realizar el experimento son ultrasonidos. Mientras que el rango de frecuencias audible está entre  $20 \text{ Hz}$  y  $20 \text{ kHz}$ , se consideran ultrasonidos a los que están comprendidos entre  $20 \text{ kHz}$  y  $1 \text{ GHz}$ . Algunas de las aplicaciones de los ultrasonidos más ampliamente conocidas son la obtención de imágenes del interior del cuerpo (ecografías) o en sistemas de navegación marítima. Su baja velocidad en comparación con las ondas electromagnéticas y la facilidad que tienen para penetrar en cuerpos opacos son las principales propiedades que los hacen tan útiles [5]. En el ámbito de la ciencia de materiales los ultrasonidos se utilizan para obtener información sobre las propiedades de los sólidos y a



escala industrial sirven para realizar ensayos no destructivos de detección de defectos. En este experimento los utilizaremos para comprobar el modelo de contacto entre las partículas de un medio granular a partir del cambio en la velocidad de propagación cuando aplicamos una cierta carga sobre el material.

### 3. Fundamento teórico

#### 3.1. Ondas sonoras

Antes de adentrarnos en el estudio de las ondas, y dentro de éstas de las ondas sonoras, conviene hacer un repaso del oscilador armónico, que nos ayuda a entender las vibraciones [6]. El modelo del oscilador armónico es muy útil ya que describe muy apropiadamente el movimiento de un sistema que es desplazado ligeramente de su posición de equilibrio, por lo que su energía potencial en torno a dicha posición, tomándola como origen, puede escribirse desarrollando hasta el tercer término como

$$V(x) = V|_{x=x_0} + \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} x^2 . \quad (3.1.1)$$

Tomando el origen de energía como la correspondiente a la posición de equilibrio y siendo dicha posición un mínimo de energía, los dos primeros términos son nulos, por lo que dicha energía puede escribirse en torno a la posición de equilibrio como

$$V(x) = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} x^2 \quad (3.1.2)$$

lo que nos lleva a una expresión de la fuerza como

$$\vec{F} = -\nabla V(x) = -kx\vec{u}_x \quad (3.1.3)$$

donde  $k = d^2V(x)/dx^2$  es la constante elástica del oscilador. Dicha expresión se conoce como ley de Hooke e igualándola a la segunda ley de Newton se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 . \quad (3.1.4)$$

Las soluciones de dicha ecuación pueden escribirse como

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) \quad (3.1.5)$$

donde  $\omega_0 = k/m$  es la frecuencia angular de la oscilación y las dos constantes dependen de las condiciones iniciales. La solución puede escribirse también como

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.1.6)$$

o alternativamente se puede utilizar la función coseno. En la anterior expresión  $\varphi_0$  es el ángulo de fase inicial. Se definen la frecuencia  $f_0$  y el período  $T_0$  como

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (3.1.7)$$

$$T = \frac{1}{f_0} \quad (3.1.8)$$

La solución también se puede escribir mediante notación fasorial. Por ejemplo, la solución  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  quedaría escrita como

$$x(t) = \text{Re}[A e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi_0}] \quad (3.1.9)$$

donde  $j$  es la unidad imaginaria. Este sería el caso de un oscilador armónico ideal, en el que no se disipa energía y por lo tanto el movimiento oscilatorio continuaría indefinidamente. Podemos introducir un término en la ecuación de movimiento correspondiente a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad de la partícula

$$F = -R \frac{dx}{dt} \quad (3.1.10)$$

Quedando la ecuación de movimiento como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.1.11)$$

cuyas soluciones en notación fasorial se pueden escribir como

$$x(t) = \text{Re}[A e^{-\alpha t} e^{-j(\omega t + \varphi)}] \quad (3.1.12)$$

que corresponde a un oscilador amortiguado, siendo  $\alpha = \frac{R}{2m}$  la constante de amortiguamiento y  $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ . Además de amortiguamiento, la evolución temporal de un oscilador también se ve influenciada por fuerzas externas, respondiendo el sistema con oscilaciones forzadas. Suponiendo que sobre el sistema actúa una fuerza externa que varía periódicamente con el tiempo pudiéndose escribir como  $F e^{j\omega t}$ , la ecuación queda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F e^{j\omega t} \quad (3.1.13)$$

Y cuya solución tiene la forma

$$x(t) = \frac{1}{j\omega} \frac{F e^{j\omega t}}{R + j(\omega m - \frac{k}{\omega})} \quad (3.1.14)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{F e^{j\omega t}}{R + j(\omega m - \frac{k}{\omega})} \quad (3.1.15)$$

La expresión de la velocidad es igual que la ley de Ohm aplicada a un circuito de corriente alterna, por lo que por analogía se puede definir una magnitud llamada impedancia mecánica

$$Z = R + jX \quad (3.1.16)$$

donde  $X = \omega m - k/\omega$  es la reactancia mecánica.

En este caso las expresiones de la posición y velocidad en notación real vienen dadas por

$$x = \left(\frac{F}{\omega Z}\right) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.1.17)$$

$$v = \left(\frac{F}{Z}\right) \cos(\omega t - \theta) \quad (3.1.18)$$

Conociendo la expresión de la velocidad se puede calcular la potencia transferida al oscilador

$$P(t) = F(t)v(t) = \left(\frac{F^2}{Z}\right) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta) \quad (3.1.19)$$

de la que se puede calcular la potencia media transferida al oscilador durante un ciclo

$$P_0 = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{F^2 \cos \theta}{2Z} = \frac{F^2 R}{2Z^2} \quad (3.1.20)$$

que alcanza un máximo cuando la reactancia mecánica  $X$  se anula y entonces la impedancia alcanza su valor mínimo. En este caso  $Z = R$ . A esta frecuencia para la cual la potencia es máxima se la conoce como frecuencia de resonancia del oscilador  $\omega_0$ .

Representando la potencia transferida frente a la frecuencia se ve claramente el máximo para el cual se consigue transferir más energía al oscilador. Se define el factor de calidad  $Q$  como

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} \quad (3.1.21)$$

donde  $BW$  es el *bandwidth* o ancho de banda y corresponde al ancho de la curva a mitad de la altura del máximo (Figura 3a). Cuanto mayor sea  $Q$ , menor ancho de banda tiene la

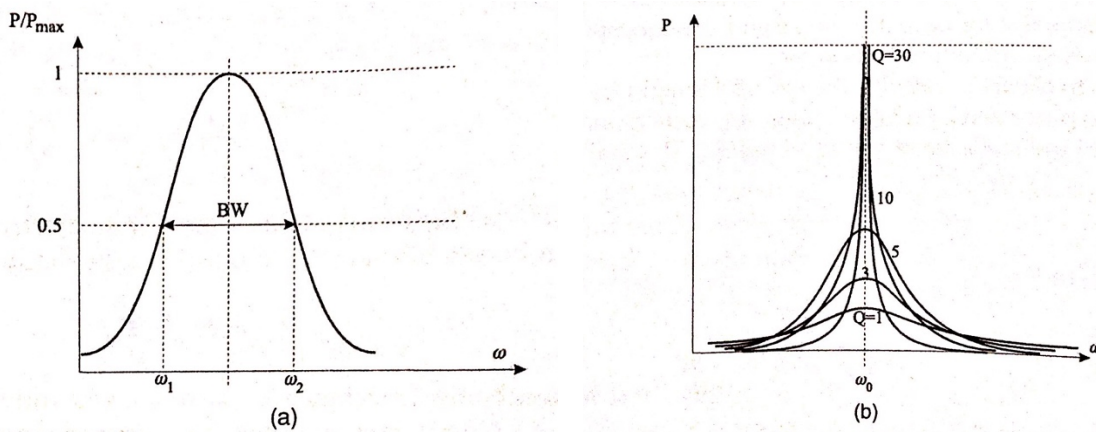


Figura 3. a) Potencia media en función de la frecuencia para un ancho de banda dado. b) Potencia media en función de la frecuencia para distintos factores de calidad  $Q$ . Al aumentar  $Q$  más potencia se transmite a la frecuencia de resonancia. Figura sacada de "Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves" [7].

potencia transferida al oscilador y mejor definida está la frecuencia de resonancia (Figura 3b).

El factor  $Q$  se puede expresar también en términos de energía como

$$Q = \frac{\langle \text{Energía almacenada} \rangle}{\langle \text{Energía disipada} \rangle} \quad (3.1.22)$$

donde los promedios se realizan sobre un ciclo.

$Q$  también se puede interpretar como un factor de amplificación, ya que puede expresarse como

$$Q = A_0 \frac{k}{F_0} \quad (3.1.23)$$

siendo  $A_0$  la amplitud para la frecuencia de resonancia y  $F_0/k$  es la amplitud a bajas frecuencias. Por lo tanto según nos acercamos a la frecuencia de resonancia la amplitud crece considerablemente y se dice entonces que el sistema está en resonancia.

Una vez visto el oscilador armónico, vamos a continuar con las ondas. Una onda es la propagación de una perturbación física a una velocidad determinada. La ecuación de onda es la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.1.24)$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda. La ecuación anterior es válida para cualquier tipo de onda. Sin embargo, como el sonido es una onda mecánica, suponiendo que tengamos un sólido monodimensional la velocidad viene dada por

$$v^2 = \frac{T}{\rho} \quad (3.1.25)$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio y  $T$  la tensión aplicada al sólido.

La solución general de la ecuación de ondas se puede escribir como

$$y(x, t) = C_1 f(x - vt) + C_2 g(x + vt) \quad (3.1.26)$$

siendo el primer término una onda que se propaga en sentido positivo del eje  $x$  y el segundo en sentido negativo.

Si consideramos que tenemos un oscilador armónico que provoca una perturbación que se propaga por el medio en dirección positiva del eje  $x$ , entonces la onda se puede escribir de la forma

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad (3.1.27)$$

donde  $k$  es el número de onda,  $\varphi$  el ángulo de fase inicial,  $\lambda = 2\pi/k$  la longitud de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $f = \omega/2\pi$  la frecuencia.

Se define  $\phi = kx - \omega t + \varphi$  como la fase de la onda. La velocidad de fase es la velocidad a la que se propaga la fase de una onda armónica, entonces

$$kdx - \omega dt = 0 \quad (3.1.28)$$

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (3.1.29)$$

Para tres dimensiones, la ecuación de onda tiene la forma

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.1.30)$$

cuya solución en notación fasorial es

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)} \quad (3.1.31)$$

donde

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.1.32)$$

y la velocidad de fase tiene la misma expresión que en el caso monodimensional  $v_p = \omega/k$ .

Éste es el caso para medios isótropos, homogéneos, lineales y no dispersivos. Sin embargo, en muchas ocasiones la velocidad de fase depende de la frecuencia de la onda, en lo que se

denominan medios dispersivos, por lo que si tenemos un paquete de ondas de distintas frecuencias cada una se propagará a una velocidad distinta y por tanto la onda se deformará a medida que avanza.

Considerando el caso más sencillo en el que dos ondas de distintas frecuencias y por tanto distinta velocidad de fase se superponen

$$\psi_1 = \cos(k_1x - \omega_1t) \quad (3.1.33)$$

$$\psi_2 = \cos(k_2x - \omega_2t) \quad (3.1.34)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \quad (3.1.35)$$

La frecuencia de modulación en este caso es  $\omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2$  y por lo tanto dicha modulación tendrá velocidad  $v = (\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2)$ . Si consideramos que la diferencia de las frecuencias entre las dos ondas superpuestas es infinitesimal, entonces la velocidad de grupo puede escribirse como

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \quad (3.1.36)$$

### 3.2. Teoría de la elasticidad

La teoría de elasticidad es la parte de la física que estudia las relaciones entre las deformaciones producidas en un sólido cuando este es sometido a esfuerzos [7].

Consideremos un cuerpo elástico al que se le aplica una carga y como consecuencia se deforma. Cada punto del sólido sufre entonces un desplazamiento de magnitud  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ .

Se definen las componentes del tensor de deformación como

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.2.1)$$

donde los subíndices  $i, j = 1, 2, 3$  se corresponden con las direcciones x, y, z respectivamente. Este tensor representa una matriz de 3x3 simétrica con 6 términos diferentes, donde los elementos de la diagonal  $S_{ij}$  representan las deformaciones unitarias normales y los elementos fuera de la diagonal  $S_{ij}$  representan las deformaciones unitarias de cizalla.

Se define a continuación el tensor de tensiones  $T_{ij}$  como un tensor de orden 2 3x3 simétrico, cuyos elementos diagonales representan las tensiones de tracción o compresión y los elementos fuera de la diagonal representan las tensiones de cizalla.

Al aplicar unas tensiones en el sólido, se originan unas deformaciones, por lo que debe existir una relación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones. Si el cuerpo es elástico lineal entonces

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (3.2.2)$$

donde  $c_{ijkl}$  es el tensor de constantes elásticas. Como la tensión es directamente proporcional a la deformación producida, a esta expresión se la conoce como la ley de Hooke tridimensional. Dicho tensor en principio es de cuarto orden y tendría 81 componentes, pero como  $T_{ij}$  y  $S_{ij}$  son simétricos, entonces se tiene que

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk} \quad (3.2.3)$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (3.2.4)$$

por lo que el número de constantes se reduce a 21. De esta forma los tensores de tensiones y deformaciones pueden escribirse como pseudovectores relacionados por una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Si el material es elásticamente isótropo y homogéneo, las constantes se pueden escribir en función de los parámetros de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.2.6)$$

por lo que el tensor reducido para el caso simétrico quedaría

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (3.2.7)$$

A partir de las constantes de Lamé se pueden definir otras constantes elásticas:

- Módulo de Young: expresa la relación entre la tensión axial aplicada (tracción o compresión) y la deformación producida en dicha dirección. Proporciona una medida de la rigidez de un material. Se escribe como

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (3.2.8)$$

- Módulo de Poisson: da la relación entre la contracción transversal y la extensión longitudinal cuando se aplica una tensión de tracción.

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.2.9)$$

- Módulo de compresión:

$$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}. \quad (3.2.10)$$

- Módulo de rigidez ( $\mu$ ): es análogo al módulo de Young para cuando sólo hay tensiones de cizalla, es decir, da la relación entre la tensión de cizalla y la deformación de cizalla producida por dicha tensión.

### 3.3. Ondas sonoras en sólidos

Una vez introducida la teoría de la elasticidad, en la que se ha supuesto que las deformaciones y tensiones son estacionarias, es el turno de ver como se propaga una deformación en un sólido [8].

Consideremos un sólido monodimensional de longitud  $l$  orientado en dirección  $x$  al que al aplicarle una fuerza  $F$  sufre una deformación infinitesimal  $\partial u$ . La tensión entonces es  $T = F/A$  y la deformación unitaria

$$S = \frac{\partial u}{l} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.3.1)$$

La segunda ley de Newton quedaría



$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.3.2)$$

donde  $\partial T/\partial x$  es la fuerza por unidad de volumen y  $\rho$  la densidad del sólido. La ley de Hooke quedaría entonces  $T = cS$  y combinándola con (3.3.1) y (3.3.2) se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.3.3)$$

cuyas soluciones ya vistas anteriormente son de la forma

$$u = \text{Re}[Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(kx+\omega t)}]. \quad (3.3.4)$$

La velocidad de la onda en este caso es  $v_L = \sqrt{c/\rho}$ .

Las densidades de energía cinética y potencial tienen las expresiones

$$u_k = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \quad (3.3.5)$$

$$u_p = \frac{1}{2} TS. \quad (3.3.6)$$

Calculando sus valores medios y sumándolos, se llega a que la densidad de energía media total es

$$\bar{u}_a = \frac{1}{2} \text{Re}[TS^*] \quad (3.3.7)$$

Definiendo la intensidad acústica como el flujo de energía por unidad de tiempo y unidad de área

$$I = \frac{d\bar{U}_a}{Adt} = \frac{\bar{u}_a A v_L dt}{Adt} = \bar{u}_a v_L \quad (3.3.8)$$

y el vector de Poynting acústico que da la dirección del flujo de energía

$$P = -\dot{u}T. \quad (3.3.9)$$

Para un sólido en tres dimensiones, la segunda ley de Newton tiene la forma

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.3.10)$$

Escribiendo la tensión en función de las constantes elásticas del material y de las deformaciones según (3.2.1) y (3.2.7) se llega a

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (c_{11} - 2c_{44}) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] + c_{44} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + c_{44} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.3.11)$$

que en forma vectorial utilizando el operador nabla  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ , puede escribirse como

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (c_{11} - 2c_{44})\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + c_{44}\nabla^2 \vec{u} . \quad (3.3.12)$$

Como cualquier campo vectorial puede ser escrito como una suma de un gradiente de un potencial escalar y el rotacional de un potencial vector

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (3.3.13)$$

sustituyendo esto en (3.3.12) se llega a

$$\vec{\nabla} \left( \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_{11} \nabla^2 \phi \right) + \nabla \times \left( \rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} - c_{44} \nabla^2 \vec{\psi} \right) = 0 . \quad (3.3.14)$$

Al ser el primer término un escalar y el segundo un vector, entonces ambos deben ser nulos y entonces

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_{11} \nabla^2 \phi \quad (3.3.15)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = c_{44} \nabla^2 \vec{\psi} . \quad (3.3.16)$$

Como en la primera ecuación aparece la constante  $c_{11} = \lambda + 2\mu$  que relaciona la deformación que sufre un cuerpo en la dirección en la que se aplica la carga, dicha ecuación nos da los modos longitudinales de vibración. En la segunda ecuación aparece  $c_{44} = \mu$  que relaciona tensión y deformaciones de cizalla, por lo que está asociada a los dos modos transversales de vibración.

Escribiendo los desplazamientos en función de los potenciales

$$\vec{u}_L = \nabla\phi \quad (3.3.17)$$

$$\nabla \times \vec{u}_L = 0 \quad (3.3.18)$$

$$\vec{u}_T = \nabla \times \vec{\psi} \quad (3.3.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_T = 0 \quad (3.3.20)$$

Se llega a

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_L}{\partial t^2} = V_L^2 \nabla^2 \vec{u}_L \quad (3.3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} = V_T^2 \nabla^2 \vec{u}_T \quad (3.3.22)$$

donde  $V_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$  y  $V_T = \sqrt{c_{44}/\rho}$ .

El vector de Poynting acústico en 3 dimensiones toma la forma

$$P_j(x_i, t) = -T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (3.3.23)$$

A las ondas longitudinales que se propagan en un sólido se las conoce como ondas P (de presión), mientras que a las ondas transversales se las conoce como ondas S (del inglés *shear*, cizalla). En las ondas P no hay rotación, y la deformación se produce en la dirección de propagación, comprimiéndose y descomprimiéndose el sólido según se propaga la onda, lo que implica un cambio local en el volumen, mientras que en las ondas S no hay cambio de volumen y el movimiento se produce en dirección perpendicular a la propagación de la onda. En la Figura 4 se muestra un esquema de una onda P y S propagándose en dirección  $x$ .

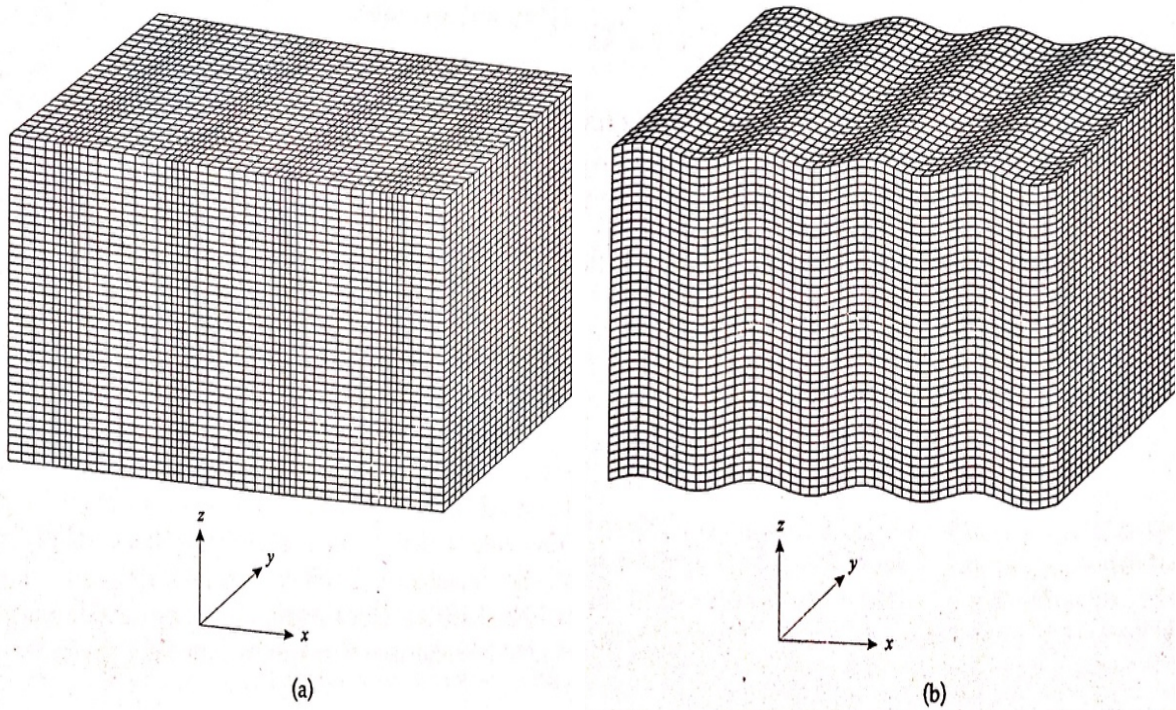


Figura 4. Propagación de una onda longitudinal o P (a) y transversal o S (b) en un sólido. El modo asociado a la onda S es el que produce la deformación en dirección  $z$ . Figura sacada de "Fundamentals and Applications of Ultrasonic waves" [9].

### 3.4. Piezoelectricidad. Ecuaciones constitutivas.

De entre todos los métodos para producir ondas de ultrasonido, el uso de materiales piezoeléctricos es el más usado.

La piezoelectricidad es una propiedad que presentan ciertos materiales cristalinos en los cuales, tras aplicar una carga, no solo se produce una deformación, también aparece una diferencia de potencial [10, 11]. Además, también se produce el fenómeno inverso: al aplicar una diferencia de potencial el material piezoeléctrico se deforma, lo que sirve para producir ultrasonidos a partir de una señal eléctrica. La explicación de este fenómeno se debe a que en los cristales piezoeléctricos no existe un centro de simetría.

Supongamos que tenemos un monocristal de cuarzo entre dos electrodos metálicos. Cuando no se aplica carga, el centro de gravedad de las cargas positivas y negativas coincide, por lo que el momento dipolar total es cero. Cuando aplicamos carga sobre el cristal, los centros de gravedad de ambos tipos de carga dejan de coincidir, lo que crea un momento dipolar no nulo en el material. El signo de dicho momento dependerá de si la carga aplicada es de tracción o compresión. Consecuentemente, si aplicamos una carga oscilante, el campo eléctrico creado por el material piezoeléctrico será también oscilante y por lo tanto también lo será la diferencia de potencial entre las dos caras del material, lo cual convierte señales mecánicas en señales eléctricas y viceversa [12].

El desplazamiento eléctrico en el cristal se puede escribir como (suponiendo únicamente una dirección)

$$D = \varepsilon^S E + eS \quad (3.4.1)$$

donde  $E$  es el campo eléctrico,  $e$  es la constante piezoeléctrica y  $S$  la deformación.  $\varepsilon^S$  es la permitividad del material y el superíndice  $S$  indica que se mide a deformación constante o nula.

La tensión se puede escribir de la forma

$$T = c^E S - eE \quad (3.4.2)$$

Las dos ecuaciones anteriores son las ecuaciones constitutivas del material piezoeléctrico, en las que tenemos dos variables mecánicas ( $T, S$ ) y dos variables eléctricas ( $D, E$ ). Para pequeñas variaciones podemos escribir

$$S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) T + \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) E \quad (3.4.3)$$

$$D = \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right) T + \left(\frac{\partial D}{\partial E}\right) E . \quad (3.4.5)$$

Definiendo las constantes como

$$s^E = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E \quad (3.4.6)$$

$$d = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E \quad (3.4.7)$$

$$\varepsilon^T = \left(\frac{\partial D}{\partial E}\right)_T \quad (3.4.8)$$

otras dos ecuaciones constitutivas pueden escribirse como

$$S = s^E T + dE \quad (3.4.9)$$

$$D = dT + \varepsilon^T E \quad (3.4.10)$$

y de la misma manera también pueden escribirse

$$T = c^D S - hD \quad (3.4.11)$$

$$S = s^D T + gD. \quad (3.4.12)$$

A la constante  $g$  se la conoce como constante del receptor, que para impedancias de corriente altas (densidad de corriente nula), nos da la relación entre la carga aplicada y el campo eléctrico producido por el piezoeléctrico. A la constante  $h$  se la conoce como constante del transmisor y relaciona la deformación con el campo eléctrico producido también en el caso de impedancias eléctricas altas.

Para el caso tridimensional, las constantes de las ecuaciones constitutivas vistas anteriormente toman carácter tensorial

$$T_I = c_{ij}^E S_j - e_{Ij} E_j \quad (3.4.13)$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}^S E_j + e_{ij} S_j \quad (3.4.14)$$

Si consideramos un cristal piezoeléctrico con simetría cilíndrica en torno al eje  $z$  al cual se le aplica un campo  $E_3$  en dicha dirección, suponiendo que las deformaciones en dirección radial  $S_1 = S_2 = 0$ , las ecuaciones quedan

$$T_3 = c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \quad (3.4.15)$$

$$D_3 = \varepsilon_{33}^S E_3 + e_{33} S_3 \quad (3.4.16)$$

y teniendo en cuenta que la densidad de corriente es nula entonces  $\vec{j} = \partial \vec{D} / \partial t = 0$ , que  $E_3 = -\partial \phi / dz$  y  $S_3 = \partial u_z / dz$ , las ecuaciones constitutivas quedan

$$T_3 = c^E \frac{\partial u_z}{\partial z} - e E_3 \quad (3.4.17)$$

$$D_3 = e \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon^S E_3 \quad (3.4.18)$$

que combinándolas con la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial T_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (3.4.19)$$

nos da la ecuación de onda en el piezoeléctrico

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c^E \left( 1 + \frac{e^2}{c^E \varepsilon^S} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (3.4.20)$$

por lo que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el piezoeléctrico toma la forma

$$v_L^D = \sqrt{\frac{c^E}{\rho} \sqrt{1 + K^2}} \quad (3.4.21)$$

donde

$$K^2 = \frac{e^2}{c^E \varepsilon^S} \quad (3.4.22)$$

A esta constante se la conoce como constante de acople piezoeléctrico y proporciona una medida de cómo de eficazmente el material transforma la energía elástica en energía eléctrica y viceversa.

Nótese que la velocidad de una onda sonora longitudinal en un material piezoeléctrico es mayor que en uno no piezoeléctrico.

La constante  $K$  también se puede expresar como la relación entre la energía eléctrica y elástica almacenadas

$$K^2 = \frac{U_{el\acute{e}ctrica}}{U_{el\acute{a}stica}}. \quad (3.4.23)$$

### 3.5. Modelo de Hertz

Una vez explicada la propagación de ondas sonoras en un sólido, es necesario introducir el modelo de Hertz para nuestro caso particular en el que tenemos un medio granular compuesto por multitud de esferas sólidas en contacto unas con otras.

Partiremos de dos sólidos elásticos, de curva suave, en contacto en un solo punto o a lo largo de una línea [13]. Al aplicar una carga sobre los sólidos éstos sufren una deformación alrededor de la zona de contacto, que pasa de ser un punto de contacto a ser un área.

Supongamos que ambos sólidos son paraboloides elípticos opuestos cuyos ejes coinciden con el eje  $z$ , las directrices de ambos también coinciden y que inicialmente su punto de contacto es el origen de nuestro sistema de coordenadas (Figura 5). Las ecuaciones de ambas superficies serán de la forma:

$$z_1 = \frac{1}{2R'_1} x_1^2 + \frac{1}{2R''_2} y_1^2 \quad (3.5.1)$$

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R'_2} x_2^2 + \frac{1}{2R''_2} y_2^2\right) \quad (3.5.2)$$

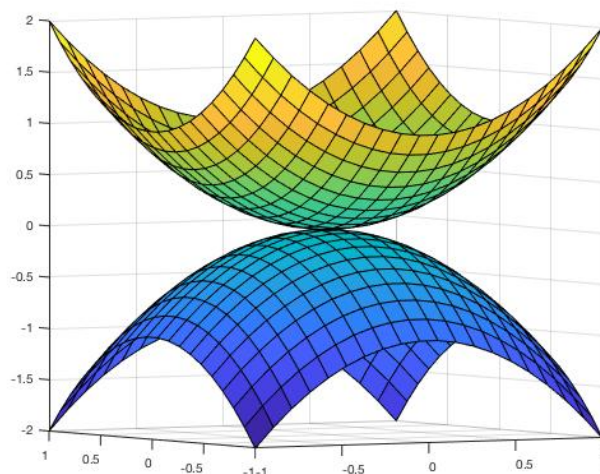


Figura 5. Paraboloides elípticos con contacto en el origen de coordenadas.

La separación entre dos puntos de ambas superficies simétricos respecto al plano  $xy$  será

$$h = z_1 - z_2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2 \quad (3.5.3)$$

donde

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}, \quad \frac{1}{R''} = \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2}. \quad (3.5.4)$$

Definiendo el radio equivalente como

$$R_e = (R'R'')^{1/2} \quad (3.5.5)$$

si además los paraboloides elípticos son de revolución entonces se cumple que  $R'_1 = R''_1 = R_1$  y  $R'_2 = R''_2 = R_2$ , y si ambos sólidos son iguales entonces  $R_1 = R_2 = R' = R'' = R_e$ .

Imaginemos que aplicamos una carga  $P$  en la dirección vertical y tras ello el punto de contacto se expande a un área y que además por razones de simetría dicha expansión debe ser la misma en todas direcciones. La distancia entre dos puntos de cada sólido simétricos al plano  $xy$  dada por la curva (3.5.3) variará, siendo el desplazamiento de cada uno  $\delta_1$  y  $\delta_2$  respectivamente. Si ambos cuerpos no sufrieran deformación solaparían, pero debido a la presión de contacto ambos cuerpos experimentan una deformación paralela al eje  $z$ , dada por los desplazamientos  $u_1$  y  $u_2$ . En la Figura 6 se muestra un esquema de las dos partículas y las deformaciones producidas.

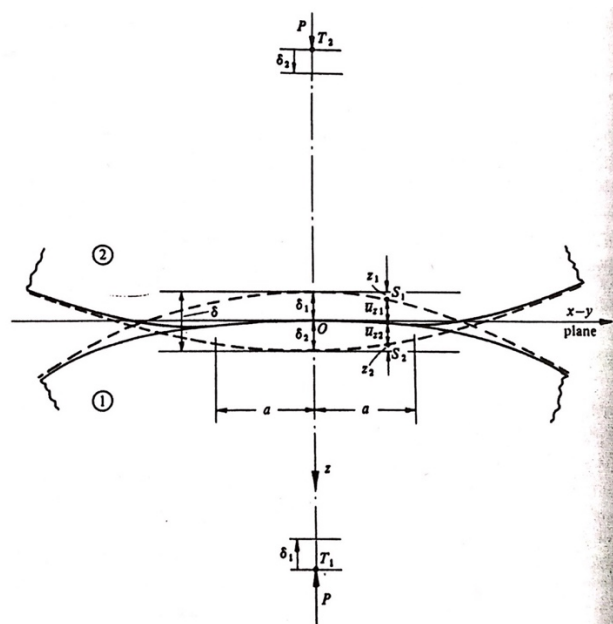


Figura 6. Esquema de los dos sólidos deformados tras aplicar carga. En línea discontinua se observa el solapamiento que hubiese en caso de que uno de los sólidos no aplicara presión sobre el otro. Se produce una deformación y el punto de contacto se expande a un área. Imagen sacada de "Contact Mechanics" [13].



Los puntos que después de sufrir la deformación son coincidentes en el área de contacto cumplen la condición de que

$$u_1 + u_2 + h = \delta_1 + \delta_2. \quad (3.5.6)$$

Si por el contrario ambos quedan fuera del área de contacto entonces se cumple que

$$u_1 + u_2 + h > \delta \quad (3.5.7)$$

donde  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ .

Volviendo a la ecuación (3.5.6) y escribiendo  $h$  como en (3.5.3), entonces

$$u_1 + u_2 = \delta_1 + \delta_2 - \frac{1}{2R'}x^2 - \frac{1}{2R''}y^2. \quad (3.5.8)$$

En los sólidos de revolución, se entiende que el área de contacto es una circunferencia a cuyo radio llamaremos  $a$ . Supongamos que estamos en el plano  $xz$  con  $y = 0$  y que ambos sólidos son de revolución con radios  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Teniendo en cuenta que  $\delta_1 = u_1(0)$  y  $\delta_2 = u_2(0)$  y dividiendo entre  $a$ , podemos escribir la ecuación (3.5.8) de la forma

$$\frac{1}{a}(u_1(0) - u_1(x) + u_2(0) - u_2(x)) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{x^2}{a}. \quad (3.5.9)$$

Haciendo  $x = a$  y  $u(0) - u(a) = d$ , se llega a

$$\frac{d_1}{a} + \frac{d_2}{a} = \frac{a}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.5.10)$$

y suponiendo que la deformación es pequeña, entonces  $d = d_1 + d_2 \ll a$ , la deformación unitaria estará dada por el cociente  $d/a$  y dicha deformación será proporcional a la presión de contacto dividida por el módulo de elasticidad. Suponiendo una presión media  $p_m$

$$\frac{p_m}{E_1} + \frac{p_m}{E_2} \propto a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.5.11)$$

o de otra manera

$$p_m \propto \frac{a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}. \quad (3.5.12)$$

Para partículas esféricas la carga aplicada puede escribirse como  $P = \pi a^2 p_m$ , de forma que sustituyendo en (3.5.12)

$$p_m \propto \left\{ \frac{P \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2}{\left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (3.5.13)$$

Volviendo a la condición de puntos coincidentes en el área de contacto (3.5.6), puede escribirse en coordenadas radiales

$$u_1 + u_2 = \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (3.5.14)$$

donde

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.5.15)$$

La distribución de presiones que satisface la ecuación (3.5.14) dentro del área de contacto es la propuesta por Hertz [14]:

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (3.5.16)$$

que da desplazamientos normales dados por

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r \ll a. \quad (3.5.17)$$

Definiendo

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (3.5.18)$$

y sustituyendo las ecuaciones (3.5.17) y (3.5.18) en (3.5.14), queda entonces

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \left( \frac{1}{2R^*} \right) r^2 \quad (3.5.19)$$

de lo que se obtiene el radio de curvatura haciendo  $r = a$  y  $\delta = 0$

$$a = \frac{\pi p_0 R^*}{2E^*} \quad (3.5.20)$$

y la aproximación de dos puntos de cada sólido

$$\delta = \frac{\pi a p_0}{2E^*} \quad (3.5.21)$$

La carga total entonces se obtendrá integrando (3.5.16) en el área de contacto

$$P = \int_0^a p(r)2\pi r dr = \frac{2}{3}p_0\pi a^2 \quad (3.5.22)$$

Entonces despejando  $p_0$  y sustituyendo en (3.5.20) se obtiene

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left( \frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R^{*2}} \right)^{1/3} \quad (3.5.23)$$

Y finalmente sustituyendo (3.5.20) en (3.5.21), después en (3.5.23) y despejando  $P$  se llega a la expresión

$$P = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*\delta^2} \quad (3.5.24)$$

que relaciona la deformación con la carga aplicada y será utilizada en el apartado siguiente para relacionarla con la propagación del sonido.

### 3.6. Ondas en un medio granular tridimensional compuesto por esferas

Supongamos un medio granular formado por esferas. El tensor de estructura de un medio granular nos da información de como están orientado los contactos entre las distintas esferas y tiene la forma

$$F_{ij} = \frac{3\phi z}{4\pi R^2} \int d\Omega P(\Omega)n_i n_j \quad (3.6.1)$$

donde  $z$  es el número de coordinación entre las partículas,  $\phi$  es la fracción de compactación del medio,  $R$  es el radio de las esferas,  $P(\Omega)$  es la distribución estéreoangular de los contactos y  $n_i$  las componentes del vector normal a la superficie de contacto [15].

Puede demostrarse que los tensores de deformación y de tensiones se pueden escribir como

$$S_{ij} = \frac{3\phi z}{8\pi R^3} \int u_i^r n_k A_{kj} P(\Omega) d\Omega \quad (3.6.2)$$

$$T_{ij} = \frac{3\phi z}{4\pi R^2} \int n_i P_j P(\Omega) d\Omega \quad (3.6.3)$$

donde  $A_{kj}$  es el inverso del tensor de estructura,  $u_i^r$  el desplazamiento relativo entre partículas vecinas y  $P_j$  es la componente de la fuerza en la dirección  $j$  [16].

Suponiendo un medio elástico continuo, ambos tensores deben ser simétricos, y que no hay fuerzas tangenciales de contacto tenemos

$$S_{ij} = \frac{3\phi z}{16\pi R^3} \int (u_i^r n_k A_{kj} + u_j^r n_k A_{ki}) P(\Omega) d\Omega \quad (3.6.4)$$

$$T_{ij} = \frac{3\phi z}{8\pi R^2} \int (n_i P_j + n_j P_i) P(\Omega) d\Omega. \quad (3.6.5)$$

Antes del paso de la onda existe un estado de tensiones  $T_{ij}^0$  y el paso de la onda provoca un estado de tensiones  $\delta T_{ij}$  por lo que el estado de tensiones resultante sería  $T_{ij} = T_{ij}^0 + \delta T_{ij}$ , y por lo tanto la fuerza quedaría  $P_i = P_i^0 + \delta P_i$  y entonces

$$\delta T_{ij} = \frac{3\phi z}{8\pi R^2} \int (n_i \delta P_j + n_j \delta P_i) P(\Omega) d\Omega. \quad (3.6.6)$$

Si no hay fuerzas tangenciales de contacto entonces la fuerza se puede escribir como

$$\delta P_i = k_n (u_j^r n_j) n_i \quad (3.6.7)$$

Donde  $k_n$  es la rigidez normal de contacto. Si suponemos que no depende de la dirección de contacto entonces sustituyendo (3.6.7) en (3.6.6) el estado de tensiones provocado por el paso de la onda puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta T_{ij} &= \frac{3\phi z}{8\pi R^2} k_n \int (n_i (u_l^r n_l) n_j + n_j (u_l^r n_l) n_i) P(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{3\phi z}{4\pi R^2} k_n \int n_i n_j u_l^r n_l P(\Omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Si las fuerzas de contacto son perpendiculares a la superficie y tienen un valor constante, se puede escribir el estado tensional inicial a partir de (3.6.5) como

$$T_{ij}^0 = \frac{3\phi z}{4\pi R^2} P_0 \int P(\Omega) n_i n_j d\Omega \quad (3.6.9)$$

Para una distribución aleatoria de las partículas, la distribución estereoangular tiene la forma

$$P(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \quad (3.6.10)$$

y las componentes  $n_i$  pueden escribirse en función de los armónicos esféricos, quedando entonces el tensor de estructura

$$F_{ij} = \frac{3\phi z}{4\pi R^2} \delta_{ij}. \quad (3.6.11)$$

Suponiendo que el medio es isótropo y tomando la dirección  $x_1$  como la dirección de propagación de la onda, la partícula  $i$  sufrirá una perturbación

$$\delta x_i = s_0 \delta_{i1} \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) \quad (3.6.12)$$

donde  $s_0$  es la posición inicial de la partícula.

El desplazamiento relativo de dos partículas vecinas puede escribirse

$$u_i^r = \delta x_i' - \delta x_i \quad (3.6.13)$$

donde

$$x_i' = x_i + 2Rn_i. \quad (3.6.14)$$

Entonces

$$u_i^r = s_0 \delta_{i1} \left[ \cos \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 - \frac{2\pi}{\lambda} 2Rn_1 \right) - \cos \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \right] \quad (3.6.15)$$

y para la aproximación de onda larga  $2R \ll \lambda$ , la expresión anterior queda

$$u_i^r = 4\pi R \delta_{i1} \frac{s_0}{\lambda} \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \quad (3.6.16)$$

Y sustituyendo en el tensor de deformación

$$S_{ij} = \frac{3s_0}{2\lambda} \delta_{i1} \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \int n_i n_j d\Omega \quad (3.6.17)$$

por lo que las componentes quedan

$$S_{11} = \frac{3s_0}{2\lambda} \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \quad (3.6.18)$$

$$S_{ij} = 0; \quad i, j \neq 1.$$

Sustituyendo también el desplazamiento relativo en la expresión (3.6.8)

$$\delta T_{ij} = \frac{3\phi z}{4\pi R} k_n \frac{s_0}{\lambda} \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \int n_i n_j n_1 d\Omega. \quad (3.6.19)$$

y por lo tanto sus componentes son

$$\delta T_{11} = \delta T_{22} = \delta T_{33} = \frac{3\phi z}{5R} k_n \frac{s_0}{\lambda} \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \quad (3.6.20)$$

$$\delta T_{12} = \delta T_{23} = \delta T_{13} = 0$$

siendo las tensiones de cizalla nulas. Trasladando esto a la teoría de elasticidad, las tensiones son directamente proporcionales a las deformaciones producida (3.2.5), estando relacionadas por las constantes de elasticidad del material. Se puede escribir entonces

$$\delta T_{11} = \left( K + \frac{4}{3}\mu \right) S_{11} \quad (3.6.21)$$

$$\delta T_{22} = \delta T_{33} = \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) S_{11}. \quad (3.6.22)$$

Como los estados de tensiones (3.6.20) y de deformaciones (3.6.18) son conocidos, sustituyendo en (3.6.21) y (3.6.22) y despejando las constantes  $K$  y  $\mu$ , sustituyendo en la ecuación de la velocidad del modo longitudinal (ondas P) (3.3.21) entonces se llega a que la velocidad de propagación es

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{3\phi z k_n}{10\pi\rho R}}. \quad (3.6.23)$$

Aplicando ahora el modelo de Hertz (3.5.24) se llega a

$$P_0 = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*}\delta_0^{3/2} \quad (3.6.24)$$

entonces

$$k_n = \frac{dF_0}{d\delta_0} = 2E^*\sqrt{R^*}\delta_0^{1/2} = (6R^*E^{*2}P_0)^{1/3} \quad (3.6.25)$$

por lo que la velocidad de propagación queda (suponiendo que todas las esferas son del mismo tamaño y  $R^* = R/2$ )

$$v_p = \sqrt{\frac{3\phi z}{10\pi\rho R}}(6R^*E^{*2}F_0)^{1/6} = \sqrt{\frac{3\phi z}{10\pi\rho R}}(3RE^{*2}F_0)^{1/6}. \quad (3.6.26)$$

Como las fuerzas son perpendiculares a la normal entonces  $P_{0i} = P_0 n_i$  y el tensor de tensiones queda

$$T_{ij}^0 = \frac{3\phi z}{16\pi^2 R^2} F_0 \int n_i n_j d\Omega = \frac{\phi z}{4\pi R^2} F_0 \delta_{ij}. \quad (3.6.27)$$

Ya que todos los términos no diagonales son nulos, entonces llamando

$$T_0 = \frac{\phi z}{4\pi R^2} F_0 \quad (3.6.28)$$

y sustituyendo en (3.6.26) se llega a [17]:

$$v_p = \left( \frac{81}{250} \frac{z^2 \phi^2}{\pi^2 \rho^3} E^{*2} \right)^{1/6} T_0^{1/6}. \quad (3.6.29)$$

que nos da la dependencia de la velocidad de propagación del sonido con la tensión, también llamada esfuerzo de consolidación, aplicada al medio granular.

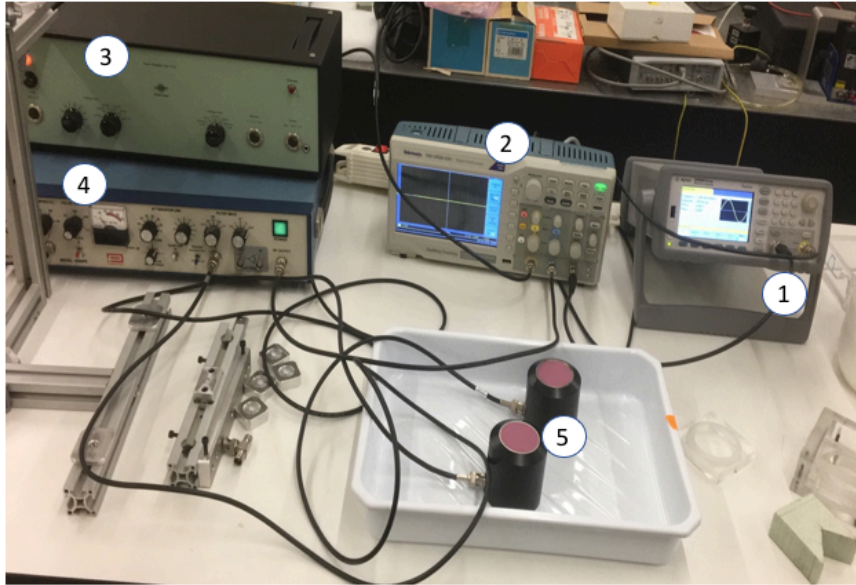
## 4. Método experimental

El material utilizado es

- Osciloscopio Tektronix TBS.
- Generador de funciones.
- Amplificador de la señal excitadora.
- Amplificador de la señal recibida.
- Transductores emisor y receptor de 100 kHz.
- Recipiente para medio granular.
- Esferas de bolas de vidrio con los siguientes diámetros: 0.40-0.60, 0.50-0.75, 0.75-1.00, 1.25-1.55, 1.70-2.00 y 2.00 mm
- Esferas de polimetilmetacrilato (PMMA) de 200 micras.
- Esferas de polietileno (PE) de 3-45 micras.
- Pesas de 0.5, 1.0 y 2.0 kg.
- Soporte para las pesas.

Un esquema del montaje experimental se muestra en la figura 7.

El funcionamiento del montaje es el siguiente: con el generador de funciones se manda una señal eléctrica al amplificador, conectado éste al transductor emisor y al osciloscopio por el canal 1, al que manda la señal de monitor. El transductor es excitado por dicha señal amplificada y la convierte en una señal de ultrasonido, que atraviesa el medio granular y es recogida por el transductor receptor, conectado a su vez a otro amplificador que envía la señal al osciloscopio a través del canal 2.



1. Generador de funciones.
2. Osciloscopio.
3. Amplificador de la señal excitadora del transductor emisor.
4. Amplificador de la señal recogida por el transductor receptor.
5. Transductores emisor y receptor.

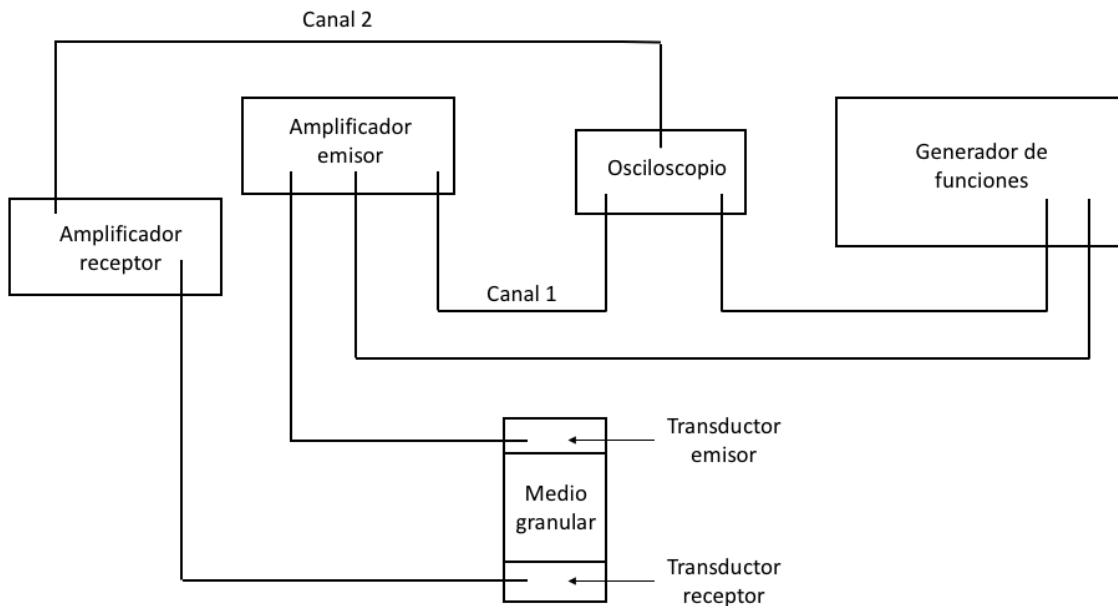


Figura 7. Foto y esquema del montaje experimental

#### 4.1. Medida directa del tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo es el tiempo que tarda la señal de ultrasonido en ir del emisor al receptor, o en otras palabras, el tiempo que tarda en atravesar el medio granular.

Para hacer una medición directa del tiempo de vuelo el procedimiento es el siguiente: con el generador de funciones se manda un pulso cuadrado de  $1\text{ Vpp}$  al transductor emisor, amplificando la señal con  $30\text{ dB}$ . El transductor emisor es excitado por dicha señal y la convierte en una señal de ultrasonido, que depende de las componentes espectrales de la



señal excitadora y de la respuesta del emisor. Esta señal de ultrasonido atraviesa el medio granular y es recogida por el transductor receptor, que la vuelve a convertir en una señal eléctrica que se hace pasar por otro amplificador con nivel  $60\text{ dB}$  es recogida por el canal 2 del osciloscopio, que mostrará una imagen como la de la Figura 8. Recogiendo los datos y analizándolos se puede realizar una medida directa del tiempo de vuelo.

Puede resultar complicado establecer cuando empieza la señal del receptor, por lo que el criterio que se seguirá será cuando la señal recibida alcance un 10% del valor del primer máximo.

La velocidad entonces se determinará midiendo el espesor del medio granular y dividiendo entre el tiempo de vuelo.

Para ver como afecta la carga a la velocidad, se colocarán las pesas encima del transductor emisor con ayuda de un soporte (ver Figura 9). Primero se mide la velocidad simplemente con la carga correspondiente al peso del transductor y del soporte y a continuación se irán colocando gradualmente las pesas en orden ascendente. Una vez que se llega al peso máximo, entonces se van retirando las pesas una a una y se vuelve a medir el tiempo de vuelo cada vez

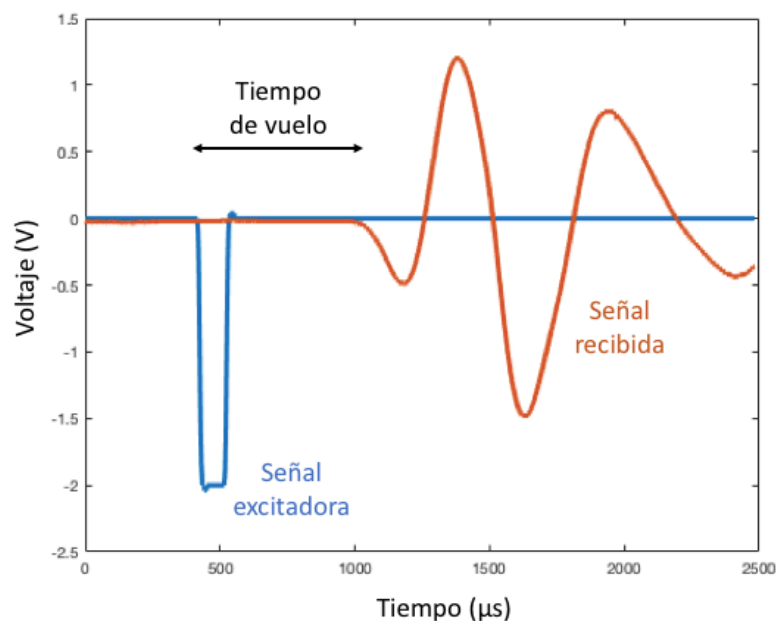


Figura 8. Medida directa del tiempo de vuelo

que una pesa es retirada, lo que nos permite comprobar si hay histéresis o no y por lo tanto si hay comportamiento elástico o plástico en los contactos entre las partículas (en otras palabras, si el material absorbe energía elástica tras haber sido cargado que libera tras retirar la carga o si por el contrario disipa dicha energía en forma de calor, deformándose irreversiblemente). En la Figura 9 se observa el recipiente sin cargar y cargado, conteniendo al medio granular y una escala graduada para medir el espesor.

Para obtener dicho espesor se realizan cuatro medidas a cada lado del recipiente cada vez que se coloque una pesa. La razón para medir cuatro veces el espesor es que el medio granular no se distribuye en el recipiente con un espesor uniforme, por lo que se tomarán cuatro valores y se supondrá que el espesor es el valor medio de éstos. Por otro lado, se tomarán medidas del espesor cada vez que se aumente o disminuya el peso ya que éste puede variar ligeramente con la carga aplicada, debido a la compactación que sufre el medio granular.

Al representar en una gráfica logarítmica la velocidad del sonido en el medio granular frente a la carga aplicada, según la ecuación (3.6.29) se debería de obtener una recta cuya pendiente tiene valor 1/6 de acuerdo con la expresión

$$\log_{10} v_p \propto \frac{1}{6} \log_{10} T_0 \quad (4.1.1)$$

en la que

$$v_p = \frac{\bar{h}}{t_v} \quad (4.1.2)$$

$$T_0 = \frac{(m_T + m_p) \cdot g}{A} \quad (4.1.3)$$

donde  $\bar{h}$  es la altura media,  $t_v$  el tiempo de vuelo,  $m_T$  es la masa del transductor,  $m_p$  es la masa del peso añadido,  $g = 9.8 \text{ m}^2/\text{s}$  es la aceleración de la gravedad y  $A$  el área de contacto con el medio granular.

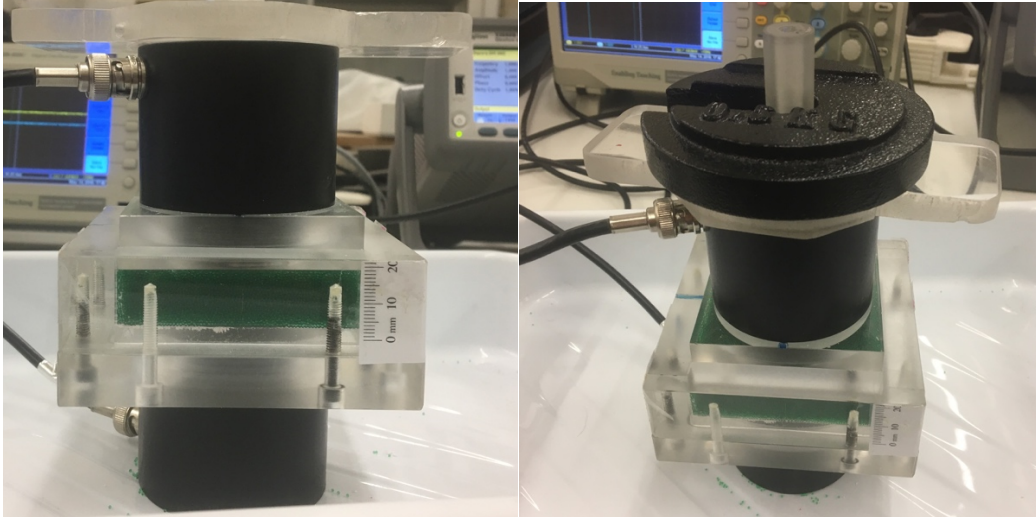


Figura 9. Recipiente con el medio granular sin cargar y cargado con una pesa de 0.5 kg.

#### 4.2. Medida del tiempo de vuelo a través de la correlación cruzada

Otro método que se puede utilizar para obtener el tiempo de vuelo es a partir de la función de correlación cruzada. La función de correlación cruzada de dos señales  $f(t)$  y  $g(t)$  se define como

$$(f * g)(\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t + \Delta t) dt . \quad (4.2.1)$$

Esta función nos da información sobre la similitud de las dos señales en función del desplazamiento de una sobre la otra. El valor de  $\Delta t$  para el cual dicha función alcanza el máximo (o mínimo) mas alto es la separación temporal entre las dos señales, es decir, en nuestro caso correspondería al tiempo de vuelo. Con este método se utiliza una señal de ruido para excitar el emisor, siendo el resto del procedimiento de toma de medidas igual que en el caso anterior.

### 5. Resultados experimentales

A continuación, se muestran la representación gráfica en escala logarítmica de la velocidad de propagación obtenida a partir de la medida directa del tiempo de vuelo frente a la carga aplicada sobre el medio granular. Los valores de las pendientes obtenidas con sus correspondientes errores también se muestran a continuación.

Se han separado por un lado las distintas muestras de esferas de vidrio, las de PMMA y las de PE por otro, debido a que los resultados son distintos y tienen una interpretación distinta.

### 5.1. Esferas de vidrio

En la tabla 1 se muestran las medidas de la pendiente obtenida en las rectas de la Figura 11. En este caso no se corresponde con el valor de 1/6 que se esperaría haber obtenido. Se observa también que las rectas de carga y descarga (en azul y en naranja respectivamente) son prácticamente coincidentes (no hay deformación plástica).

Diámetro (mm)	Pendiente de la recta de carga	Error relativo	R <sup>2</sup> recta de carga	Pendiente de la recta de descarga	Error relativo	R <sup>2</sup> recta de descarga
<b>0.40 – 0.60</b>	0.266 ± 0.014	5.26 %	0.9879	0.28 ± 0.03	10.71 %	0.9684
<b>0.50 – 0.75</b>	0.28 ± 0.02	7.14 %	0.9732	0.26 ± 0.04	15.38 %	0.9028
<b>0.75 – 1.00</b>	0.265 ± 0.008	3.02 %	0.9964	0.245 ± 0.010	4.08 %	0.9929
<b>1.25 – 1.55</b>	0.22 ± 0.01	4.55 %	0.9692	0.23 ± 0.03	13.04 %	0.9475
<b>1.70 – 2.00</b>	0.231 ± 0.009	3.90 %	0.9935	0.234 ± 0.019	8.12 %	0.9731
<b>2.00</b>	0.26 ± 0.02	7.69 %	0.9651	0.25 ± 0.02	8.00 %	0.9682

Tabla 1. Medidas de la pendiente para las distintas esferas de vidrio.

A continuación, se muestra como varía la velocidad de propagación frente al radio medio de las esferas. Se observa como a media que aumenta el radio la velocidad crece, aunque no parece seguir una tendencia determinada (ver Figura 10).

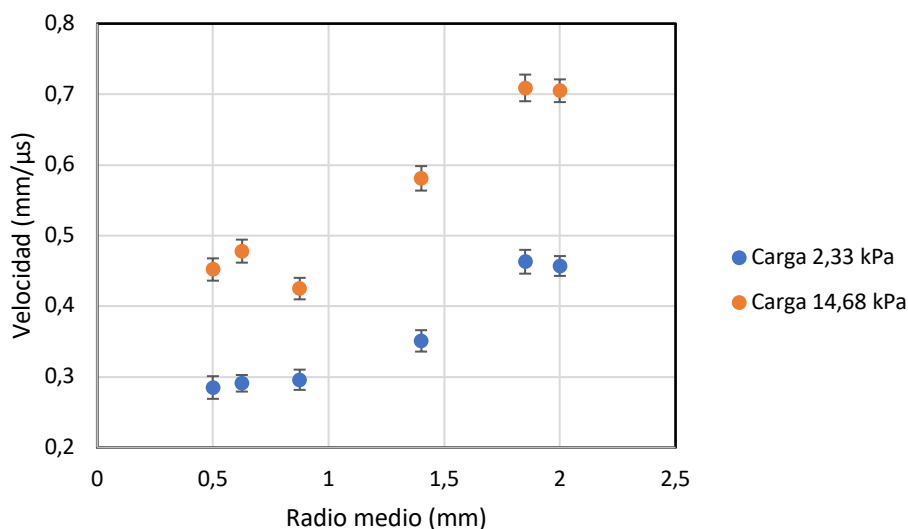


Figura 10. Velocidad frente a radio medio para la carga mínima y máxima.

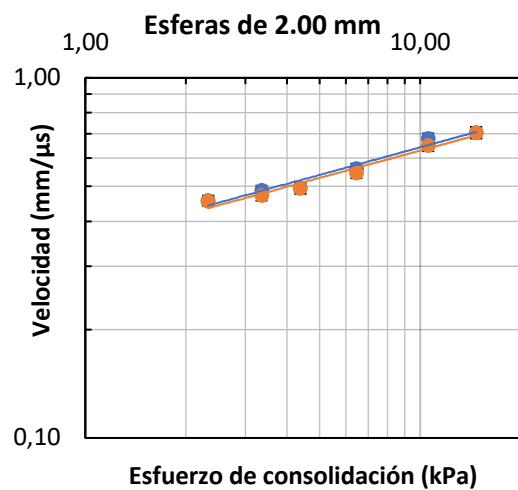
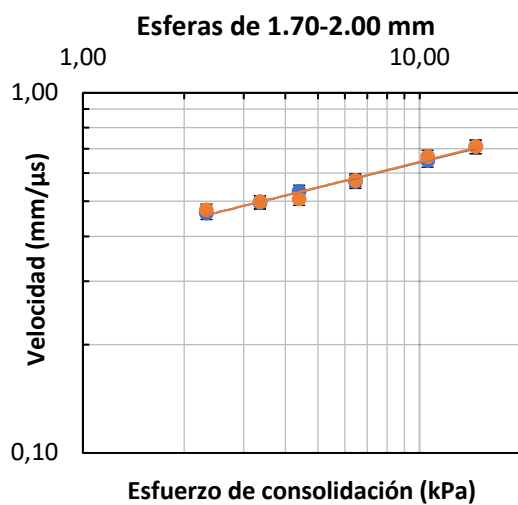
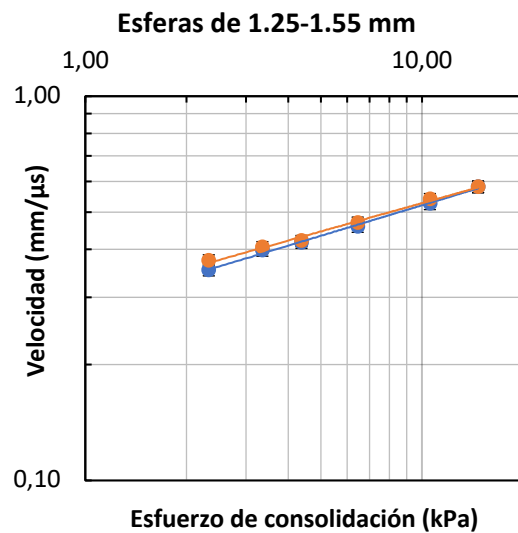
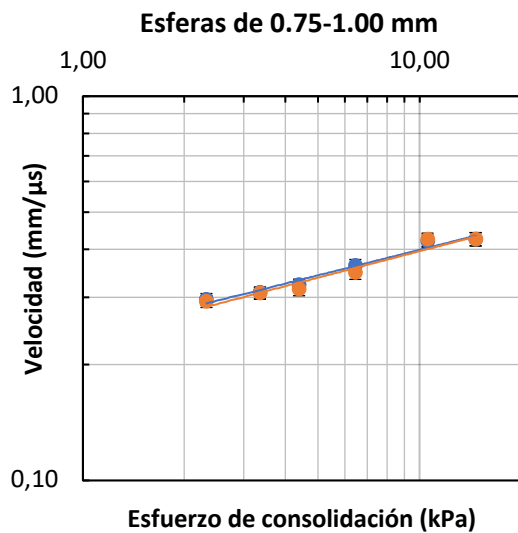
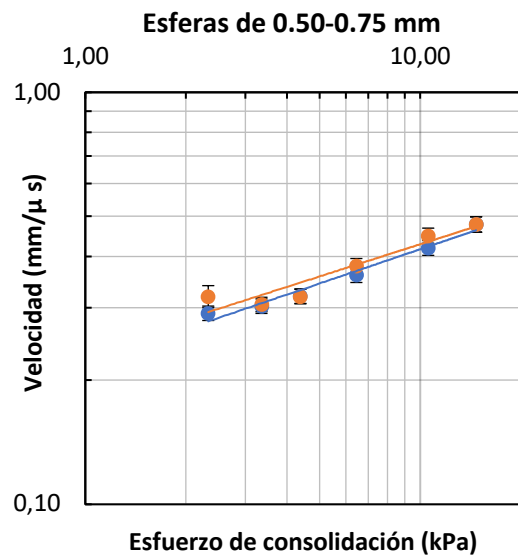
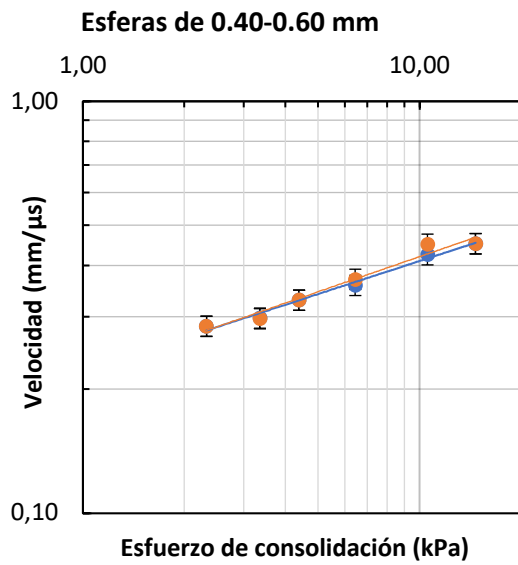


Figura 11. Representación en escala logarítmica de las velocidades de propagación en función del esfuerzo de consolidación aplicado. En azul se muestran los puntos para la carga y en naranja para la descarga.

## 5.2. Esferas de polimetilmetacrilato (PMMA)

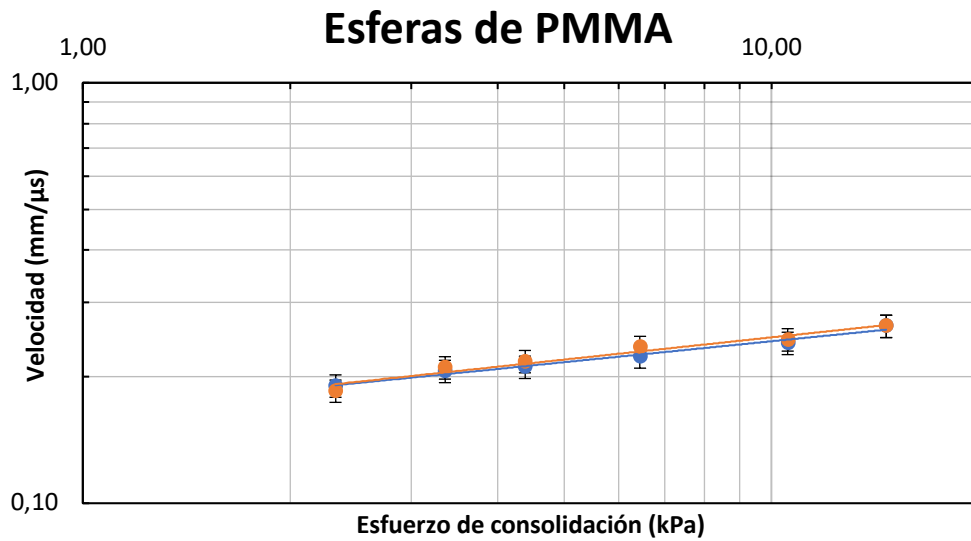


Figura 12. Gráfica en escala logarítmica con la velocidad de propagación en función del esfuerzo de consolidación. En azul la carga y el naranja la descarga.

En la Figura 12 se muestra la representación gráfica para las esferas de PMMA. En este caso la pendiente si que coincide con el valor que predicho por el modelo de Hertz (1/6), que describe el contacto cuando la deformación es elástica. Ambas rectas siguen siendo coincidentes.

PMMA	Pendiente	Error relativo	R <sup>2</sup>
Carga	0.165 ± 0.011	6.67 %	0.9823
Descarga	0.175 ± 0.018	10.29 %	0.9582

Tabla 2. Medidas de la pendiente durante la carga y descarga de las esferas de PMMA.

Al encajar los resultados obtenidos con el modelo teórico, vamos a comprobar si a partir de la ordenada en el origen podemos estimar la constante  $E^*$  según la ecuación (3.6.29).

$$m = \frac{1}{6} \log_{10} \left( \frac{81 z^2 \phi^2}{250 \pi^2 \rho^3} E^{*2} \right). \quad (5.2.1)$$

Las medidas obtenidas se muestran en la tabla 3. Para efectuar los cálculos se ha tomado  $\phi = 0.67$ ,  $z = 6$  y  $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$  [18].

PMMA	Ordenada en el origen	Error relativo	E* experimental (MPa)	E* bibliográfico (MPa) [18]
Carga	$-(0.780 \pm 0.009)$	1.15 %	$(8.3 \pm 1.0) \cdot 10^3$	~ 1700
Descarga	$-(0.781 \pm 0.015)$	1.92 %	$(6.7 \pm 1.4) \cdot 10^3$	

Tabla 3. Cálculo de la constante  $E^*$  a partir de la ordenada en el origen.

Nótese que  $E^*$  no es el módulo de Young, sino que se relaciona con este a partir de la expresión (3.5.18). En el caso de que todas las esferas sean del mismo material entonces queda

$$E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \quad (5.2.2)$$

Para calcular el valor comparativo se ha usado como módulo de Young  $E \sim 3000 \text{ MPa}$  y como módulo de Poisson  $\nu \sim 0.35$  [18]. Aunque el orden de magnitud coincide, se observan grandes discrepancias.

### 5.3. Esferas de polietileno (PE)

PE	Pendiente	Error relativo	R <sup>2</sup>
Carga	$0.186 \pm 0.020$	10.75 %	0.9554
Descarga	$0.0514 \pm 0.0017$	3.31 %	0.9956

Tabla 4. Medidas de la pendiente para las esferas de PE

En la figura 13 se muestra la representación gráfica de la velocidad de propagación frente a la carga. En este caso se observa que las dos rectas no son coincidentes, siendo la pendiente de la recta de carga acorde con el valor esperado mientras que la de descarga es una pendiente prácticamente nula.

### Esferas de polietileno

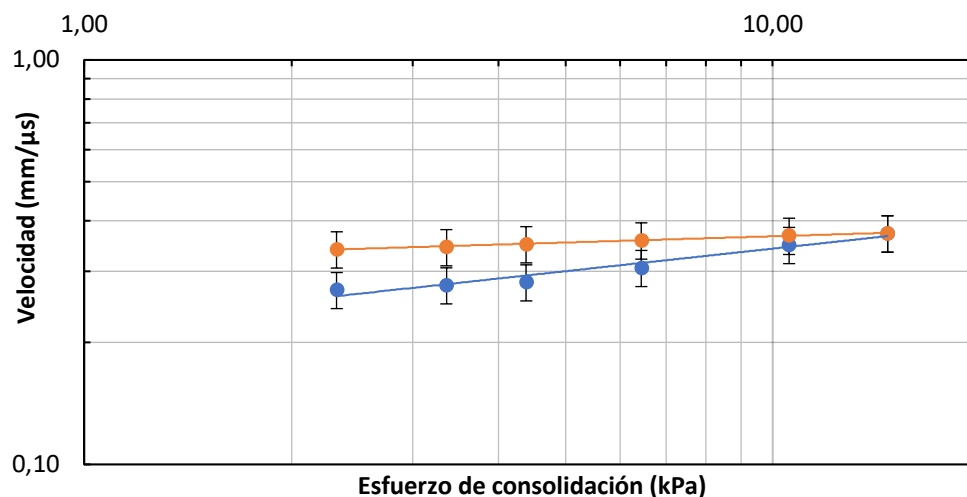


Figura 13. Velocidad de propagación frente a esfuerzo de consolidación en escala logarítmica. En azul la recta de carga y en naranja la de descarga.

#### 5.4. Medidas con la correlación cruzada

Los resultados anteriores son los realizados mediante la medida directa del tiempo de vuelo, sin embargo, como se ha descrito en el apartado 4, otra manera a partir de la cual se podría obtener el tiempo de vuelo sería a partir de la correlación cruzada de la señal con la que se excita el emisor y la señal recibida por el receptor.

Para utilizar este método se utilizan señales de ruido. Una señal de ruido básicamente es una señal aleatoria resultado de la superposición de un gran número de ondas en un rango de frecuencias continuo (ver ecuación 3.1.35) con un desfase aleatorio entre cada componente armónica. Mediante el generador de funciones es posible seleccionar el rango de frecuencias o *bandwidth* en el que queremos que se sitúe la señal excitadora. Al usarse una señal de ruido blanco, la amplitud de cada componente espectral es constante desde 0 hasta el valor del ancho de banda.

El transductor funciona como un resonador que sólo responde para frecuencias cercanas a su frecuencia de resonancia (Figura 3). En nuestro caso el transductor es de baja  $Q$  con una frecuencia de resonancia de  $f_0 = 100 \text{ kHz}$ , lo que quiere decir que teóricamente el máximo de la potencia transmitida se encontrará a la frecuencia de resonancia y al ser de bajo factor de calidad dicho máximo no estará bien definido, habiendo un intervalo de frecuencias centrado en  $f_0$  para las que el transductor responde correctamente.

Para analizar la conveniencia de este método se ha realizado un experimento más sencillo que con los medios granulares: a partir de una barra de teflón de un espesor dado se mide la velocidad usando este método y se compara con un valor bibliográfico. Se han utilizado señales de ancho de banda de  $100 \text{ kHz}$  y  $400 \text{ kHz}$ . Las representaciones gráficas de la correlación cruzada entre la señal emitida y transmitida se muestran en la Figura 14.



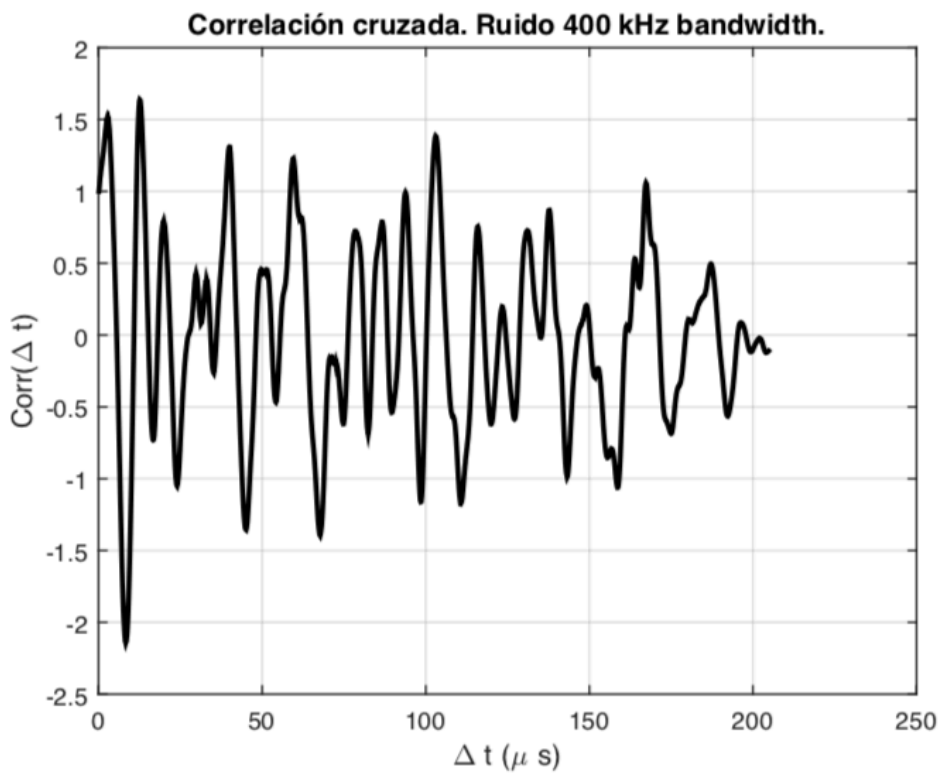
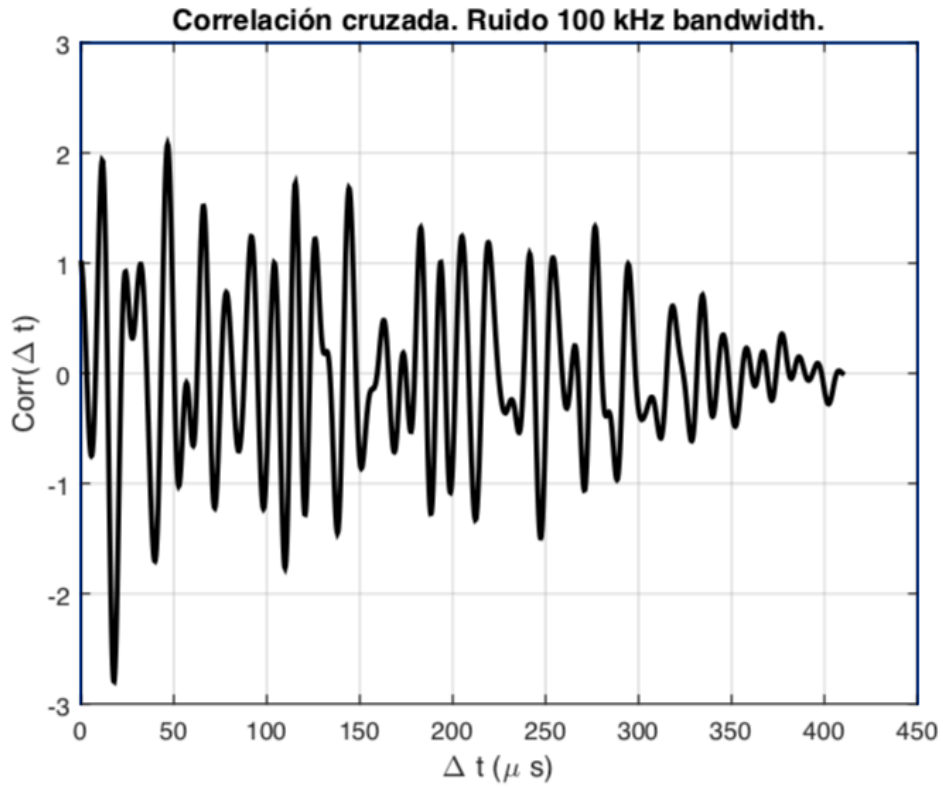


Figura 14. Función de correlación cruzada para señales de ruido de BW 100 y 400 kHz.

En la Figura 14 se puede observar que no hay un máximo o mínimo de la función de correlación cruzada bien definido que nos permita utilizarlo como tiempo de vuelo. A continuación, se realizó un espectro de la potencia emitida y transmitida (Figura 15). En el caso de la señal de 100 kHz se ve claramente como, aunque la señal con la que se excita es la que se muestra en color negro, el transductor solo responde a las frecuencias en torno a 100 kHz (frecuencia fundamental), perdiéndose el resto de la señal. En el caso de la señal de 400 kHz, se observan incluso frecuencias de resonancia correspondientes a modos superiores, perdiéndose también el resto de la señal. Al perderse la parte de la señal correspondiente a frecuencias lejanas a las de resonancia, la señal transmitida no es igual que la utilizada para excitar el transductor, por lo que la función de correlación cruzada que funciona para señales similares trasladadas en el tiempo no es una forma válida de obtener el tiempo de vuelo, siendo esta la razón por la que no está claro que máximo o mínimo se corresponde con el tiempo de vuelo.

Un procedimiento alternativo que podría utilizarse sería con la correlación de la señal emitida consigo misma, llamada también autocorrelación, ya que al llegar la señal sonora producida por el emisor al receptor, parte se transmite por este pero otra parte se refleja, por lo que la función de autocorrelación presentaría un máximo correspondiente al tiempo doble del tiempo de vuelo (tiempo que tarda en ir y volver). La conveniencia de utilizar este método podría analizarse en otro trabajo posterior.

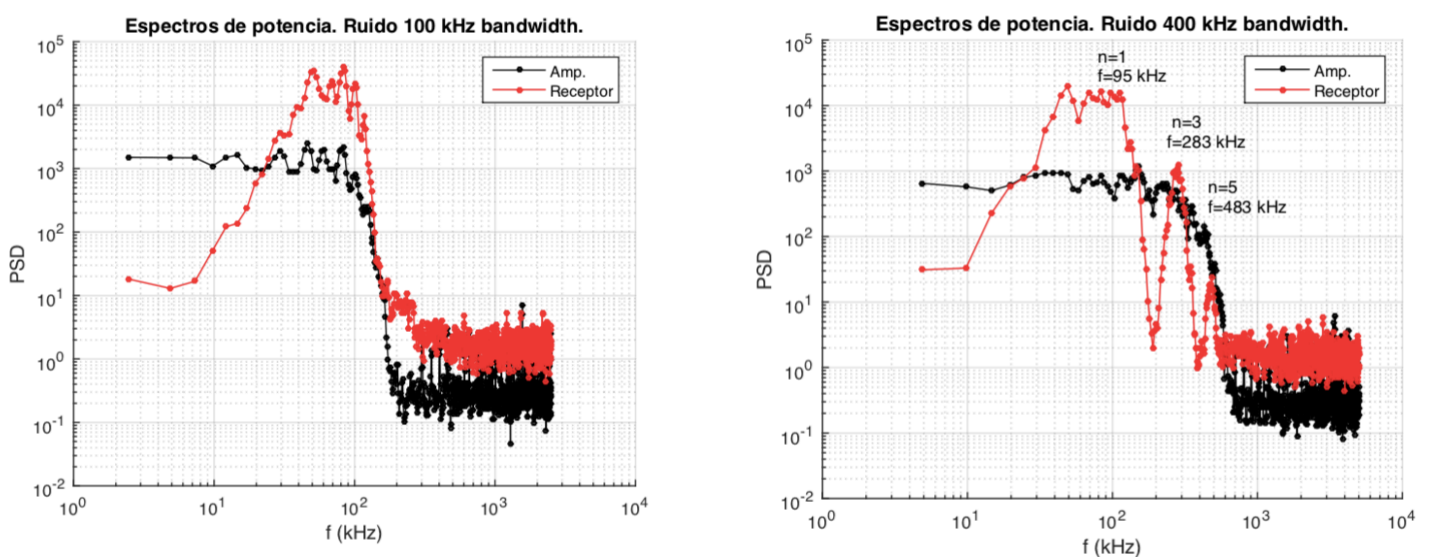


Figura 15. Espectro de potencias de la señal emitida y recibida para las señales de BW 100 y 400 kHz.

## 6. Discusión de resultados

En primer lugar, analizando los resultados de las bolas de vidrio, se observa que el comportamiento es distinto al esperado, ya que se esperaba obtener una pendiente de  $1/6$  (ecuaciones 3.6.29 y 4.1.1). Al ser las rectas de carga y descarga coincidentes, se tiene un comportamiento elástico, que es lo que se espera ya que el vidrio es un material frágil incapaz de soportar deformación plástica.

Inicialmente se pensó que la diferencia obtenida en la pendiente podría deberse a un retraso en la señal debido al montaje experimental, lo cual induciría un tiempo extra en el tiempo de vuelo y por tanto afectando a la velocidad de propagación obtenida.

Sin embargo al realizar las medidas con la muestra de PMMA se obtuvieron valores de la pendiente que concuerdan con el valor esperado de acuerdo a la teoría del contacto hertziano (ecuación 4.1.1), por lo que la diferencia de los valores obtenidos con las muestras de vidrio no puede ser causada por el circuito o el montaje experimental, sino que se debe a las propiedades del material.

Algunos experimentos [20, 21] que se han realizado para medir la velocidad del sonido en esferas de vidrio muestran que para cargas bajas el contacto hertziano no es el que domina, lo que afecta entonces a la dependencia de la velocidad con la carga. En dichos experimentos se muestra que, para cargas bajas, la velocidad de propagación en esferas de vidrio sigue la forma

$$v_p \propto T^{\frac{1}{4}} \quad (4.2.1)$$

mientras que para cargas más altas sigue la ley del comportamiento que se esperaba observar (ver Figuras 16 y 17). Esta dependencia de la velocidad de propagación del sonido es la que concuerda con los resultados que se han obtenido. En una comparación entre las medidas obtenidas en este experimento y las observadas en las Figuras 16 y 17, se ha comprobado que nuestras medidas han sido tomadas en la zona de baja carga.

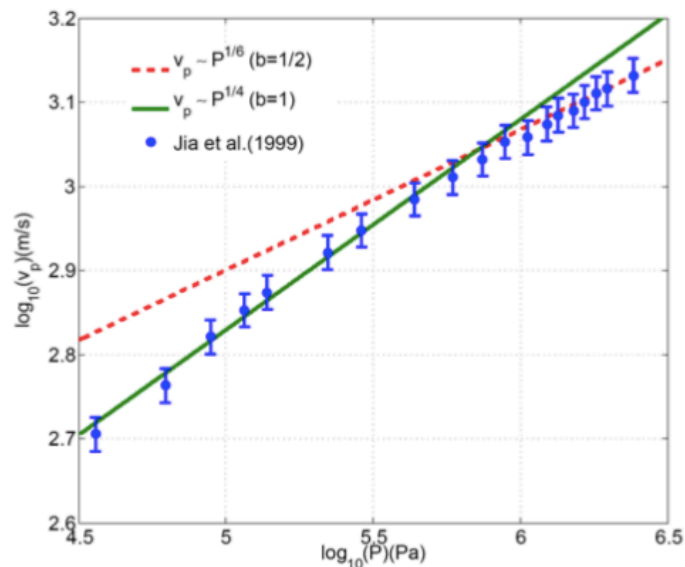


Figura 16. Se observa que para cargas bajas la dependencia del sonido es diferente que en el caso de cargas altas, correspondiéndose este último caso con el modelo de contacto de Hertz. Imagen sacada de "Towards a Mathematical Model for Elastic Wave Propagation in Granular Materials" [19].

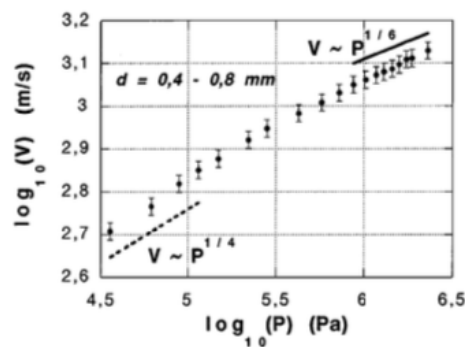


Figura 17. Velocidad frente a carga en escala logarítmica. Al igual que en el caso anterior, se observa el cambio en la pendiente a medida que aumenta la carga. Imagen sacada de "Ultrasound propagation in Externally Stressed Granular Media" [20].

En el caso de las esferas de PMMA se obtiene el valor esperado de  $1/6$  de  $\nu$  ya que su módulo elástico ( $\sim 3000 \text{ MPa}$ ) es menor que el del vidrio ( $\sim 70000 \text{ MPa}$ ). La explicación para que cambie el tipo de contacto en un material y otro, es que en el caso de un material más rígido (el vidrio) es necesario aplicar más carga para generar un área de contacto que siga la teoría de Hertz [22]. Esto no significa que el modelo de Hertz no sea válido para bajas cargas, sino que en este caso el mecanismo de contacto está dominado por las pequeñas rugosidades superficiales que existen (una de las suposiciones que hace Hertz es que las superficies son de curva suave). Una forma de cuantificar dicho fenómeno es con el cociente entre la altura media de las rugosidades superficiales y la deformación de compresión sufrida por la esfera debida a las fuerzas de contacto. Para materiales rígidos que requieren cargas grandes para adquirir una deformación apreciable, dicha relación es alta y el mecanismo de contacto que

domina es el de las irregularidades superficiales. En el caso de materiales menos rígidos, las deformaciones elásticas de compresión debidas al aumento de la carga son mucho más grandes que estas irregularidades, por lo que el efecto de éstas es despreciable, lo que explica que para las mismas cargas que en el caso del vidrio obtengamos un resultado acorde a la teoría de Hertz en las esferas de PMMA.

Al igual que en el caso del vidrio, con la muestra de PMMA, las rectas de carga y descarga son prácticamente coincidentes, volviéndose a tener comportamiento elástico.

Sin embargo, en el caso del PE las rectas no coinciden. Mientras que la recta de carga si que sigue el modelo de Hertz, en el caso de la descarga se observa que la velocidad varía muy poco al retirar la carga y por tanto la pendiente tiene un valor muy bajo. La razón para esto está en el tamaño de las esferas (entre dos y tres órdenes de magnitud por debajo de las de vidrio y PMMA), lo que hace que muchas esferas se encuentren formando agregados en la muestra original, rompiéndose cuando se aplica carga y formándose otros nuevos. También puede deberse a que al disminuir el tamaño de grano aumenta el área superficial específica, lo que hace que la humedad del ambiente pueda colaborar a la cohesión de las partículas. A la hora de retirarse la muestra después de haber tomado las medidas se observó que el medio estaba totalmente cohesionado.

A la hora de obtener la constante  $E^*$  del PMMA a partir de la ordenada en el origen de la recta se observa que, aunque el orden de magnitud coincide, dista mucho del valor bibliográfico consultado. Esto puede deberse a que para obtener una medida exacta de dicho valor habría que hacerse el experimento a consolidaciones muy bajas. La ordenada en el origen depende además de la densidad, el índice de coordinación y la fracción de compactación del material, y dicha constante se ha calculado suponiendo que éstos valores permanecen constantes a medida que se aplica carga al medio. Además, los valores del coeficiente de correlación no son muy altos, por lo que es de esperar que el resultado no sea fiable. En el caso del polietileno no se ha aplicado este método para calcular la constante  $E^*$ , ya que, aunque la recta de carga si que parece seguir el modelo de Hertz, el mecanismo por el que interactúan las partículas es distinto que en el caso del PMMA.

## 7. Conclusiones

La principal conclusión es que el modelo de Hertz aplicado a medios granulares predice el mecanismo de contacto para ciertas condiciones de rigidez y consolidación con bastante exactitud. En el caso de materiales más rígidos y/o con bajas consolidaciones, hay que tener en cuenta que el mecanismo de contacto que domina es otro, lo que explica las medidas obtenidas mediante este procedimiento experimental. Aún así los resultados obtenidos son satisfactorios, ya que encajan con lo predicho teóricamente tanto por un modelo de contacto u otro.

Resultados más exactos podrían ser obtenidos con una mejora del montaje experimental. En nuestro caso el número de puntos obtenidos está limitado por el número de pesas disponibles y por las limitaciones físicas del montaje, afectando esto a los resultados. Una forma de corregirlo sería aplicar la carga mediante una prensa que permita el aumento/disminución de peso de una manera más continua, aumentando así el número de puntos que se podrían obtener. Además, convendría llegar a consolidaciones más altas, para que en el caso del vidrio se alcanzase la zona de contacto hertziano y poder estudiar la transición entre ambos comportamientos y ver si se produce de una forma continua o abrupta. Como propuesta para futuros experimentos, se podrían realizar las medidas con más muestras de materiales con distinta rigidez y así analizar como varía la transición entre un tipo de contacto y el otro. También se podría analizar la validez de la función de autocorrelación para obtener el tiempo de vuelo.

En cualquier caso, con el montaje experimental utilizado se han obtenido resultados correctos y explicables mediante diferentes modelos de contacto, aunque en un principio se esperase observar el contacto hertziano en las distintas muestras. Por lo tanto, se puede decir que el experimento se ha llevado a cabo de manera satisfactoria y ha permitido observar distintos comportamientos.

## 8. Bibliografía

- [1] Vargas. W. L., Murcia J. C. (2005) "*Distribución de fuerzas en medios granulares no cohesivos: observaciones experimentales y computacionales*". Ciencia e ingeniería neogranadina, 15, 138-151.
- [2] Darias J.R. (2014) "*Los materiales granulares: una mirada al interior del pimentero*". Acta científica venezolana, 62-72.
- [3] Daniels, K. E., Coppock, J. E., Behringer, R. P. (2004) "*Dynamics of Meteor Impacts*". Chaos 14, 4, 1.
- [4] Universidad de Buenos Aires  
[http://www.ccpems.exactas.uba.ar/CDs/CDEnergia/II/contents/didactica/aula/hist\\_ciencia208/2081.htm](http://www.ccpems.exactas.uba.ar/CDs/CDEnergia/II/contents/didactica/aula/hist_ciencia208/2081.htm)
- [5] David J. & Cheeke N. (2002) "*Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves*". Physics department, Concordia University, Canada, Chapter 1. ISBN 0 8493 0130 0.
- [6] Pain, H. J. (1968). "*The Physics of Vibrations and Waves*", John Wiley & Sons, New York. ISBN 0 470 01295 1.
- [7] David J. & Cheeke N. (2002) "*Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves*". Physics department, Concordia University, Canada, Chapter 3. ISBN 0 8493 0130 0.
- [8] Landau, L.D., Lifschitz, E. M. (1959) "*Theory of Elasticity*", Pergamon Press, London, Chapter 1. ISBN 08 006465 5.
- [9] David J. & Cheeke N. (2002) "*Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves*". Physics department, Concordia University, Canada, Chapter 5. ISBN 0 8493 0130 0.
- [10] Kino, G. S. (1987) "*Acoustic Waves*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. ISBN 0 130 03047 3.
- [11] Ristic, V. M. (1983) "*Principles of Acoustic Devices*", John Wiley & Sons, New York. ISBN 0 471 09153 7.
- [12] Gooberman, G. L. (1968) "*Ultrasonics*", The English University Press Ltd., London. ISBN 0 340 05146 9.

- [13] Johnson, K. L. (1985) *“Contact mechanics”*, Cambridge University Press, Chapter 4. ISBN 0 521 34796 3.
- [14] Johnson, K. L. (1985) *“Contact mechanics”*, Cambridge University Press, Chapter 3. ISBN 0 521 34796 3.
- [15] Shertzer, R. H. (2011) *“Fabric tensors and effective properties of granular materials on applications to snow”*, Tesis doctoral, Montana State University, Bozeman. <https://scholarworks.montana.edu/xmlui/handle/1/2264>
- [16] Makse, H. A., Gland, N., Johnson, D. L. & Schwartz, L. (2004) *Granular packings: “Nonlinear elasticity, sound propagation and collective relaxation dynamics”*, Physical Review E 70, 061302, 3-4.
- [17] Ruiz Botello, F., Sánchez Quintanilla, M. A., Castellanos, A., Grekova, E. F, Tournat, V. (2017) *“Effect of the microstructure on the propagation velocity of ultrasound in magnetic powders”*, Elsevier, Ultrasonics, 153.
- [18] GoodFellow, <http://www.goodfellow.com/S/Polimetacrilato-de-Metilo.html>
- [19] Advanced NTD Ltd, *“Ultrasonic velocity table”*, [www.advanced-ntd.co.uk](http://www.advanced-ntd.co.uk).
- [20] Trujillo, L., Torres, V., Peniche, F., Di G. Sigalotti, L. (2012) *“Towards a Mathematical Model for Elastic Wave Propagation in Granular Materials”*, Engineering, 4, 976-978.
- [21] Jia, X., Caroli, C., Velicky, B. (1998) *“Ultrasound propagation in Externally Stressed Granular Media”*, Physical Review Letters, 82, 9, 1865-1866.
- [22] Johnson, K. L., Kendall, K., Roberts, A. D. (1971) *“Surface energy and the contact of elastic solids”*, Proceedings of the Royal Society of London, 324, 309-313.