

SOBRE LAS PROPUESTAS DE HASHIN DE FALLO DE LA MATRIZ EN COMPRESION

F. París, J.C. Marín, J. Cañas,
Escuela Superior de Ingenieros, Univ. de Sevilla,
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla, Spain.
e-mail: paris@esi.us.es

Palabras Clave: *Materiales Compuestos, Criterios de Fallo, Fallo de la matriz en compresión, Criterio de Hashin.*

Resumen: *Diferentes criterios han sido propuestos para predecir el fallo de los materiales compuestos. Hashin tuvo el indudable mérito de introducir la idea de que los criterios de fallo para materiales compuestos deberían estar asociados a los mecanismos de fallo observados, aunque ello no quedara completamente recogido en sus propuestas. En este trabajo, las dos propuestas de Hashin sobre fallo de la matriz en compresión son estudiadas en el contexto de laminados unidireccionales. El énfasis se pone en dilucidar la razonabilidad de la presencia de una resistencia fuera del plano, la resistencia transversal a cortadura, en la predicción del fallo de la lámina bajo cargas contenidas en el plano, como sucede en la segunda propuesta de Hashin. Se concluye que incluso reconociendo que el fallo involucra mecanismos fuera del plano, este efecto puede ser perfectamente recogido por variables asociadas al plano. Se muestra finalmente una incoherencia adicional de la dependencia del criterio con la resistencia a cortadura transversal.*

Abstract: *Different criteria have been proposed to predict the failure of fibrous composite materials. Hashin had the indubitable merit of introducing the idea that the failure criteria associated to fibrous composite materials ought to be associated to the observed mechanisms of failure, although it was not exactly covered by his proposals. In this paper the two Hashin proposals on failure of the matrix in compression are studied in the context of unidirectional composites. The emphasis is put in elucidating the reasonability of the appearance of an out of plane allowable, the transversal shear strength, in the prediction of failure of the lamina under in plane loads, as happens in the second Hashin proposal. It is concluded that even recognizing that the failure may involve out of plane mechanisms, this effect can be perfectly reflected by in plane variables. An additional incoherence of the dependence of the criterion with the transversal shear strength is finally shown.*

1.- INTRODUCCIÓN

Un gran número de criterios han sido históricamente propuestos para predecir el fallo de materiales compuestos fibrosos, Nahas¹. Las primeras propuestas arrancan de la aplicación de los criterios aplicables a materiales frágiles (máxima tensión o máxima deformación), o de la adopción del criterio de plastificación para materiales metálicos anisótropos, Azzi y

Tsai², Hashin y Rotem³, en el contexto de un estudio a fatiga, propusieron para una lámina un conjunto de criterios de fallo basados en la evidencia experimental. Hashin⁴ propuso algunos años más tarde un conjunto de criterios de fallo tridimensionales que particularizó a un caso bidimensional, apareciendo algunas diferencias con respecto a la anterior propuesta. Ambas propuestas son, para el caso bidimensional, sumariadas en la sección 2.

Aunque el uso de los criterios de tipo envolvente de tensiones que tienen su base en las propuestas con base energética han sido ampliamente recomendada en textos de materiales compuestos (Tsai-Hill y Tsai-Wu fundamentalmente), no es menos cierto que también se ha producido una fuerte oposición a su uso. Encabezada fundamentalmente por Hart-Smith⁵, argumentando la falta de conexión de estos criterios con los mecanismos reales de fallo de los materiales compuestos.

El criterio de Hashin de fallo de la matriz a compresión (expresión (8)), ha recibido en particular amplio reconocimiento y es en la actualidad recomendado en textos de amplia aplicación (por ejemplo Mil-Hdbk⁶) o códigos (por ejemplo MSC-DYTRAN⁷). Adicionalmente, se ha vuelto recientemente sobre la idea original de Hashin de que el vector tensión asociado a un plano es el responsable del fallo de la matriz en ese plano, proponiendo modificaciones sobre la propuesta original (por ejemplo Sun et al⁸ o Kroll y Hufenbach⁹).

Una comparación entre las predicciones de las dos propuestas de Hashin para fallo de la matriz en compresión ya fue abordada en el contexto de un estudio más amplio sobre criterios de fallo de materiales compuestos en París¹⁰ así como en París et al¹¹. El objetivo de este trabajo es, en el contexto de compuestos unidireccionales discutir la razonabilidad de la aparición de la resistencia a cortadura transversal, una resistencia asociada a una tensión fuera del plano de la lámina, en un criterio que predice el fallo de la lámina ante cargas de compresión en el plano de la lámina.

2.- CRITERIOS DE HASHIN

Existen dos criterios en la literatura asociados al nombre de Hashin que se recogen a continuación.

Criterio de Hashin-Rotem (1973)

Fallo de la fibra a tracción ($\sigma_{11}, X_T \geq 0$)

$$\sigma_{11} = X_T \quad (1)$$

Fallo de la fibra a compresión ($\sigma_{11} \leq 0, X_C \geq 0$)

$$-\sigma_{11} = X_C \quad (2)$$

Fallo de la matriz a tracción ($\sigma_{22}, Y_T, S \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

Fallo de la matriz a compresión ($\sigma_{22} \leq 0, Y_C, S \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

Criterio de Hashin 2D (1980)

Fallo de la fibra a tracción ($\sigma_{11}, X_T, S \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (5)$$

Fallo de la fibra a compresión ($\sigma_{11} \leq 0, X_C \geq 0$)

$$-\sigma_{11} = X_C \quad (6)$$

Fallo de la matriz a tracción ($\sigma_{22}, Y_T, S \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

Fallo de la matriz a compresión ($\sigma_{22} \leq 0, Y_C, S, S_T \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{2S_T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

Donde la dirección 1 está asociada a la dirección de refuerzo de la fibra. Adicionalmente a las resistencias habituales asociadas a las tensiones en el plano, en la expresión (8) aparece la resistencia a cortadura transversal S_T que estaría asociada a la tensión σ_{23} . El mecanismo de rotura asociado a esta tensión no involucra a las fibras por lo que es razonable esperar que S_T sea inferior al valor de S , la resistencia a cortadura en el plano de la lámina.

3.- DISCUSION

La aparición de S_T en el criterio de fallo de la matriz en compresión, puede generar alguna controversia dado que incluso ante cargas coplanarias con las cargas, la lámina puede sufrir un fallo que involucra mecanismos fuera del plano. Para clarificar este punto se puede pensar sobre un caso particular pero muy representativo: una lámina bajo compresión pura

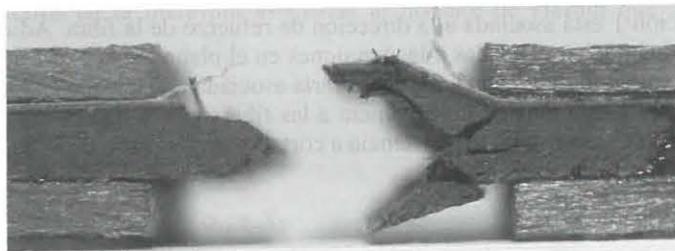
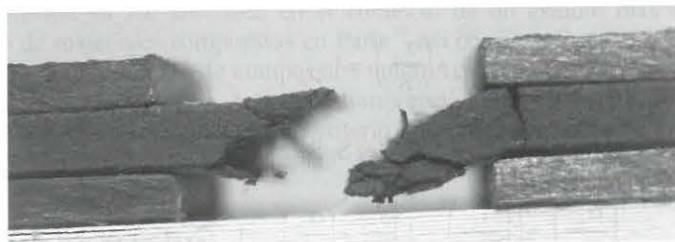
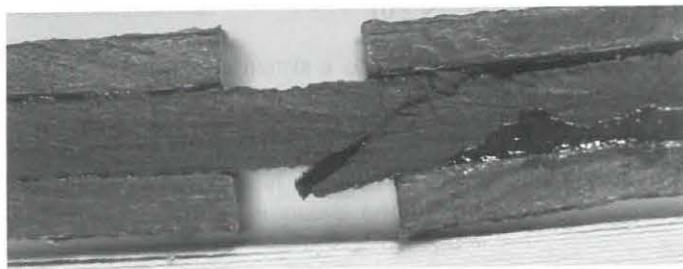
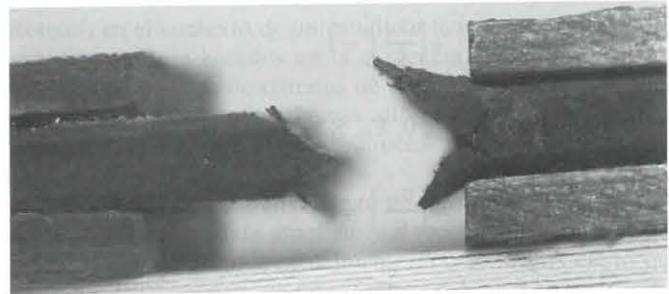


Fig. 1. Fallo de un laminado unidireccional bajo compresión pura perpendicular a las fibras.

perpendicular a las fibras, $\sigma_{22} < 0$ y $\sigma_{12} = 0$. Podría argumentarse que bajo estas condiciones el fallo de la lámina no aparece en el plano, involucrando entonces un mecanismo fuera del

plano donde S_T jugaría un cierto papel, quedando así su presencia en la expresión del criterio justificada.

En orden a clarificar esta cuestión se han llevado a cabo varios ensayos para un compuesto unidireccional bajo cargas de compresión pura. Los resultados (los especímenes rotos) de cuatro ensayos, que se han realizado de acuerdo a ASTM D 3410, son presentados en la figura 1.

Dos hechos pueden ser inmediatamente observados de la figura 1:

- el fallo es bastante repetitivo
- el fallo claramente involucra un mecanismo de rotura fuera del plano.

La observación de los especímenes rotos conduciría a pensar que hay un plano de una orientación bastante bien definida donde el fallo se produce. Este plano, de acuerdo a la figura 2, tendría tensiones nominales normales (σ) y tangenciales (τ) de valor:

$$\sigma = \sigma_{22} \cos^2 \alpha \quad \tau = -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \quad (9)$$



Fig. 2. Estado tensional en el plano de fallo supuesto definido por un ángulo α .

Este sería un caso donde la interacción cuadrática, originalmente propuesta por Hashin, entre las tensiones asociadas al plano de fallo podría ser fácilmente aplicada. En orden a determinar el valor de α asociado al cuál el fallo aparece, la idea sería entonces maximizar la expresión (10). La inclusión de las resistencias que aparecen en la expresión (10) requiere alguna explicación complementaria. Con referencia al primer término, una nueva resistencia Y_C^* , asociada al fallo originado por σ , ha sido en principio incluida. Su conexión con Y_C será más tarde discutida. Con referencia al segundo término, parece obvio que el valor admisible de τ es el valor de la resistencia a cortadura transversal S_T .

$$\left(\frac{\sigma_{22} \cos^2 \alpha}{Y_C^*} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha}{S_T} \right)^2 \quad (10)$$

Derivando la expresión (10) en orden a obtener los valores extremos de α , se obtiene:

$$\sin \alpha \cos \alpha \left[-4 \frac{\sigma_{22}^2}{Y_C^{*2}} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\sigma_{22}^2}{S_T^2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] = 0 \quad (11)$$

Expresión que es satisfecha cuando:

$$\alpha = 0 \quad (12a)$$

$$\operatorname{tg}^3 \alpha = S_T^2 \left(-\frac{2}{Y_C^2} + \frac{1}{S_T^2} \right) \quad (12b)$$

El primer valor obviamente corresponde al plano perpendicular a la carga y el segundo al plano cuya orientación depende de los valores de S_T e Y_C^* .

Para tener una idea del valor de α asociado a este segundo caso, apliquemos la expresión (12b) al material sobre el que se han hecho los ensayos, AS/3501, en el que $Y_C^* = 2S_T$. Dado el momento presente del desarrollo que se está realizando tomamos $Y_C^* = Y_C$ para obtener ideas cualitativas. Puesto que el valor de S_T es desconocido, realizamos el cálculo para diferentes valores de k ($S_T = kS$), obteniéndose los resultados que aparecen en la tabla 1.

k	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
α	35°	37.64°	39.5°	40.98°	42.16°	43°

Tabla 1. Valores de α que producen valores extremos del criterio de fallo.

Es inmediatamente destacable el buen acuerdo entre la tendencia en los valores de α encontrados y la orientación de los planos de fallo que se puede observar en los especímenes rotos que aparecen en la figura 1.

En cualquier caso, es necesario calcular los valores del criterio para el par de posibles valores de α . En el caso α igual a 0 el criterio a aplicar sería la ecuación (13a) y en el caso de α distinto de cero el criterio sería el reflejado en la ecuación (13b).

$$\alpha = 0 \Rightarrow f(\sigma_{22}) = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C^*} \right)^2 \quad (13a)$$

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow f(\sigma_{22}) = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C^*} \right)^2 \left[\cos^2 \alpha \left(\cos^2 \alpha + \frac{4}{k^2} \sin^2 \alpha \right) \right] = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C^*} \right)^2 C \quad (13b)$$

Los valores del coeficiente C para diferentes valores de k aparecen en la tabla 2.

k	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
---	---	-----	-----	-----	-----	-----

□	1.33	1.55	1.86	2.32	3.05	4.26
---	------	------	------	------	------	------

Tabla 2. Valores del coeficiente C .

Siendo el valor de C mayor que la unidad para cualquier tipo de material, ello significa, de acuerdo a las expresiones (13) que el plano orientado α , función de S_T , controla el fallo del material y no el plano $\alpha=0$, lo cuál está de acuerdo con la evidencia experimental.

Sin embargo es también cierto que para el caso de compresión pura ($\sigma_{12}=0$), el fallo aparece cuando σ_{22} alcanza el valor Y_C . De hecho, Y_C es definida de esta manera: el valor de σ_{22} para el cuál el material falla.

Llegados a este punto hay dos criterios que podrían predecir apropiadamente el fallo del caso bajo consideración, $\sigma_{12}=0$. El primero, no asociado al mecanismo de fallo, predeciría el fallo cuando:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C} \right)^2 = 1 \quad (14a)$$

El segundo, asociado al mecanismo de fallo que ocurre en el plano inclinado un ángulo α , predeciría el fallo cuando:

$$\left(\frac{\sigma_{22} \cos^2 \alpha}{Y_C^*} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha}{S_T} \right)^2 = 1 \quad (14b)$$

estando el valor de α definido por la ecuación (12b).

Todo esto conduce a concluir que el valor de la resistencia asociado a σ_{22} que aparece en la expresión (14a), comúnmente usado en diseño, no es el valor real admisible del material en compresión perpendicular a la fibra si: a) se acepta que la interacción cuadrática entre las componentes del vector tensión produce el fallo, y b) si se desea que la ecuación del criterio que predice el fallo esté asociada al verdadero mecanismo de fallo.

Hay que remarcar que de acuerdo a la terminología generada, el símbolo Y_C^* incluido en la expresión 14b representaría el verdadero valor de la resistencia del material asociado a la compresión paralela a las fibras. El símbolo Y_C que aparece en la expresión (14a) representa entonces un valor nominal/aparente de la resistencia asociada a σ_{22} .

Entonces, aceptando la interacción cuadrática entre las componentes del vector tensión para predecir el fallo, ambas expresiones (14a y b) podrían ser usadas para predecir el fallo si el apropiado valor de las resistencias tal y como aparecen en las expresiones (14) son usadas. La expresión (14a) ha sido típicamente usada con un valor de Y_C , que de hecho, teniendo en mente el mecanismo de fallo real, es una función de S_T . Esto significa que si en un cierto material compuesto y debido a cualquier razón basada en su fabricación o en el cambio de

sus componentes o interfase, el valor de S_T es mejorado, ello implica en paralelo que el valor de Y_C resulta también mejorado.

Lo que se determina en un ensayo normal de compresión es lo que aquí ha sido denominado Y_C . La determinación del verdadero valor de la resistencia asociada a una tensión normal de compresión, Y_C^* , podría ser realizada por medio de las ecuaciones (14), aceptando una vez más la interacción cuadrática de las componentes del vector tensión p para predecir el fallo.

Llegando a este punto es claramente incoherente incluir en un criterio el valor de Y_C , el cuál, como se ha mostrado, es una resistencia nominal (función de S_T), y la aparición explícita de S_T , invocando que el fallo puede involucrar a un mecanismo fuera del plano. Este hecho ha quedado probado que se incorpora a la predicción por medio del uso de una resistencia nominal Y_C .

Hay que mencionar que todo esto no es particular de los materiales compuestos. En metales, el fallo bajo tracción o compresión simple está también asociado a mecanismos fuera del plano, no implicando este hecho la aparición explícita de una resistencia asociada al plano de fallo.

Hay finalmente una última cuestión que añade más dudas sobre la propuesta de Hashin de fallo de la matriz a compresión y en particular de la aparición explícita de S_T . En un criterio de fallo del tipo:

$$f(\sigma_{ij}, S_{ij}^{al}) = 1 \quad (15)$$

donde S_{ij}^{al} representa la resistencia asociada a σ_{ij} , la función f satisface que:

$$\frac{\partial f}{\partial S_{ij}^{al}} < 0 \quad (16)$$

Ello indica que cuando se incrementa el valor de la resistencia, el valor de f disminuye y el estado tensional bajo consideración está más lejos del fallo. En relación a la ecuación (8), la condición anterior es claramente satisfecha por S . Con referencia a Y_C :

$$\frac{\partial f^{180}}{\partial Y_C} = \frac{\sigma_{22}}{2S_T} + \sigma_{22} Y_C^{-2} < 0 \quad (17)$$

donde f^{180} representa la parte izquierda de la ecuación (8) y donde $\sigma_{22} < 0$ y $S_T > 0$.

Sin embargo, con relación a S_T :

$$\frac{\partial f^{180}}{\partial S_T} = -\frac{\sigma_{22}(\sigma_{22} + Y_C)}{2S_T^3} > 0 \quad (18)$$

El resultado de la ecuación (18) prueba que incrementando la resistencia a cortadura transversal (un hecho que de acuerdo con la evidencia experimental, figura 1, debería retrasar el fallo), conduce a predecir que el material está más cerca del fallo.

4.- CONCLUSIONES

Sobre la presencia explícita de la resistencia a cortadura transversal en el criterio de Hashin de fallo de la matriz en compresión, podría haberse argumentado que ello es razonable debido al hecho de que en presencia de cargas coplanarias el fallo puede involucrar mecanismos fuera del plano (ello efectivamente ha sido mostrado sobre el particular e ilustrativo caso de compresión simple).

En el razonamiento seguido en el presente estudio ha sido mostrado cómo este mecanismo de fallo fuera del plano puede ser perfectamente tomado en consideración por medio de resistencias coplanarias, las cuales de hecho son funciones de las resistencias asociadas a tensiones fuera del plano. Esto para el caso bajo consideración indicaría que un incremento en la resistencia a cortadura transversal de materiales compuestos fibrosos debería implicar, debido al mecanismo de fallo fuera del plano, un incremento en la resistencia aparente a compresión. La presencia de un mecanismo de fallo fuera del plano no requiere pues la presencia de resistencia asociada a una tensión fuera del plano.

Finalmente, ha sido, en cualquier caso, demostrado que hay una clara incoherencia en la expresión de la propuesta de Hashin que incluye la resistencia a cortadura transversal para predecir el fallo de la matriz a compresión. Incrementar el valor de la resistencia transversal, un hecho que de acuerdo a la evidencia experimental aportada por los ensayos mostrados en este estudio debería producir un retraso en la aparición del fallo, conduce a predecir una más pronta aparición del mismo.

5.- AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece la invitación de K. Jackson y S. Kellas para una estancia en NASA-LARC durante la cuál se generaron las ideas presentadas en este estudio.

Los tres autores agradecen a Carlos Dávila (NASA-LARC) sus comentarios sobre los resultados obtenidos.

6.- REFERENCIAS

1. Nahas, M. N., (1994), "Survey of failure and post-failure theories of laminated fiber-reinforced composites", *J. of Comp. Tech. and Res.*, **8**, 138-153.
2. Azzi, V. D. and Tsai, S. W., (1965), "Anisotropic Strength of Composites", *Experimental Mechanics*, **5**, 283-288.
3. Hashin, Z. and Rotem, A., (1973), "A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials", *J. of Composite Materials*, **7** 448-464.

4. Hashin, Z., (1980), "Failure criterion for unidirectional fiber composites", *J. of Applied Mechanics*, **47**, 329-334.
5. Hart-Smith, L. J., (1992), "The role of biaxial stresses in discriminating between meaningful and illusory composite failure theories", *Ninth DOD/NASA/FAA*, **3**, 1507-1528.
6. MIL-HDBK-17-2E, (1998), *Polymer Matrix Comp. Mat. Prop.*, Dep. of Def. Handbook.
7. MSC-DYTRAN 4.0.
8. Sun, C. T., Quinn, B. J., Tao, J. and Oplinger, D. W., (1996), "Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates, Rep. DOT/FAA/AR -95/109.
9. Kroll, L. and Hufenbach, W., (1997), "Physically based failure criterion for dimensioning of thick-walled laminates", *App. Comp. Mat.*, **4**, 321-332.
10. París, F., (2001), "On failure criteria of fibrous composite materials", *NASA Report: NASA/CR-2001-210661*.
11. París, F., Cañas, J. Y Marín, J. C., (1999), *Consideraciones sobre el criterio de Hashin*, *Materiales Compuestos 99*, ed. Corz y Pintado, pp 429-437.