SENSIBILIDAD EN EL PROBLEMA DE WEBER CON RESTRICCIONES

José Muñoz Pérez
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Francisco Velasco Morente
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Sevilla

Planteamos el problema de Weber con restricciones aproximando el conjunto de restricciones por polígonos convexos y consideramos que los puntos de demanda se pueden mover dentro de regiones circulares. Obtenemos el conjunto solución de forma analítica.

1.–INTRODUCCION

En múltiples ocasiones, necesitamos encontrar un punto que diste lo menos posible de un conjunto finito de puntos de demanda. Tal puede ser la ubicación de un hipermercado, un almacén, un parque de bomberos y en general puntos de servicio público con una gran demanda. Esto lo resuelve el algoritmo de Weiszfeld dado en 1.973 (1). Un programa de este algoritmo se puede encontrar en (5), (6). No obstante, no siempre podemos situar nuestro centro en el punto obtenido, ya que probablemente ese lugar no esté libre. Tenemos por tanto que elegir nuestro punto solución dentro de un conjunto de regiones posibles en los que si podamos situarlos. Luego nuestro problema de Weber lo planteamos sujeto a un conjunto de restricciones.

Hansen - Peeters and Thisse (2), resuelven este problema donde las regiones posibles son polígonos convexos.

También podemos suponer que los puntos de demanda se pueden mover dentro de unos pequeños círculos, con lo que obtenemos un conjunto solución D. Drezner (3), (4) obtiene D siguiendo una dirección a partir del punto solución P^* obtenido por el algoritmo de Weiszfeld y encontrando la longitud máxima siguiendo esa dirección. Para ello plantea en (3) un sistema de ecuaciones diferenciales, y en (4) obtiene una aproximación AD, con cálculos más sencillos ya que demuestra que AD es un simplex, calculando AD (ϕ) para cada dirección (ϕ) con un algoritmo de orden o (n), como asímismo la distancia máxima R_A de P^* a D.

Nosotros planteamos el problema de Weber con restricciones, pero no respecto a un polígono convexo sino a un conjunto convexo con frontera continua y diferenciable.

A continuación discutimos el análisis de la sensibilidad para el problema de Weber con restricciones, para polígonos convexos, obteniendo un conjunto solución que representamos por D_L.

2.–PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea la función

$$f(x, y) = \Sigma W_i \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

El problema de Weber consiste en Min f (x, y) en el que los puntos P_i (x_i , y_i) son los puntos de demanda y P es el punto que hemos de encontrar de forma que minimice la función f (x, y).

Sin embargo el problema de Weber con restricciones es:

$$\text{Min } f(x, y)$$

sujeto a un conjunto de restricciones que en nuestro caso, supondremos que vienen dado por un conjunto convexo, que llamaremos K y donde supondremos que $Fr(K)$ es contínua.

Definición: Un punto x_1 e S se dice visible desde un punto $x_2 \notin S$ si el segmento de linea recta que conecta los dos puntos no contiene puntos de S a excepción de x_1. Un punto $x_1 \varepsilon S$ se dice visible desde el conjunto C donde $S \wedge C = \not{o}$ si x_1 es visible desde el algún punto de C.

Sea $V(x^*) = (x \varepsilon K |\ x$ es visible desde $P^*)$

donde P^* es el punto solución para el problema de Weber sin restricciones.

Teorema 2.1.: Sea s^* una solución para el problema de Weber sin restricciones. Entonces s^* es una solución para el problema de Weber con restricciones o $s^* \varepsilon V(x^*)$. (7)

Como $V(x^*)$ es un subconjunto propio de la frontera de $V(x^*)$, existe una biyección continua

$$t = (0, 1) \longrightarrow V(x^*)$$

$$\Theta \longrightarrow t(\Theta)$$

Debido a Hansen (2) tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.: La función $f(t(\Theta))$ es cuasiconvexa.

Por lo tanto todo mínimo local es global. Luego lo único que hemos de hacer es encontrar el mínimo al problema de Weber sin restricciones y comprobar si pertenece al conjunto de restricciones, si está, este es el punto solución, y si no pertenece al conjunto K pertenece al conjunto de los puntos visibles desde el punto P*.

Nosotros plantearemos nuestro problema de Weber con restricciones, respecto a un conjunto que es convexo y en el que lo aproximamos el conjunto $V(x^*)$ por una quebrada de Euler, siendo los vértices los puntos $t(\Theta_1)$, $t(\Theta_2)$,.....$t(\Theta_n)$; donde $0 = \Theta_1 < \Theta_2 < ... < \Theta_n = 1$. Al conjunto de segmentos que forman esta quebrada de Euler lo llamamos $VE(x^*)$.

Planteamos entonces los dos problemas siguientes

PWRV $\quad$ $\text{Min } f(x, y)$ Con $(x, y) \ \varepsilon \ V(x^*)$

PWRVE $\quad$ $\text{Min } f(x, y)$ Con $(x, y) \ \varepsilon \ VE(x^*)$

Sea $V(x^*)$ el trozo de curva dado por los vértices $t(\Theta_k)$, $t(\Theta_{k+1})$.

Sea $L_k = (\lambda t(\Theta_k) + (1 - \lambda) t(\Theta_{k+1}) : 0 \leq \lambda \leq 1)$

Teorema 2.3.: La solución al problema (PWRV) se encuentra en el segmento de curva $V(x^*)$ si y solo si la solución al problema (PWRVE) se encuentra en el segmento L_k.

Demostración

Sea u_k^o la solución al problema (PWEV), entonces:

$f(u_k^o) \leq f(x), \quad \forall \quad x \varepsilon V(x^*)$.

Supongamos que la solución al problema (PWRVE) no se encuentra en L_k, sino en L_j. Sea entonces el punto solución V^{o}_{j}, que es un vértice si las derivadas direccionales de los lados que lo definen son no negativas. En caso contrario es un punto interior del segmento L_j.

Se tiene entonces que $f(u^{o}_{k}) < f(v^{o}_{j}) < f(x_k)$, $\forall\ x\ \varepsilon\ L_k$ por hipótesis.

Sea $z\ \varepsilon\ L = (\lambda u^{o}_{k} + (1-\lambda)\ v^{o}_{j} : 0 \leq \lambda \leq 1)$, entonces:

$$f(z) \leq \lambda\ f(u^{o}_{k}) + (1-\lambda)\ f(v^{o}) \leq l\ f(v^{o}_{j}) + (1-\lambda)\ f(v^{o}_{j}) = f(v^{o}_{j})$$

Sea $z_1 = L \wedge L_k$, entonces $f(u^{o}_{k}) < f(z_1) < f(v^{o}_{j})$

que es una contradicción. Luego el punto solución se encuentra en L_k.

Supongamos que la solución a (PWRVE) está en L_k, entonces la solución a (PWRV) se encuentra en $V_k(x^*)$, ya que si no sucede esto, la solución se encontrará en algún $V_j(x^*)$ y por la condición necesaria, la solución a (PWRVP) está en L_j ∎

Teorema 2.4: Sea $x_i = t(\Theta_i)\ \varepsilon\ V_C(P)$, y supongamos que $f(x_k) = \mathrm{Min}\ f(x_i)$. Entonces la solución se encuentra en $V_{k-1} \cup V_k$

Demostración

Igual que la del teorema anterior, pues f es convexa y el conjunto de restricciones es un conjunto convexo∎

Podemos comprobar que en el teorema solo hemos utilizado la convexidad de la función f (x, y), por lo que el teorema es válido para funciones convexas con restricciones convexas.

Utilizando este teorema podemos encontrar un algoritmo que nos encuentra la solución al problema de Weber con restricciones de tipo convexa. Para ello lo primero que haremos será encontrar el conjunto de puntos que sea visible desde el punto solución P^* del problema de Weber sin restricciones. Esto lo podemos encontrar trazando las tangentes desde el punto P^* al conjunto de restricciones, que hemos supuesto que es convexo y de frontera continua. Hecho esto, encontramos el punto frontera t (0), t (1 / 2) y t (1) con lo que encontramos una poligonal con estos tres puntos, a continuación encontramos la solución en los segmentos L_1 y L_2 y comprobamos cual es el menor. Supongamos que el menor se encuentra en L_1, entonces por el teorema anterior, sabemos que la solución se encuentra en el trozo de frontera K dado por la función t (0, 1 / 2). A continuación consideramos los puntos t (0), t (1 / 4) y t (1 / 2) y le aplicamos lo hecho anteriormente. De esta forma vamos obteniendo trozos de frontera encajados que nos aproximan al valor de la solución con la aproximación que queramos. Nos puede suceder que el punto solución se encuentre exactamente en el punto intermedio, por ejemplo en t (1 / 4), entonces estudiaremos el segmento dado por los extremos t (1 / 8) y t (3 / 8), con lo que podemos seguir con los pasos anteriores.

Pasamos a continuación a resolver el (PWRV) con las distancias rectangular, euclídea al cuadrado y euclídea.

2.1.–PWRV con la distancia rectangular

Nuestra función es ahora $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\, |x - x_i| + |y - y_i| \,\right]$

Nuestra restricción es un conjunto convexo.

Ahora bien, por el teorema anterior solo hemos de estudiar nuestro problema en un segmento L de extremos (a_1, b_1); (a_2, b_2)

Tenemos por tanto el problema:

$$\text{Min } f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\left| x - x_i \right| + \left| y - y_i \right| \right]$$

sujeto a un segmento L = y = ax + b ; $a_1 \leq x \leq a_2$, donde L es uno de los lados del polígono inscrito al conjunto convexo.

Nuestro problema nos queda por tanto en la forma:

$$\text{Min } f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\left| x - x_i \right| + \left| ax + b - y_i \right| \right] =$$

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i \left| x - x_i \right| + \sum w_i \mid a \mid \left| x - \frac{1}{a} (y_i - b) \right| \right] =$$

$$= \text{Min} \sum_{i=1}^{2n} w_i \left| x - \lambda_i \right|$$

$$\text{donde} \quad \begin{cases} W_i = w_i \quad \text{si } 1 \leq i \leq n & \lambda_i = x_i \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \\ W_{n+i} = w_i \quad \text{si } 1 \leq i \leq n & \lambda_{n+i} = \dfrac{1}{a} (y_i - b) \quad \text{si } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Luego el problema de minimización se nos ha transformado en encontrar la mediana de un conjunto de 2n puntos. Sea t^* la mediana, tendremos entonces por solución (t^*, y^*), con $y^* = a t^* + b$. Ahora bien si $(t^*, y^*) \not\in L$, entonces la solución es el extremo del segmento que haga menor la función.

2.2.– PWRV con la distancia euclídea al cuadrado

Nuestra función es

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]$$

Sujeto a un segmento L que suponemos que es y = ax + b con $a_1 \leq x \leq a_2$.

Realizando el cambio de sistema de referencia, obtenemos una función en una variable $H(x) = Ax^2 + Bx + C$.

donde $A = \sum w_i (1 + a^2)$ $\qquad B = \sum w_i (2a(b - y_i) - 2x_i)$

$$c = \sum w_i \left[x_i^2 + (b - y_i)^2 \right]$$

Que es una función convexa, siendo el punto que anula la derivada primera $x^* = -B / (2A)$, que es el punto que hace mínima la función $H(x)$.

Luego la solución es por tanto (x^*, y^*), siendo $y^* = a\,x^* + b$, si $x^* \in (a_1, a_2)$.
Si $x^* \notin (a_1, a_2)$, entonces la solución en el segmento en cuestión, es el extremo que haga menor la función objetivo.

2.3.–PWRV con la distancia euclídea

Nuestra función es entonces:

$$f(x,y) = \Sigma w_i \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

Sujeto a un segmento L que suponemos que es $y = ax + b$ con $x_1 \leq x \leq x_2$.

Realizamos el cambio de sistema de referencia, de forma que el segmento L se transforma en

$$\left[\begin{array}{l} x = a \\ y = t \; (t_1 \leq t \leq t_2) \end{array} \right.$$

Con lo que tendremos:

$$F(t) = \Sigma w_i \left[(a - x_i)^2 + t^2 - 2ty_i + y_i \right]^{1/2} =$$

$$\Sigma w_i \left[t^2 - 2ty_i + (y_i^2 + (a - x_i)^2 \right]^{1/2}$$

que resolvemos por el método de Weiszfeld, o por el algoritmo de Fibonacci pues F es unimodal.

3. ANALISIS DE LA SENSIBILIDAD EN EL PROBLEMA DE WEBER CON RESTRICCIONES

3.1.–Distancia Rectangular

Nuestro problema es Min $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[|x - x_i| + |y - y_i| \right]$

sujeto a un conjunto convexo K y siendo $(x_i, y_i) \in B(p_i, R_i)$

Por el teorema 2.3 , podemos aproximar K por un polígono convexo. Estudiamos por tanto los segmentos visibles desde el conjunto solución sin restricciones.

Sea $L \equiv y = ax + b$; $a_1 \leq x \leq a_2$, uno de tales segmentos.

Nosostros sabemos que el conjunto solución en el análisis de la sensibilidad sin restricciones viene dado por el conjunto $D \equiv (x_1^*, x_2^*) \times (y_1^*, y_2^*)$.

$$\text{donde } x_i^* = \text{Min} \sum_{h=1}^{n} w_h \left| x - x_h^i \right| \quad 1 \leq i \leq 2 \quad \begin{cases} x_h^1 = x_h - R_h \\ x_h^2 = x_h + R_h \end{cases}$$

$$y_i^* = \text{Min} \sum_{h=1}^{n} w_h \left| y - y_h^i \right| \quad 1 \leq i \leq 2 \quad \begin{cases} y_h^1 = y_h - R_h \\ y_h^2 = y_h + R_h \end{cases}$$

Llamemos $D(L)$ al conjunto solución en el segmento L y sea

$$f_{i,j} = \sum w_l \left[\left| x - x_l^i \right| + \left| y - y_l^j \right| \right] = \text{Min} \sum_{l=1}^{2n} w_l \left| x - \lambda_l \right| \quad \text{por } (2.1)$$

$$\text{donde} \quad \begin{cases} \lambda_l = x_l^i & \text{si } 1 \leq l \leq n \\ \lambda_{n+l} = \dfrac{1}{a}(y_l - b) & \text{si } 1 \leq l \leq n \end{cases}$$

Sean $(t_{i,j}^*)$ las cuatro medianas obtenidas, y sea $t = \text{Min}(t_{i,j}^*)$ y $t_2 = \text{Max}(t_{i,j}^*)$. Entonces $D(L) \equiv y = ax + b$ con $x \in (t_1, t_2) \wedge (a_1, a_2)$. Si este conjunto intersección es ϕ, entonces la solución es el extremo a_1 ó a_2, dependiendo de la cercanía al conjunto (t_1, t_2).

3.2.–Distancia euclídea al cuadrado

$$\text{Nuestro problema es Min } f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]$$

Sujeto a un segmento L que suponemos que es $y = ax + b$ con $a_1 \leq x \leq a_2$.

Realizando el cambio $y = ax + b$, obtenemos $H(x) = Ax^2 + Bx + C$ donde A , B y C los obtuvimos anteriormente

$$\text{con punto solución } x^* = \frac{\sum w_i (x_i + a\, y_i - a\, b)}{(1 + a^2) \sum w_i} \; ; \; y^* = ax^* + b \quad (1)$$

Los puntos de demanda factibles son:

$$(x_i + r_i \cos\Theta_i , y_i + r_i \operatorname{sen}\Theta_i) \text{ con } 0 < r_i < R_i .$$

Sea $(x^*(r, \Theta), y^*(r, \Theta))$ la solución a este problema, entonces:

$$x^*(r, \Theta) = \frac{\sum w_i (x_i + a\, y_i + r_i (\cos\Theta_i + a \operatorname{sen}\Theta_i) - ab)}{(1 + a^2)\, S\, w_i} =$$

$$x^* + \frac{\Sigma w_i r_i (\cos \Theta_i + a \operatorname{sen} \Theta_i)}{(1 + a^2)\ \Sigma w_i} = x^* + G$$

$$\text{donde } G + \frac{\Sigma w_i r_i (\cos \Theta_i + a \operatorname{sen} \Theta_i)}{(1 + a^2)\ \Sigma w_i}$$

Luego $x^*_L(r, \Theta) - x^* = G$; $y^*_L(r, \Theta) = a x^*_L(r, \Theta) + b = a\ x^* + b + aG + y^* + aG$ (2)

luego $y^*_L(r, \Theta) - y^* = a G$.

Sea $d_L(r, \Theta)$ la distancia euclídea entre los puntos definidos por (1) y (2), entonces:

$$d_L(r, \Theta) = \left[(x^*_L(r, \Theta) - x^*)^2 + (y^*_L(r, \Theta) - y^*)^2 \right]^{1/2} =$$

$$\left[G^2 + a^2 G^2 \right]^{1/2} = \left[G^2 (1 + a^2) \right]^{1/2} =$$

$$\left[\left(\frac{\Sigma w_i r_i (\cos \Theta_i + a \operatorname{sen} \Theta_i)}{(1 + a^2)\ \Sigma w_i} \right)^2 (1 + a^2) \right]^{1/2} =$$

$$\left[\frac{(\Sigma w_i r_i (\cos \Theta_i + a \operatorname{sen} \Theta_i))^2}{(1 + a^2)\ (\Sigma w_i)^2} \right]^{1/2} \quad (3)$$

Proposición 3.1: $d_L(r, \Theta)$ se maximiza cuando todo $\Theta_i = \operatorname{arc\ tg}\ a$ para $1 \leq i \leq n$

Demostración

como $\frac{a}{a \Theta_j} d_L(r, \Theta) = 0$, para $1 \leq i \leq n$, se tiene que:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} w_i\ r_i\ (\cos \Theta_i + \operatorname{sen} \Theta_i) \right] \quad w_i r_i (-\operatorname{sen} \Theta_j + a \cos \Theta_j) = 0$$

Luego $(-\operatorname{sen} \Theta_j + a \cos \Theta_j) = 0 \implies \operatorname{tg} \Theta_j = a$ para $1 \leq i \leq n$

Como $w_i\ r_j > 0$, $d_L(r, \Theta)$ se maximiza cuando todos los $\operatorname{sen} \Theta_i$, y $\cos \Theta_i$ tomen el mismo signo. Por lo que el máximo valor se da cuando $\Theta_i = \Theta^*$, siendo $\operatorname{tg} \Theta^* = a$, luego:

$\cos \Theta^* = (a^2 + 1)^{-1/2}$ y $\operatorname{sen} \Theta^* = (a^2 / a^2 + 1)^{-1/2}$

Sustituyendo en (3) se tiene:

$$d_L(r,Q)=\left[\frac{\left(\sum w_i R_i \dfrac{1}{(1+a^2)^{1/2}} + a\dfrac{a}{(1+a^2)^{1/2}}\right)^2}{(1+a^2)\ (\sum w_i)^2}\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{\left(\sum w_i R_i \dfrac{1+a^2}{(1+a^2)^{1/2}}\right)^2}{(1+a^2)\ (\sum w_i)^2}\right]^{1/2}=\frac{\sum w_i R_i}{\sum w_i}=R_D$$

que es el mismo valor del análisis de la sensibilidad sin restricciones.

Llamemos $x_1^* = x^* - R_D$, $x_2^* = x^* + R_D$

Luego el conjunto solución a nuestro problema es la intersección de la recta $y = ax + b$ con $a_1 \leq x \leq a_2$ y el círculo de centro (x^*, y^*) y radio R_D.

3.3.–Distancia euclídea

Nuestro problema es

$$\text{Min } f(x,y) = \sum w_i \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right)^{1/2}$$

Sujeto a un segmento L que suponemos que es $y = ax + b$, con $a_1 \leq x \leq a_2$.

El punto solución se obtiene por el algoritmo de Weiszfeld aplicado a la función

$$F(t) = \sum w_i \left((a-x_i)^2 + (t-y_i)^2\right)^{1/2}$$

Notemos por D (L) al conjunto solución en el segmento L, entonces obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2: D (L) es un conjunto cerrado

Vamos a aproximar hiperbólicamente la distancia, teniendo $d_i(\varepsilon) = \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + \varepsilon\right)^{1/2}$; con esto podemos asegurar la derivabilidad de f (x, y).

Sea $x_i(\Theta) = x_i + r_i \cos\Theta_i$ $y_i(\Theta) = y_i + r_i \operatorname{sen}\Theta_i$

$(a, y^*(\Theta))$ el punto solución para $Q = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$

que cumple $\dfrac{a\ F}{a\ \Theta_i} = 0.$

Sea $d_i(\varepsilon) = \left((a - x_i(\Theta))^2 + (t^*(\Theta) - y_i(\Theta))^2 + e\right)^{1/2}$

$$\frac{a\ F}{a\ t} = G_t(t^*(\Theta), \Theta) = \sum w_i \frac{(t^*(\Theta) - y_i(\Theta))}{d^*(\Theta)} = 0 \qquad (1)$$

Diferenciando en (1) respecto a Q_k, por la regla de la cadema obtenemos:

$$\frac{a\, G_t}{a\, t^*}\frac{a\, t^*}{a\, \Theta_k} + \frac{a\, G_t}{a\, \Theta_k} = 0 \qquad \text{para } 1 \leq k \leq n \text{, luego:}$$

$$\frac{a\, t^*}{a\, \Theta_k} = -\frac{\dfrac{a\, G_t}{a\, \theta_k}}{\dfrac{a\, G_t}{a\, t^*}} \qquad ; \frac{a\, G_t}{a\, t^*} = C = \sum w_i \qquad \frac{(a - x_i(\Theta))^2}{d_i^2}$$

$$\frac{a\, G_t}{a\, \theta_k} = -w_k R_k\, (d_k^*)^{-3}\, (a - x_k(\theta)) \left[(a - x_k(\Theta)) \cos \Theta_k + (t - y_k(\Theta)) \operatorname{sen} \Theta_k \right]$$

Luego:

$$\frac{a\, t}{a\, \Theta_k} = C^{-1} (d_k^*)^{-3} (a - x_k(\Theta)) \left[(a - x_k(\Theta)) \cos \Theta_k + (t - y_k(\Theta)) \operatorname{sen} \Theta_k \right]$$

Por lo que obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en Θ_k.

Método Heurístico.

Presentamos en esta sección un método heurístico basado en la sección anterior. En la sección 2, realizamos un cambio del sistema de referencia, por lo que el segmento L, se transformó en un segmento L ´, paralelo al eje y. El punto frontera, se encuentra por una aproximación $\hat{D}(\pi / 2)$ que define un rayo originado en la solución (a, t *) en el segmento L ´.

Definimos por tanto:

$$\hat{D}(\pi/2) = \max_{\Theta} ((x^* - x^*(\Theta))^2 + (y^* - y^*(\Theta))^2)^{1/2} = \max_{\Theta} \left| t^*(\Theta) - t \right| .$$

El método es solo heurístico, porque encuentra un óptimo local de $\hat{D}(p / 2)$ en Θ, el cual no asegura que sea global, y además el problema se resuelve solo en el caso en que el punto solución para el problema de Weber sin restricciones no sea un punto de demanda.

Nosostros tenemos que $x^*(\Theta) = x^* = a$

$$\text{Sea } \beta_i = \frac{a\, t^*(\Theta)}{a\, \Theta_i} \; ; \alpha_i = \frac{a\, x^*(\Theta)}{a\, \Theta_i} \qquad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

El punto óptimo se mueve a través del segmento L ´ al cambiar los valores de los ángulos Θ_i, sobre las circunferencias de los círculos. Por lo tanto Θ_i será función del parámetro λ. El punto de salida es el valor inicial $\lambda = 0$; $\Theta_1(0) = \Theta_1$. Para encontrar el cambio de la localización del punto óptimo, cuando cambiamos Θ_i, usamos la regla de la cadena, obteniendo:

$$\frac{d\, t^*(\Theta(\lambda))}{d\, \lambda} = \sum \frac{a\, t^*(\Theta)}{a\, \Theta_i} \frac{d\, \Theta_i}{d\, \lambda} \; ; \text{Sea } \gamma_i(\lambda) = \frac{d\, \Theta_i}{d\, \lambda}$$

La condición para que el punto óptimo se mueva a lo largo del rayo definido por el ángulo ($\pi / 2$) es que: ,

$$\frac{d\ t^*\ (\Theta(\lambda))}{d\ \lambda} = K(\lambda)\ \text{sen}\ (\pi / 2) = K(\lambda)$$

siendo K (λ) la velocidad con la que el punto se mueve a lo largo del rayo. Seleccionamos como velocidad la máxima, entonces, tendremos el problema de programación matemática:

$$\text{Max } K(\lambda)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum \gamma_i^2 = 1$$

$$\sum \beta_i \gamma_i = K(\lambda)$$

que es equivalente a

$$\text{Max } K(\lambda) = \sum \beta_i \gamma_i$$

$$\text{Sujeto a} \sum \gamma_i^2 = 1$$

Aplicando las condiciones de Khunn - Tucker obtenemos:

$$\underset{\sim}{\Omega} = \sum \beta_i \gamma_i + \mu\ (\ \sum \gamma_i^2 - 1\ )$$

$$\frac{a\ \underset{\sim}{\Omega}}{a\ \gamma_i} = \beta_i + 2\mu\gamma_i = 0 \Longrightarrow \beta_i = 2\mu\gamma_i \Longrightarrow \gamma_i = \frac{\beta_i}{2\mu}$$

$$\frac{a\ \underset{\sim}{\Omega}}{a\ \mu} = \sum \gamma_i^2 - 1 \Longrightarrow \sum \frac{\beta_i}{4\mu^2} = 1 \Longrightarrow \mu = \frac{(\sum \beta_i^2)^{1/2}}{2}$$

$$\text{Luego } \gamma_i = \frac{\beta_i}{(\sum \beta_i^2)^{1/2}} \quad \text{y } K(\lambda) = \sum \frac{\beta_i}{(\sum \beta_i^2)^{1/2}} \beta_i = \left[\sum \beta_i^2 \right]^{1/2}$$

Finalmente construimos el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\frac{d\theta_i}{d\lambda} = \gamma_i(\lambda)\ ; \frac{dt^*}{d\lambda} = \sum \beta_i(\lambda)\gamma_i(\lambda)$$

Es decir:

$$\frac{d\ \theta_i}{d\ \lambda} = \frac{\beta_i}{(\sum \beta_i^2)^{1/2}}\ ; \frac{dt^*}{d\lambda} = \left[\sum \beta_i^2 \right]^{1/2}$$

Sistema que se integra por el método de Runge - Kutta hasta un λ , tal que k ( ) sea menor que una tolerancia prefijada.

Para encontrar R_D , construimos un sistema de ecuaciones diferenciales.

Para encontrar el valor de $\gamma_i(\lambda)$ que maximice la distancia entre los puntos ($x^*(\theta)$, $y^*(\theta)$) y (x^*, y^*) consideramos el cambio en la distancia euclídea al cuadrado entre estos puntos.

El cambio viene dado por:

$$2\,(x^*(\theta)-x)\,\frac{d\,x^*(\theta(\lambda)}{d\,\lambda}+2\,(y^*(\theta)-y)\,\frac{d\,y^*(\theta(\lambda)}{d\,\lambda}=$$

$$2\sum(y^*(\theta)-y)\,\beta_i(\lambda)\,\gamma_i(\lambda)=\sum\Delta_i\gamma_i$$

Por lo tanto nos queda el problema de programación matemática:

$$\text{Max}\sum\Delta_i\gamma_i$$

$$\text{Sujeto a}\sum\gamma_i^2=1$$

Siendo la solución $$\gamma_i=\frac{\beta_i}{(\sum\beta_i^2)^{1/2}}.$$

Sustituimos esta expresión en (2). En el punto inicial $\lambda = 0$, $\Delta_i = 0$, ya que $(x^*(\theta), y^*(\theta)) = (x^*, y^*)$.

4.–BIBLIOGRAFÍA

(1) E. WEISZFELD «Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum», Tohoku math. J. 43,353 - 386 (1937).

(2) P. HANSEN - D. PEETERS and J. F. THISSE, «An algorithm for a constrained weber problem», Management Science, 28, 1285 - 1295, (1982).

(3) Z. DREZNER «Bounds on the optimal location to the weber problem under conditions of uncertainty» , Journal of the Operational Research Society, 30, 923 - 931, (1979).

(4) Z. DREZNER «Sensitivity analysis of the optimal location of a facility», Naval Research Logistics Quarterly, 32, 209 - 224 (1985).

(5) F. VELASCO MORENTE «Análisis de la sensibilidad en el problema de Weber» Tesina, Universidad de Sevilla (1987).

(6) F. VELASCO MORENTE «Introducción a la localización el bachillerato» Epsilon, Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES " , Tercer Cuatrimestre (1988).

(7) A. P. HURTER - M. K. SCHAEFER - R. E. Wendell, «Solutionns of Sconstrained Location Problems», Magement Science, 22, 51 - 56 (1975).

(8) L. C. W. Dixon Nonlinear Optimisation, The english Universities Press Limited, (1972).