JOSE MUÑOZ PEREZ
UNIVERSIDAD DE MALAGA
FRANCISCO VELASCO MORENTE
FRANCISCO M. SOLIS CABRERA
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA APLICADA. UNIVERSIDAD DE SEVILLA

RESTRICCIONES EN EL PROBLEMA DE WEBER CON PUNTOS REPULSIVOS

1.- INTRODUCCION

Fermat en el siglo XVII, propone el problema de localizar un punto en el plano, de forma que las sumas de las distancias de éste a otros tres dados sea mínima. Surge de esta forma el primer embrión de lo que más tarde se conocería como 'Problema de localización'.

Weber en 1909 plantea localizar una industria que abasteciera una serie de puntos de demanda. Estableció cuales eran los factores fundamentales que condicionaban la distribución regional de las industrias: los costes del transporte, los costes del trabajo y los precios de las materias primas y de la fuerza motriz.

En 1937 Weiszfeld resuelve el problema de localización determinístico por medio de un algoritmo iterado para n puntos. Sin embargo debido a la II guerra mundial este algoritmo no fue conocido por estar publicado en la revista japonesa 'Tohoku Mathematic journal'. A mediados de los años 50 se redescubre el procedimiento de Weiszfeld por Miehle (1958). Francis (1964) introduce la distancia rectangular para este tipo de problemas.

El problema de localización también se resuelve como un problema minimax y fue propuesto por Sylvester en 1857 y resuelto computacionalmente por Elzinger y Hearn en 1972.

Wesolowsky (1977) propone la resolución del problema de Weber con distancia rectangular y donde los puntos se distribuyen aleatoriamente, siendo los puntos de demandas atractivos para el punto de localización. Tellier en 1972 generaliza el problema de Weber definiendo los conceptos de punto atractivo y punto repulsivo.

Un ejemplo de punto atractivo a localizar, respecto a los puntos de demanda sería el caso de un hospital, supermercado, colegio,etc. Sin embargo una central nuclear, un basurero municipal, una gasolinera, aunque son centros necesarios al prestar grandes servicios a la comunidad, producen ciertos rechazos entre los ciudadanos. A estos puntos se les denominan repulsivos. Generalmente estos puntos están localizados en las afueras de las ciudades.

Como hemos comentado el problema que planteamos va a consistir en minimizar la función de Weber con puntos repulsivos respecto a los puntos de demandas aleatorios, con distancia rectangular y sujeto a restricciones de tipo convexo. Estas restricciones para el Centro de servicios buscado (a localizar) va a ser una unión de polígonos convexos.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean n puntos $P_i=(x_i,y_i)$ de demanda con coordenadas aleatorias, con función de densidad bidimensional conocida. Se desea encontrar un punto (x,y) que minimice la función esperada siguiente:

$$E(H)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} w_i\left[|x-x_i|+|y-y_i|\right].f(x_i,y_i).dx_i\ dy_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w_i\left[|x-x_i|+|y-y_i|\right].f(x_i,y_i).dx_i\ dy_i \qquad (A)$$

Estamos utilizando la distancia rectangular (también llamada distancia de las ciudades, red,...).

La expresión (A) la podemos descomponer de la siguiente forma: $E(H) = E(H)_x + E(H)_y$, siendo :

$$E(H)_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} w_i|x-x_i|.f_1(x_i).dx_i.$$

$$E(H)_y=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} w_i|y-y_i|\cdot f_2(y_i)\cdot dy_i.$$

Estas expresiones, serán las que utilizaremos para encontrar el óptimo, en cada variable , ya que el problema completo se puede reducir a resolver el problema de dos funciones de una variable.

3.- CALCULO DEL OPTIMO EN EL CASO DE LA DISTRIBUCION UNIFORME SIN RESTRICCIONES CON PUNTOS ATRACTIVOS Y REPULSIVOS

Consideremos que los pesos w_i son positivos para los puntos atractivos y w_i negativos para los repulsivos y supondremos también que $\sum w_i \geq 0$

$$\text{Sea} \quad f(x_i,y_i)=\frac{1}{(f_i-e_i)(h_i-g_i)} \qquad \begin{cases} f_i \geq e_i \\ e_i \leq x_i \leq f_i \\ h_i \geq g_i \\ g_i \leq y_i \leq h_i \end{cases}$$

la función de densidad de la distribución uniforme bidimensional y $E(H)x = \sum_{i=1}^{n} \int_{e_i}^{f_i} \frac{w_i|x-x_i|}{(f_i-e_i)}\, dx_i$

Realizando operaciones , obtenemos la siguiente expresión:

$$E(H)x= -\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i\ R_i}{2(f_i-e_i)}\left[I_i\ (x-e_i)^2 + (x-f_i)^2\right]$$

$$\text{donde } R_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq f_i \\ -1 & \text{si} \quad x<f_i \end{cases} \qquad I_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad e_i \leq x < f_i \\ -1 & \text{si} \quad e_i > x \quad \text{o} \quad x \geq f_i \end{cases}$$

Derivando $E(H)x$ e igualando a 0 nos queda

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i\ R_i}{f_i-e_i}\left[x - f_i + I_i(x-e_i)\right] = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\ R_i\ (e_i I_i + f_i)(f_i - e_i)^{-1}}{\sum_{i=1}^{n} w_i\ R_i\ (1 + I_i)\ (f_i - e_i)^{-1}}$$

En el caso de que todos los w_i sean negativos, entonces $E(H)x$ es una función cóncava y el problema de minimización se convierte en uno de maximización. La resolución de este nuevo problema sería análoga al desarrollo anterior, salvo a la hora de encontrar el intervalo que habrá que tener en cuenta que el signo de la derivada pasa de positivo a negativo, puesto que estamos buscando un máximo en una función concava. Sea $K = \left\{ e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_n, f_n \right\}$ y $\left\{ s_1, s_2, \ldots, s_{2n} \right\}$ los elementos de K ordenados de menor a mayor.

En el caso más general de que existan puntos atractivos y repulsivos, esto es, si algunos de los $w_i>0$ y otros $w_i<0$,aunque la función es continua, presenta una forma parabólica en cada intervalo (s_i, s_{i+1}) cuya ecuación viene dada por: $a_i x^2+b_i x+c_i$ siendo a_i positivo en algunos intervalos y negativos en otros.Se trataría de ir buscando aquellos intervalos donde existan mínimos locales de la expresión

$$E(H)x= -\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i\ R_i}{2(f_i-e_i)}\left[I_i\ (x-e_i)^2 + (x-f_i)^2\right]$$

es decir, aquellos intervalos (s_i, s_{i+1}) tales que los a_i son positivos, ya que si a_i es negativo, la parábola en ese intervalo es cóncava . En el caso de que algún $a_i = 0$ el mínimo local es uno de los extremos, o todos los puntos del intervalo, dependiendo si la recta es constante o no.

Donde los valores a_i, b_i y c_i tienen las expresiones:

$$a_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i\ R_i}{2(f_i-e_i)}\ (I_i+1) \quad ; b_i = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i\ R_i}{2(f_i-e_i)}\ (e_iI_i+f_i)$$

$$c_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i\ R_i}{2(f_i-e_i)}\ (I_ie_i^2+f_i^2)$$

En cada intervalo que cumpla la condición de que $a_i > 0$, calculamos el punto $x^* = -\dfrac{b_i}{2a_i}$. Si x^* pertenece al intervalo en cuestión, éste es el mínimo local, y en caso contrario el mínimo es uno de los extremos.

Hemos de notar que si $x < s_1$, entonces $R_i=-1$ e $I_i=-1$ para cada i, luego realizando operaciones obtenemos que $a_0=0$; $b_0=-\sum w_i \leq 0$ y $c_0=\sum w_i(f_i+e_i)$. Por lo que el mínimo en el intervalo $(-\infty, s_1)$ viene dado por $b_0 . s_1 + c_0$.

Análogamente si $x > s_{2n}$ entonces $R_i=1$ e $I_i=-1$ por lo que $a_{2n}=0$; $b_{2n}=\sum w_i \geq 0$ y $c_{2n}=-\sum w_i(f_i+e_i)$. Por lo que el mínimo en el intervalo (s_{2n}, ∞) viene dado por $b_{2n}.s_{2n}+c_{2n}$.

El imponer la condición de que $\sum w_i \geq 0$ es debido a que estamos minimizando y ello nos obliga a tomar $b_0<0$, ya que si $b_0>0$ entonces el mínimo se encuentra en $-\infty$. Lo mismo sucede con b_{2n}.

Una vez encontrados todos los mínimos locales, el menor de todos ellos es el mínimo global.

4.- RESOLUCION DEL PROBLEMA CON RESTRICCIONES PARA PUNTOS REPULSIVOS

Tellier define un punto de demanda atractivo si su correspondiente peso específico w_i es positivo y repulsivo en caso contrario. Nosotros intentamos minimizar (A); ahora bien como $w_i<0$, nuestro problema de minimizar se convierte en:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w_i\left(|x-x_i|+|y-y_i|\right).f(x_i,y_i).dx_i\ dy_i$$

donde los $w_i>0$. y siendo la función convexa ya que la distancia rectangular es convexa.

La solución la situamos en un recinto limitado S que suponemos convexo. Por tanto estamos ante un problema de:

$$\max_{(x,y)\in S} E(H) \qquad (B)$$

$$S=\bigcup_{j=1}^{n} Q_j \qquad Q_j = \text{polígono convexo}$$

<u>Definicion</u>.- Un punto $x\in S$ es un vértice de S si no se puede expresar como combinación convexa de dos puntos cualesquiera de S. En un polígono convexo estos vértices coinciden con los vértices de la definición clásica de un polígono.

El teorema de maximización de una función convexa nos da el siguiente resultado:

<u>Proposicion 1</u>.-Si una función f es convexa en un conjunto convexo S, entonces el máximo de f es un vértice de S.

Como consecuencia de este teorema, se tiene el siguiente resultado aplicado a nuestro problema

<u>Proposicion 2</u>.- La solución de (B) está en un vértice de algún polígono Q_j de S al menos. Si está en varios vértices, entonces está también en cualquier combinación convexa de ellos.

Demostración:

La función a maximizar es convexa y está restringida a un conjunto convexo. Por el teorema de maximización de una función convexa la solución está en un vértice de S. Ahora bien, S es una unión de polígonos convexos, luego el óptimo buscado será:

$$\max_{1\leq j\leq m}\left[\max_{(x,y)\in Q_j} E(H)\right]$$

y estando el $\max_{(x,y)\in Q_j} E(H)$ en un vértice del polígono Q_j

Si el óptimo estuviera en varios vértices de S también lo está en la combinación convexa de dichos vértices, pues E(H) es convexa.

EJEMPLO 1

Según el apartado 3, para el caso de puntos atractivos y repulsivos, hemos considerado los 85 pueblos de la provincia de Sevilla más habitados. Se han asignado pesos positivos (w_i), igual al número de habitantes, para todos los pueblos excepto la capital que se le ha asignado un peso negativo.

Pretendemos encontrar la ubicación de un centro de servicio que puede resultar atractivo para determinados núcleos de población y rechazable en particular para la capital.

Tomando como referencia la capital con coordenadas (1,0), obtenemos las coordenadas (a_i,b_i) de los restantes puntos.

45.5 -7 1969 / 13 37.75 2267 /-7.5 1.5 1702
7.75 -2.25 51589 /0.75 8 9113 /15.5 14 3543
-1 4 12441 /39 -20.5 1534 /-3.75 27 1928
-5.8 -4 1705 /20.75 -7 17643 /-11.75 -6 3177
-12.35 7 5461 /60.5 -3.5 3222 /-9.5 -2.25 4692
-6.5 -3.25 4367 /-3.5 -1.5 4936 /10 5.5 10081
1.5 12.25 3208 /3 -23 15585 /-1 1 25567
26.75 10.5 5520 /36.25 12.5 2783 /8 13 8951
16.5 4.5 24360 /-15.5 -0.5 2462 /56.5 -4.25 4975
1 17 3852 /-3.5 2.25 253 /-1.5 1.25 14367
-10.5 -3.25 618 /-16 18 1810 /11.25 31.5 5442
17.75 29 7935 /-2.9 -5.5 22138 /25.25 -22.8 1821
17 -17.5 5212 /46.6 -16.5 3935 /4.75 -6.1 70232
42.5 9.75 36252 /-5.5 0.5 2538 /52 -4.75 10802
0.5 4.75 7706 /-7.75 13.5 745 /-1.5 -3.25 3806
-7.5 8 5139 /50.25 -7.25 3790 /-4 -0.25 5382
7.9 40 3336 /-2 8.5 7763 /52.75 -0.75 5663
-12.9 -1.25 2096 /35.5 -1.75 3282 / -3.25 -26.8 29491
53 -5.25 677 /21.5 15.5 19461 /34.75 8 4131
-23 15.25 441 /12 0 14144 /-2.75 -2.25 20101
26.75 -2.8 17711 /48.25 0 2472 /47.5 -15.5 2741
13 -14 2735 /20 -22 7103 /25 -15.25 29116
24.5 31.25 2155 /-8 12.5 6392 /41 -8 16939
3.25 -12.75 29266 /-2.75 -3.75 2108 /23.25 -5 7187
51 -9 4762 /11 26 2474 /30.25 19.5 4097
-14 -5.1 10411 /36 -23.25 3903 /31.5 -8.75 10831
28 22.5 3870 / -3.1 -7 15933 /-7.1 32.5 1850
1 6 20785 /55.75 -10 4095 /-7.5 19.75 1424
46.5 -1 3846 /-5 3 239 /-2 -1.75 21565
15.5 36 765 /-9.8 -0.5 8985 /-1.5 2.5 6269
41.5 -18 4067 /1 0 669976 /12.5 13 8544
-7.5 -1 11324 /-8.5 -2.5 4216 /10.25 -12 42365
-3.5 3 4187 /-14 -8.5 3534 /37.75 -18.5 1785
-6.5 1.25 3788 / 13 15.25 5870 /6.15 12.25 6347
13 0.5 14996

Utilizamos la distribución bidimensional uniforme en el intervalo $[a_i-2,a_i+2]\times[b_i-2,b_i+2]$.

Realizando un programa de programación Pascal obtenemos que las coordenadas óptimas del centro de servicios a localizar son $x^*=6.634$ e $y^*=-2.789$. Este punto está localizado cerca de la localidad de Alcalá de Guadaira.

EJEMPLO 2

Según el apartado 4, todos los pesos específicos son negativos, ya que están asociados a puntos repulsivos y nuestro problema se nos convertía en maximizar una función convexa sujeta a un conjunto de restricciones convexo. En nuestro ejemplo lo hemos limitado a la provincia de Sevilla por medio de dos polígonos convexos, cuyos vértices vienen dados por las coordenadas:

Primer polígono

27.8 13.9 /31.9 19 /31.4 22.1/27.3 25.7 /19 42.7
/12.8 46.5/6.2 44.7/-7.2 30.1/-21.1 12.3/-23.7 12.3
-15.4 -1.5

Segundo polígono

/-17 -3.6/-16.5 -2.6/-14.4 -28.3/1.5 -31.4
5.6 -31.4/35.5 -25.2/58.6 -9.8/62.2 -6.2/60.7 -2.1
45.8 18.5/43.2 19

Al realizar de nuevo en Pascal un programa para este problema, hemos obtenido los siguientes resultados:

1 (27.800,13.900) VALOR DE LA FUNCION = 29217989.164
2 (31.900,19.000) VALOR DE LA FUNCION = 34707964.763
3 (31.400,22.100) VALOR DE LA FUNCION = 36646841.062
4 (27.300,25.700) VALOR DE LA FUNCION = 37226692.813
5 (19.000,42.700) VALOR DE LA FUNCION = 47072687.180
6 (12.800,46.500) VALOR DE LA FUNCION = 48720988.301
7 (6.200,44.700) VALOR DE LA FUNCION = 46733408.657
8 (-7.200,30.100) VALOR DE LA FUNCION = 40714170.274
9 (-21.100,12.300) VALOR DE LA FUNCION = 38611199.052
10 (-23.700,12.300) VALOR DE LA FUNCION = 40620413.272
11 (-15.400,-1.500) VALOR DE LA FUNCION = 28718155.279
12 (-17.000,-3.600) VALOR DE LA FUNCION = 29914337.773
13 (-16.500,-2.600) VALOR DE LA FUNCION = 29506380.290
14 (-14.400,-28.300) VALOR DE LA FUNCION = 41732172.581
15 (1.500,-31.400) VALOR DE LA FUNCION = 34512180.821
16 (5.600,-31.400) VALOR DE LA FUNCION = 33814260.054
17 (35.500,-25.200) VALOR DE LA FUNCION = 38125024.498
18 (58.600,-9.800) VALOR DE LA FUNCION = 44023770.658
19 (62.200,-6.200) VALOR DE LA FUNCION = 45288126.714
20 (60.700,-2.100) VALOR DE LA FUNCION = 43671686.704
21 (45.800,18.500) VALOR DE LA FUNCION = 42430741.384
22 (43.200,19.000) VALOR DE LA FUNCION = 41055706.582

LA SOLUCION ES EL PUNTO 6 (12.800,46.500)

BIBLIOGRAFIA

ELZINGA J.-HEARN D.W.(1.972) . Geometrical solutions for some minimax location problems. **Transportations Science** 4:379-394

FRANCIS R.L.- goldstein j.m. (1.974). Location theory: A selective bibliography. **Operations Research** 22:400 -410

FRANCIS R.1. - MCGINNIS L.F. - WHITE J.A. (1.983) Locational analysis. **European Journal of Operational Research** .12:220-252

TELLIER L.N.(1.972)The Weber Problem:Solution and Interpretation. **Geographical Analysis** 4:215-233

TELLIER L.N. - POLANSKY b:(1.989) The Weber Problem: Frecuency of different solutions types and extenxion to repulsive forces and dinamic processes. **Journal of Regional Science** 29:387-405

WEBER A.(1.909) Ueber den standort der industrien. Tübingen(English translation: Friedrich D.J. (translator) 1.929. Theory of the location of industries. Chicago: University of Chicago Press)

WEISZFELD E.(1.937) Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. **Tohoku Mathematical** 43:335-386

WESOLOWSKY G.O (1.977) The Weber Problem with rectangular distances and Randomly distributed destinations. **Journal of Regional Science** 17:53-60