

# **Algunos aspectos dinámicos en un modelo bioeconómico**

VÍLCHEZ LOBATO, M<sup>a</sup> LUISA

Universidad de Huelva

VELASCO MORENTE, FRANCISCO

Universidad de Sevilla

GARCÍA DEL HOYO, JUAN J.

Universidad de Huelva

## **RESUMEN**

Se estudian en este trabajo algunos aspectos relevantes de la teoría de Sistemas Dinámicos aplicados a un modelo de competición interespecies. Se trata de un estudio cualitativo en el cual, en función de los parámetros del sistema, se analizan los cambios en el número y/o estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema. Todo ello con el objetivo de establecer los tipos de bifurcaciones que pueden presentarse en el modelo.

## 1.- Introducción. Justificación del modelo.

El modelo que presentamos está basado en un sistema dinámico inicialmente estudiado analíticamente y experimentalmente por Gause(1935) como un modelo de competición entre dos especies, a saber:

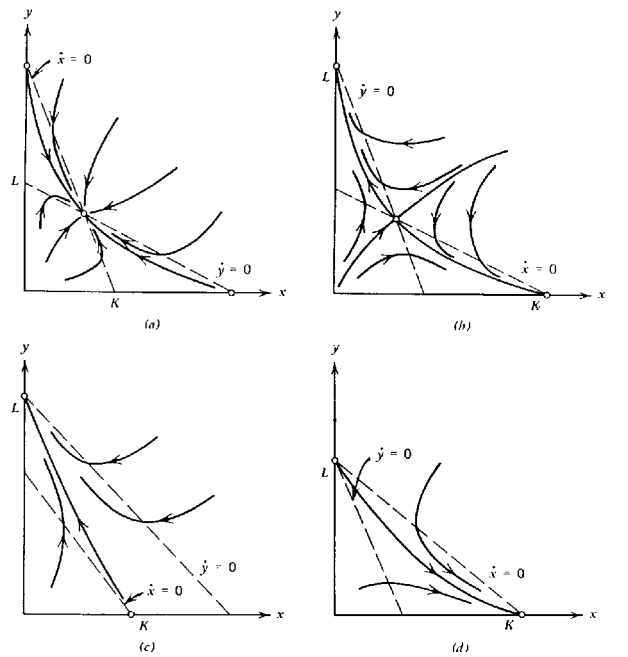
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \hat{a}xy \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left( 1 - \frac{y}{L} \right) - \hat{a}xy \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

donde  $r$ ,  $s$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $\hat{a}$  y  $\hat{a}$  son constantes positivas representando las dos primeras las tasas intrínsecas de crecimiento de cada especie, las dos segundas las poblaciones máximas asintóticas respectivas, y siendo las dos últimas los coeficientes que miden la interacción debida a la competición por la utilización de un mismo recurso. Éste último mantiene a cada población en ausencia de la otra de acuerdo a una ley logística (P. F. Verhulst, 1838).

Un análisis de las isoclinas muestra que pueden darse dos situaciones generales de equilibrio denominadas por Gause de *coexistencia competitiva* (Figura 1.a)<sup>1</sup> y de *exclusión competitiva* (Figuras 1.b, 1.c). En la primera existe un nodo estable  $Q = (x_0, y_0)$  con  $x_0, y_0 > 0$ , y en la segunda el equilibrio lleva irremediablemente a la extinción de una de las especies. En la realidad esto último no sucede así exactamente, pues la especie que pierde la competición puede encontrar varios recursos de los que alimentarse para continuar sobreviviendo aunque sea en pequeño número (así lo demostró Gause en su famoso experimento del escarabajo de la harina, en el cual la introducción de pequeños tubos de cristal permitió a una especie de escarabajos sobrevivir antes que ser eliminada por una segunda especie). Las ecuaciones de Gause son estructuralmente estables excepto en ciertos casos, como por ejemplo en el de la Figura 1.d, donde un pequeño cambio en la posición de las isoclinas puede transformar este gráfico en uno como el de la Figura 1.b.

---

<sup>1</sup> Figuras tomadas de Clark, W. C.(1990), p.194.



**Ilustración 1**

Supongamos ahora que la especie  $x$  es sometida a captura, de modo que la primera ecuación del sistema (1.1) se modifica según:

$$\dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - axy - qEx \quad (1.2)$$

donde  $E$  es el esfuerzo de pesca y  $q$  un coeficiente de capturabilidad. Así mismo se considera el esfuerzo de pesca como una variable dinámica<sup>2</sup> que se rige por la ecuación diferencial:

$$\dot{E} = kE \left( x - \frac{c}{pq} \right) \quad (1.3)$$

siendo  $c$ ,  $p$  y  $k$  parámetros positivos representando respectivamente los costes de pesca, el precio de la captura y un coeficiente de proporcionalidad. El cociente  $\frac{c}{pq}$  es el nivel de stock de beneficio cero para la pesquería.

El modelo a estudiar es, pues, un sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional:

---

<sup>2</sup> Clark W. C.(1990), p.322.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \hat{a}xy - qEx \\ \frac{dy}{dt} = sy(1 - \frac{y}{L}) - \hat{a}xy \\ \frac{dE}{dt} = kE(x - \frac{c}{pq}) \end{cases} \quad (1.4)$$

cuyo estudio resulta más complicado que el sistema bidimensional anterior.

## 2.- Conocimientos previos.

Definamos en primer lugar los conceptos de *punto fijo* y *estabilidad*<sup>3</sup>.

**Definición 1.-** Dado el sistema dinámico

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  abierto, llamamos *puntos fijos* o *puntos de equilibrio* del sistema, a aquéllos puntos  $\bar{\mathbf{x}} \in U$  tales que  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ .

El estudio de los puntos de equilibrio está íntimamente ligado al de la estabilidad de las trayectorias del sistema, pues en algún momento pueden ser atractivos y atraer a las trayectorias con valores iniciales próximos a ellos haciendo que se mantengan cerca unas de otras. Ésta es la idea fundamental del concepto de estabilidad, que se define a continuación.

**Definición 2.-** Una solución  $\ddot{\mathbf{o}}(t)$  del sistema (2.1) es estable ( en el sentido de Liapunov) si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\bar{\mathbf{a}}(\varepsilon) > 0$  tal que para cualquier otra solución  $\ddot{\mathbf{o}}(t)$  del sistema tal que  $|\ddot{\mathbf{o}}(t_0) - \ddot{\mathbf{o}}(t_0)| < \bar{\mathbf{a}}$ , se cumple  $|\ddot{\mathbf{o}}(t) - \ddot{\mathbf{o}}(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$ .

**Definición 3.-** La solución  $\ddot{\mathbf{o}}(t)$  del sistema (2.1) es asintóticamente estable, si es estable y existe un  $\bar{\mathbf{a}} > 0$  tal que si  $|\ddot{\mathbf{o}}(t_0) - \ddot{\mathbf{o}}(t_0)| < \bar{\mathbf{a}}$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\ddot{\mathbf{o}}(t) - \ddot{\mathbf{o}}(t)| = 0$  .

Básicamente, la estabilidad implica que si una órbita es ligeramente perturbada, el movimiento resultante no diverge mucho del que se obtiene sin perturbar la órbita. Si la órbita es asintóticamente estable, ello significa que el efecto de la perturbación es progresivamente eliminado conforme pasa el tiempo.

---

<sup>3</sup>Wiggins, S.(1990), p.6.

La estabilidad <sup>4</sup> de las soluciones de un sistema dinámico se estudia mediante los métodos debidos a Liapunov, uno de ellos basado en el estudio de la estabilidad de soluciones del sistema lineal asociado a (2.1) y otro, conocido como el método directo de Liapunov <sup>5</sup>, que garantiza la estabilidad de soluciones bajo la hipótesis de existencia de cierta función cuya derivada puede usarse para medir “una distancia” entre una solución y la solución de equilibrio, calibrando si esta distancia crece o decrece y, consecuentemente, determinando si hay o no estabilidad. Este segundo método prueba fácilmente la estabilidad una vez conocida la llamada función de Liapunov, pero precisamente la dificultad del problema reside en la búsqueda de dicha función pues, salvo para algunos tipos concretos de sistemas dinámicos, no existe un método estándar para construir funciones de Liapunov.

En la práctica se recurre siempre a la linealización del sistema, que se logra de la siguiente manera.

Si  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio del sistema (2.1), se considera el cambio de variable  $y = x - \bar{x}$ , con lo cual  $\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x})$ .

Desarrollando  $f$  en serie de Taylor en un entorno de  $\bar{x}$ , y despreciando los términos no lineales, obtenemos el sistema lineal  $\dot{y} = Ay$  donde  $A$  es la matriz jacobiana de  $f$  en  $\bar{x}$ .

Por el teorema de Hartman - Grobman <sup>6</sup>, si  $A$  no tiene autovalores iguales a cero o imaginarios puros (sistemas hiperbólicos), existe entonces un homeomorfismo <sup>7</sup>  $h$  definido en algún entorno de  $\bar{x}$  que localmente transforma trayectorias del flujo no lineal en trayectorias del flujo lineal. Además este homeomorfismo preserva el sentido de las trayectorias y puede elegirse también de forma que preserve la parametrización en el tiempo.

En definitiva, el comportamiento local de un sistema no lineal es cualitativamente similar al del sistema linealizado. En particular, la estabilidad (inestabilidad) asintótica del sistema lineal presupone la estabilidad (inestabilidad) asintótica del sistema no lineal.

Por otra parte, sabemos que la estructura orbital de un sistema lineal depende de los autovalores de la matriz del sistema, y de cómo sean éstos depende en última instancia la estabilidad de las soluciones del sistema no lineal. Si todos los autovalores de la matriz  $A$  tienen parte real negativa, la solución de equilibrio del sistema (2.1) es asintóticamente estable.

**Definición 4.-** Se dice que en un sistema dinámico ocurre una **bifurcación** si el retrato de fases cambia su estructura topológica cuando un parámetro varía.

Los cambios a que se refiere la definición afectan al número y/o estabilidad de los puntos fijos u órbitas cerradas. En sistemas bidimensionales pueden presentarse varios tipos de bifurcaciones, que se generalizan para dimensiones mayores, a saber:

---

<sup>4</sup> Una referencia clásica para el estudio de la estabilidad es Hahn (1967). Resultados más recientes sobre estabilidad y sus aplicaciones a la Economía pueden encontrarse en Brock (1989), capítulos 4, 7 y 9.

<sup>5</sup> Ver LaSalle y Lefschetz (1961) ó Rouché et al (1977) para un tratamiento más exhaustivo.

<sup>6</sup> Ver Hartman (1964) ó Guckenheimer y Holmes (1983) para la prueba.

<sup>7</sup> Aplicación continua con inversa continua.

a) **Bifurcación nodo- silla:** Es el mecanismo básico de creación- destrucción de puntos fijos. Conforme un parámetro del sistema crece o decrece, los puntos fijos del mismo se aproximan unos a otros, colisionan y desaparecen. Después de ello siguen incluso ejerciendo su influencia sobre el flujo del sistema atrayendo las trayectorias hacia una región “fantasma”.

b) **Bifurcación transcítica:** A medida que un parámetro varía, los puntos fijos se aproximan y colisionan, pero no desaparecen, sino que intercambian su estabilidad.

c) **Bifurcación “ de la horca”:** En este tipo de bifurcación los puntos fijos tienden a aparecer (caso supercrítico) y desaparecer (caso subcrítico) en pares simétricos.

d) **Bifurcación de Hopf:** En este tipo de bifurcación se produce una pérdida de estabilidad debido a que los autovalores complejos pasan de tener parte real negativa, a tener parte real positiva, atravesando por tanto el eje imaginario. Se distinguen al igual que antes dos tipos: Supercrítica y Subcrítica. En el primero un punto espiral estable cambia a espiral inestable rodeado por un pequeño ciclo límite atractivo. El segundo caso es más drástico, pues después del valor de bifurcación las trayectorias deben saltar a un atractor distante que puede ser un punto fijo, un ciclo límite, infinito ó en dimensiones  $n \geq 3$  un atractor caótico (es, por ejemplo, el caso de Lorenz).

### 3.- Obtención de puntos fijos.

Los puntos fijos del sistema (2.1) son las soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$ , es decir (para nuestro sistema (1.4):

$$\begin{cases} rx(1 - \frac{x}{K}) - \hat{a}xy - qEx = 0 \\ sy(1 - \frac{y}{L}) - \hat{a}xy = 0 \\ kE(x - \frac{c}{pq}) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

El sistema tiene 6 puntos fijos que son:

$$P1 = (0,0,0), \quad P2 = (K,0,0), \quad P3 = (0,L,0), \quad P4 = \left( \frac{Ks(-r+\hat{a}L)}{-rs+\hat{a}KL\hat{a}}, \frac{-Lr(s-\hat{a}K)}{-rs+\hat{a}KL\hat{a}}, 0 \right),$$

$$P5 = \left( \frac{c}{pq}, 0, \frac{r(qKp-c)}{q^2Kp} \right) \quad P6 = \left( \frac{c}{pq}, -L \frac{(-psq+\hat{a}c)}{spq}, -\frac{-srKqp+rsc+\hat{a}LKsqp-\hat{a}LK\hat{a}c}{q^2Ksp} \right)$$

La matriz jacobiana de  $f$  es:

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x - \hat{a}y - qE & -\hat{a}x & -qx \\ -\hat{a}y & s - \frac{2s}{L}y - bx & 0 \\ kE & 0 & k\left(x - \frac{c}{pq}\right) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

#### 4.- Algunos parámetros estimados.

Vamos a considerar un ejemplo práctico real de una pesquería que explota la especie  $x$ , por ejemplo la anchova o melva, la cual compite por un mismo recurso con la especie  $y$ , sardina o boquerón.

Tomando como referencia las estimaciones realizadas para estas dos especies en el documento “Análisis Económico de la Pesca de Cerco en la Región Suratlántica Española”. Papeles de Economía Española, 71,231- 251, del autor García del Hoyo, J.J.(1997), asignamos los siguientes valores para algunos de los parámetros:

$$\begin{array}{lll} K = 10000 \text{ Toneladas} & L = 1000 \text{ Toneladas} & c = 15000 \text{ ptas/día} \\ p = 80000 \text{ ptas/Tonelada} & r = 0.75 & s = 0.35 \\ k = 0.05 & & \end{array}$$

Nuestro estudio pretende analizar la dinámica del sistema en función de los parámetros  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}$  y  $q$ .

#### 5.- Análisis de la estabilidad de los puntos P1, P2, P3 y P4.

El análisis de la estabilidad de los puntos P2, P3 y P4 resulta sencillo si tenemos en cuenta que para dichos puntos el esfuerzo de pesca es 0, con lo cual la dinámica del sistema es equivalente a la del sistema bidimensional (1.1), pudiéndose alcanzar los equilibrios P2, P3 ó P4 según se mostraba en la Figura 1.

La dinámica en torno al punto P1 = (0,0,0) no es relevante, si bien puede comprobarse que este equilibrio es un punto de silla sin más que observar que los autovalores asociados son:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 &= r > 0 \\ \ddot{e}_2 &= s > 0 \\ \ddot{e}_3 &= \frac{-kc}{pq} < 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que el origen es un punto inestable en dos direcciones y estable en la otra.

## 6.- Análisis de la estabilidad del punto P5.

Particularizamos la matriz Jacobiana (3.2) del sistema (1.4) en el punto P5 y calculamos sus autovalores. Obtenemos:

$$\begin{aligned}\ddot{e}_1 &= \frac{-\hat{a}c}{pq} + s \\ \ddot{e}_2 &= -\frac{cr + \sqrt{cr(4ckK - 4kK^2pq + cr)}}{2Kpq} \\ \ddot{e}_3 &= \frac{-cr + \sqrt{cr(4ckK - 4kK^2pq + cr)}}{2Kpq}\end{aligned}$$

Nos interesa estudiar en qué casos estos autovalores van a ser de tipo estable, es decir, reales negativos o complejos con parte real negativa. En esta situación el punto P5 será atractivo.

Se puede comprobar que  $\ddot{e}_1 < 0 \Leftrightarrow q < \frac{\hat{a}c}{sp} = q_3$ .

Así mismo, si  $q < \frac{4ckK + cr}{4kK^2p} = q_2 \Rightarrow \ddot{e}_2, \ddot{e}_3 \in \mathbb{R}$  y  $\ddot{e}_2 < 0$ .

En ese caso,  $\ddot{e}_3 < 0 \Leftrightarrow q > \frac{c}{Kp} = q_1$ . Nótese que  $q_1 < q_2$  siempre<sup>8</sup>. Así, obtenemos la siguiente clasificación para los autovalores asociados al punto P5:

	$q < q_1$	$q_1 < q \leq q_2$	$q > q_2$
$q > q_3$	$\ddot{e}_1 > 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 > 0$	$\ddot{e}_1 > 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 < 0$	$\ddot{e}_1 > 0, \text{Re}(\ddot{e}_2) < 0, \text{Re}(\ddot{e}_3) < 0$

---

<sup>8</sup> Para los valores asignados a los parámetros  $r, s, K, L, c, p$  y  $k$ , los valores de  $q_1$  y  $q_2$  son:  $q_1 = 1.875 \cdot 10^{-5}$  y  $q_2 = 1.875703125 \cdot 10^{-5}$ . El valor de  $q_3$  depende de  $\hat{a}$ .



$q < q_3$	$\ddot{e}_1 < 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 > 0$	$\ddot{e}_1 < 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 < 0$ <b>P5 es un nodo estable</b>	$\ddot{e}_1 < 0, \text{Re}(\ddot{e}_2) < 0, \text{Re}(\ddot{e}_3) < 0$ <b>P5 es un foco estable</b>
-----------	--	---	---

**Tabla 1: Estabilidad del punto P5**

**Nota:** En el caso en que fuera  $q = q_1$ , el autovalor  $\ddot{e}_3$  sería nulo y la linealización no determinaría el carácter del punto P5. Lo mismo ocurriría para  $\ddot{e}_1$  si  $q = q_3$ . En ambos casos habría que recurrir al estudio del sistema restringido a la variedad centro.

Si  $q = q_2$ ,  $\ddot{e}_2 = \ddot{e}_3$  son reales y negativos.

En la Figura 2 se ha representado una trayectoria del sistema (1.4) que comienza en un punto próximo a P5 para los valores  $\hat{a} = 9.75 \cdot 10^{-4}$ ,  $\hat{a} = 1.62 \cdot 10^{-4}$  y  $q = 1.8756 \cdot 10^{-5} \in (q_1, q_2)$ , es decir para un caso en el que el punto P5 = (9996.80, 0, 12.7918) (para los valores anteriores) es un nodo estable. La trayectoria tiende rápidamente hacia P5. Nótese cómo este punto está próximo a P2. Veremos más adelante que ambos puntos coinciden en un valor de bifurcación para  $q$  muy próximo al asignado para hacer la gráfica.

En la Figura 3 se muestra lo mismo para el valor  $q = 7 \cdot 10^{-5}$ , para el cual el punto P5 es un punto espiral estable en dos direcciones y un nodo estable en una. En este caso la trayectoria se aproxima en espiral hacia P5 = (2678.57, 0, 7844.38).

## 7.- Análisis de la estabilidad del punto P6.

El estudio cualitativo de la estabilidad del punto P6 en función de los parámetros  $q$ ,  $\hat{a}$ , y  $\hat{a}$ , resulta difícil de abordar en la forma anterior debido a la manera en que se presentan las expresiones de los autovalores como funciones de dichos parámetros. Es por ello que hemos recurrido a un estudio numérico de algunos casos particulares para este punto. Basándonos en un trabajo anterior<sup>9</sup> en el que, fijado el valor de  $q = 0.00009$  (estimado para la especie x), obteníamos algunos valores de  $\hat{a}$ , y  $\hat{a}$  para los cuales P6 era estable, hemos considerado ahora fijos  $\hat{a} = 9.75 \cdot 10^{-4}$ , y  $\hat{a} = 1.62 \cdot 10^{-4}$  y hemos realizado un análisis numérico sobre valores del parámetro  $q$  desde 0 hasta 1. Las conclusiones obtenidas se resumen en la Tabla 2. El valor  $q_3$  es el mismo que figura en la Tabla 1,  $q_4 = 0.0002980886049$  y  $q_5 = 0.00032$ .

	$0 < q < q_3$	$q_3 < q < q_4$	$q_4 < q < q_5$	$q_5 < q < 1$
Signo autovalores	$\text{Re}(\ddot{e}_1) = \text{Re}(\ddot{e}_2) < 0, \ddot{e}_3 > 0$	$\text{Re}(\ddot{e}_1) = \text{Re}(\ddot{e}_2) < 0, \ddot{e}_3 < 0$	$\text{Re}(\ddot{e}_1) = \text{Re}(\ddot{e}_2) > 0, \ddot{e}_3 > 0$	$\ddot{e}_1 < 0 \ddot{e}_2 < 0 \ddot{e}_3 > 0$

<sup>9</sup> Vílchez L., M.L., Velasco M., F., García Del Hoyo J.J., “Estabilidad de los puntos fijos hiperbólicos en un modelo de competición interespecies”, XII Reunión Asepelt España.

Naturaleza del punto P6	Punto de silla	Espiral estable	Espiral inestable	Nodo inestable
-------------------------	----------------	-----------------	-------------------	----------------

**Tabla 2: Estabilidad del punto P6**

En la Figura 4 se ha representado una trayectoria que comienza en un punto inicial próximo a P6 para el valor  $q = 9 \cdot 10^{-5} \in (q_3, q_4)$ , para el cual P6 es un punto espiral estable en dos direcciones y nodo estable en una. La trayectoria se aproxima en espiral al punto  $P6 = (2083.33, 35.71, 6210.31)$ .

## 8.- Dos bifurcaciones transcricas.

A la vista de las conclusiones anteriores resumidas en las Tablas 1 y 2, hemos observado que existen dos bifurcaciones transcricas entre los punto P2 y P5, y los puntos P5 y P6 respectivamente.

### A) Bifurcación transcrica entre los puntos P2 y P5

Si tenemos en cuenta que los autovalores asociados al punto  $P2 = (K, 0, 0)$  son:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 &= -r < 0 \\ \ddot{e}_2 &= s - \hat{a}K \\ \ddot{e}_3 &= k \left( K - \frac{c}{pq} \right) \end{aligned}$$

se puede comprobar que P2 es un nodo estable si  $\hat{a} > \frac{s}{K}$  y  $q < \frac{c}{pK} = q_1$ , y un punto de silla en

caso contrario. En el caso  $\hat{a} = \frac{s}{K}$  ó  $q = q_1$ , alguno de los autovalores  $\ddot{e}_1$  ó  $\ddot{e}_2$  sería nulo. La

linealización, por tanto, no decidiría la naturaleza del punto crítico y habría que recurrir al estudio del sistema restringido a la variedad centro.

Comparando estos resultados con los obtenidos para P5 que se recogen en la Tabla 1, encontramos que para  $\hat{a} > \frac{s}{K}$  y  $0 < q < q_1$  el punto fijo P2 es un nodo estable y P5 un punto de silla. Para  $q_1 < q < q_2$  la situación es al contrario. Además para  $q = q_1$  ambos puntos coinciden,  $P2 = P5 = (K, 0, 0)$ .

Existe, pues, una bifurcación transcrica entre estos dos puntos: para valores de  $q < q_1$  existen dos puntos fijos nodo y silla; para  $q = q_1$  colisionan e intercambian su estabilidad pasando a ser para  $q > q_1$  silla y nodo respectivamente. Podemos ver resumidos estos resultados en la siguiente tabla:

Si $\hat{a} > \frac{s}{K}$	$q < q_1$	$q_1 < q < \min(q_2, q_3)$
----------------------------	-----------	----------------------------

Signo de los autovalores y naturaleza del punto P2	$\ddot{e}_1 < 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 < 0$ <b>Nodo estable</b>	$\ddot{e}_1 < 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 > 0$ <b>Punto de Silla</b>
Signo de los autovalores y naturaleza del punto P5	$\ddot{e}_1 < 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 > 0$ <b>Punto de Silla</b>	$\ddot{e}_1 < 0, \ddot{e}_2 < 0, \ddot{e}_3 < 0$ <b>Nodo estable</b>

**Tabla 3: Bifurcación transcítica entre los puntos P2 y P5**

Nótese que  $q_1 < q_2$  siempre, y en el caso que nos ocupa ( $\hat{a} > \frac{S}{K}$ ) puede comprobarse que

$$q_1 < q_3.$$

### B) Bifurcación transcítica entre los puntos P5 y P6

A la vista de los resultados recogidos en las Tablas 1 y 2, se deduce que para los valores  $\hat{a} = 9.75 \cdot 10^{-4}$  y  $\hat{a} = 1.62 \cdot 10^{-4}$  existe una bifurcación transcítica también entre los puntos P5 y P6 para el valor de  $q = q_3 = \frac{\hat{a}c}{sp} = 8.7178 \cdot 10^{-5}$ , ya que para valores de  $q$  tales que  $q_2 < q < q_3$  el primer punto es un punto de silla y el segundo es un foco estable en dos direcciones y un nodo estable en la tercera. Puede comprobarse que para  $q = q_3$  ambos puntos colisionan y se produce un intercambio de estabilidad para  $q_3 < q < q_4$ . Lo resumimos en el siguiente cuadro:

	$q_2 < q < q_3$	$q_3 < q < q_4$
Signo de los autovalores y naturaleza de P5	$\text{Re}(\ddot{e}_1) = \text{Re}(\ddot{e}_2) < 0, \ddot{e}_3 < 0$ <b>Foco estable es dos direcciones, nodo estable en una</b>	$\ddot{e}_1 > 0, \text{Re}(\ddot{e}_2) = \text{Re}(\ddot{e}_3) < 0$ <b>Punto de silla</b>
Signo de los autovalores y naturaleza de P6	$\ddot{e}_1 > 0, \text{Re}(\ddot{e}_2) = \text{Re}(\ddot{e}_3) < 0$ <b>Punto de silla</b>	$\text{Re}(\ddot{e}_1) = \text{Re}(\ddot{e}_2) < 0, \ddot{e}_3 < 0$ <b>Foco estable es dos direcciones, nodo estable en una</b>

**Tabla 4: Bifurcación transcítica entre los puntos P5 y P6**

En la Figura 5 se representan dos trayectorias que parten de puntos próximos a P5 y P6 respectivamente para un valor de  $q$  posterior al valor de bifurcación  $q_3$ . Obsérvese cómo la trayectoria que comienza cerca de P5 (parte superior izquierda del gráfico), se separa de éste (P5 tiene una dirección de inestabilidad) y es finalmente atraída (Figura 6) por el punto P6 (espiral estable en dos direcciones y nodo estable en una).

## 9.- Una bifurcación de Hopf.

Si observamos los resultados obtenidos para P6 en la Tabla 2, vemos como para  $q < q_4$

dicho punto de equilibrio es una espiral estable en dos direcciones y un nodo estable en una, ya que los autovalores asociados son complejos conjugados con parte real negativa y un autovalor real negativo. Sin embargo para  $q > q_4$  la situación cambia, pasando P6 a ser una espiral inestable, pues los autovalores complejos “atravesan el eje imaginario y pasan a tener parte real positiva. Es el primer indicio de existencia de una bifurcación tipo Hopf. Para confirmar esta posibilidad deberíamos encontrar algún ciclo límite que rodeara al punto de equilibrio. La integración numérica del sistema para el valor  $q = q_4 = 0.0002980886049$  nos muestra que efectivamente, cuando el punto se vuelve inestable, aparece un pequeño ciclo límite (de forma elíptica) atractivo rodeándolo. Se trata por tanto de una bifurcación de Hopf supercrítica.

En la Figura 7 se muestra este ciclo límite. En la Figura 8 se ha representado una trayectoria que comienza en un punto muy próximo a  $P_6 = (629.008, 708.859, 39.205)$  (concretamente en el punto  $P_0 = (629, 708.8, 39.2)$ ). Como puede observarse, es repelida en forma espiral hacia el ciclo límite. La Figura 9 muestra otra trayectoria que comienza en un punto exterior pero próximo al ciclo límite (en el punto  $P_0 = (630, 709, 40)$ ) y es inmediatamente atraída por éste.

Hay que decir que todas las propiedades anteriores se observan a nivel local, es decir en las proximidades del ciclo límite y del punto de equilibrio. En cuanto nos alejamos un poco, la situación puede ser completamente distinta, como se pone de manifiesto en la Figura 10 en la que se ha representado una trayectoria que comienza en el punto  $P_0 = (735, 715, 45)$  que cae fuera de la cuenca de atracción del ciclo límite y es atraída por otro de los puntos de equilibrio del sistema, concretamente el punto  $P_2 = (0, 1000, 0)$ .

Hemos calculado también el período T del ciclo límite hallando la parte imaginaria de los autovalores complejos de la matriz Jacobiana asociada al punto P6 para el valor de bifurcación  $q_4$  y aplicando<sup>10</sup> que la frecuencia  $\omega$  del ciclo límite  $\omega = \text{Im}(\tilde{\epsilon})$ . De aquí, al ser  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  hemos obtenido  $T = 11'306$ .

Hay que resaltar también que al tratarse de un análisis numérico y no poder operar con total exactitud, existirá una pequeña banda de valores de q en un entorno de  $q_4$  para los cuales existen también ciclos límites. Esto se pone de manifiesto en la Figura 11 donde hemos representado varios de estos ciclos límite para valores de q en un entorno de centro  $q_4$  y radio menor que  $10^{-7}$ .

## 10.- Observaciones finales.

El estudio realizado ha tratado de mostrar algunas posibilidades dinámicas que presenta el sistema (1.4) en función de los valores asignados a los parámetros. Queremos resaltar las

---

<sup>10</sup> Strogatz (1994), p 51.

siguientes observaciones:

1ª) Somos conscientes de que algunos parámetros, como por ejemplo el precio de la captura o los costes de pesca, están sujetos a continuas variaciones y/o restricciones impuestas por condicionamientos de tipo económico. No es muy real un estudio que fija un precio de captura constante en el tiempo. Abordar un sistema con gran número de parámetros desde un punto de vista cualitativo resulta complicado y es necesario recurrir a las simulaciones numéricas, debiendo entonces asignar unos valores a dichos parámetros. Nuestro próximo objetivo en relación con este tema es fijar para cada parámetro unos intervalos de variación y mostrar en ese rango todas las posibilidades dinámicas del sistema.

2ª) Cuando tras el estudio teórico del sistema se pretende dar una interpretación práctica del mismo, surge el problema de si los resultados se adaptan a la realidad o no. En nuestro caso, tras analizar la bifurcación transcítica entre P2 y P5, observamos que para el punto P5, el caso  $q < q_1$  nos lleva a un punto de equilibrio

$$P5 = \left( \frac{c}{pq}, 0, \frac{r(qKp - c)}{q^2Kp} \right)$$

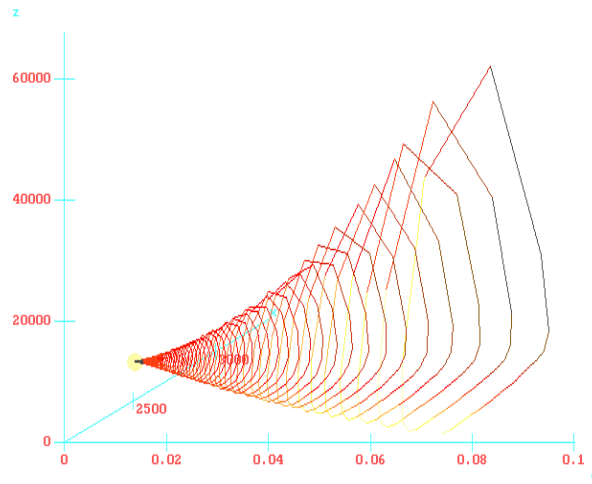
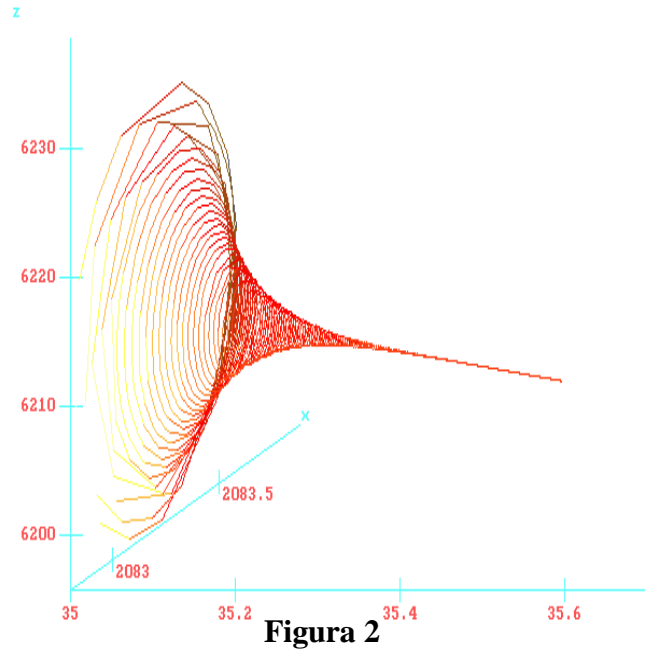
cuya tercera componente (esfuerzo de pesca) sería negativa, lo que no tendría sentido en un caso real. Lo mismo sucede en la bifurcación entre P5 y P6 cuando  $q < q_3$ . Tendríamos un punto de equilibrio

$$P6 = \left( \frac{c}{pq}, -L \frac{(-psq + \hat{a}c)}{spq}, -\frac{-srKqp + rsc + \hat{a}LKsqp - \hat{a}LK\hat{a}c}{q^2Ksp} \right)$$

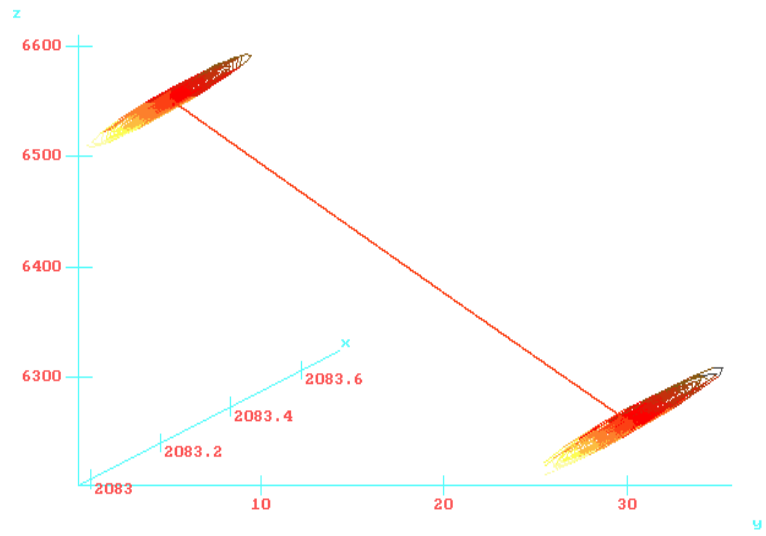
cuya segunda coordenada (que representa el stock de población y) sería negativa. Volvemos a insistir en que se trata de un estudio teórico, lo que nos lleva a pensar que en otros modelos con otros valores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}$  (por ejemplo con distinto signo como en un problema presa- depredador), se lleguen a otras conclusiones distintas.

3ª) Este es un estudio matemático de un modelo biológico. El siguiente paso sería aplicarlo (mediante las técnicas de la Teoría del Control Óptimo) a un modelo de gestión óptima del recurso construyendo así lo que sería un modelo bioeconómico, Trataríamos entonces de estudiar las trayectorias de explotación óptimas.

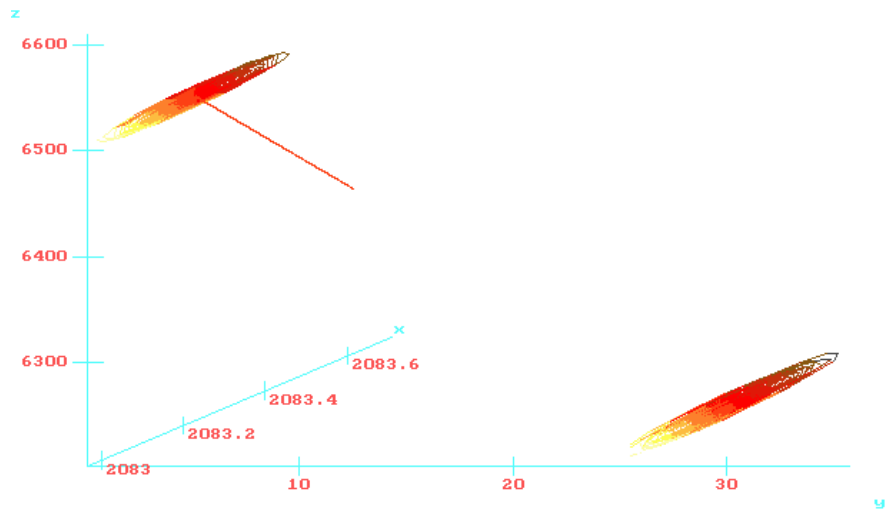
## 11.- Gráficos.



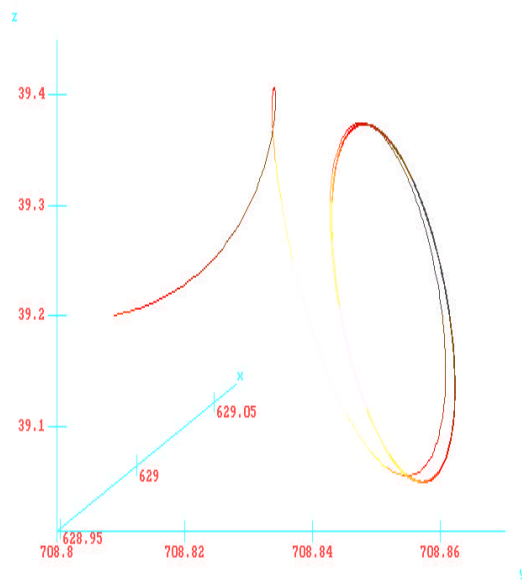
**Figura 3**



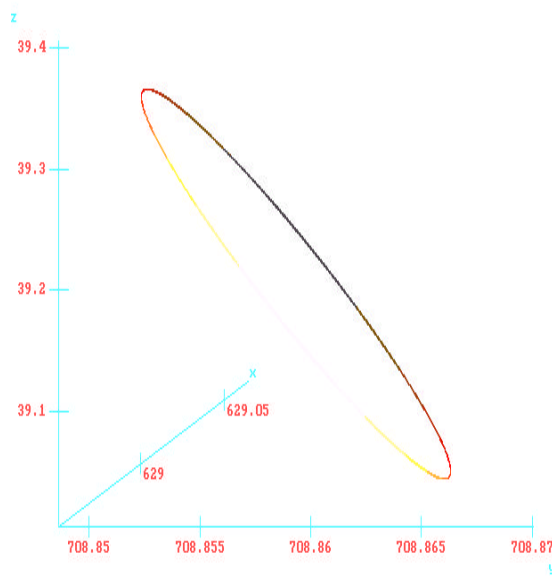
**Figura 6**



**Figura 5**

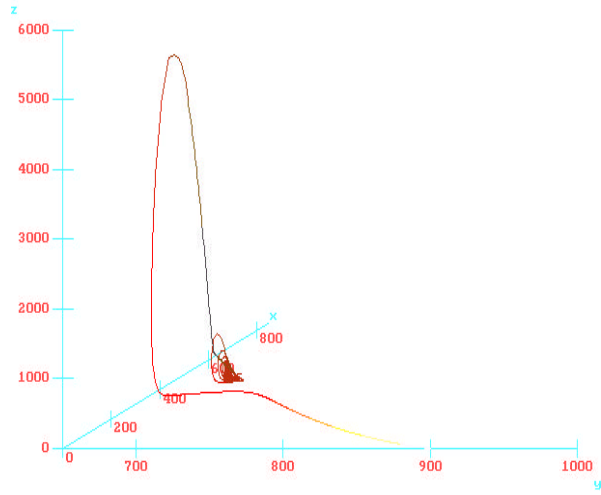


**Ilustración 8**

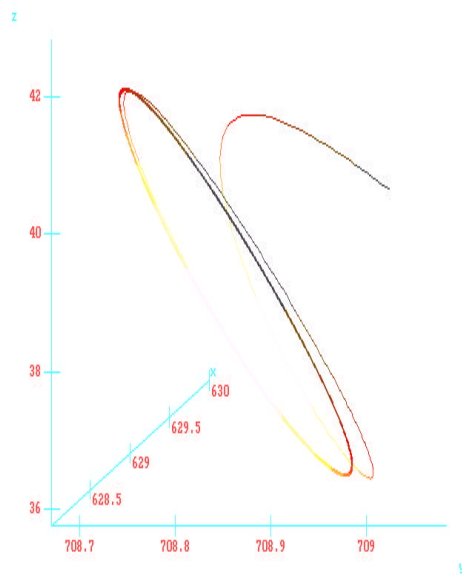


**Figura 7**

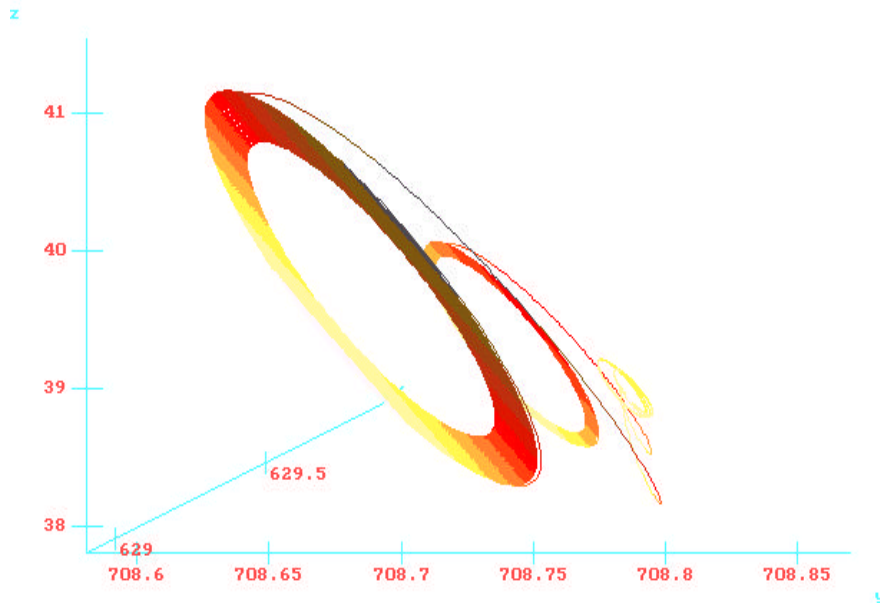




**Ilustración 10**



**Ilustración 9**



**Ilustración 11**

## **Bibliografía**

Brock, W.A. (1989): “ *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamics Economics*”. North Holland.

Clark, W.C. (1990): “ *Mathematical Bioeconomics*”. Wiley & Sons.

Gause, G.F. (1935): “ *La Théorie mathématique de la lutte pour la vie*”. Paris: Herman.

Guckenheimer, J./ Holmes, P. (1983): “ *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*”. Springer Verlag.

Hahn, W. (1967): “ *Stability of Motion*”. Springer Verlag.

Hartman, P.(1960): “A lemma in the theory of structural stability of differential equations”. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 610- 620.

La Salle, J.P. and Lefschetz, S.(1961): “ *Stability by Liapunov’s Direct Method*”. Academic Press: New York.

Rouché, N. P. Habets, M. Laloy (1977): “ *Stability Theory by Liapunov’s Direct Method*”. Springer Verlag.

Strogatz, S.H. (1994): “*Nonlinear Dynamics and Chaos*”. Addison- Wesley.

Verhulst, P.F.(1938): “ *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*”. Correspondance Mathématique et Physique **10**, 113- 121.

Wiggins, S.(1990): “ *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*”, p. 6. Springer Verlag.

Zeeman, E. C. (1974): “ *Levels of structure in catastrophe theory*”. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vancouver. Vol. 2, pp. 533- 546.