LOCALIZACION COMPETITIVA DE UN CENTRO DE SERVICIO CON DISTANCIA RECTANGULAR

Velasco M.F.
Nadal M.P.
Mirman C.M.
Begines B.F.
Dpto. Economía Aplicada
Universidad de Sevilla

Abstract: Presentamos un trabajo en el que encontramos un clique con mayor demanda en un problema de localización competitiva, empleando la distancia rectangular en el plano.

1 INTRODUCCIÓN

En muchos casos una firma desea recibir sobre un conjunto de lugares para establecer centros de servicio de producción, de almacenamiento, de ventas o de servicios públicos, tales como parques de bomberos, centros sanitarios de primeros auxilios, etc. De forma general un problema de este tipo se suele plantear como un problema de minimización de una función objetivo que es la suma ponderada de distancias del punto buscado a los centros de demanda. Este problema que originalmente planteó Fermat (ver Khun (1975) y que más tarde Weber (1909) en su "Uber den Standort der Industrien" lo aplicó a la localización de una industria. Se asume que los consumidores van al centro de servicio más cercano a su lugar de residencia entre varios centros que estén a su alcance. Ahora bien, éstos no se podrán poner en los lugares deseados por las firmas por diversas cuestiones como puede ser el que ese lugar ya esté ocupado por otra firma; es por ello por lo que en este tipo de problemas aparecen restricciones, que de forma usual se consideran que están formados por un conjunto de polígonos convexos. A este respecto podemos citar el trabajo de Hurter -Schaefer- Wendell (1975) en el que estos autores clasifican los polígonos, con lo que pueden hacer el estudio sobre un número muy reducido de tales polígonos.

En este trabajo tratamos con localización competitiva. Se considera a Hotelling (1929) el que da origen a este tipo de problemas. Slater (1975) vuelve a considerar este problema y Hakimi (1983) generaliza el problema con la definición de (r/X_p) medianoide. Nosotros planteamos el problema de localizar un centro de servicio que compita con otro ya establecido que suponemos se encuentra en una ciudad y utilizamos por tanto la distancia rectangular, es decir según la notación de Hakimi (1983) planteamos un $(1/X_1)$ medianoide. Encontramos los cliques maximales que se pueden obtener, que probamos que son 4, con lo que nuestro problema se restringe de forma considerable, ya que los cuatro cliques se encuentran de forma muy sencilla en este caso, y para cualquiera que sea el número de puntos de demanda. El problema se complica de forma considerable para el caso de un problema (r/X_p) medianoide tal y como prueba Muñoz (1.988) encontrando un algoritmo de $o(n^5)$.

2 Conceptos y definiciones

Definición 2.1 : *Un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto de vértices y E es un conjunto de lados , representado cada uno de ellos por el par de vértices finales (v, w).*

Definición 2.2 : *Un conjunto de vértices independientes (también llamado conjunto internamente estable) es un conjunto de vértices de G , tal que cualesquiera que sean dos vértices del conjunto , no son adyacentes , es decir , ninguna pareja de vértices están unidos por un lado .*

De aquí que un conjunto $S \subset X$ que satisface $S \bigcup E(S) = \emptyset$ es un conjunto de vértices independientes.

Definición 2.3 : *Un conjunto S es maximal independiente si satisface las dos propiedades siguientes:*

1. $S \bigcap E(S) = \emptyset$
2. $H \bigcap E(H) \neq \emptyset \quad \forall H \supset S$

Sea $\mathcal{D}$ la familia de los conjuntos internamente estables, llamamos número de independencia del grafo G a

$$\alpha(G) = \max_{s \in \mathcal{D}} |S|$$

y al conjunto S^* que nos da este número se le denomina conjunto independiente máximo.

Tsukiyama ... (1.977) encuentra un algoritmo para generar todos los conjuntos independientes maximales.

Nosotros utilizaremos el concepto de clique que es una definición opuesta al de conjunto independiente maximal.

Definición 2.4 : *Un subgrafo completo maximal(clique) de G es un subgrafo formado por un conjunto S de vértices el cual es completo y que es maximal en el sentido de que cualquier otro subgrafo de G , basado en un conjunto $H \supset S$ de vértices no es completo.*

Hemos de recordar que un grafo es completo si para cualquier x e $y \in X$, se da que ó $(x,y) \in V$ ó $(y,x) \in V$ ó ambos.

En esta definición cada par de vértices de un clique son adyacentes , luego el conjunto independiente maximal de un grafo G corresponde a un clique de un grafo G^c y viceversa , donde G^c es el grafo complementario de G.

Definición 2.5 : *LLamamos número de un clique (también conocido como la densidad) al número de vértices de un clique.*

Para más detalles recomendamos ver el libro de Christofides (1.986).

El encontrar el conjunto de cliques se puede resolver tratando con los conjuntos independientes maximales. No obstante Carraghan-Pardalos (1.990) encuentra un algoritmo muy sencillo para resolver el problema del clique máximo.

Nosotros adecuaremos las definiciones anteriores a las características de nuestro problema en la sección siguiente.

3 Planteamiento del problema

Usaremos las siguientes notaciones:

- $P_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2 \quad 1 \leq i \leq n$ es el conjunto de puntos de demanda.
- $\omega_i \in \mathbb{R} \quad , \omega_i > 0 \quad 1 \leq i \leq n$ es el conjunto de los pesos asociados respectivamente a cada punto de demanda.
- $Q = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ el centro de servicio con el cual debemos de competir.
- $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ el centro de servicios que deseamos encontrar.

Siguiendo a Muñoz asumimos que:

1. $F = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ el conjunto de los k centros de servicios existentes.
2. El nivel de demanda de cada consumidor es fijo.
3. Los consumidores siempre usan el centro de servicio más próximo.
4. Los consumidores usan la distancia rectangular.

Nuestro problema podemos entonces plantearlo de la forma siguiente:

$$\max_{P \in \mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j(P) \tag{1}$$

$$donde \quad z_j(P) = \begin{cases} 1 & si \quad d(P, P_j) < r_j = \min_{Q_j \in F} d(Q_j, P_j) \\ 0 & en \quad caso\ contrario \end{cases} \tag{2}$$

Como $d(P, P_j) = |x - a_j| + |y - b_j|$, la bola $d(P, P_j) = r_j$ es un rombo T_j centrado en el punto P_j y radio r_j , entonces si colocamos nuestro nuevo centro de servicio en el punto P , éste atrae al punto de demanda P_j y nuestra pretensión es atraer a la mayor cantidad posible de dichos puntos de forma que la suma de los pesos asociados a estos puntos sea máxima.

Definición 3.1 : *El conjunto C de puntos de demanda es un clique si existe al menos un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $d(P, P_j) < r_j \quad \forall P_i \in C$ y el conjunto es maximal.*

Si C es un clique, con él viene asociada una región rectangular

$$S_C = \bigcap_{P_j \in C} T_j$$

en la que si $P \in S_C \Rightarrow d(P, P_j) < r_j \quad \forall P_j \in C$, luego cada clique tiene asociado un rectángulo. Nosotros hemos de encontrar , no la región rectangular mayor asociada a un clique , sino aquella región rectangular asociada a un clique que sea de peso máximo.

Muñoz prueba los siguientes resultados cuando hay k centros de servicios.

Proposición 3.1 : *Dos puntos de demanda P_i y P_j pertenecen al mismo clique si y sólo si $d(P_i, P_j) < r_i + r_j$. A)*

Definición 3.2 : *Se define el grafo $G(V, E)$ donde $V = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ y $E = \{(P_i, P_j)/\ d(P_i, P_j) < r_i + r_j\}$*

Muñoz prueba que sólo es necesario encontrar el clique de peso máximo del grafo G para encontrar la solución óptima , estando acotado el número de cliques según el teorema siguiente.

Teorema 3.1 : *El número de cliques de G esta acotado por* $\binom{n}{2}$

Supongamos que tenemos un único centro de servicio Q y que deseamos introducir otro centro de forma que compita con aquél. Nosotros obtenemos entonces los siguientes resultados.

Sean $\mathcal{P}_n = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}, \mathcal{D}_h = \{D_1, D_2, \ldots, D_h\}$ la clase de todos los cliques del conjunto $\mathcal{P}_n$, y $h_n = |\mathcal{D}_h|$

Proposición 3.2 : *Si* $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1} \quad \Rightarrow \quad h_n \leq h_{n+1}$

<u>demostración</u> Supongamos que $\mathcal{P}_{n+1} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ y sea $D_j \in \mathcal{D}_n \Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}^2$ tal que $d(P, P_i) < r_i \quad \forall P_i \in D_j \quad \Rightarrow$ es un clique formado por puntos de $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1} \quad \Rightarrow \quad D_j$ es un clique de puntos de $\mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow D_j \in \mathcal{D}_{n+1} \quad \Rightarrow \quad h_n \leq h_{n+1}$

Proposición 3.3 : *Si P_i y P_j pertenecen a cuadrantes no adyacentes , entonces no pertenecen al mismo clique.*

<u>demostración</u> Por la proposición (3.1) sabemos que P_i y P_j pertenecen al mismo clique si y sólo si $d(P_i, P_j) < r_i + r_j$ con $r_i = d(P_i, Q)$, $r_j = d(P_j, Q)$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el centro de servicio (Q) está situado en el origen de coordenadas.

- Supongamos que $P_i \in I$ y $P_j \in III$, entonces podemos poner $P_i = (a, b)$ con $a, b > 0$ y $P_j = (-c, -d)$ con $c, d > 0$. Se tiene entonces que:

  $$d(P_i, Q) = |a| + |b| = a + b = r_i \quad ; d(P_j, Q) = |-c| + |-d| = c + d = r_j.$$

  Luego

  $$d(P_i, P_j) = |a + c| + |b + d| = a + c + b + d = (a + b) + (c + d) = r_i + r_j$$

  y por tanto P_i y P_j no están en el mismo clique.

- De forma análoga se hace para el caso en que $P_i \in II$ y $P_j \in IV$

La siguiente proposición nos generaliza la anterior para el caso en el que hay más de un centro de servicio.

Proposición 3.4 : *Sean m centros de servicio $\{Q_k\}_{k=1}^m$. Consideremos dos puntos de demanda P_i y P_j tales que $d(P_i, Q^i) = r_i = \min_{Q_k}\{d(P_i, Q_k)\}$ y $d(P_j, Q^j) = r_j = \min_{Q_k}\{d(P_j, Q_k)\}$. Entonces si P_i y P_j pertenecen a cuadrantes no adyacentes , respecto a Q^i, entonces P_i y P_j no pertenecen al mismo clique.*

<u>demostración</u>

Si $Q^i = Q^j$ entonces sirve la demostración de la proposición anterior.

Si $Q^i \neq Q^j$ entonces $d(P_i, Q^i) + d(Q^i, P_j) = d(P_i, P_j)$ ya que P_i y P_j están en cuadrantes no adyacentes.

Ahora:

$$r_i + r_j = d(P_i, Q^i) + d(Q^j, P_j) \leq d(P_i, Q^i) + d(Q^i, P_j) = d(P_i, P_j)$$

ya que

$$d(Q^j, P_j) \leq d(Q^i, P_j).$$

Por lo tanto $d(P_i, P_j) \geq r_i + r_j$, por lo que no pertenecen al mismo clique.

Corolario 3.1 : *Un clique sólo puede estar formado por puntos situados en cuadrantes adyacentes.*

Corolario 3.2 : *Los posibles cliques que se pueden formar son puntos de los cuadrantes* $(I \ y \ II)$, $(I \ y \ IV)(II \ y \ III)$,$(III \ y \ IV)$.

Proposición 3.5 : *Sea* D *un clique , entonces* S_D *está incluido en un cuadrante formado por las dos bisectrices.*

<u>demostración</u> Sólo es necesario probarlo para un par de puntos $P_i \in I$ y un $P_j \in II$.
Sea entonces un punto $P_i \in I$, entonces el rombo T_i , su frontera pasa por Q y tiene un lado en la segunda bisectriz. Análogamente si $P_j \in II$, entonces T_j es un cuadrado cuya frontera pasa por Q y tiene un lado en la primera bisectriz. Luego $T_i \bigcap T_j$ pertenece al cuadrante formado por la primera y segunda bisectriz con $y \geq 0$.

Corolario 3.3 : *Hay un clique maximal en cada cuadrante formado por las bisectrices y cada clique está formado por los puntos* P_i *de los cuadrantes adyacentes cortando los correspondientes* T_i *a dicho cuadrante.*

Corolario 3.4 : *Si hay una facilidad* Q , *entonces el número de cliques está acotado por* 4.

Luego si el número de facilidades es 1 tendremos que las posibles regiones $\{S_i\}_{i=1}^4$ asociadas a los cuatro cliques maximales son las siguientes:

$$S_1 = \bigcap_{P_i \in (I \bigcup II)} T_i \quad S_2 = \bigcap_{P_i \in (II \bigcup III)} T_i \quad S_3 = \bigcap_{P_i \in (III \bigcup IV)} T_i \quad S_4 = \bigcap_{P_i \in (I \bigcup IV)} T_i$$

Sean

$$P_i = (a, 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_4 \subset T_i & si \quad a > 0 \\ S_2 \subset T_i & si \quad a < 0 \end{cases}$$

$$P_i = (0, b) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 \subset T_i & si \quad b > 0 \\ S_3 \subset T_i & si \quad b < 0 \end{cases}$$

Si consideramos el interior de los cuadrantes tendremos entonces:

- Si $P_i \in I^o \bigcup II^o \quad \Rightarrow \quad S_1 \subset T_i$
- Si $P_i \in II^o \bigcup III^o \quad \Rightarrow \quad S_2 \subset T_i$
- Si $P_i \in III^o \bigcup IV^o \quad \Rightarrow \quad S_3 \subset T_i$
- Si $P_i \in I^o \bigcup IV^o \quad \Rightarrow \quad S_4 \subset T_i$

Consecuencia 3.1 : *Sea* D_i *el clique que forma* S_i , *se tiene entonces:*

1. $D_1 = \{P_i / P_i \in I^o \bigcup II^o \quad ó \quad P_i = (0, b), b > 0\}$
2. $D_2 = \{P_i / P_i \in II^o \bigcup III^o \quad ó \quad P_i = (a, 0), a < 0\}$
3. $D_3 = \{P_i / P_i \in III^o \bigcup IV^o \quad ó \quad P_i = (0, b), b < 0\}$
4. $D_4 = \{P_i / P_i \in I^o \bigcup IV^o \quad ó \quad P_i = (a, 0), a > 0\}$

4 Obtención de las regiones asociadas a los cliques

1. *Sea S_1 el rectángulo de vértices $\{A, C, B, O\}$. Dichos vértices los obtenemos de la forma siguiente:*

   (a) *Calculamos* $\min_{P_i \in I}\{a_i + b_i\} = a_j + b_j$
   $\min_{P_i \in II}\{b_i\} = b_h$
   Sea $R_1 = \min\{a_j + b_j, b_h\}$. *Tomamos el punto* $A = (R_1, R_1)$ $R_1 > 0$

   (b) *Análogamente calculamos* $\min_{P_i \in II}\{b_i - a_i\} = b_h - a_h$
   $\min_{P_i \in II}\{b_i\} = b_j$
   Sea $R_2 = \min\{b_h - a_h, b_j\}$. *Tomamos el punto* $B = (-R_2, R_2)$ $R_2 > 0$

   (c) *Y el punto* $C = (R_1 - R_2, R_1 + R_2)$

2. *Sea S_2 el rectángulo de vértices $\{A, C, B, O\}$. Dichos vértices los obtenemos de la forma siguiente:*

   (a) *Calculamos* $\max_{P_i \in II}\{a_i - b_i\} = a_h - b_h$
   $\max_{P_i \in III}\{a_i\} = a_j$
   Sea $R_1 = \max\{a_h + b_h, a_j\}$. *Tomamos el punto* $A = (R_1, -R_1)$ $R_1 < 0$

   (b) *Análogamente calculamos* $\max_{P_i \in III}\{a_i + b_i\} = a_h + b_h$
   $\max_{P_i \in II}\{a_i\} = a_j$
   Sea $R_2 = \max\{a_h + b_h, a_j\}$. *Tomamos el punto* $B = (R_2, R_2)$ $R_2 < 0$

   (c) *Y el punto* $C = (R_1 + R_2, R_2 - R_1)$

3. *Sea S_3 el rectángulo de vértices $\{A, C, B, O\}$. Dichos vértices los obtenemos de la forma siguiente:*

   (a) *Calculamos* $\max_{P_i \in III}\{a_i + b_i\} = a_h + b_h$
   $\max_{P_i \in IV}\{b_i\} = b_j$
   Sea $R_1 = \max\{a_h + b_h, b_j\}$. *Tomamos el punto* $A = (R_1, R_1)$ $R_1 < 0$

   (b) *Análogamente calculamos* $\min_{P_i \in IV}\{a_i - b_i\} = a_h - b_h$
   $\max_{P_i \in III}\{b_i\} = b_j$
   Sea $R_2 = \min\{a_h - b_h, -b_j\}$. *Tomamos el punto* $B = (R_2, -R_2)$ $R_2 > 0$

   (c) *Y el punto* $C = (R_1 + R_2, R_1 - R_2)$

4. *Sea S_4 el rectángulo de vértices $\{A, C, B, O\}$. Dichos vértices los obtenemos de la forma siguiente:*

(a) *Calculamos* $\min_{P_i \in IV}\{a_i - b_i\} = a_h - b_h$
$\min_{P_i \in I}\{a_i\} = a_j$
Sea $R_1 = \min\{a_h - b_h, a_j\}$. *Tomamos el punto* $A = (R_1, -R_1)$ $R_1 > 0$

(b) *Análogamente calculamos* $\min_{P_i \in I}\{a_i + b_i\} = a_h + b_h$
$\min_{P_i \in IV}\{a_i\} = a_j$
Sea $R_2 = \min\{a_h + b_h, a_j\}$. *Tomamos el punto* $B = (R_2, R_2)$ $R_2 > 0$

(c) *Y el punto* $C = (R_1 - R_2, R_1 + R_2)$

Esto nos conduce a un algoritmo de o(nlogn) ya que primero hemos de encontrar el clique de peso máximo . Para ello sólo hemos de sumar los pesos de los puntos de demanda tomados de dos cuadrantes adyacentes. Hemos de tener en cuenta lo siguiente

- *Si* $P_i = (a, 0)$ $\;a > 0$, *entonces* $P_i \in I$.
- *Si* $P_i = (a, 0)$ $\;a < 0$, *entonces* $P_i \in III$.
- *Si* $P_i = (0, b)$ $\;b > 0$, *entonces* $P_i \in II$.
- *Si* $P_i = (0, b)$ $\;b < 0$, *entonces* $P_i \in IV$.

5 Algoritmo

1. *Hacemos* $i = 1$ $T_1 = 0$ $T_2 = 0$ $T_3 = 0$ $T_4 = 0$
2. *hacer mientras sea* $i \leq n$
   (a) *Si* $b_i > 0$ *entonces* $T_1 = T_1 + \omega[i]$
   de lo contrario $T_3 = T_3 + \omega[i]$
   (b) *Si* $a_i > 0$ *entonces* $T_4 = T_4 + \omega[i]$
   de lo contrario $T_2 = T_2 + \omega[i]$

   Hacer i=i+1;
3. *Sea* $T[j] = \max_{1 \leq i \leq 4}\{T[i]\}$. *La solución es el clique* j.
4. *Obtener la región* S_j *utilizando la sección* 4.

BIBLIOGRAFÍA

CARRAGHAN R.- PARDALOS P.N. (1.990). " An exact algorithm for the maximun clique Problem". Operations Research, 9, 375 - 382

CHRISTOFIDES N. (1.986). " Graph Theory and algorithmics approach". Academic Press. London.

DASARATHY B. - WHITE L.J. (1.980). "A maximin Location Problem". Operations Research, 28, 1.385 - 1400

DOBSON G. - KARMAKAR U. (1.987). "Competitive Location on a network" Operations Research, 35, 565 - 574

DREZNER Z. - WESOLOWSKY G.O. (1.980). " A maximin location problem whit maximin distance constraints". AIIE Transaction, 12, 249 - 252

HAKIMI S.L. (1.983). " On locating new facilities in a competitive environment". Eur. J. Opens. Res., 12, 29 - 35

HURTER A.P. - SCHAEFFER M.K. - WENDELL R.E. (1.975) " Solutions of constrained location problems". Management Science, 22, 51 - 56

HOTELLING H. (1.929). " Stability in Competition". Econ. J., 39, 41 - 57

KUHN H.W. (1.973) " A note on Fermat's problem". Mathematical Programming, 4, 98 - 107

MELACHRINOUDIS E. CULLINAE T.P. (1.986). "Locating on undesirable facility whit a maximin criterion".Eur. J. of Oper. Resarch, 24, 239 - 246

MUÑOZ J.P. (1.989). " Competitive location of two new facilities whit rectilinear distances"

TSUKIYAMA S.- IDE M. - ARIYOSHI H.- SHIRAKAWA I. (1.972). " A new algorihm for generating all maximal independen sets". Siam J. Compt., 6 , 505 - 517