APLICACION DE UN ALGORITMO GENETICO A UN PROBLEMA DE LOCALIZACION-PRODUCCION

Velasco Morente F.
Hinojosa Ramos M.A.

Dpto. Economía Aplicada
Universidad de Sevilla

Abstract: En los problemas de localización-producción, resulta difícil encontrar una solución óptima pues la función no es convexa. Nosotros planteamos para este caso particular la utilización de un algoritmo genético que ya ha sido probado para otros problemas con funciones no convexas.

1. INTRODUCCIÓN

Podemos pensar en los modelos de Localización-producción, como casos mas generales de los modelos de localización. Así el modelo de Steiner-Weber es resuelto determinísticamente por Weiszfeld (1.937), aunque Fermat propuso dicho problema bajo un punto de vista geométrico para tres puntos en los que suponía que estos eran de peso unitario. El problema realmente fue resuelto, como hemos dicho antes, por Weiszfeld, Khun-Kuenne (1.962) y Cooper (1.963). Moses (1.985) integra la teoría de la localización con la teoría económica de la producción atrayendo la atención de los economistas y de los geógrafos. El problema se puede plantear como sigue:

Supongamos que una firma desea abrir una nueva planta que produce un output a partir de n inputs. Los inputs son suministrados desde n localizaciones distintas $\{A_i\}^n_{i=1}$ y el output es enviado al mercado A_0. Para el problema de Localización-producción, (ver Hurter (1.989)) si el espacio es una línea y los costes de transporte son cóncavos, la localización óptima está en un extremo del segmento, para el caso del plano, Wendell y Hurter (1.973) prueban que la localización de las plantas ha de estar en la envolvente convexa del conjunto de puntos $\{A_i\}^n_{i=0}$ y Martinich (1.990) demuestra, que si dos inputs al menos tienen nivel positivo y sus correspondientes localizaciones no son colineales con el mercado del output, entonces ningún punto intermedio de un lado de la envolvente puede ser óptimo.

En teoría de localización-producción la optimización del problema se suele hacer procediendo en dos pasos:

Primero se optimiza la función de coste respecto a los inputs; hecho ésto, sustituimos dichos valores para formar una nueva función que depende sólo de las variables de localización. Segundo, se optimiza la función de coste respecto a dichas variables. Con ésto no se puede asegurar que el óptimo es global, ya que no tenemos garantizada la convexidad ó concavidad de la función objetivo.

Nosotros tratamos de resolver nuestro problema utilizando un algoritmo genético que intenta encontrar un óptimo de la función, que en principio también es local. Los algoritmos genéticos, como veremos más adelante, trabajan con funciones de todo tipo, buscando un buen óptimo local.

2 MODELO DE LOCALIZACION-PRODUCCION CON N-INPUTS

Consideremos una firma que produce un output usando n imputs $\{Z_i\}^n_{i=1}$ de acuerdo a la función de producción F, es decir $Z_0 = F(z_1,z_2,...z_n)$. El precio del output en el mercado es p_0 y del input i en su origen es p_i. Los orígenes de los inputs están localizados en los puntos $\{Ai=(a_i,b_i)^n_{i=1}$ y el output es enviado al mercado que está localizado en el punto $A0 = (a_0, b_0)$. Asumimos que el coste por unidad de input i transportado desde (a_i,b_i) a la localización de la planta es:

$c_i(x,y) = r_i d_i(x, y)$, donde $d_i(x,y) = [(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]^{1/2}$, con $r_i \geq 0$, constante, y es el coste de transporte unitario de cada z_i por unidad de distancia.

Análogamente $c_0(x,y)$ es el coste por unidad de output enviado desde la planta al punto $A_0 = (a_0,b_0)$, es decir $c_0(x,y)= r_0 d_0(x,y)$. Supongamos que necesitamos que la firma produzca y envíe un nivel fijo de output $\overline{z}_0$. Entonces el problema de localización- producción de la firma se escribe en la forma:

$$\max_{z_i,x,y} C = [p_0 - r_0 d_0(x,y)]z_0 - \sum_{i=1}^{n}[p_i + r_i d_i(x,y)]z_i$$

$$\text{sujeto a } \bar{z}_0 = F(z)$$

$$z_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si estamos maximizando los beneficios obtenidos o bien de la forma:

$$\min_{z_i,x,y} C = r_o d_0(x,y) z_0 + \sum_{i=1}^{n}[p_i + r_i d_i(x,y)]z_i$$

$$\text{sujeto a} \bar{z}_0 = F(z)$$

$$z_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si estamos minimizando costes y suponemos que p_0 es una constante fija.

3 SOLUCION CLASICA AL PROBLEMA

Kusumoto (1.984) trata este problema con tres puntos en el que el mercado del output y la ubicación del primer punto están situados en el mismo lugar. El encuentra una solución geométrica a este problema, asumiendo algunas condiciones tales como que los costes de transporte marginal son decrecientes.

Martinich-Hurter (1.990) prueban que la localización óptima o bien pertenece al interior de S_c o es un vértice de S_c donde S_c es la envolvente convexa de $\{Ai\}^n_{i=0}$.

La solución clásica se plantea en los siguientes términos:

Sea

$$\Phi = r_0 d_0 \bar{z}_0 + \sum_{i=1}^{n} [p_i + r_i d_i(x,y)] z_i + \lambda[\bar{z}_0 - F(z)]$$

la ecuación lagrangiana del problema (2), también podíamos haber puesto la del problema (1).

Se plantean entonces los dos pasos siguientes:

1. Dado el punto (x,y) y z_0 sean $z_i(x,y,z_0)$, $1 \leq i \leq n$, los niveles óptimos de input i. Notemos que al menos en teoría podemos obtener estos valores.

Sean $p_i = p_i + r_i d_i$, $1 \leq i \leq n$. Entonces sustituidos los valores z_i en Φ, pasamos al paso siguiente:

2. Obtenemos los valores (x,y) diferenciando Φ, respecto a dichas variables.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= r_o \bar{z}_0 d_0^x + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} r_i z_i d_i^x = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= r_o \bar{z}_0 d_0^x + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} r_i z_i d_i^y = 0
\end{aligned}$$

$$\text{donde } d_i^x = \frac{x - a_i}{d_i(x,y)} \quad \text{y} \quad d_i^y = \frac{y - b_i}{d_i(x,y)}$$

El primer y tercer término se les denomina el impulsor Weberiano y al segundo término impulsor de Moses-Predohl que es nulo como se puede ven en Shieh (1.983) y Kelley-Shieh (1.989). Luego nos queda por resolver:

$$\begin{aligned}
r_0 \bar{z}_0 d_0^x + \sum_{i=1}^{n} r_i z_i d_i^x &= 0 \\
r_0 \bar{z}_0 d_0^y + \sum_{i=1}^{n} r_i z_i d_i^y &= 0
\end{aligned}$$

4 METODOS DE RESOLUCION

Algoritmo de Weiszfeld:

Suponiendo conocidos los valores z_i el algoritmo Weiszfeld (1.937) desarrollado posteriormente por Kuhn-Kuenne (1.962) y Cooper (1.963) resuelve las ecuaciones (6) y (7). Este algoritmo consiste en aplicar el algoritmo iterado siguiente:

$$x_{k+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i \frac{a_i}{d(P_k, A_i)}}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i \frac{1}{d(P_k, A_i)}}$$

$$y_{k+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i \frac{b_i}{d(P_k, A_i)}}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i \frac{1}{d(P_k, A_i)}}$$

donde $w_i = r_i z_i$ con $0 \leq i \leq n$

Búsqueda en una red:

Debido a que la función de los problemas (1) o (2) no es convexa en general, los óptimos que se obtengan no serán globales. Nykamp-Paelink (1.973) proponen un procedimiento de búsqueda numérico. Para ello se deben de dar algunas condiciones:

1. Una solución óptima (que no sea punto de demanda) debe satisfacer las ecuaciones (6) y (7).

2. Los puntos $\{(a_i,b_i)\}_{n=1}^{n}$ pueden ser óptimos, por lo que las ecuaciones (6) y (7) no pueden cumplirse.

algoritmo

(a) Construir una red rectangular sobre el conjunto factible.

(b) En cada punto (x_i,y_i) de la red se resuelve el problema usando los precios derivados en cada punto. Obtenemos el valor C y las ecuaciones (6) y (7) que naturalmente no serán nulas en cada punto.

(c) Se estudia el conjunto de los costes totales C para identificar subáreas con costes totales relativamente bajos. Construimos en cada subárea una red más fina y se repite el paso 2). Se utilizan las ecuaciones (6) y (7) para localizar las subáreas.

(d) Se repiten los pasos 2) y 3) hasta que los refinamientos en las redes no produzcan reduciones significativas en el coste total C.

Algoritmo iterado de Goldman

Este algoritmo propuesto por Goldman (1.974) consiste en ejecutar el algoritmo de Weiszfeld con $w_i = r_i z_i (x,y)$. Así, en cada iteración k, se resuelve el subproblema en el punto (x^k, y^k) para obtener los valores z_i (x^k, y^k), y a continuación se aplica el algoritmo de Weiszfeld, garantizando un mínimo local.

Algoritmos genéticos

1. Son algoritmos de búsqueda basados en la mecánica de la selección natural y la genética natural.

2. En cada generación se obtienen un conjunto de criaturas nuevas (tiras) usando trozos de bits de los antepasados más aptos.

3. Explotan eficientemente información histórica para especular sobre puntos de búsqueda que tengan la mejor ejecución esperada.

4. La primera monografía sobre esta materia la realizó Holland (1.975).

Metas de su investigación

1. Compendiar y explicar rigurosamente los procesos de adaptación de los sistemas naturales.

2. Obtener sistemas artificiales de software que conserven los mecanismos importantes de los sistemas naturales.

3. Teórica y empíricamente los algoritmos genéticos han probado su robustez en espacios complejos.

Técnicas aleatorias

- Usan la elección aleatoria como una herramienta para guiar la búsqueda.

Diferencia de los algoritmos genéticos con los métodos tradicionales

(a) G.A.S. trabajan con una codificación del conjunto paramétrico, no con los mismos parámetros.

(b) G.A.S.investigan sobre una población de puntos, no sobre un único punto.

(c) G.A.S usan una información (función objetivo), no las derivadas...

(d) G.A.S. usan reglas de transición probabilísticas, no determinísticas.

5 EJEMPLOS

Consideramos 2 ejemplos del libro de Hurter (1.989) y comparamos los resultados encontrados por él con los métodos descritos anteriormente con el que nosotros proponemos del algoritmo genético simple.

ejemplo 1:

Sea $p_0 = 100$, $p_1=p_2= 20$, $r_0=r_1=r_2=1$ y el valor de $\bar{z}_0=100$ donde la función de producción es $z_0 = F(z_1,z_2) = z_1^{4/10} \times z_2^{6/10}$ y los puntos de demanda $(a_0,b_0) = (0,0)$ $(a_1,b_1) = (10,0)$ $(a_2,b_2) = (0,10)$.
Los resultados obtenidos por Hurter son : $(x^*,y^*) = (1.547,3.352)$ $z^*_1 = 74.68$ $z^*_2=121.5$ y el valor de $C^*=4199.16$.

En la utilización del algoritmo genético hemos encontrado los siguientes resultados:

i	x	y	z_1	C^*
1	1.544	3.298	75.000	4199.135
2	1.515	3.160	75.073	4198.970
3	1.515	3.160	75.037	4198.162
4	1.515	2.895	75.855	4198.071
5	1.838	3.184	75.000	4197.259
6	1.838	3.120	75.000	4197.029

ejemplo 2:

En este ejemplo hemos minimizado los costes según el problema (2). Los datos que hemos utilizado son los siguientes:

Sea $p_1=p_2=20$, $r_0=2$, $r_1=r_2=1$ y el valor de $z_0=100$ donde la función de producción es $z0 = F(z_1,z_2)=z_1^{3/10} \times z_2^{6/10}$ y los puntos de demanda son los del ejemplo anterior.
Los resultados obtenidos por Hurter son: $(x^*,y^*)=(0.93,2.43)$ $z^*_1=100.79$ $z^*_2 = 214.45$ y el valor de $C^*=9407.15$

En la utilización del algoritmo genético hemos encontrado los siguientes resultados:

i	x	y	z_1	C^*
1	0.988	2.686	99.568	9411.780
2	0.940	2.696	99.568	9411.794
3	0.954	2.691	99.189	9411.885
4	0.954	2.694	99.174	9411.897
5	0.954	2.700	99.177	9411.910
6	0.940	2.696	99.177	9411.913

A la vista de estos datos, pudimos comprobar que había diferencia en los resultados de Hurter con los nuestros, diferencia que se deben a errores de redondeo en el cálculo realizado por él. Esto se puede ver al sustituir los valores de z_1 y z_2 en la función de producción y probar que sus resultados no la verifican, cosa que si sucede con nuestros datos.

Una vez detectado este primer punto de coste mínimo, es posible con el algoritmo genético obtener otros puntos con mejor función objetivo, sin más que aplicar dicho algoritmo a un recinto acotado por los datos obtenidos.

Los nuevos datos después de tres iteraciones han sido:

i	x	y	z_1	C^*
1	0.928234490	2.431103898	100.8313556	9411.247507
2	0.928234490	2.430869523	100.8313556	9411.247511
3	0.928234490	2.430870438	100.8316416	9411.247511
4	0.928468636	2.434737172	100.8317145	9411.247593
5	0.928470067	2.434855304	100.8317188	9411.247599
6	0.928468636	2.434855733	100.8317188	9411.247599

Al tomar los datos de Hurter $(x^*,y^*) = (0.93,2.43)$, $z^*_1=100.79$ $z_2=214.45$ obtenemos un valor de $C^* =9407.174$. Ahora bien $z_0 \neq z_1^{0.3} z_2^{0.6}$. para el valor de $z_2 =214.59748$ si se cumple que $z_0 =z_1^{0.3} z_2^{0.6}$, y para este valor, se tiene que $C^*=9411.2483$.

Para los valores del algoritmo genético, hemos encontrado los valores de (6) y (7) que están en la tabla siguiente:

i	ecuación (6)	ecuación (7)	norma
1	0.061992954	−0.013780059	0.063506034
2	0.066570178	−0.018517615	0.069097689
3	0.066239015	−0.018123074	0.068673524
4	0.013128511	0.055498248	0.057029934
5	0.010961439	0.057859422	0.058895539
6	0.010816488	0.057895924	0.058897661

6 CONCLUSIONES

Como se puede ver por los resultados, hemos de resaltar que no sólamente hemos obtendio un óptimo local, sino que el algoritmo nos ofrece varios puntos que dan resultados bastante cercanos entre si, en cuanto a la función objetivo, si bien hemos de destacar que no sucede lo mismo con los puntos críticos. Hemos de tener en cuenta que estamos buscando un lugar donde colocar una fábrica que abastezca un mercado y al que se le debe de surtir con los inputs z_1; también hemos de considerar que no todas las ubicaciones óptimas obtenidas pueden ser posibles debido a múltiples factores, tales como que el punto esté ocupado, el valor del terreno, infraestructuras adecuadas, mano de obra capacitada, centros de población próximos, etc, que podrían aconsejar otras ubicaciones alternativas. De esta manera nos parece acertado el dar al decisor varias opciones entre las que pueda elegir aunque no tenga el mismo beneficio.

Por otro lado, Hurter y Wendell resuelven problemas con pocos inputs, debido a la dificultad que supone el primer paso de la sección (3). Sin embargo el algoritmo genético permite tomar n inputs y buscar directamente el óptimo, tomando en consideración las n+2 variables del problema (1) ó (2), teniendo que hay una relación de ligadura entre los inputs dado por la función de producción. Este algoritmo también, como hemos comprobado, nos permite dar otras soluciones que en general no tienen porqué estar cercanas, ya que el algoritmo genético explora regiones del recinto en el que estudiamos el problema, que otros algoritmos (gradiente, D-F-P, F-R...) pueden desechar, pues buscan un sólo óptimo local.

BIBLIOGRAFIA

COOPER L. (1.963). *"Location-Allocation Problems"*. Operations Research, 11, 331-343

DAVID E. GOLDBERG (1.989). *"Genetic Algorithm in search, Optimization, and Machine Learning"*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

GOLDMAN A.J. (1.974). *"Fixed Point Solution of Plant Input/Location Problems"* Res. Nat. Bur.Stand, 78B, 79-94

HURTER A.P.-MARTINICH J.S. (1.989). *"Facility Location and the Theory of Production"*. Kluwer Academic Publishers

KELLEY P.-SHIEH Y.N. (1.988). *"The Moses-Predohl Pull and the Location Decision of the Firm"*. J.Reg.Sc.,28, 121-126

KUHN H. W.-KUENNE R.E. (1.962). *"An efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics"*. Journal of Regional Science, 4 21-33.

KUSUMOTO S.L. (1.984).*"On a Foundation of the Economic theory of Location-Transport Distance vs. Technological Substitucion"*. J.Reg.Sc., 24, 249-270

MARTINICH J.S.-HURTER A.P. (1.990) *"A Simplification and Generalization of the Exclusion theorem: A technical Note"*. J. Reg. Sc. 30, 421-426 Quaterly Journal Of Economics., 72, 259-272

NIJKAMP P.-PAELINK J. (1.973).*"A Solution Method for Neo-Clasical Location Problems"*. Reg.Sc.Urban Econ., 3, 383-410

SHIEH Y.N.. (1.983).*"The Moses-Predohl Pull and the Neoclasical Location Theory: An Alternative Approach"*. Reg. Sc. and Urban Econ., 13, 517-524

WEISZFELD E. (1.973). *"Sur le point pour le quel la somme des distances de n points donnes est minimum"*. Tohoku Math, 43, 355-386

WENDELL R.E.-HURTER A.P. (1.973). *" Location Theory, Dominance and Convexity"* Oper. Res. 21, 314-319